Einleitung

in die

Analysis des Unendlichen.

Von

Leonhard Euler.

Erster Teil.

Ins Deutsche übertragen

von

H. Maser.

Berlin.
Verlag von Julius Springer.
1885.

Vorwort des Uebersetzers.

Meisterwerke üben ihren Einfluss auf die Fortbildung der Wissenschaft nicht allein durch die in ihnen niedergelegten Resultate des forschenden Geistes, es lebt in ihnen eine schöpferische Kraft, die, nie ersterbend, immer neue Keime weckt und fort und fort bis in die späte Ferne hinaus edle Früchte zeitigt. Derartige Geistesproducte, wenn sie selten werden, in ihrer ganzen Fülle ohne Unterlass von Neuem weiteren Kreisen zugänglich zu machen, halte ich für kein nutzloses Beginnen. Eben dem Zwecke soll auch die Herausgabe der vorliegenden, gänzlich neuen Uebersetzung des ersten Teils von Euler's *„Introductio in Analysin infinitorum"* dienen. Dieses durch den Reichtum seines Inhalts, durch die Feinheit der Methoden und durch die ausserordentliche Klarheit und Präcision der Darstellung ausgezeichnete, in arithmetischer Weise aufgebaute Werk, welches weite Perspectiven eröffnet, ist heutzutage, trotzdem oder vielleicht gerade weil fast alle neueren Lehrbücher aus ihm als aus einer nie versiegenden Quelle schöpfen, schon halb in Vergessenheit geraten, und dies ist um so mehr zu bedauern, als sich dem Anscheine nach die Erkenntnis geltend macht, dass eine schärfere Bestimmung der Begriffe auch eine weitere Entwicklung der Analysis mit Euler'schen Reminiscenzen auf rein arithmetischer Grundlage ermöglichen dürfte.

Bei dieser Uebersetzung habe ich mich nicht allzu ängstlich an den Buchstaben gebunden, gleichwohl bin ich bestrebt gewesen, in den Geist des Originals einzudringen und bei getreuer Wiedergabe des Sinnes auch die Einfachheit und Klarheit seiner Sprache zum Ausdruck zu bringen. Ja es ist vielleicht die Uebersichtlichkeit über das Ganze und das Verständniss des Einzelnen noch dadurch erleichtert worden, dass ich in jedem Paragraphen die den Inhalt charakterisirenden Worte durch den Druck hervorgehoben habe. An dem Euler'schen Werke irgendwelche Kritik zu üben, lag indessen nicht in der Absicht, weshalb erläuternde oder ergänzende Anmerkungen selbst an den Stellen nicht hinzugefügt wurden, an welchen dasselbe vom heutigen Standpunkte der Wissenschaft aus Lücken aufweist. Die zahlreichen Druckfehler, welche sich im Originale vorfinden, habe ich, sobald sie sich nur als solche ausgewiesen, verbessert, und dürften die Rechnungen und Formeln der Uebersetzung, zumal auch auf die Durchsicht des Druckes die grösste Sorgfalt verwendet worden ist, als correct zu bezeichnen sein.

Berlin, October 1884.

H. Maser.

Vorwort des Verfassers.

Der grösste Teil der Schwierigkeiten, mit denen gewöhnlich die Jünger der mathematischen Wissenschaft bei der Erlernung der Analysis des Unendlichen zu kämpfen haben, hat nach meiner Erfahrung darin seinen Grund, dass man sich bereits an jene höhere Kunst heranwagt, bevor man noch recht die niedere Algebra sich angeeignet hat. Dies hat zur Folge, nicht nur, dass man gewissermassen an der Schwelle stehen bleibt, sondern auch, dass sich von dem Begriffe des Unendlichen ganz verkehrte Ansichten herausbilden. Nun setzt zwar die Analysis des Unendlichen nicht gerade eine vollkommene Kenntnis der niederen Algebra und aller ihrer bisher gefundenen Kunstgriffe voraus; indessen giebt es in letzterer doch so manche Fragen, deren gründliche Beantwortung den Anfänger auf jene höhere Wissenschaft vorzubereiten geeignet ist, und die trotzdem in den gewöhnlicheren Lehrbüchern der Algebra entweder ganz und gar übergangen oder doch nur obenhin behandelt werden. Was ich in dem vorliegenden Werke zusammengestellt habe, dürfte dem erwähnten Mangel, wie ich glaube, vollständig abzuhelfen im Stande sein. Denn ich habe nicht nur das, was die Analysis des Unendlichen durchaus voraussetzen muss, zwar weitläufiger aber strenger, als dies gewöhnlich geschieht, zu begründen gesucht, sondern auch viele Fragen erledigt, durch welche der Leser mit dem Begriff des Unendlichen allmählich und, ohne es selbst zu merken, vertraut wird. Ueberdies habe ich, um die grosse Uebereinstimmung der beiden Wege leichter kenntlich zu machen, mehrere Gegenstände, die man sonst in der Analysis des Unendlichen zu behandeln pflegt, nach den Regeln untersucht, welche die niedere Algebra an die Hand giebt.

Ich habe dieses Werk in zwei Teile geteilt und in dem ersten alles das zusammengefasst, was zur reinen Analysis gehört, in dem zweiten dagegen alles Wissenswerte aus der Geometrie mitgeteilt, da man die Analysis des Unendlichen gewöhnlich so vorträgt, dass man zugleich die Anwendung derselben auf die Geometrie zeigt.

In beiden Teilen habe ich jedoch die ersten Anfangsgründe unberücksichtigt gelassen und nur das entwickeln zu müssen geglaubt, was man anderwärts entweder gar nicht oder in nicht so bequemer Weise oder endlich auf anderm Wege abgeleitet findet.

Während also die gesamte Analysis des Unendlichen von den veränderlichen Zahlgrössen und deren Functionen handelt, nehme ich im ersten Teile hauptsächlich die Functionen zum Gegenstande einer ausführlicheren Untersuchung und zeige, wie man dieselben umformen, zerlegen und in unendliche Reihen entwickeln kann. Ich zähle mehrere Arten von Functionen auf, die in der höheren Analysis eine besonders wichtige Rolle spielen, und unterscheide da zuerst die algebraischen und transcendenten Functionen, von denen jene nur mittelst der in der niederen Algebra gebräuchlichen Rechnungsarten aus den veränderlichen Zahlgrössen gebildet werden, diese aber entweder mittelst der andern Rechnungsarten entstehen, oder nur durch unendlichoftmalige Wiederholung der algebraischen Operationen sich darstellen lassen. Die algebraischen Functionen zerfallen ihrerseits wieder in rationale und irrationale. Erstere lassen sich, was für die Integralrechnung von ganz besonderer Bedeutung ist, in Factoren und in Partialbrüche zerlegen; letztere können mitunter durch zweckmässige Substitutionen auf eine rationale Form gebracht werden. Die Entwicklung in unendliche Reihen aber ist für beide Arten von Functionen in gleicher Weise möglich und kann auch häufig auf transcendente Functionen mit grossem Vorteil angewandt werden. Ja es hat bekanntlich gerade durch die Lehre von den unendlichen Reihen die höhere Analysis sehr bedeutende Erweiterungen erfahren. In einigen weiteren Capiteln habe ich die Eigenschaften mehrerer unendlichen Reihen und deren Summen ermittelt, was bei vielen derselben ohne Hülfe der Analysis des Unendlichen geradezu unmöglich sein dürfte. Hierzu gehören z. B. die Reihen, deren Summen sich durch Logarithmen oder durch Kreisbogen ausdrücken lassen. Diese Grössen werden gewöhnlich, da sie transcendent sind, nämlich aus der Quadratur der Hyperbel und des Kreises erhalten werden, erst in der Analysis des Unendlichen behandelt. Indessen erhalte ich, indem ich von den Potenzen zu den Exponentialgrössen, welches ja nur Potenzen mit veränderlichen Exponenten sind, fortschreite, den fruchtbaren Begriff der Logarithmen in der natürlichsten Weise durch Umkehrung der Exponentialgrössen. Auf diesem Wege ergiebt sich nicht allein der ausserordentliche Nutzen

der Logarithmen ganz von selbst, sondern man erhält so zu gleicher Zeit sämtliche unendliche Reihen, durch die man diese Grössen gewöhnlich darstellt. Ebenso leicht folgt daraus ein Verfahren, logarithmische Tafeln anzufertigen. In analoger Weise betrachte ich auch die Kreisbogen; denn obwohl diese Art von Zahlgrössen von den Logarithmen sehr wesentlich verschieden sind, so stehen sie andererseits mit denselben wieder in so engem Zusammenhange, dass die einen, wenn sie imaginär werden, in die andern übergehen. Nach einigen Wiederholungen aus der Trigonometrie, die Darstellung der Sinus und Cosinus vielfacher Bogen betreffend, drücke ich mittelst des Sinus und Cosinus eines beliebigen Bogens den Sinus und Cosinus eines sehr kleinen und gleichsam verschwindenden Bogens aus und komme gerade dadurch zu unendlichen Reihen. Da nämlich der Sinus eines verschwindenden Bogens gleich diesem Bogen, der Cosinus dagegen gleich dem Halbmesser des Kreises ist, so kann man hiernach jeden beliebigen Bogen ebenso wie seinen Sinus und Cosinus mittelst unendlicher Reihen darstellen. Auf diese Weise erhalte ich so mannigfaltige Ausdrücke in endlicher und unendlicher Form für diese Art von Grössen, dass man zur Erforschung ihrer eigentlichen Natur die Infinitesimalrechnung ferner nicht mehr nötig hat. Ebenso nun wie die Logarithmen ein eigentümliches Rechnungsverfahren erheischen, welches in der gesamten Analysis in ausgedehntester Weise zur Anwendung kommt, so habe ich auch für die Kreisfunctionen ein bestimmtes Rechnungsverfahren angegeben, mittelst dessen dieselben bei Rechnungen ebenso bequem wie die Logarithmen und selbst wie die algebraischen Grössen angewendet werden können. Welcher Vorteil daraus für die Erledigung der schwierigsten Untersuchungen erwächst, lassen nicht allein mehrere Capitel dieses Buches deutlich erkennen, sondern wir könnten aus der Analysis des Unendlichen noch sehr viele Beispiele dafür anführen, wenn dieselben nicht schon hinreichend bekannt wären und von Tag zu Tag immer zahlreicher würden. Ein vorzügliches Hülfsmittel gewährt diese Erfindung aber bei der Zerlegung der gebrochenen Functionen in reelle Factoren. Da dies in der Integralrechnung ein nicht zu umgehendes Geschäft ist, so habe ich mich darüber etwas ausführlicher ausgelassen. Sodann untersuche ich die aus der Entwicklung solcher Functionen entspringenden unendlichen Reihen, welche unter dem Namen der rekurrenten Reihen bekannt sind, genauer und finde dabei nicht nur ihre Summen, sondern auch die allgemeinen Glieder und andere bemerkenswerte Eigenschaften derselben. So wie nun hierzu die Zerlegung in Factoren die Veranlassung gab, zeige ich nun auch umgekehrt, wie man die Producte aus mehreren, ja aus unendlich vielen Factoren in unendliche Reihen entwickeln könne. Diese Untersuchung bahnt nicht nur den Weg zur Entdeckung unzählig vieler unendlicher Reihen, sondern man findet auch, da man auf diese Weise eine Reihe in ein unendliches Product verwandeln konnte, sehr bequeme Ausdrücke, um die Logarithmen der Sinus, Cosinus und Tangenten auf die leichteste Weise numerisch zu berechnen. Ausserdem aber leite ich aus derselben Quelle die Lösung vieler, die Zerlegung der Zahlen in Teile betreffenden Aufgaben her, die ohne dieses Hülfsmittel wohl die Kräfte der Analysis übersteigen dürften.

Dieser überreiche Stoff hätte ausgereicht, um mehrere Bände damit anzufüllen; ich habe indessen Alles so kurz und bündig vorgetragen, dass zwar die eigentliche Grundlage desselben überall ganz klar hervortritt, dass aber auch dem Fleisse der Leser manches zur weiteren Ausführung überlassen bleibt, wodurch sie ihre Kräfte üben und das Gebiet der Analysis erweitern können. Im Uebrigen glaube ich sagen zu dürfen, dass dieses Buch nicht allein manches vollständig Neue enthält, sondern dass es auch die Quellen aufdeckt, aus denen man noch sehr viele merkwürdige Entdeckungen wird ableiten können.

Denselben Weg habe ich in dem zweiten Teile verfolgt, in welchem ich Alles, was man gewöhnlich zur höheren Geometrie rechnet, behandelt habe. Bevor ich jedoch von den Kegelschnitten, die sonst an dieser Stelle fast allein in Betracht gezogen werden, handle, gebe ich die Theorie der krummen Linien überhaupt, so dass man dieselben dann mit Vorteil bei der Erforschung der Natur irgend einer besonderen krummen Linie verwenden kann. Dazu brauche ich kein anderes Hülfsmittel, als die Gleichung, durch welche sich eine jede krumme Linie darstellen lässt, indem ich zeige, wie man aus dieser sowohl die Gestalt als die vorzüglichsten Eigenschaften derselben ableiten kann. Dies glaubte ich hauptsächlich an den Kegelschnitten erläutern zu müssen, da man dieselben früher entweder auf rein geometrischem Wege, oder, wenn analytisch, doch in sehr unvollkommener und wenig naturgemässer Weise behandelt hat. Aus der allgemeinen Gleichung für die Linien zweiter Ordnung entwickle ich zunächst deren allgemeine Eigenschaften und teile sie darauf mit Rücksicht darauf, ob sie ins Unendliche fortlaufende Zweige haben oder ganz im Endlichen liegen, in Klassen oder Arten ein. Im ersten Falle muss man wieder beachten, wie viele Zweige ins Unendliche gehen und von welcher Beschaffenheit die einzelnen Zweige sind, ob diese gerade Linien als Asymptoten haben oder nicht. Auf diese Weise erhalte ich die drei gewöhnlichen Arten der Kegelschnitte, nämlich die Ellipse, die ganz im Endlichen verläuft, die Hyperbel, welche vier ins Unendliche sich erstreckende und, zwei geraden Linien asymptotisch sich nähernde, Zweige besitzt, und die Parabel, die nur zwei ins Unendliche fortgehende Zweige, aber keine Asymptoten hat. In ähnlicher Weise untersuche ich auch die Kurven dritter Ordnung und teile dieselben nach Entwicklung ihrer allgemeinen Eigenschaften in sechzehn Arten ein, indem ich hierauf die von Newton aufgestellten 72 Arten sämtlich zurückführe. Den Weg, der hierzu führt, habe ich so deutlich beschrieben, dass man die Einteilung der Linien aller höheren Ordnungen in Arten sehr leicht wird vornehmen können. Ueberdies habe ich dies noch für die Linien der vierten Ordnung wirklich ausgeführt. Nach diesen auf die Ordnungen der Kurven bezüglichen Untersuchungen kehre ich zur Ermittlung noch anderer allgemeiner Beziehungen der Kurven zurück. Ich gebe also ein Verfahren an, um die Tangenten der Kurven, ihre Normalen, ja selbst die Krümmung, die man gewöhnlich nach dem Krümmungshalbmesser beurteilt, zu bestimmen. Obgleich dies heutzutage fast ausschliesslich mittelst Differentialrechnung geschieht, erläutere ich dies hier doch nur mit Hülfe der niederen Algebra, um dadurch den Uebergang von der Analysis des Endlichen zu der Analysis des Unendlichen zu erleichtern. Auch die Wendepunkte, die Spitzen, die Doppel- und vielfachen Punkte habe ich untersucht und den Weg angegeben, wie man dieses Alles aus den Gleichungen ohne alle Schwierigkeit finden kann. Indessen will ich nicht läugnen, dass sich diese Untersuchungen weit leichter mit Hülfe der Differentialrechnung führen lassen. Ferner berühre ich auch die Streitfrage der Spitzen zweiter Art und hoffe dieselbe so klargelegt zu haben, dass darüber kein Zweifel mehr bestehen kann. In einigen weiteren Capiteln zeige ich dann, wie man die krummen Linien aus gewissen gegebenen Eigenschaften bestimmen kann, und gebe zum Schluss die Lösung einiger Aufgaben, die sich auf die Teilung des Kreises beziehen. Dies ist Alles, was aus der Geometrie bei der Erlernung der Analysis des Unendlichen gute Dienste leisten kann. Als Anhang habe ich aber noch aus der Stereometrie die Theorie der Körper und deren Oberflächen analytisch entwickelt und gezeigt, wie sich die Beschaffenheit einer jeden Fläche durch eine Gleichung zwischen drei Veränderlichen ausdrücken lässt. Nachdem ich hierauf die Flächen ähnlich wie die Linien nach dem Grade ihrer Gleichungen in Ordnungen gebracht habe, beweise ich, dass die erste Ordnung nur allein die ebene Fläche enthält. Die Flächen der zweiten Ordnung aber teile ich mit Rücksicht darauf, ob sie ins Unendliche sich erstreckende Teile haben, in sechs Arten ein, und ebenso kann man auch die Einteilung der Flächen höherer Ordnungen vornehmen. Ferner betrachte ich auch die Durchschnitte zweier Flächen und zeige, wie dieselben, da sie im Allgemeinen Kurven sind, die nicht in einer einzigen Ebene liegen, sich durch Gleichungen darstellen lassen. Endlich bestimme ich noch die Lage der Berührungsebenen und der Normalen der Fläche.

Da Manches, was ich hier vorgetragen habe, schon von Andern behandelt worden ist, so muss ich um Entschuldigung bitten, wenn ich nicht überall diejenigen mit Anerkennung namhaft gemacht habe, die sich schon vorher mit demselben Gegenstande beschäftigt haben. Da es jedoch meine Absicht war, Alles möglichst kurz auseinanderzusetzen, so habe ich jenes unterlassen, um nicht durch eine geschichtliche Uebersicht über jedes Problem das vorliegende Werk ganz erheblich zu vergrössern. Ueberdies habe ich auch für die meisten Aufgaben, welche sich schon anderwärts finden, eine auf anderem Wege gefundene Lösung gegeben, so dass ich einen nicht geringen Teil davon für mich allein in Anspruch nehmen kann. Ich hoffe, dass nicht allein dies, sondern vor allem das Neue, das hier gegeben wird, manchem, der Gefallen an solchen Untersuchungen findet, nicht unerwünscht sein wird.

Inhalts-Verzeichnis.