9. Capitel.

Von der Aufsuchung der trinomischen Factoren.

§ 143.

Wir haben oben gezeigt, wie die einfachen Factoren irgend einer ganzen Function mittelst der Auflösung der Gleichungen gefunden werden. Ist nämlich irgend eine ganze Function $\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\varepsilon z^4+\dots$ gegeben, deren einfache Factoren von der Form $p-qz$ gesucht werden sollen, so muss offenbar, wenn $p-qz$ ein Factor derselben ist, für $z=\frac{p}{q}$, w[illegible] durch der Factor $p-qz=0$ wird, auch die gegebene Function selbst verschwinden. Wenn demnach $p-qz$ ein Factor oder Divisor der Function $\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\varepsilon z^4+\dots$ ist, so muss notwendig der Ausdruck $\alpha+\frac{\beta p}{q}+\frac{\gamma p^2}{q^2}+\frac{\delta p^3}{q^3}+\frac{\varepsilon p^4}{q^4}+\dots=0$ sein. Umgekehrt erhält man daher, wenn sämtliche Wurzeln dieser Gleichung ermittelt sind, für die vorgelegte ganze Function $\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\varepsilon z^4+\dots$ ebenso viele einzelne einfache Factoren von der Form $p-qz$. Zugleich aber geht hieraus hervor, dass sich die Anzahl dieser einfachen Factoren aus dem Exponenten der höchsten Potenz von z bestimmt.

§ 144.

Auf diese Weise lassen sich aber die imaginären Factoren gewöhnlich nur mit grosser Mühe bestimmen, weshalb wir in diesem Capitel für die Aufsuchung der einfachen imaginären Factoren ein besonderes Verfahren angeben werden. Da jedoch die einfachen imaginären Factoren stets derartig sind, dass die Producte aus je zweien reell werden, so werden wir diese imaginären Factoren selbst dadurch finden, dass wir die zweifachen Factoren oder die Factoren von der Form $p-qz+rz^2$, welche zwar selbst

reell, deren einfache Factoren aber imaginär sind, aufsuchen. Wenn dann von der Function $\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\varepsilon z^4+\dots$ die reellen zweifachen Factoren von der trinomischen Form $p-qz+rz^2$ bekannt sind, so erhält man daraus auch alle imaginären Factoren.

§ 145.

Es besitzt aber das Trinom $p-qz+rz^2$ einfache imaginäre Factoren, wenn $4pr>q^2$ oder $\frac{q}{2\sqrt{pr}}<1$ ist. Da nun die Sinus und Cosinus der Winkel kleiner als 1 sind, so wird der Ausdruck $p-qz+rz^2$ einfache imaginäre Factoren besitzen, wenn $\frac{q}{2\sqrt{pr}}$ gleich dem Sinus oder Cosinus irgend eines Winkels ist. Ist daher $\frac{q}{2\sqrt{pr}}=\cos\operatorname{arc}\varphi$ oder $q=2\sqrt{pr}\cos\varphi$, so hat das Trinom $p-qz+rz^2$ einfache imaginäre Factoren. Um aber die Wurzelzeichen zu vermeiden, wollen wir lieber die Form $p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2$ anwenden, deren einfache imaginäre Factoren:

$$qz-p(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi) \text{ und } qz-p(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi)$$

sind. Hieraus geht zugleich hervor, dass beide Factoren einander gleich und reell werden, sobald $\cos\varphi=\pm1$, also $\sin\varphi=0$ ist.

§ 146.

Ist also eine ganze Function $\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\dots$ gegeben, so findet man ihre einfachen imaginären Factoren, indem man die Grössen p und q und den Winkel φ derart bestimmt, dass das Trinom $p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2$ ein Factor der Function wird. Denn alsdann enthält dieselbe die einfachen imaginären Factoren $qz-p(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)$ und $qz-p(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi)$. Es wird daher die gegebene Function verschwinden, sowohl wenn man $z=\frac{p}{q}(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)$, als auch wenn man $z=\frac{p}{q}(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi)$ setzt. Tut man dies wirklich, so erhält man zwei Gleichungen, aus denen man sowohl den Bruch $\frac{p}{q}$ als den Bogen φ bestimmen kann.

§ 147.

So beschwerlich auch beim ersten Anblick die für z zu machenden Substitutionen zu sein scheinen, so werden sie doch nach dem, was im vorhergehenden Capitel gelehrt worden ist, ohne die geringste Mühe ausgeführt. Da nämlich gezeigt worden ist, dass

$$(\cos\varphi\pm\sqrt{-1}\sin\varphi)^n=\cos n\varphi\pm\sqrt{-1}\sin n\varphi$$

ist, so sind für die einzelnen Potenzen von z folgende Ausdrücke einzusetzen:

beim ersten Factor:

$$z = \frac{p}{q}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$$
$$z^2 = \frac{p^2}{q^2}(\cos 2\varphi + \sqrt{-1}\sin 2\varphi)$$
$$z^3 = \frac{p^3}{q^3}(\cos 3\varphi + \sqrt{-1}\sin 3\varphi)$$
$$z^4 = \frac{p^4}{q^4}(\cos 4\varphi + \sqrt{-1}\sin 4\varphi)$$

u. s. w.

beim zweiten Factor:

$$z = \frac{p}{q}(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)$$
$$z^2 = \frac{p^2}{q^2}(\cos 2\varphi - \sqrt{-1}\sin 2\varphi)$$
$$z^3 = \frac{p^3}{q^3}(\cos 3\varphi - \sqrt{-1}\sin 3\varphi)$$
$$z^4 = \frac{p^4}{q^4}(\cos 4\varphi - \sqrt{-1}\sin 4\varphi)$$

u. s. w.

Setzt man der Kürze wegen $\frac{p}{q} = r$ und führt man die Substitutionen wirklich aus, so ergeben sich die folgenden zwei Gleichungen:

$$0 = \left\{\begin{matrix} \alpha + \beta r\cos\varphi & + \gamma r^2\cos 2\varphi & + \delta r^3\cos 3\varphi & + \cdots \\ + \beta r\sqrt{-1}\sin\varphi & + \gamma r^2\sqrt{-1}\sin 2\varphi & + \delta r^3\sqrt{-1}\sin 3\varphi & + \cdots \end{matrix}\right\}$$

$$0 = \left\{\begin{matrix} \alpha + \beta r\cos\varphi & + \gamma r^2\cos 2\varphi & + \delta r^3\cos 3\varphi & + \cdots \\ - \beta r\sqrt{-1}\sin\varphi & - \gamma r^2\sqrt{-1}\sin 2\varphi & - \delta r^3\sqrt{-1}\sin 3\varphi & - \cdots \end{matrix}\right\}.$$

§ 148.

Addirt und subtrahirt man diese beiden Gleichungen und dividirt als dann noch im ersten Falle durch 2, im zweiten durch $2\sqrt{-1}$, so erhält man die beiden reellen Gleichungen:

$$0 = \alpha + \beta r\cos\varphi + \gamma r^2\cos 2\varphi + \delta r^3\cos 3\varphi + \cdots$$
$$0 = \quad \beta r\sin\varphi + \gamma r^2\sin 2\varphi + \delta r^3\sin 3\varphi + \cdots,$$

welche auch sogleich aus der gegebenen Function:

$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \cdots$$

dadurch abgeleitet werden können, dass man darin für jeden Wert von n zunächst

$$z^n = r^n\cos n\varphi$$

und dann

$$z^n = r^n\sin n\varphi$$

setzt. Denn da $\sin 0\varphi = 0$ und $\cos 0\varphi = 1$ ist, so erhält man für z^0 oder 1 in dem constanten Gliede im ersten Falle 1, im letzten aber 0. Bestimmt man daher aus diesen beiden Gleichungen die unbekannten Grössen r und φ, so ergiebt sich daraus, da $r = \frac{p}{q}$ ist, für unsere Function der trinomische Factor

$$p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$$

und dieser schliesst zwei einfache imaginäre Factoren in sich.

§ 149.

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $\sin m\varphi$, die zweite mit $\cos m\varphi$, und addirt und subtrahirt man darauf die erhaltenen Producte, so ergeben sich die folgenden beiden Gleichungen:

$$0 = \alpha\sin m\varphi + \beta r\sin(m+1)\varphi + \gamma r^2\sin(m+2)\varphi + \delta r^3\sin(m+3)\varphi + \cdots$$
$$0 = \alpha\sin m\varphi + \beta r\sin(m-1)\varphi + \gamma r^2\sin(m-2)\varphi + \delta r^3\sin(m-3)\varphi + \cdots$$

Multiplicirt man dagegen die erste Gleichung mit $\cos m\varphi$ und die zweite mit $\sin m\varphi$, so entstehen durch Addition und Subtraction der erhaltenen Producte noch die folgenden beiden Gleichungen:

$$0 = \alpha\cos m\varphi + \beta r\cos(m-1)\varphi + \gamma r^2\cos(m-2)\varphi + \delta r^3\cos(m-3)\varphi + \cdots$$
$$0 = \alpha\cos m\varphi + \beta r\cos(m+1)\varphi + \gamma r^2\cos(m+2)\varphi + \delta r^3\cos(m+3)\varphi + \cdots$$

Aus jedem Paare dieser Gleichungen kann man nun die Unbekannten r und φ bestimmen, und da dies meistens auf mehrere Arten geschehen kann, so erhält man dadurch zugleich mehrere trinomische Factoren, ja man erhält überhaupt alle, welche in der gegebenen Function enthalten sind.

§ 150.

Damit der Nutzen dieser Regeln um so deutlicher hervortrete, wollen wir hier die trinomischen Factoren einiger öfters vorkommender Functionen aufsuchen, damit man sie bei vorkommender Gelegenheit hieraus entnehmen könne. Sollen z. B. von der Function

$$a^n + z^n$$

die trinomischen Factoren von der Form $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$ bestimmt werden, so ergeben sich, wenn man $r = \frac{p}{q}$ setzt, die beiden Gleichungen:

$$0 = a^n + r^n\cos n\varphi \quad \text{und} \quad 0 = r^n\sin n\varphi,$$

deren letzte $\sin n\varphi = 0$ giebt. Es ist somit der Bogen $n\varphi$ entweder gleich $(2k+1)\pi$ oder gleich $2k\pi$, wenn k irgend eine ganze Zahl bedeutet. Diese beiden Fälle müssen deshalb unterschieden werden, weil in beiden der Cosinus verschieden, nämlich im ersten Falle $\cos(2k+1)\pi = -1$, im letzteren dagegen $\cos 2k\pi = +1$ ist. Offenbar aber muss hier der erste Wert

$$n\varphi = (2k+1)\pi$$

genommen werden, da alsdann $\cos n\varphi = -1$, folglich $0 = a^n - r^n$ oder

$$r = a = \frac{p}{q}$$

wird. Es ist also:

$$p = a,\ q = 1 \text{ und } \varphi = \frac{(2k+1)\pi}{n},$$

und daher:

$$a^2 - 2az\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + z^2$$

ein Factor der Function $a^n + z^n$. Da man nun für k jede beliebige ganze Zahl setzen kann, so erhält man dadurch mehrere Factoren, deren Anzahl aber deswegen nicht unendlich gross ist, weil die ersten Factoren wiederkehren, wenn $2k+1$ über n hinaus wächst, indem nämlich $\cos(2\pi \pm \varphi) = \cos\varphi$ ist. Dies wird aus den Beispielen noch deutlicher werden. Ist ferner n eine ungerade Zahl, und nimmt man $2k+1 = n$, so wird der obige Factor ein Quadrat, nämlich $a^2 + 2az + z^2$; indessen folgt daraus nicht, dass nun das Quadrat $(a+z)^2$ ein Factor der Function $a^n + z^n$ ist, weil man in diesem Falle nach § 148 nur eine einzige Gleichung erhält, aus der hervorgeht, dass nur $a + z$ ein Teiler der Function $a^n + z^n$ ist. Diese Regel muss man stets vor Augen behalten, so oft $\cos\varphi$ entweder gleich $+1$ oder gleich -1 ist.

Beispiel.

Um diese Factoren deutlicher vor Augen zu haben, wollen wir einige Fälle betrachten und dabei dieselben in zwei Klassen teilen, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Ist $n = 1$, so hat die Function: $a + z$ den Factor: $a + z$	Ist $n = 2$, so hat die Function: $a^2 + z^2$ den Factor: $a^2 + z^2$
Ist $n = 3$, so hat die Function: $a^3 + z^3$ die Factoren: $a^2 - 2az\cos\frac{\pi}{3} + z^2$ $a + z$	Ist $n = 4$, so hat die Function: $a^4 + z^4$ die Factoren: $a^2 - 2az\cos\frac{\pi}{4} + z^2$ $a^2 - 2az\cos\frac{3\pi}{4} + z^2$

Ist $n = 5$, so hat die Function: $a^5 + z^5$ die Factoren: $a^2 - 2az\cos\frac{\pi}{5} + z^2$ $a^2 - 2az\cos\frac{3\pi}{5} + z^2$ $a + z$	Ist $n = 6$, so hat die Function: $a^6 + z^6$ die Factoren: $a^2 - 2az\cos\frac{\pi}{6} + z^2$ $a^2 - 2az\cos\frac{3\pi}{6} + z^2$ $a^2 - 2az\cos\frac{5\pi}{6} + z^2$

Aus diesen Beispielen geht hervor, dass man alle Factoren erhält, wenn man für $2k+1$ alle ungeraden Zahlen, die nicht grösser als der Exponent n sind, setzt, dass man aber in den Fällen, wo sich ein quadratischer Factor ergiebt, bloss dessen Wurzel den Factoren zurechnen darf.

§ 151.

Ist ferner die Function

$$a^n - z^n$$

gegeben, so wird dieselbe den trinomischen Factor $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$ besitzen, sobald für $r = \frac{p}{q}$ die Unbekannten r und φ aus den Gleichungen:

$$0 = a^n - r^n\cos n\varphi \text{ und } 0 = r^n\sin n\varphi$$

bestimmt sind. Es ist daher wiederum $\sin n\varphi = 0$, und somit entweder $n\varphi = (2k+1)\pi$ oder $n\varphi = 2k\pi$. In diesem Falle ist jedoch der letztere Wert zu nehmen, so dass $\cos n\varphi = +1$, folglich $0 = a^n - r^n$ oder $r = \frac{p}{q} = a$ ist. Man erhält daher:

$$p = a,\ q = 1,\ \varphi = \frac{2k\pi}{n},$$

woraus sich

$$a^2 - 2az\cos\frac{2k\pi}{n} + z^2$$

als trinomischer Factor der vorliegenden Function ergiebt. Setzt man in dieser Formel für $2k$ alle geraden Zahlen, die nicht grösser als n sind, so erhält man dadurch zugleich sämtliche Factoren. Dabei ist aber in Betreff der quadratischen Factoren das, was vorher darüber gesagt wurde, festzuhalten. Nimmt man also zunächst $k = 0$, so ergiebt sich der Factor $a^2 - 2az + z^2$, an dessen Stelle aber die Wurzel $a - z$ zu setzen ist; ebenso geht aus dem Factor $a^2 + 2az + z^2$, der sich ergiebt, wenn n eine gerade Zahl und $2k = n$ ist, hervor, dass dann $a + z$ ein Teiler der Function $a^n - z^n$ ist.

Beispiel.

Auch hier ergeben sich ebenso wie vorher zwei Fälle, je nachdem n eine ungerade oder eine gerade Zahl ist.

Ist $n=1$, so hat die Function: $a-z$ den Factor: $a-z$	Ist $n=2$, so hat die Function: a^2-z^2 die Factoren: $a-z$ $a+z$
Ist $n=3$, so hat die Function: a^3-z^3 die Factoren: $a-z$ $a^2-2az\cos\frac{2\pi}{3}+z^2$	Ist $n=4$, so hat die Function: a^4-z^4 die Factoren: $a-z$ $a^2-2az\cos\frac{2\pi}{4}+z^2$ $a+z$
Ist $n=5$, so hat die Function: a^5-z^5 die Factoren: $a-z$ $a^2-2az\cos\frac{2\pi}{5}+z^2$ $a^2-2az\cos\frac{4\pi}{5}+z^2$	Ist $n=6$, so hat die Function: a^6-z^6 die Factoren: $a-z$ $a^2-2az\cos\frac{2\pi}{6}+z^2$ $a^2-2az\cos\frac{4\pi}{6}+z^2$ $a+z$

§ 152.

Hierdurch wird die bereits im § 32 aufgestellte Behauptung, dass sich jede ganze Function wenn nicht in einfache, so doch in zweifache reele Factoren zerlegen lasse, bestätigt. Denn wie wir sahen, kann man immer sowohl die einfachen als die zweifachen reellen Factoren der Function $a^n \pm z^n$, in welcher n eine beliebige ganze positive Zahl ist, bestimmen. Gehen wir nun zu **zusammengesetzteren** Functionen, z. B. zu Functionen von der Form $\alpha+\beta z^n+\gamma z^{2n}$ über, so ist deren Zerlegung aus dem Vorhergehenden hinlänglich klar, sobald sie zwei reelle Factoren von der Form $\eta+\vartheta z^n$ besitzen. Es braucht daher hier nur gezeigt zu werden, wie man die Function $\alpha+\beta z^n+\gamma z^{2n}$ in dem Falle, wo sie nicht zwei reelle Factoren von der Form $\eta+\vartheta z^n$ hat, in reelle, sei es einfache, sei es zweifache Factoren, zerlegen könne.

§ 153.

Wir betrachten also die Function

$$a^{2n}-2a^nz^n\cos g+z^{2n},$$

welche sich nicht in zwei reelle Factoren von der Form $\eta+\vartheta z^n$ zerlegen lässt. Nehmen wir nun an, es sei $p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2$ ein zweifacher reeller Factor derselben, und setzt man $r=\frac{p}{q}$, so hat man die folgenden beiden Gleichungen aufzulösen:

$$0=a^{2n}-2a^nr^n\cos g\cos n\varphi+r^{2n}\cos 2n\varphi$$
$$0=\quad -2a^nr^n\cos g\sin n\varphi+r^{2n}\sin 2n\varphi.$$

Statt der ersten dieser beiden Gleichungen kann man aber auch nach § 148 (wenn man darin $m=2n$ setzt) die folgende nehmen:

$$0=a^{2n}\sin 2n\varphi-2a^nr^n\cos g\sin n\varphi.$$

Die Vergleichung dieser mit der zweiten der obigen Gleichungen ergiebt $r=a$ und somit:

$$\sin 2n\varphi=2\cos g\sin n\varphi$$

oder, da $\sin 2n\varphi=2\sin n\varphi\cos n\varphi$ ist,

$$\cos n\varphi=\cos g.$$

Nun ist aber $\cos(2k\pi\pm g)=\cos g$; folglich erhält man aus dieser Gleichung:

$$n\varphi=2k\pi\pm g \text{ und } \varphi=\frac{2k\pi\pm g}{n}.$$

Es ist daher

$$a^2-2az\cos\frac{2k\pi\pm g}{n}+z^2$$

die allgemeine Form der zweifachen reellen Factoren der gegebenen Function, und zwar erhält man daraus sämtliche derartige Factoren, wenn man für $2k$ der Reihe nach alle geraden Zahlen, die nicht grösser als n sind, einsetzt, wie man dies aus der Anwendung des Gesagten auf besondere Fälle ersehen wird.

Beispiel.

Um die Beschaffenheit dieser Factoren anschaulich zu machen, wollen wir die Fälle betrachten, in denen n gleich 1, 2, 3, 4 u. s. w. ist. Es hat also

die Function:

$$a^2-2az\cos g+z^2$$

den einzigen Factor:

$$a^2-2az\cos g+z^2$$

die Function:

$$a^4 - 2a^2z^2\cos g + z^4$$

die beiden Factoren:

$$a^2 - 2az\cos\frac{g}{2} + z^2$$

$$a^2 - 2az\cos\frac{2\pi \pm g}{2} + z^2 \quad \text{oder} \quad a^2 + 2az\cos\frac{g}{2} + z^2$$

---

die Function:

$$a^6 - 2a^3z^3\cos g + z^6$$

die drei Factoren:

$$a^2 - 2az\cos\frac{g}{3} + z^2$$

$$a^2 - 2az\cos\frac{2\pi - g}{3} + z^2$$

$$a^2 - 2az\cos\frac{2\pi + g}{3} + z^2$$

---

die Function:

$$a^8 - 2a^4z^4\cos g + z^8$$

die vier Factoren:

$$a^2 - 2az\cos\frac{g}{4} + z^2$$

$$a^2 - 2az\cos\frac{2\pi - g}{4} + z^2$$

$$a^2 - 2az\cos\frac{2\pi + g}{4} + z^2$$

$$a^2 - 2az\cos\frac{4\pi \pm g}{4} + z^2 \quad \text{oder} \quad a^2 + 2az\cos\frac{g}{4} + z^2$$

---

die Function:

$$a^{10} - 2a^5z^5\cos g + z^{10}$$

die fünf Factoren:

$$a^2 - 2az\cos\frac{g}{5} + z^2$$

$$a^2 - 2az\cos\frac{2\pi - g}{5} + z^2$$

$$a^2 - 2az\cos\frac{2\pi + g}{5} + z^2$$

$$a^2 - 2az\cos\frac{4\pi - g}{5} + z^2$$

$$a^2 - 2az\cos\frac{4\pi + g}{5} + z^2.$$

Es wird daher auch durch diese Beispiele bestätigt, dass sich jede ganze Function in reelle einfache oder zweifache Factoren zerlegen lässt.

§ 154.

Von hier aus kann man weiter zu Functionen von der Form:

$$\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n}$$

übergehen, welche jederzeit einen reellen Factor von der Form $\eta + \vartheta z^n$, dessen reelle einfache oder zweifache Factoren sich finden lassen, besitzen. Was aber den anderen Factor, welcher die Form $\iota + \varkappa z^n + \lambda z^{2n}$ hat, betrifft, so kann man ihn, er mag beschaffen sein, wie er will, immer nach dem vorhergehenden Paragraphen in Factoren zerlegen. Ferner kann auch die Function:

$$\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n} + \varepsilon z^{4n},$$

da sie stets zwei reelle Factoren von der Form $\eta + \vartheta z^n + \iota z^{2n}$ besitzt, in ähnlicher Weise in reelle einfache oder zweifache Factoren zerlegt werden. Ja man kann auch zu Functionen von der Form:

$$\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n} + \varepsilon z^{4n} + \zeta z^{5n}$$

fortschreiten; denn da diese immer einen reellen Factor von der Form $\eta + \vartheta z^n$ haben, während der andere Factor unter die vorhergehende Form gehört, so ist auch bei diesen Functionen die Zerlegung in reelle, seien es einfache, seien es zweifache, Factoren möglich. Wenn daher hinsichtlich einer derartigen Zerlegbarkeit aller ganzen Functionen bisher noch irgend ein Zweifel geblieben wäre, so dürfte derselbe hierdurch nunmehr vollständig beseitigt sein.

§ 155.

Diese **Zerlegung in Factoren** lässt sich nun aber auch auf die **unendlichen Reihen übertragen.** Denn da wir gesehen haben, dass

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots = e^x$$

und

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i$$

ist, wenn i eine unendlich grosse Zahl bedeutet, so besitzt offenbar die Reihe:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

unendlich viele einander gleiche Factoren von der Form $1+\frac{x}{i}$. Zieht man aber von dieser Reihe das erste Glied 1 ab, so wird

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots=e^x-1=\left(1+\frac{x}{i}\right)^i-1;$$

und vergleicht man diese Form mit der des § 151, wodurch sich

$$a=1+\frac{x}{i},\quad n=i \text{ und } z=1$$

ergiebt, so wird die allgemeine Form der Factoren:

$$\left(1+\frac{x}{i}\right)^2-2\left(1+\frac{x}{i}\right)\cos\frac{2k\pi}{i}+1$$

sein, woraus sich denn gleichzeitig alle Factoren herleiten lassen, wenn man für $2k$ der Reihe nach sämtliche geraden Zahlen setzt. Setzt man nun $2k=0$, so erhält man den quadratischen Factor $\frac{x^2}{i^2}$, für welchen man jedoch aus den im § 150 angegebenen Gründen nur die Wurzel $\frac{x}{i}$ zu nehmen hat. Es ist daher x, wie sich übrigens von selbst versteht, ein Factor des Ausdrucks e^x-1. Um die übrigen Factoren zu finden, muss man beachten, dass der Bogen $\frac{2k\pi}{i}$ unendlich klein ist, und somit nach § 134:

$$\cos\frac{2k\pi}{i}=1-\frac{2k^2\pi^2}{i^2}$$

gesetzt werden kann, indem die übrigen Glieder wegen der unendlich grossen Zahl i verschwinden. Es ist daher:

$$\frac{x^2}{i^2}+\frac{4k^2}{i^2}\pi^2+\frac{4k^2\pi^2}{i^3}x$$

ein beliebiger Factor und mithin die Function e^x-1 teilbar durch:

$$1+\frac{x}{i}+\frac{x^2}{4k^2\pi^2}.$$

Folglich besitzt der Ausdruck:

$$e^x-1=x\left(1+\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots\right)$$

ausser x noch die unendlich vielen Factoren:

$$\left(1+\frac{x}{i}+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x}{i}+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{x}{i}+\frac{x^2}{36\pi^2}\right)\left(1+\frac{x}{i}+\frac{x^2}{64\pi^2}\right)\cdots$$

§ 156.

Obwohl hierin die einzelnen Factoren den unendlich kleinen Teil $\frac{x}{i}$ enthalten, so darf derselbe doch nicht weggelassen werden, weil sich aus ihm nach ausgeführter Multiplikation aller Factoren, deren Anzahl gleich $\frac{1}{2}i$ ist, das Glied $\frac{x}{2}$ ergeben würde. Um dieser Unbequemlichkeit aus dem Wege zu gehen, wollen wir den Ausdruck:

$$e^x-e^{-x}=\left(1+\frac{x}{i}\right)^i-\left(1-\frac{x}{i}\right)^i=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots\right),$$

welcher durch Subtraction der beiden Reihen:

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$$

und

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$$

entsteht, betrachten. Die Vergleichung desselben mit der Formel des § 151 liefert:

$$n=i,\quad a=1+\frac{x}{i},\quad z=1-\frac{x}{i},$$

so dass sich als allgemeiner Factor des angeführten Ausdrucks der folgende:

$$a^2-2az\cos\frac{2k\pi}{n}+z^2=2+\frac{2x^2}{i^2}-2\left(1-\frac{x^2}{i^2}\right)\cos\frac{2k\pi}{i},$$

oder da

$$\cos\frac{2k\pi}{i}=1-\frac{2k^2\pi^2}{i^2}$$

ist, der folgende:

$$\frac{4x^2}{i^2}+\frac{4k^2\pi^2}{i^2}-\frac{4k^2\pi^2x^2}{i^4}$$

ergiebt. Es ist mithin die Function e^x-e^{-x} durch

$$1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}-\frac{x^2}{i^2}$$

teilbar. Hierin aber kann man sicher den Teil $\frac{x^2}{i^2}$ weglassen, weil derselbe auch mit i multiplicirt immer noch unendlich klein bleibt. Setzt man nun überdies $k=0$, so wird der erste Factor wie vorher gleich x. Es wird daher, nachdem man jene Factoren in die richtige Reihenfolge gebracht hat:

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{25\pi^2}\right)\cdots$$

$$=x\left(1+\frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+\cdots\right).$$

Dabei ist nämlich jedem einzelnen Factor durch Multiplikation mit einer gewissen Constanten eine solche Form gegeben worden, dass man bei wirklicher Ausführung der Multiplikation als erstes Glied x erhält.

§ 157.

Da ferner

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots = \frac{\left(1 + \frac{x}{i}\right)^i + \left(1 - \frac{x}{i}\right)^i}{2}$$

ist, so ergiebt sich durch Vergleichung dieses Ausdrucks mit dem früheren $a^n + z^n$ des § 150:

$$a = 1 + \frac{x}{i}, \quad z = 1 - \frac{x}{i}, \quad n = i,$$

und es wird daher der allgemeine Factor:

$$a^2 - 2az \cos\frac{2k+1}{i}\pi + z^2 = 2 + \frac{2x^2}{i^2} - 2\left(1 - \frac{x^2}{i^2}\right)\cos\frac{2k+1}{i}\pi.$$

Da nun aber:

$$\cos\frac{2k+1}{i}\pi = 1 - \frac{(2k+1)^2\pi^2}{2i^2}$$

ist, so erhält dadurch jener Factor die Form:

$$\frac{4x^2}{i^2} + \frac{(2k+1)^2\pi^2}{i^2},$$

indem das Glied mit dem Nenner i^4 verschwindet. Weil aber jeder Factor des Ausdrucks

$$1 + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

die Form $1 + \alpha x^2$ haben muss, so muss man den gefundenen Factor, um ihn auf diese Form zu bringen, noch durch $\frac{(2k+1)^2\pi^2}{i^2}$ dividiren, wodurch er alsdann die Form annimmt:

$$1 + \frac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}.$$

Hieraus findet man sämtliche unendlich vielen Factoren, wenn man für $2k+1$ der Reihe nach alle ungeraden Zahlen setzt, und es wird somit:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots$$
$$= \left(1 + \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4x^2}{49\pi^2}\right)\cdots$$

§ 158.

Ist x eine imaginäre Zahlgrösse, so gehen diese **Exponentialformeln** in den **Sinus** und **Cosinus** irgend eines reellen Bogens über. Denn ist $x = z\sqrt{-1}$, so wird:

$$\frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin z = z - \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{z^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots$$

und dieser Ausdruck ist gleich dem Product aus den unendlich vielen Factoren:

$$z\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{16\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{25\pi^2}\right)\cdots,$$

oder es ist:

$$\sin z = z\left(1 - \frac{z}{\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{3\pi}\right)\cdots$$

So oft daher der Bogen z so beschaffen ist, dass irgend einer dieser Factoren verschwindet, was geschieht, wenn $z = 0$, $z = \pm\pi$, $z = \pm 2\pi$, und allgemein, wenn $z = \pm k\pi$ ist, wo k jede ganze Zahl bedeutet, so wird auch zugleich der Sinus dieses Bogens gleich 0 sein, eine bekannte Tatsache, auf Grund deren man auch umgekehrt jene Factoren hätte finden können.

Ebenso erhält man, da

$$\frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2} = \cos z$$

ist, die Formel:

$$\cos z = \left(1 - \frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{25\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{49\pi^2}\right)\cdots,$$

oder auch, indem man jeden Factor in zwei zerlegt:

$$\cos z = \left(1 - \frac{2z}{\pi}\right)\left(1 + \frac{2z}{\pi}\right)\left(1 - \frac{2z}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{2z}{3\pi}\right)\left(1 - \frac{2z}{5\pi}\right)\left(1 + \frac{2z}{5\pi}\right)\cdots,$$

woraus ebenso wie vorher folgt, dass $\cos z = 0$ ist, sobald $z = \pm\frac{2k+1}{2}\pi$ ist, eine Eigenschaft, die auch aus der Natur des Kreises sich ergiebt.

§ 159.

Der § 153 giebt die Mittel an die Hand, auch die Factoren des Ausdrucks:

$$e^x - 2\cos g + e^{-x} = 2\left(1 - \cos g + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots\right)$$

zu finden. Da nämlich dieser Ausdruck in der Form:

$$\left(1+\frac{x}{i}\right)^i - 2\cos g + \left(1-\frac{x}{i}\right)^i$$

geschrieben werden kann, so ergiebt sich durch Vergleichung desselben mit der Formel des § 153:

$$2n=i,\quad a=1+\frac{x}{i},\quad z=1-\frac{x}{i},$$

und es wird daher der allgemeine Factor dieser Function:

$$a^2-2az\cos\frac{2k\pi\pm g}{n}+z^2 = 2+\frac{2x^2}{i^2}-2\left(1-\frac{x^2}{i^2}\right)\cos\frac{2(2k\pi\pm g)}{i}.$$

Da nun aber:

$$\cos\frac{2(2k\pi\pm g)}{i} = 1-\frac{2(2k\pi\pm g)^2}{i^2}.$$

ist, so erhält man dafür die Form:

$$\frac{4x^2}{i^2}+\frac{4(2k\pi\pm g)^2}{i^2},$$

oder auch die folgende:

$$1+\frac{x^2}{(2k\pi\pm g)^2}.$$

Dividirt man daher die gegebene Formel durch $2(1-\cos g)$, damit das constante Glied der unendlichen Reihe gleich 1 werde, so erhält man, indem man alle Factoren nimmt:

$$\frac{e^x-2\cos g+e^{-x}}{2(1-\cos g)}$$

$$=\left(1+\frac{x^2}{g^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{(2\pi-g)^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{(2\pi+g)^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{(4\pi-g)^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{(4\pi+g)^2}\right)\ldots$$

Setzt man nun hierin $z\sqrt{-1}$ für x, so ergiebt sich:

$$\frac{\cos z-\cos g}{1-\cos g}$$

$$=\left(1-\frac{z}{g}\right)\left(1+\frac{z}{g}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi-g}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi-g}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi+g}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi+g}\right)\times$$

$$\left(1-\frac{z}{4\pi-g}\right)\left(1+\frac{z}{4\pi-g}\right)\ldots$$

$$=1-\frac{z^2}{1\cdot2(1-\cos g)}+\frac{z^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4(1-\cos g)}-\frac{z^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6(1-\cos g)}+\ldots$$

Von dieser ins Unendliche fortgehenden Reihe sind daher sämtliche Factoren bekannt.

§ 160.

Auch von der Function $e^{b+x}\pm e^{c-x}$ lassen sich sämtliche Factoren sehr bequem finden und darstellen. Verwandelt man dieselbe nämlich in die Form:

$$\left(1+\frac{b+x}{i}\right)^i \pm \left(1+\frac{c-x}{i}\right)^i,$$

und vergleicht man diese mit der Formel $a^i\pm z^i$ des § 150 resp. 151, so erhält man als allgemeinen Factor $a^2-2az\cos\frac{m\pi}{i}+z^2$, wobei m eine ungerade oder eine gerade Zahl bedeutet, je nachdem das obere oder das untere Zeichen genommen wird. Da aber i eine unendlich grosse Zahl, und demnach

$$\cos\frac{m\pi}{i}=1-\frac{m^2\pi^2}{2i^2}$$

ist, so wird jener allgemeine Factor:

$$(a-z)^2+\frac{m^2\pi^2}{i^2}az.$$

In unserm Falle ist nun

$$a=1+\frac{b+x}{i} \text{ und } z=1+\frac{c-x}{i},$$

demnach:

$$(a-z)^2=\frac{(b-c+2x)^2}{i^2},$$

und

$$az=1+\frac{b+c}{i}+\frac{bc+(c-b)x-x^2}{i^2}.$$

Es wird daher der allgemeine Factor, nachdem derselbe mit i^2 multiplicirt und darauf die Glieder mit dem Nenner i und i^2 vernachlässigt sind, weil dieselben im Vergleich zu den übrigen verschwinden, gleich:

$$(b-c)^2+4(b-c)x+4x^2+m^2\pi^2$$

oder, nachdem das constante Glied durch Division mit $(b-c)^2+m^2\pi^2$ auf 1 gebracht ist, gleich:

$$1+\frac{4(b-c)x+4x^2}{m^2\pi^2+(b-c)^2}.$$

§ 161.

Da nunmehr das constante Glied jedes einzelnen Factors gleich 1 ist, muss man auch die Function $e^{b+x}\pm e^{c-x}$ durch eine Constante von solcher Beschaffenheit dividiren, dass dadurch das constante Glied des Ausdrucks,

d. h. der Wert desselben für $x=0$ gleich 1 wird. Dieser Divisor ist aber $e^b \pm e^c$, und es kann somit der Ausdruck:

$$\frac{e^{b+x} \pm e^{c-x}}{e^b \pm e^c}$$

durch ein Product von unendlich vielen Factoren dargestellt werden. Es wird nämlich, wenn das obere Zeichen genommen wird, und demnach m eine ungerade Zahl bedeutet:

$$\frac{e^{b+x} + e^{c-x}}{e^b + e^c}$$

$$=\left(1+\frac{4(b-c)x+4x^2}{\pi^2+(b-c)^2}\right)\left(1+\frac{4(b-c)x+4x^2}{9\pi^2+(b-c)^2}\right)\left(1+\frac{4(b-c)x+4x^2}{25\pi^2+(b-c)^2}\right)\cdots$$

Ist dagegen das untere Zeichen gültig, und demnach m eine gerade Zahl, so erhält man, vorausgesetzt, dass im Falle $m=0$ die Wurzel des sich ergebenden quadratischen Factors gesetzt wird:

$$\frac{e^{b+x} - e^{c-x}}{e^b - e^c}$$

$$=\left(1+\frac{2x}{b-c}\right)\left(1+\frac{4(b-c)x+4x^2}{4\pi^2+(b-c)^2}\right)\left(1+\frac{4(b-c)x+4x^2}{16\pi^2+(b-c)^2}\right)\times$$
$$\left(1+\frac{4(b-c)x+4x^2}{36\pi^2+(b-c)^2}\right)\cdots$$

§ 162.

Setzt man $b=0$, was ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit geschehen kann, so wird:

$$\frac{e^x+e^c\,e^{-x}}{1+e^c}=\left(1-\frac{4cx-4x^2}{\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{4cx-4x^2}{9\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{4cx-4x^2}{25\pi^2+c^2}\right)\cdots$$

und:

$$\frac{e^x-e^c\,e^{-x}}{1-e^c}=\left(1-\frac{2x}{c}\right)\left(1-\frac{4cx-4x^2}{4\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{4cx-4x^2}{16\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{4cx-4x^2}{36\pi^2+c^2}\right)\cdots$$

Ferner erhält man, wenn man c negativ nimmt, die beiden Gleichungen:

$$\frac{e^x+e^{-c}e^{-x}}{1+e^{-c}}=\left(1+\frac{4cx+4x^2}{\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{4cx+4x^2}{9\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{4cx+4x^2}{25\pi^2+c^2}\right)\cdots$$

und:

$$\frac{e^x-e^{-c}e^{-x}}{1-e^{-c}}$$

$$=\left(1+\frac{2x}{c}\right)\left(1+\frac{4cx+4x^2}{4\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{4cx+4x^2}{16\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{4cx+4x^2}{36\pi^2+c^2}\right)\cdots$$

Multiplicirt man nun die erste dieser Formeln mit der dritten, so ergiebt sich:

$$\frac{e^{2x}+e^{-2x}+e^c+e^{-c}}{2+e^c+e^{-c}},$$

und wenn man hierin y für $2x$ schreibt, so wird:

$$\frac{e^y+e^{-y}+e^c+e^{-c}}{2+e^c+e^{-c}}$$

$$=\left(1-\frac{2cy-y^2}{\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{9\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{9\pi^2+c^2}\right)\cdots$$

Multiplicirt man aber die erste Formel mit der vierten, so wird das Product:

$$\frac{e^{2x}-e^{-2x}+e^c-e^{-c}}{e^c-e^{-c}},$$

und setzt man hierin wieder y für $2x$, so erhält man:

$$\frac{e^y-e^{-y}+e^c-e^{-c}}{e^c-e^{-c}}$$

$$=\left(1+\frac{y}{c}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{4\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{9\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{16\pi^2+c^2}\right)\times$$
$$\left(1-\frac{2cy-y^2}{25\pi^2+c^2}\right)\cdots$$

Dieselbe Gleichung, nur dass darin c negativ genommen werden muss, ergiebt sich, wenn man die zweite Formel mit der dritten multiplicirt; es wird nämlich:

$$\frac{e^c-e^{-c}-e^y+e^{-y}}{e^c-e^{-c}}$$

$$=\left(1-\frac{y}{c}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{4\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{9\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{16\pi^2+c^2}\right)\times$$
$$\left(1+\frac{2cy+y^2}{25\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{36\pi^2+c^2}\right)\cdots$$

Multiplicirt man endlich die zweite Formel mit der vierten, so folgt:

$$\frac{e^y+e^{-y}-e^c-e^{-c}}{2-e^c-e^{-c}}$$

$$=\left(1-\frac{y^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{4\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{4\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{16\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{16\pi^2+c^2}\right)\times$$
$$\left(1-\frac{2cy-y^2}{36\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{36\pi^2+c^2}\right)\cdots$$

§ 163.

Diese vier Combinationen lassen sich nunmehr sehr bequem auf den Kreis anwenden, wenn man $c=g\sqrt{-1}$ und $y=v\sqrt{-1}$ setzt. Denn es wird alsdann:

$$e^{v\sqrt{-1}}+e^{-v\sqrt{-1}}=2\cos v$$
$$e^{v\sqrt{-1}}-e^{-v\sqrt{-1}}=2\sqrt{-1}\sin v$$
$$e^{g\sqrt{-1}}+e^{-g\sqrt{-1}}=2\cos g$$
$$e^{g\sqrt{-1}}-e^{-g\sqrt{-1}}=2\sqrt{-1}\sin g.$$

Es giebt daher die erste Combination die Formel:

$$\frac{\cos v+\cos g}{1+\cos g}$$
$$=1-\frac{v^2}{1\cdot 2(1+\cos g)}+\frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4(1+\cos g)}-\frac{v^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6(1+\cos g)}+\cdots$$
$$=\left(1+\frac{2gv-v^2}{\pi^2-g^2}\right)\left(1-\frac{2gv+v^2}{\pi^2-g^2}\right)\left(1+\frac{2gv-v^2}{9\pi^2-g^2}\right)\left(1-\frac{2gv+v^2}{9\pi^2-g^2}\right)\times$$
$$\left(1+\frac{2gv-v^2}{25\pi^2-g^2}\right)\left(1-\frac{2gv+v^2}{25\pi^2-g^2}\right)\cdots$$
$$=\left(1+\frac{v}{\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{\pi+g}\right)\left(1+\frac{v}{3\pi-g}\right)\times$$
$$\left(1-\frac{v}{3\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{3\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{3\pi+g}\right)\cdots$$
$$=\left(1-\frac{v^2}{(\pi-g)^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{(\pi+g)^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{(3\pi-g)^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{(3\pi+g)^2}\right)\times$$
$$\left(1-\frac{v^2}{(5\pi-g)^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{(5\pi+g)^2}\right)\cdots$$

Die vierte Combination dagegen liefert die Formel:

$$\frac{\cos v-\cos g}{1-\cos g}$$
$$=1-\frac{v^2}{1\cdot 2\cdot(1-\cos g)}+\frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4(1-\cos g)}-\frac{v^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\,(1-\cos g)}+\cdots$$
$$=\left(1-\frac{v^2}{g^2}\right)\left(1+\frac{2gv-v^2}{4\pi^2-g^2}\right)\left(1-\frac{2gv+v^2}{4\pi^2-g^2}\right)\left(1+\frac{2gv-v^2}{16\pi^2-g^2}\right)\left(1-\frac{2gv+v^2}{16\pi^2-g^2}\right)\times$$
$$\left(1+\frac{2gv-v^2}{36\pi^2-g^2}\right)\left(1-\frac{2gv+v^2}{36\pi^2-g^2}\right)\cdots$$
$$=\left(1-\frac{v}{g}\right)\left(1+\frac{v}{g}\right)\left(1+\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{2\pi+g}\right)\times$$
$$\left(1+\frac{v}{4\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{4\pi+g}\right)\cdots$$
$$=\left(1-\frac{v^2}{g^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{(2\pi-g)^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{(2\pi+g)^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{(4\pi-g)^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{(4\pi+g)^2}\right)\cdots$$

Die zweite Combination giebt:

$$\frac{\sin g+\sin v}{\sin g}$$
$$=1+\frac{v}{\sin g}-\frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3\sin g}+\frac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\sin g}-\cdots$$
$$=\left(1+\frac{v}{g}\right)\left(1+\frac{2gv-v^2}{\pi^2-g^2}\right)\left(1-\frac{2gv+v^2}{4\pi^2-g^2}\right)\left(1+\frac{2gv-v^2}{9\pi^2-g^2}\right)\left(1-\frac{2gv+v^2}{16\pi^2-g^2}\right)\cdots$$
$$=\left(1+\frac{v}{g}\right)\left(1+\frac{v}{\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{2\pi+g}\right)\left(1+\frac{v}{3\pi-g}\right)\times$$
$$\left(1-\frac{v}{3\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{4\pi-g}\right)\cdots$$

Nimmt man hierin endlich v negativ, so erhält man das, was die dritte Combination ergeben würde.

§ 164.

Es können aber auch die Ausdrücke des § 162 selbst folgendermassen auf Kreisbogen angewandt werden. Da nämlich:

$$\frac{e^x+e^c e^{-x}}{1+e^c}=\frac{(1+e^{-c})\,(e^x+e^c e^{-x})}{2+e^c+e^{-c}}=\frac{e^x+e^{-x}+e^{c-x}+e^{-c+x}}{2+e^c+e^{-c}}$$

ist, so geht dieser Ausdruck, wenn man darin $c=g\sqrt{-1}$ und $x=z\sqrt{-1}$ setzt, über in den folgenden:

$$\frac{\cos z+\cos(g-z)}{1+\cos g}=\cos z+\frac{\sin g\sin z}{1+\cos g}$$

und da

$$\frac{\sin g}{1+\cos g}=\operatorname{tang}\frac{g}{2}$$

ist, so wird:

$$\cos z+\operatorname{tang}\frac{g}{2}\sin z$$
$$=1+\frac{z}{1}\operatorname{tang}\frac{g}{2}-\frac{z^2}{1\cdot 2}-\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}\operatorname{tang}\frac{g}{2}+\frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{z^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\operatorname{tang}\frac{g}{2}-\cdots$$
$$=\left(1+\frac{4gz-4z^2}{\pi^2-g^2}\right)\left(1+\frac{4gz-4z^2}{9\pi^2-g^2}\right)\left(1+\frac{4gz-4z^2}{25\pi^2-g^2}\right)\cdots$$
$$=\left(1+\frac{2z}{\pi-g}\right)\left(1-\frac{2z}{\pi+g}\right)\left(1+\frac{2z}{3\pi-g}\right)\left(1-\frac{2z}{3\pi+g}\right)\left(1+\frac{2z}{5\pi-g}\right)\left(1-\frac{2z}{5\pi+g}\right)\cdots$$

Ebenso geht der zweite Ausdruck, wenn man Zähler und Nenner desselben mit $1-e^{-c}$ multiplicirt, über in:

$$\frac{e^x+e^{-x}-e^{c-x}-e^{-c+x}}{2-e^c-e^{-c}},$$

und setzt man hierin wieder $c=g\sqrt{-1}$ und $x=z\sqrt{-1}$; so bekommt man:

$$\frac{\cos z-\cos(g-z)}{1-\cos g}=\cos z-\frac{\sin g\sin z}{1-\cos g}=\cos z-\frac{\sin z}{\operatorname{tang}\frac{g}{2}}.$$

Es ist demnach:

$$\cos z-\cot\frac{g}{2}\cdot\sin z$$

$$=1-\frac{z}{1}\cot\frac{g}{2}-\frac{z^2}{1\cdot2}+\frac{z^3}{1\cdot2\cdot3}\cot\frac{g}{2}+\frac{z^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\frac{z^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cot\frac{g}{2}+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{2z}{g}\right)\left(1+\frac{4gz-4z^2}{4\pi^2-g^2}\right)\left(1+\frac{4gz-4z^2}{16\pi^2-g^2}\right)\left(1+\frac{4gz-4z^2}{36\pi^2-g^2}\right)\cdots$$

$$=\left(1-\frac{2z}{g}\right)\left(1+\frac{2z}{2\pi-g}\right)\left(1-\frac{2z}{2\pi+g}\right)\left(1+\frac{2z}{4\pi-g}\right)\left(1-\frac{2z}{4\pi+g}\right)\cdots$$

Setzt man daher noch $v=2z$ oder $z=\frac{1}{2}v$, so hat man:

$$\frac{\cos\frac{g-v}{2}}{\cos\frac{g}{2}}=\cos\frac{v}{2}+\operatorname{tang}\frac{g}{2}\sin\frac{v}{2}$$
$$=\left(1+\frac{v}{\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{\pi+g}\right)\left(1+\frac{v}{3\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{3\pi+g}\right)\cdots$$

$$\frac{\cos\frac{g+v}{2}}{\cos\frac{g}{2}}=\cos\frac{v}{2}-\operatorname{tang}\frac{g}{2}\sin\frac{v}{2}$$
$$=\left(1-\frac{v}{\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{3\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{3\pi+g}\right)\cdots$$

$$\frac{\sin\frac{g-v}{2}}{\sin\frac{g}{2}}=\cos\frac{v}{2}-\cot\frac{g}{2}\sin\frac{v}{2}$$
$$=\left(1-\frac{v}{g}\right)\left(1+\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi+g}\right)\left(1+\frac{v}{4\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{4\pi+g}\right)\cdots$$

$$\frac{\sin\frac{g+v}{2}}{\sin\frac{g}{2}}=\cos\frac{v}{2}+\cot\frac{g}{2}\sin\frac{v}{2}$$
$$=\left(1+\frac{v}{g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{2\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{4\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{4\pi+g}\right)\cdots$$

Das Gesetz, nach welchem diese Factoren fortschreiten, ist hinlänglich einfach und leicht zu übersehen. Durch Multiplikation je zweier von diesen Ausdrücken kann man wieder diejenigen ableiten, welche wir schon im vorhergehenden Paragraphen gefunden haben.

10. Capitel.

Von dem Gebrauche der gefundenen Producte bei der Bestimmung der Summen unendlicher Reihen.

§ 165.

Wenn

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\cdots=(1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)(1+\delta z)\cdots$$

ist, so **müssen diese Factoren**, mag deren Anzahl eine endliche oder unendliche sein, eben **jenen Ausdruck** $1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\ldots$ **wieder hervorbringen**, wenn man sie wirklich mit einander multiplicirt. Es muss daher, wie aus der gemeinen Algebra bekannt ist, der Coefficient

- A gleich der Summe aller Grössen $\alpha,\beta,\ldots$ also gleich $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\ldots$
- B gleich der Summe der Producte aus je zweien also gleich $\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta+\ldots$,
- C gleich der Summe der Producte aus je dreien also gleich $\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\beta\gamma\delta+\alpha\gamma\delta+\ldots$,
- D gleich der Summe der Producte aus je vieren,
- E gleich der Summe der Producte aus je fünfen von diesen Grössen u. s. w.

sein.

§ 166.

Da nun die Summe der Grössen $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots$ und die Summe der Producte aus je zweien von ihnen bekannt ist, so kann man daraus auch die Summe der Quadrate $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\ldots$ finden, da dieselbe gleich dem Quadrate der Summe aller Grössen weniger der doppelten Summe der Producte aus je zweien ist. Ebenso kann man die Summe der Kuben, der vierten und der höheren Potenzen bestimmen. Denn wenn man:

$$\begin{aligned}
P &= \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \cdots \\
Q &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 + \cdots \\
R &= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \varepsilon^3 + \cdots \\
S &= \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 + \varepsilon^4 + \cdots \\
T &= \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 + \delta^5 + \varepsilon^5 + \cdots \\
V &= \alpha^6 + \beta^6 + \gamma^6 + \delta^6 + \varepsilon^6 + \cdots \text{ u. s. w.}
\end{aligned}$$

setzt, so ergeben sich die Werte von $P, Q, R, S, T, V\ldots$ aus den bekannten Grössen $A, B, C, D\ldots$ auf folgende Art:

$$\begin{aligned}
P &= A \\
Q &= AP - 2B \\
R &= AQ - BP + 3C \\
S &= AR - BQ + CP - 4D \\
T &= AS - BR + CQ - DP + 5E \\
V &= AT - BS + CR - DQ + EP - 6F
\end{aligned}$$

u. s. w.

Von der Richtigkeit dieser Formeln überzeugt man sich bei angestellter Prüfung leicht; indessen wird dieselbe in der Differentialrechnung in aller Strenge erwiesen werden.

§ 167.

Da wir nun oben § 156 gefunden haben, dass

$$\begin{aligned}
\frac{e^x - e^{-x}}{2} &= x\left(1 + \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \cdots\right) \\
&= x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{25\pi^2}\right)\cdots
\end{aligned}$$

ist, so wird:

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \cdots \\
&= \left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdots
\end{aligned}$$

oder, wenn man $x^2 = \pi^2 z$ setzt,

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{\pi^2}{1\cdot 2\cdot 3} z + \frac{\pi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} z^2 + \frac{\pi^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} z^3 + \cdots \\
&= (1+z)\left(1+\frac{1}{4}z\right)\left(1+\frac{1}{9}z\right)\left(1+\frac{1}{16}z\right)\left(1+\frac{1}{25}z\right)\cdots
\end{aligned}$$

Wendet man nun hierauf die oben angegebene Regel an, so ist:

$$A = \frac{\pi^2}{6}, \quad B = \frac{\pi^4}{120}, \quad C = \frac{\pi^6}{5040}, \quad D = \frac{\pi^8}{362880}, \quad \text{u. s. w.}$$

und es bestimmen sich daher, wenn man

$$\begin{aligned}
P &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \cdots \\
Q &= 1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{36^2} + \cdots \\
R &= 1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{25^3} + \frac{1}{36^3} + \cdots \\
S &= 1 + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{16^4} + \frac{1}{25^4} + \frac{1}{36^4} + \cdots \\
T &= 1 + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{9^5} + \frac{1}{16^5} + \frac{1}{25^5} + \frac{1}{36^5} + \cdots
\end{aligned}$$

u. s. w.

setzt, die Werte dieser Grössen aus A, B, C, D u. s. w. wie folgt:

$$P = \frac{\pi^2}{6}$$

$$Q = \frac{\pi^4}{90}$$

$$R = \frac{\pi^6}{945}$$

$$S = \frac{\pi^8}{9450}$$

$$T = \frac{\pi^{10}}{93555}$$

u. s. w.

§ 168.

Es geht hieraus hervor, dass man die Summen aller unendlichen Reihen, welche in der allgemeinen Form:

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots$$

enthalten sind, mittelst des halben Kreisumfanges π ausdrücken kann, so oft n eine gerade Zahl ist; es steht nämlich immer die Summe einer solchen Reihe zu π^n in einem rationalen Verhältnis. Um aber den Wert dieser Reihen deutlicher vor Augen zu haben, wollen wir einige davon, auf bequemere Weise ausgedrückt, hierher setzen:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{2^0}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{1}\pi^2$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots=\frac{2^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{1}{3}\pi^4$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\cdots=\frac{2^4}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 7}\cdot\frac{1}{3}\pi^6$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\cdots=\frac{2^6}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 9}\cdot\frac{3}{5}\pi^8$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\cdots=\frac{2^8}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 11}\cdot\frac{5}{3}\pi^{10}$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+\cdots=\frac{2^{10}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 13}\cdot\frac{691}{105}\pi^{12}$$

$$1+\frac{1}{2^{14}}+\frac{1}{3^{14}}+\frac{1}{4^{14}}+\frac{1}{5^{14}}+\cdots=\frac{2^{12}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 15}\cdot\frac{35}{1}\pi^{14}$$

$$1+\frac{1}{2^{16}}+\frac{1}{3^{16}}+\frac{1}{4^{16}}+\frac{1}{5^{16}}+\cdots=\frac{2^{14}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 17}\cdot\frac{3617}{15}\pi^{16}$$

$$1+\frac{1}{2^{18}}+\frac{1}{3^{18}}+\frac{1}{4^{18}}+\frac{1}{5^{18}}+\cdots=\frac{2^{16}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 19}\cdot\frac{43867}{21}\pi^{18}$$

$$1+\frac{1}{2^{20}}+\frac{1}{3^{20}}+\frac{1}{4^{20}}+\frac{1}{5^{20}}+\cdots=\frac{2^{18}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 21}\cdot\frac{1222277}{55}\pi^{20}$$

$$1+\frac{1}{2^{22}}+\frac{1}{3^{22}}+\frac{1}{4^{22}}+\frac{1}{5^{22}}+\cdots=\frac{2^{20}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 23}\cdot\frac{854513}{3}\pi^{22}$$

$$1+\frac{1}{2^{24}}+\frac{1}{3^{24}}+\frac{1}{4^{24}}+\frac{1}{5^{24}}+\cdots=\frac{2^{22}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 25}\cdot\frac{1181820455}{273}\pi^{24}$$

$$1+\frac{1}{2^{26}}+\frac{1}{3^{26}}+\frac{1}{4^{26}}+\frac{1}{5^{26}}+\cdots=\frac{2^{24}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 27}\cdot\frac{76977927}{1}\pi^{26}$$

Bis hierher liessen sich die Coefficienten der Potenzen von π mittelst eines an einem andern Orte zu erklärenden Kunstgriffes fortsetzen. Ich habe dieselben indess aus dem Grunde hier beigebracht, weil die beim ersten Anblick ziemlich unregelmässige Reihe der Brüche 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{691}{105}$, $\frac{35}{1}$ u. s. w. bei sehr vielen Gelegenheiten gebraucht wird.

§ 169.

Behandeln wir die im § 157 gefundene Gleichung, nach welcher

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots$$
$$=\left(1+\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{49\pi^2}\right)\cdots$$

ist, auf dieselbe Weise, so wird, wenn $x^2=\frac{\pi^2}{4}z$ gesetzt wird:

$$1+\frac{\pi^2}{1\cdot 2\cdot 4}z+\frac{\pi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 4^2}z^2+\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 4^3}z^3+\cdots$$
$$=(1+z)\left(1+\frac{1}{9}z\right)\left(1+\frac{1}{25}z\right)\left(1+\frac{1}{49}z\right)\cdots,$$

und somit:

$$A=\frac{\pi^2}{1\cdot 2\cdot 4},\quad B=\frac{\pi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 4^2},\quad C=\frac{\pi^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 4^3},\ \text{u. s. w.}$$

Setzt man daher:

$$P=1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+\cdots$$
$$Q=1+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{25^2}+\frac{1}{49^2}+\frac{1}{81^2}+\cdots$$
$$R=1+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{25^3}+\frac{1}{49^3}+\frac{1}{81^3}+\cdots$$
$$S=1+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{25^4}+\frac{1}{49^4}+\frac{1}{81^4}+\cdots$$

u. s. w.,

so findet man für P, Q, R, S u. s. w. die Werte:

$$P=\frac{1}{1}\frac{\pi^2}{2^3}$$
$$Q=\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\pi^4}{2^5}$$
$$R=\frac{16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\frac{\pi^6}{2^7}$$
$$S=\frac{272}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 7}\cdot\frac{\pi^8}{2^9}$$
$$T=\frac{7936}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 9}\cdot\frac{\pi^{10}}{2^{11}}$$
$$V=\frac{353792}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 11}\cdot\frac{\pi^{12}}{2^{13}}$$
$$W=\frac{22368256}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 13}\cdot\frac{\pi^{14}}{2^{15}}.$$

u. s. w.

§ 170.

Diese Summen der Potenzen der ungeraden Zahlen lassen sich auch aus den früheren Summen finden, in welchen alle Zahlen vorkamen. Ist nämlich:

$$M = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \cdots,$$

so erhält man hieraus durch Multiplikation mit $\frac{1}{2^n}$:

$$\frac{M}{2^n} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} + \cdots,$$

in welcher Reihe nunmehr nur alle geraden Zahlen vorkommen. Zieht man daher die letztere von der ersten ab, so erhält man eine Reihe, welche nur die ungeraden Zahlen enthält, nämlich:

$$M - \frac{M}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n} M = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \cdots$$

Multiplicirt man aber $\frac{M}{2^n}$ mit 2 und subtrahirt es sodann von M, so erhält man eine Reihe mit abwechselnden Vorzeichen, nämlich:

$$M - \frac{2M}{2^n} = \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} M = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \cdots$$

Nach den angegebenen Regeln kann man daher die Summen von Reihen wie:

$$1 \pm \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \pm \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} \pm \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} \pm \cdots$$

$$1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{11^n} + \cdots$$

bestimmen, sobald n eine gerade Zahl ist, und zwar sind diese Summen gleich $A\pi^n$, wo A eine rationale Zahl bedeutet.

§ 171.

Ausserdem aber geben die im § 164 abgeleiteten Ausdrücke ebenfalls sehr merkwürdige Reihen. Da nämlich:

$$\cos\frac{v}{2} + \operatorname{tang}\frac{g}{2}\,\sin\frac{v}{2} = \left(1 + \frac{v}{\pi - g}\right)\left(1 - \frac{v}{\pi + g}\right)\left(1 - \frac{v}{3\pi - g}\right)\cdots$$

ist, so wird, wenn wir $v = \frac{x}{n}\pi$ und $g = \frac{m}{n}\pi$ setzen:

$$\left(1 + \frac{x}{n-m}\right)\left(1 - \frac{x}{n+m}\right)\left(1 + \frac{x}{3n-m}\right)\left(1 - \frac{x}{3n+m}\right)\left(1 + \frac{x}{5n-m}\right)\left(1 - \frac{x}{5n+m}\right)\cdots$$

$$= \cos\frac{x\pi}{2n} + \operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n}\sin\frac{x\pi}{2n}$$

$$= 1 + \frac{\pi x}{2n}\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n} - \frac{\pi^2 x^2}{2\cdot 4n^2} - \frac{\pi^3 x^3}{2\cdot 4\cdot 6n^3}\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n} + \frac{\pi^4 x^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8n^4} + \cdots$$

Vergleicht man aber diesen ins Unendliche fortgehenden Ausdruck mit dem des § 165, so erhält man die Werte:

$$A = \frac{\pi}{2n}\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n},\quad B = -\frac{\pi^2}{2\cdot 4n^2},\quad C = -\frac{\pi^3}{2\cdot 4\cdot 6n^3}\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n},\quad D = \frac{\pi^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8n^4}$$

$$E = \frac{\pi^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10n^5}\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n} \text{ u. s. w.}$$

Ferner ist:

$$\alpha = \frac{1}{n-m},\quad \beta = -\frac{1}{n+m},\quad \gamma = \frac{1}{3n-m},\quad \delta = -\frac{1}{3n+m},\quad \varepsilon = \frac{1}{5n-m},$$

$$\zeta = -\frac{1}{5n+m} \text{ u. s. w.}$$

§ 172.

Hieraus ergeben sich nach § 166 folgende Reihen:

$$P = \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} + \frac{1}{3n-m} - \frac{1}{3n+m} + \frac{1}{5n-m} - \frac{1}{5n+m} + \cdots$$

$$Q = \frac{1}{(n-m)^2} + \frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(3n-m)^2} + \frac{1}{(3n+m)^2} + \frac{1}{(5n-m)^2} + \frac{1}{(5n+m)^2} + \cdots$$

$$R = \frac{1}{(n-m)^3} - \frac{1}{(n+m)^3} + \frac{1}{(3n-m)^3} - \frac{1}{(3n+m)^3} + \frac{1}{(5n-m)^3} - \frac{1}{(5n+m)^3} + \cdots$$

$$S = \frac{1}{(n-m)^4} + \frac{1}{(n+m)^4} + \frac{1}{(3n-m)^4} + \frac{1}{(3n+m)^4} + \frac{1}{(5n-m)^4} + \frac{1}{(5n+m)^4} + \cdots$$

$$T = \frac{1}{(n-m)^5} - \frac{1}{(n+m)^5} + \frac{1}{(3n-m)^5} - \frac{1}{(3n+m)^5} + \frac{1}{(5n-m)^5} - \frac{1}{(5n+m)^5} + \cdots$$

$$V = \frac{1}{(n-m)^6} + \frac{1}{(n+m)^6} + \frac{1}{(3n-m)^6} + \frac{1}{(3n+m)^6} + \frac{1}{(5n-m)^6} + \frac{1}{(5n+m)^6} + \cdots$$

u. s. w.,

und zwar wird, wenn man $\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n} = k$ setzt:

$$P = A = \frac{k\pi}{2n} \qquad = \frac{k\pi}{2n}$$

$$Q = \frac{(k^2+1)\pi^2}{4n^2} \qquad = \frac{(2k^2+2)\pi^2}{2\cdot 4\cdot n^2}$$

$$R = \frac{(k^3+k)\pi^3}{8n^3} \qquad = \frac{(6k^3+6k)\pi^3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot n^3}$$

$$S = \frac{(3k^4+4k^2+1)\pi^4}{48n^4} = \frac{(24k^4+32k^3+8)\pi^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot n^4}$$

$$T = \frac{(3k^5+5k^3+2k)\pi^5}{96n^5} = \frac{(120k^5+200k^3+80k)\pi^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot n^5}$$

u. s. w.

§ 173.

Setzt man ebenso in der letzten Formel des § 164:

$$\cos\frac{v}{2} + \cot\frac{g}{2}\sin\frac{v}{2}$$

$$= \left(1+\frac{v}{g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{2\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{4\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{4\pi+g}\right)\cdots$$

$$v = \frac{x}{n}\pi,\quad g = \frac{m}{n}\pi \text{ und } \operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n} = k, \text{ also } \cot\frac{g}{2} = \frac{1}{k},$$

so ergiebt sich:

$$\cos\frac{\pi x}{2n} + \frac{1}{k}\sin\frac{\pi x}{2n}$$

$$= 1 + \frac{\pi x}{2nk} - \frac{\pi^2x^2}{2\cdot 4\cdot n^2} - \frac{\pi^3x^3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot n^3k} + \frac{\pi^4x^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot n^4} + \frac{\pi^5x^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot n^5k} - \cdots$$

$$= \left(1+\frac{x}{m}\right)\left(1-\frac{x}{2n-m}\right)\left(1+\frac{x}{2n+m}\right)\left(1-\frac{x}{4n-m}\right)\left(1+\frac{x}{4n+m}\right)\cdots$$

Vergleicht man dies mit der allgemeinen Formel des § 165, so folgt

$$A = \frac{\pi}{2nk},\quad B = -\frac{\pi^2}{2\cdot 4\cdot n^2},\quad C = -\frac{\pi^3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot n^3k},\quad D = \frac{\pi^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot n^4},$$

$$E = \frac{\pi^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot n^5k}$$

und ferner:

$$\alpha = \frac{1}{m},\quad \beta = -\frac{1}{2n-m},\quad \gamma = \frac{1}{2n+m},\quad \delta = -\frac{1}{4n-m},\quad \varepsilon = \frac{1}{4n+m},\ \text{u. s. w.}$$

§ 174.

Hieraus kann man nach § 166 folgende Reihen bilden und deren Summen angeben:

$$P = \frac{1}{m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{4n-m} + \frac{1}{4n+m} - \cdots$$

$$Q = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(2n-m)^2} + \frac{1}{(2n+m)^2} + \frac{1}{(4n-m)^2} + \frac{1}{(4n+m)^2} + \cdots$$

$$R = \frac{1}{m^3} - \frac{1}{(2n-m)^3} + \frac{1}{(2n+m)^3} - \frac{1}{(4n-m)^3} + \frac{1}{(4n+m)^3} - \cdots$$

$$S = \frac{1}{m^4} + \frac{1}{(2n-m)^4} + \frac{1}{(2n+m)^4} + \frac{1}{(4n-m)^4} + \frac{1}{(4n+m)^4} + \cdots$$

$$T = \frac{1}{m^5} - \frac{1}{(2n-m)^5} + \frac{1}{(2n+m)^5} - \frac{1}{(4n-m)^5} + \frac{1}{(4n+m)^5} - \cdots$$

u. s. w.

Die Summen dieser Reihen aber sind:

$$P = A = \frac{\pi}{2nk} \qquad = \frac{1\cdot\pi}{2nk}$$

$$Q = \frac{(k^2+1)\pi^2}{4n^2k^2} \qquad = \frac{(2+2k^2)\pi^2}{2\cdot 4\cdot n^2k^2}$$

$$R = \frac{(k^2+1)\pi^3}{8n^3k^3} \qquad = \frac{(6+6k^2)\pi^3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot n^3k^3}$$

$$S = \frac{(k^4+4k^2+3)\pi^4}{48n^4k^4} \qquad = \frac{(24+32k^2+8k^4)\pi^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot n^4k^4}$$

$$T = \frac{(2k^4+5k^2+3)\pi^5}{96n^5k^5} \qquad = \frac{(120+200k^2+80k^4)\pi^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot n^5k^5}$$

$$V = \frac{(2k^6+17k^4+30k^2+15)\pi^6}{960n^6k^6} = \frac{(720+1440k^2+816k^4+96k^6)\pi^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot n^6k^6}$$

u. s. w.

§ 175.

Es ist der Mühe wert, aus diesen allgemeinen Reihen einige besondere Fälle abzuleiten, und zwar erhält man dieselben, wenn man das Verhältnis $\frac{m}{n}$ in Zahlen ausdrückt. Setzt man also zunächst $m = 1$ und $n = 2$, so dass $k = \operatorname{tang}\frac{\pi}{4} = \operatorname{tang} 45° = 1$ ist, so fallen die beiden Arten von Reihen zusammen, und es wird:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \cdots$$

$$\frac{\pi^3}{32} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \cdots$$

$$\frac{\pi^4}{96} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \cdots$$

$$\frac{5\pi^5}{1536} = 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \cdots$$

$$\frac{\pi^6}{960} = 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \cdots$$

u. s. w.

Von diesen Reihen haben wir die erste schon im § 140, von den andern aber diejenigen, in denen die Exponenten gerade Zahlen sind, soeben im § 169 abgeleitet. Diejenigen jedoch, in denen die Exponenten ungerade Zahlen sind, treten hier zum ersten Male auf. Es geht hieraus also hervor, dass man auch die Summen solcher Reihen wie:

$$1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \frac{1}{7^{2n+1}} + \frac{1}{9^{2n+1}} - \cdots$$

durch den Werth von π auszudrücken vermag.

§ 176.

Ist jetzt $m = 1$ und $n = 3$, also $k = \operatorname{tang}\frac{\pi}{6} = \operatorname{tang} 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, so gehen die Reihen des § 172 in die folgenden über:

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \cdots.$$

$$\frac{\pi^2}{27} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{16^2} + \cdots.$$

$$\frac{\pi^3}{162\sqrt{3}} = \frac{1}{2^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{8^3} - \frac{1}{10^3} + \frac{1}{14^3} - \frac{1}{16^3} + \cdots.$$

u. s. w.

oder:

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots.$$

$$\frac{4\pi^2}{27} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \cdots.$$

$$\frac{4\pi^3}{81\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{8^3} + \cdots.$$

u. s. w.

In diesen Reihen fehlen alle durch 3 teilbaren Zahlen. Man kann diejenigen von ihnen, in denen die Exponenten gerade Zahlen sind, aus den früher gefundenen auf folgende Weise ableiten. Es ist nach § 167:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots,$$

folglich:

$$\frac{\pi^2}{6 \cdot 9} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{15^2} + \cdots.$$

Zieht man nun diese letzte Reihe, welche alle durch 3 teilbaren Zahlen enthält, von der ersten ab, so bleiben alle durch 3 nicht teilbaren Zahlen übrig und es wird somit:

$$\frac{8\pi^2}{54} = \frac{4\pi^2}{27} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots,$$

wie vorher.

§ 177.

Macht man dieselbe Substitution $m = 1$, $n = 3$, $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ in den Formeln des § 174, so erhält man folgende Reihen:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \cdots$$

$$\frac{\pi^2}{9} = 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{17^2} + \cdots$$

$$\frac{\pi^3}{18\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{11^3} + \frac{1}{13^3} - \frac{1}{17^3} + \cdots.$$

u. s. w.,

und zwar treten hier alle ungeraden Zahlen mit Ausnahme der durch 3 teilbaren auf. Uebrigens kann man auch hier diejenigen Reihen, in denen gerade Exponenten vorkommen, aus schon bekannten Reihen ableiten. Da nämlich nach § 169

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \cdots$$

ist, so wird:

$$\frac{\pi^2}{8 \cdot 9} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{21^2} + \frac{1}{27^2} + \cdots,$$

welche Reihe nur alle ungeraden durch 3 teilbaren Zahlen enthält. Zieht man dieselbe also von der vorhergehenden ab, so bleibt die Reihe aller ungeraden durch 3 nicht teilbaren Zahlen übrig, und es ist wie vorher:

$$\frac{\pi^2}{9} = 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \cdots.$$

§ 178.

Wenn man die im § 172 und im § 174 gefundenen Reihen zu einander addirt oder von einander subtrahirt, so erhält man andere merkwürdige Reihen. So wird z. B.:

$$\frac{k\pi}{2n}+\frac{\pi}{2nk}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}+\cdots=\frac{(k^2+1)\pi}{2nk}.$$

Da nun aber:

$$k=\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n}=\frac{\sin\frac{m\pi}{2n}}{\cos\frac{m\pi}{2n}},$$

folglich

$$1+k^2=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{m\pi}{2n}\right)} \quad \text{und} \quad \frac{2k}{1+k^2}=2\sin\frac{m\pi}{2n}\cos\frac{m\pi}{2n}=\sin\frac{m\pi}{n}$$

ist, so erhält man, wenn man diesen Wert oben einsetzt:

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}+\frac{1}{3n-m}-\frac{1}{3n+m}-$$

Analog findet man:

$$\frac{\pi}{2nk}-\frac{k\pi}{2n}=\frac{(1-k^2)\pi}{2nk}$$

$$=\frac{1}{m}-\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}-\frac{1}{3n-m}+\frac{1}{3n+m}-$$

Da aber:

$$\frac{2k}{1-k^2}=\operatorname{tang}2\frac{m\pi}{2n}=\operatorname{tang}\frac{m\pi}{n}=\frac{\sin\frac{m\pi}{n}}{\cos\frac{m\pi}{n}}$$

ist, so wird:

$$\frac{\pi\cos\frac{m\pi}{n}}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{m}-\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}-\frac{1}{3n-m}+\cdots$$

Die hieraus sich ergebenden Reihen der Quadrate und der höheren Potenzen kann man indessen leichter durch Differentiation aus diesen beiden Reihen ableiten.

§ 179.

Da wir im Vorigen die Fälle, wo $m=1$ und $n=2$ oder $=3$ ist, bereits betrachtet haben, so wollen wir jetzt $m=1$ und $n=4$ setzen. Dann ist:

$$\sin\frac{m\pi}{n}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \cos\frac{m\pi}{n}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Mithin:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\cdots$$

und

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\cdots$$

Ist ferner $m=1$ und $n=8$, so ist:

$$\frac{m\pi}{n}=\frac{\pi}{8} \quad \text{und} \quad \sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}},\ \cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}},\ \frac{\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}}=1+\sqrt{2},$$

folglich:

$$\frac{\pi}{4\sqrt{2-\sqrt{2}}}=1+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{23}-\cdots$$

$$\frac{\pi}{8(\sqrt{2}-1)}=1-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{23}+\cdots$$

Setzt man endlich $m=3$ und $n=8$, so wird:

$$\frac{m\pi}{n}=\frac{3\pi}{8}, \quad \text{folglich} \quad \sin\frac{3\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}},\quad \cos\frac{3\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}},$$

$$\frac{\cos\frac{3\pi}{8}}{\sin\frac{3\pi}{8}}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}.$$

Es ergeben sich somit die Reihen:

$$\frac{\pi}{4\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}-\cdots$$

$$\frac{\pi}{8(\sqrt{2}+1)}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{19}-\frac{1}{21}+\cdots$$

§ 180.

Combinirt man diese Reihen mit einander, so ergeben sich die folgenden:

$$\frac{\pi\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\cdots$$

$$\frac{\pi\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\cdots$$

$$\frac{\pi(\sqrt{4+2\sqrt{2}}+\sqrt{2}-1)}{8}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\cdots$$

$$\frac{\pi(\sqrt{4+2\sqrt{2}}-\sqrt{2}+1)}{8}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\cdots$$

$$\frac{\pi(\sqrt{2}+1+\sqrt{4-2\sqrt{2}})}{8}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\cdots$$

$$\frac{\pi(\sqrt{2}+1-\sqrt{4-2\sqrt{2}})}{8}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}-\cdots$$

Auf ähnliche Weise kann man, indem man $n=16$ und $m=1, 3, 5$ oder 7 annimmt, noch weiter fortgehen und so die Summen der aus den Brüchen $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}\cdots$ gebildeten Reihen finden, in denen die Vorzeichen $+$ und $-$ nach noch anderen Gesetzen mit einander abwechseln.

§ 181.

Wenn man in den Reihen des § 178 je zwei Glieder zu einem zusammenfasst, so erhält man aus der ersten:

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{m}+\frac{2m}{n^2-m^2}-\frac{2m}{4n^2-m^2}+\frac{2m}{9n^2-m^2}-\frac{2m}{16n^2-m^2}+\cdots$$

und daher:

$$\frac{1}{n^2-m^2}-\frac{1}{4n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}-\cdots=\frac{\pi}{2mn\sin\frac{m\pi}{n}}-\frac{1}{2m^2}.$$

Die andere Reihe hingegen giebt:

$$\frac{\pi}{n\operatorname{tang}\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{m}-\frac{2m}{n^2-m^2}-\frac{2m}{4n^2-m^2}-\frac{2m}{9n^2-m^2}-\cdots$$

oder:

$$\frac{1}{n^2-m^2}+\frac{1}{4n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}+\cdots=\frac{1}{2m^2}-\frac{\pi}{2mn\operatorname{tang}\frac{m\pi}{n}}$$

Durch Addition dieser beiden Reihen entsteht sodann die folgende:

$$\frac{1}{n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}+\frac{1}{25n^2-m^2}+\cdots=\frac{\pi\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n}}{4mn}.$$

Lässt man in dieser Reihe $n=1$ und m irgend eine gerade Zahl, also $m=2k$ sein, so wird wegen $\operatorname{tang} k\pi=0$ immer, den Fall $k=0$ allein ausgenommen, die Gleichung stattfinden:

$$\frac{1}{1-4k^2}+\frac{1}{9-4k^2}+\frac{1}{25-4k^2}+\frac{1}{49-4k^2}+\cdots=0.$$

Ist dagegen $n=2$ und m irgend eine ungerade Zahl $2k+1$, so folgt wegen $\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{m\pi}{n}}=0$ aus der zweiten Reihe:

$$\frac{1}{4-(2k+1)^2}+\frac{1}{16-(2k+1)^2}+\frac{1}{36-(2k+1)^2}+\cdots=\frac{1}{2(2k+1)^2}.$$

§ 182.

Multiplicirt man die gefundenen Reihen mit n^2 und setzt dann $\frac{m}{n}=p$, so erhalten sie die Form:

$$\frac{1}{1-p^2}-\frac{1}{4-p^2}+\frac{1}{9-p^2}-\frac{1}{16-p^2}+\cdots=\frac{\pi}{2p\sin p\pi}-\frac{1}{2p^2}$$

$$\frac{1}{1-p^2}+\frac{1}{4-p^2}+\frac{1}{9-p^2}+\frac{1}{16-p^2}+\cdots=\frac{1}{2p^2}-\frac{\pi}{2p\operatorname{tang}p\pi},$$

und setzt man hierin $p^2=a$, so entstehen daraus die Reihen:

$$\frac{1}{1-a}-\frac{1}{4-a}+\frac{1}{9-a}-\frac{1}{16-a}+\cdots=\frac{\pi\sqrt{a}}{2a\sin\pi\sqrt{a}}-\frac{1}{2a}$$

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{4-a}+\frac{1}{9-a}+\frac{1}{16-a}+\cdots=\frac{1}{2a}-\frac{\pi\sqrt{a}}{2a\operatorname{tang}\pi\sqrt{a}}.$$

Wofern also nur a keine negative Zahl oder eine ganze Quadratzahl ist, kann die Summe dieser Reihe durch den Kreis ausgedrückt werden.

§ 183.

Da wir oben gezeigt haben, dass sich die imaginären Exponentialgrössen auf den Sinus und Cosinus von Kreisbogen zurückführen lassen, so sind wir auch im Stande, die Summen dieser Reihen in dem Falle anzugeben, wo a eine negative Zahl ist. Denn da

$$e^{x\sqrt{-1}}=\cos x+\sqrt{-1}\sin x$$

$$e^{-x\sqrt{-1}}=\cos x-\sqrt{-1}\sin x$$

ist, so wird umgekehrt, wenn $y\sqrt{-1}$ für x gesetzt wird:

$$\cos y\sqrt{-1} = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2}$$

$$\sin y\sqrt{-1} = \frac{e^{-y}-e^{y}}{2\sqrt{-1}}.$$

Wenn daher $a=-b$ und $y=\pi\sqrt{b}$ ist, so ist:

$$\cos\pi\sqrt{-b} = \frac{e^{-\pi\sqrt{b}}+e^{\pi\sqrt{b}}}{2}$$

$$\sin\pi\sqrt{-b} = \frac{e^{-\pi\sqrt{b}}-e^{\pi\sqrt{b}}}{2\sqrt{-1}}$$

und:

$$\operatorname{tang}\pi\sqrt{-b} = \frac{e^{-\pi\sqrt{b}}-e^{\pi\sqrt{b}}}{\left(e^{-\pi\sqrt{b}}+e^{\pi\sqrt{b}}\right)\sqrt{-1}}.$$

Folglich ist:

$$\frac{\pi\sqrt{-b}}{\sin\pi\sqrt{-b}} = \frac{-2\pi\sqrt{b}}{e^{-\pi\sqrt{b}}-e^{\pi\sqrt{b}}}$$

$$\frac{\pi\sqrt{-b}}{\operatorname{tang}\pi\sqrt{-b}} = \frac{-\pi\sqrt{b}\left(e^{-\pi\sqrt{b}}+e^{\pi\sqrt{b}}\right)}{e^{-\pi\sqrt{b}}-e^{\pi\sqrt{b}}}.$$

Dies vorausgeschickt, wird jetzt:

$$\frac{1}{1+b}-\frac{1}{4+b}+\frac{1}{9+b}-\frac{1}{16+b}+\cdots = \frac{1}{2b}-\frac{\pi\sqrt{b}}{\left(e^{-\pi\sqrt{b}}-e^{\pi\sqrt{b}}\right)b}$$

$$\frac{1}{1+b}+\frac{1}{4+b}+\frac{1}{9+b}+\frac{1}{16+b}+\cdots = \frac{\left(e^{-\pi\sqrt{b}}+e^{\pi\sqrt{b}}\right)\pi\sqrt{b}}{2\left(e^{-\pi\sqrt{b}}-e^{\pi\sqrt{b}}\right)}-\frac{1}{2b}$$

Eben diese Reihen hätten auch auf dem in diesem Capitel eingeschlagenen Wege aus § 162 abgeleitet werden können. Da man jedoch auf diese Weise ein Beispiel für die Zurückführung der Sinus und Cosinus imaginärer Kreisbogen auf reelle Exponentialgrössen erhielt, so glaubte ich diese Art der Entwicklung der andern vorziehen zu müssen.

11. Capitel.

Von andern unendlichen Ausdrücken für die Bogen und die Sinus.

§ 184.

Da wir im § 158 gesehen haben, dass wenn z irgend einen Kreisbogen bedeutet:

$$\sin z = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{16\pi^2}\right)\cdots$$

und

$$\cos z = \left(1-\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{25\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{49\pi^2}\right)\cdots$$

ist, so ist auch, wenn wir den Bogen $z=\frac{m\pi}{n}$ setzen:

$$\sin\frac{m\pi}{n} = \frac{m\pi}{n}\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{4n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{9n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{16n^2}\right)\cdots$$

$$\cos\frac{m\pi}{n} = \left(1-\frac{4m^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{9n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{25n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{49n^2}\right)\cdots$$

oder, wenn wir $2n$ statt n schreiben:

$$\sin\frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n}\left(\frac{4n^2-m^2}{4n^2}\right)\left(\frac{16n^2-m^2}{16n^2}\right)\left(\frac{36n^2-m^2}{36n^2}\right)\left(\frac{64n^2-m^2}{64n^2}\right)\cdots$$

$$\cos\frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{n^2-m^2}{n^2}\right)\left(\frac{9n^2-m^2}{9n^2}\right)\left(\frac{25n^2-m^2}{25n^2}\right)\left(\frac{49n^2-m^2}{49n^2}\right)\cdots$$

Zerlegt man nun jeden dieser Factoren in einfache Factoren, so wird:

$$\sin\frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n}\left(\frac{2n-m}{2n}\right)\left(\frac{2n+m}{2n}\right)\left(\frac{4n-m}{4n}\right)\left(\frac{4n+m}{4n}\right)\left(\frac{6n-m}{6n}\right)\cdots$$

$$\cos\frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{n-m}{n}\right)\left(\frac{n+m}{n}\right)\left(\frac{3n-m}{3n}\right)\left(\frac{3n+m}{3n}\right)\left(\frac{5n-m}{5n}\right)\left(\frac{5n+m}{5n}\right)\cdots$$

Setzt man endlich $n-m$ statt m, so erhält man, da

$$\sin\frac{(n-m)\pi}{2n} = \cos\frac{m\pi}{2n} \quad\text{und}\quad \cos\frac{(n-m)\pi}{2n} = \sin\frac{m\pi}{2n}$$

ist, die folgenden Ausdrücke:

$$\cos\frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{(n-m)\pi}{2n}\right)\left(\frac{n+m}{2n}\right)\left(\frac{3n-m}{2n}\right)\left(\frac{3n+m}{4n}\right)\left(\frac{5n-m}{4n}\right)\left(\frac{5n+m}{6n}\right)\cdots$$

$$\sin\frac{m\pi}{2n} = \frac{m}{n}\left(\frac{2n-m}{n}\right)\left(\frac{2n+m}{3n}\right)\left(\frac{4n-m}{3n}\right)\left(\frac{4n+m}{5n}\right)\left(\frac{6n-m}{5n}\right)\cdots$$

§ 185.

Da wir nun sowohl für den Sinus als für den Cosinus des Winkels $\frac{m\pi}{2n}$ zwei Ausdrücke haben, so erhält man, wenn man sie durch einander dividirt:

$$1 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{8}\cdots,$$

folglich:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot10\cdot10\cdot12\cdot12\ldots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\cdot11\cdot11\cdot13\ldots},$$

welchen Wert Wallis in seiner *Arithmetica infinitorum* für den Kreisumfang gegeben hat. Aus dem ersten Ausdrucke für den Sinus kann man aber noch unzählig viele andere ähnliche Ausdrücke ableiten; denn man findet daraus:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{n}{m}\sin\frac{m\pi}{2n}\cdot\left(\frac{2n}{2n-m}\right)\left(\frac{2n}{2n+m}\right)\left(\frac{4n}{4n-m}\right)\left(\frac{4n}{4n+m}\right)\left(\frac{6n}{6n-m}\right)\cdots$$

und dieser Ausdruck giebt für $\frac{m}{n} = 1$ die Wallis'sche Formel für π. Ist aber $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$, so wird, weil $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{16}{17}\cdots,$$

und lässt man $\frac{m}{n} = \frac{1}{3}$ sein, so folgt wegen $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{18}{17}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{24}{23}\cdots$$

Dividirt man den Wallis'schen Ausdruck durch den, für welchen $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ ist, so ergiebt sich:

$$\sqrt{2} = \frac{2\cdot2\cdot6\cdot6\cdot10\cdot10\cdot14\cdot14\cdot18\cdot18\ldots}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13\cdot15\cdot17\cdot19\ldots}.$$

§ 186.

Da die Tangente eines jeden Winkels gleich dem Quotienten aus seinem Sinus und Cosinus ist, so kann man auch die Tangente durch ein solches Product von unendlich vielen Factoren darstellen. Wenn nämlich der erste Ausdruck für den Sinus durch den zweiten für den Cosinus dividirt wird, so ergiebt sich:

$$\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n} = \frac{m}{n-m}\left(\frac{2n-m}{n+m}\right)\left(\frac{2n+m}{3n-m}\right)\left(\frac{4n-m}{3n+m}\right)\left(\frac{4n+m}{5n-m}\right)\cdots$$

$$\cot\frac{m\pi}{2n} = \frac{n-m}{m}\left(\frac{n+m}{2n-m}\right)\left(\frac{3n-m}{2n+m}\right)\left(\frac{3n+m}{4n-m}\right)\left(\frac{5n-m}{4n+m}\right)\cdots$$

Ebenso findet man für die Sekanten und Cosekanten:

$$\sec\frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{n}{n-m}\right)\left(\frac{n}{n+m}\right)\left(\frac{3n}{3n-m}\right)\left(\frac{3n}{3n+m}\right)\left(\frac{5n}{5n-m}\right)\left(\frac{5n}{5n+m}\right)\cdots$$

$$\operatorname{cosec}\frac{m\pi}{2n} = \frac{n}{m}\left(\frac{n}{2n-m}\right)\left(\frac{3n}{2n+m}\right)\left(\frac{3n}{4n-m}\right)\left(\frac{5n}{4n+m}\right)\left(\frac{5n}{6n-m}\right)\cdots$$

Wenn man aber die beiden andern Formeln für den Sinus und Cosinus nimmt, so wird:

$$\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{m}{n-m}\cdot\frac{1(2n-m)}{2(n+m)}\cdot\frac{3(2n+m)}{2(3n-m)}\cdot\frac{3(4n-m)}{4(3n+m)}\cdots$$

$$\cot\frac{m\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{n-m}{m}\cdot\frac{1(n+m)}{2(2n-m)}\cdot\frac{3(3n-m)}{2(2n+m)}\cdot\frac{3(3n+m)}{4(4n-m)}\cdots$$

$$\sec\frac{m\pi}{2n} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{n}{n-m}\cdot\frac{2n}{n+m}\cdot\frac{2n}{3n-m}\cdot\frac{4n}{3n+m}\cdot\frac{4n}{5n-m}\cdots$$

$$\operatorname{cosec}\frac{m\pi}{2n} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{2n}{2n-m}\cdot\frac{2n}{2n+m}\cdot\frac{4n}{4n-m}\cdot\frac{4n}{4n+m}\cdots$$

§ 187.

Wenn man k für m schreibt, so findet man für den Sinus und Cosinus des Winkels $\frac{k\pi}{2n}$ ähnliche Ausdrücke wie vorher, und wenn man durch diese jene früheren dividirt, so ergeben sich die Ausdrücke:

$$\frac{\sin\frac{m\pi}{2n}}{\sin\frac{k\pi}{2n}} = \frac{m}{k}\cdot\frac{2n-m}{2n-k}\cdot\frac{2n+m}{2n+k}\cdot\frac{4n-m}{4n-k}\cdot\frac{4n+m}{4n+k}\cdots$$

$$\frac{\sin\frac{m\pi}{2n}}{\cos\frac{k\pi}{2n}} = \frac{m}{n-k}\cdot\frac{2n-m}{n+k}\cdot\frac{2n+m}{3n-k}\cdot\frac{4n-m}{3n+k}\cdot\frac{4n+m}{5n-k}\cdots$$

$$\frac{\cos\frac{m\pi}{2n}}{\sin\frac{k\pi}{2n}}=\frac{n-m}{k}\cdot\frac{n+m}{2n-k}\cdot\frac{3n-m}{2n+k}\cdot\frac{3n+m}{4n-k}\cdot\frac{5n-m}{4n+k}\cdots$$

$$\frac{\cos\frac{m\pi}{2n}}{\sin\frac{k\pi}{2n}}=\frac{n-m}{n-k}\cdot\frac{n+m}{n+k}\cdot\frac{3n-m}{3n-k}\cdot\frac{3n+m}{3n+k}\cdot\frac{5n-m}{5n-k}\cdots$$

Nimmt man daher für $\frac{k\pi}{2n}$ einen Winkel an, dessen Sinus und Cosinus gegeben sind, so kann man aus diesen den Sinus und Cosinus irgend eines andern Winkels mittelst der angeführten Formeln bestimmen.

§ 188.

Umgekehrt kann man nun auch die wahren Werte solcher Producte von unendlich vielen Factoren entweder mittelst des Kreisumfanges oder mittelst des Sinus und Cosinus gegebener Winkel angeben, und zwar ist dies an und für sich von nicht geringer Bedeutung, weil man bis jetzt noch keine Hülfsmittel weiter kennt, die Werte solcher unendlichen Producte zu bestimmen. Im Uebrigen aber gewähren diese Ausdrücke wenig Nutzen, wenn es gilt, die Werte von π oder des Sinus und Cosinus eines Winkels $\frac{m\pi}{2n}$ näherungsweise zu berechnen. Denn wenn auch die Multiplikation der in Decimalbrüchen dargestellten Factoren des Products $\frac{\pi}{2}=2\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\left(1-\frac{1}{49}\right)\cdots$ ohne jede Schwierigkeit ausgeführt werden kann, so müsste man doch eine sehr grosse Menge von Gliedern berechnen, wenn man auch nur auf zehn Stellen den Wert von π richtig finden wollte.

§ 189.

Dagegen gewähren derartige Ausdrücke, ob sie gleich ins Unendliche fortgehen, bei der **Berechnung der Logarithmen** ausserordentlichen Nutzen; ja es würde ohne dieselben diese Berechnung mit den grössten Schwierigkeiten verbunden sein. Zunächst nämlich erhält man, da

$$\pi=4\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\left(1-\frac{1}{49}\right)\cdots$$

ist, wenn man beiderseits die Logarithmen nimmt:

$$\log\pi=\log 4+\log\left(1-\frac{1}{9}\right)+\log\left(1-\frac{1}{25}\right)+\log\left(1-\frac{1}{49}\right)+\cdots$$

oder auch:

$$\log\pi=\log 2-\log\left(1-\frac{1}{4}\right)-\log\left(1-\frac{1}{16}\right)-\log\left(1-\frac{1}{36}\right)-\cdots,$$

und zwar ist es hierbei gleichgiltig, ob man die gemeinen oder die hyperbolischen Logarithmen anwendet. Da man indessen die gemeinen Logarithmen auf leichte Weise aus den hyperbolischen erhalten kann, so wird man sich am besten des erwähnten vortrefflichen Hülfsmittels bei der Bestimmung des hyperbolischen Logarithmus von π bedienen.

§ 190.

Da nun bei Anwendung der **hyperbolischen** Logarithmen:

$$\log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots$$

ist, so erhält man, wenn man die einzelnen Glieder nach dieser Formel entwickelt:

$$\begin{aligned}\log\pi=\log 4&-\frac{1}{9}-\frac{1}{2\cdot 9^2}-\frac{1}{3\cdot 9^3}-\frac{1}{4\cdot 9^4}-\cdots\\&-\frac{1}{25}-\frac{1}{2\cdot 25^2}-\frac{1}{3\cdot 25^3}-\frac{1}{4\cdot 25^4}-\cdots\\&-\frac{1}{49}-\frac{1}{2\cdot 49^2}-\frac{1}{3\cdot 49^3}-\frac{1}{4\cdot 49^4}-\cdots\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Wenn man in diesen unendlich vielen Reihen die vertikal unter einander stehenden Glieder zusammennimmt, so erhält man Reihen, deren Summen wir schon oben gefunden haben. Setzen wir also der Kürze wegen

$$A=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\cdots$$

$$B=1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\cdots$$

$$C=1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{9^6}+\cdots$$

$$D=1+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\frac{1}{9^8}+\cdots$$

u. s. w.,

so ergiebt sich:

$$\log\pi=\log 4-(A-1)-\frac{1}{2}(B-1)-\frac{1}{3}(C-1)-\frac{1}{4}(D-1)-\cdots.$$

Es ist aber, wenn man die oben § 169 gefundenen Summen näherungsweise berechnet:

$$A = 1{,}2337005501361698273543\,1$$
$$B = 1{,}0146780316041920545462\,5$$
$$C = 1{,}0014470766409421219064\,7$$
$$D = 1{,}0001551790252961193029\,8$$
$$E = 1{,}0000170413630448255081\,6$$
$$F = 1{,}0000018858485831195759\,0$$
$$G = 1{,}0000002092405192115001\,0$$
$$H = 1{,}0000000232371573791567\,0$$
$$J = 1{,}0000000025814375566597\,7$$
$$K = 1{,}0000000002868076974555\,8$$
$$L = 1{,}0000000000318667751404\,4$$
$$M = 1{,}0000000000035407229439\,2$$
$$N = 1{,}0000000000003934124669\,1$$
$$O = 1{,}0000000000000437124485\,9$$
$$P = 1{,}0000000000000048569368\,2$$
$$Q = 1{,}0000000000000005396595\,7$$
$$R = 1{,}0000000000000000599621\,7$$
$$S = 1{,}0000000000000000066624\,6$$
$$T = 1{,}0000000000000000007402\,7$$
$$V = 1{,}0000000000000000000822\,5$$
$$W = 1{,}0000000000000000000091\,3$$
$$X = 1{,}0000000000000000000010\,1.$$

Hieraus findet man ohne schwierige Rechnung den **hyperbolischen Logarithmus** von π, nämlich:

$$\log \pi = 1{,}1447298858494001741434\,2\ldots,$$

und multiplicirt man diesen mit 0,43429 ..., so wird der **gemeine Logarithmus** von π:

$$\log \pi = 0{,}49714987269413385435126828829089887\ldots$$

§ 191.

Da wir ferner sowohl für den Sinus wie für den Cosinus des Winkels $\frac{m\pi}{2n}$ einen aus unendlich vielen Factoren bestehenden Ausdruck gefunden haben, so können wir auch den **Logarithmus der beiden trigonometrischen Functionen in bequemer Weise** darstellen. Es ergiebt sich nämlich aus den zuerst (§ 184) gefundenen Formeln:

$$\log\sin\frac{m\pi}{2n} = \log\pi + \log\frac{m}{2n} + \log\left(1-\frac{m^2}{4n^2}\right) + \log\left(1-\frac{m^2}{16n^2}\right) + \log\left(1-\frac{m^2}{36n^2}\right) + \cdots$$

$$\log\cos\frac{m\pi}{2n} = \log\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right) + \log\left(1-\frac{m^2}{9n^2}\right) + \log\left(1-\frac{m^2}{25n^2}\right) + \log\left(1-\frac{m^2}{49n^2}\right) + \cdots$$

Hieraus lassen sich zunächst die hyperbolischen Logarithmen ebenso wie vorher durch sehr stark convergirende Reihen bestimmen. Um aber nicht mehr unendliche Reihen, als nötig sind, anzuwenden, wollen wir die Logarithmen der ersten Glieder nicht in dergleichen Reihen entwickeln. Alsdann ist:

$$\begin{aligned}
\log\sin\frac{m\pi}{2n} = \log\pi + \log m + \log(2n-m) + \log(2n+m) - \log 8 - 3\log n \\
-\frac{m^2}{16n^2} - \frac{m^4}{2\cdot 16^2 n^4} - \frac{m^6}{3\cdot 16^3 n^6} - \frac{m^8}{4\cdot 16^4 n^8} - \cdots \\
-\frac{m^2}{36n^2} - \frac{m^4}{2\cdot 36^2 n^4} - \frac{m^6}{3\cdot 36^3 n^6} - \frac{m^8}{4\cdot 36^4 n^8} - \cdots \\
-\frac{m^2}{64n^2} - \frac{m^4}{2\cdot 64^2 n^4} - \frac{m^6}{3\cdot 64^3 n^6} - \frac{m^8}{4\cdot 64^4 n^8} - \cdots \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log\cos\frac{m\pi}{2n} = \log(n-m) + \log(n+m) - 2\log n \\
-\frac{m^2}{9n^2} - \frac{m^4}{2\cdot 9^2 n^4} - \frac{m^6}{3\cdot 9^3 n^6} - \frac{m^8}{4\cdot 9^4 n^8} - \cdots \\
-\frac{m^2}{25n^2} - \frac{m^4}{2\cdot 25^2 n^4} - \frac{m^6}{3\cdot 25^3 n^6} - \frac{m^8}{4\cdot 25^4 n^8} - \cdots \\
-\frac{m^2}{49n^2} - \frac{m^4}{2\cdot 49^2 n^4} - \frac{m^6}{3\cdot 49^3 n^6} - \frac{m^8}{4\cdot 49^4 n^8} - \cdots \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{aligned}$$

§ 192.

Es kommen also in diesen Reihen nur die **geraden** Potenzen von $\frac{m}{n}$ vor, und diese sind multiplicirt mit Reihen, deren Summen wir schon oben bestimmt haben. Es wird nämlich:

$$\begin{aligned}
\log\sin\frac{m\pi}{2n} = \log m + \log(2n-m) + \log(2n+m) - 3\log n + \log\pi - \log 8 \\
-\frac{m^2}{n^2}\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{12^2}+\cdots\right) \\
-\frac{m^4}{2n^4}\left(\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{12^4}+\cdots\right) \\
-\frac{m^6}{3n^6}\left(\frac{1}{4^6}+\frac{1}{6^6}+\frac{1}{8^6}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{12^6}+\cdots\right) \\
-\frac{m^8}{4n^8}\left(\frac{1}{4^8}+\frac{1}{6^8}+\frac{1}{8^8}+\frac{1}{10^8}+\frac{1}{12^8}+\cdots\right) \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{aligned}$$

$$\log\cos\frac{m\pi}{2n}=\log(n-m)+\log(n+m)-2\log n$$
$$-\frac{m^2}{n^2}\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\cdots\right)$$
$$-\frac{m^4}{2n^4}\left(\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\cdots\right)$$
$$-\frac{m^6}{3n^6}\left(\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{9^6}+\cdots\right)$$
$$-\frac{m^8}{4n^8}\left(\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\frac{1}{9^8}+\cdots\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Summen dieser letzteren Reihen haben wir soeben im § 190 angegeben; die ersteren könnten zwar aus den letzten abgeleitet werden, doch wollen wir ihre Werte, um sie beim Gebrauche leichter zur Hand zu haben, ebenfalls hierher setzen.

§ 193.

Setzt man also der Kürze wegen:

$$\alpha=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots$$
$$\beta=\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{8^4}+\cdots$$
$$\gamma=\frac{1}{2^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{6^6}+\frac{1}{8^6}+\cdots$$
$$\delta=\frac{1}{2^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{6^8}+\frac{1}{8^8}+\cdots$$
u. s. w.,

so sind die angenäherten Werte dieser Reihen:

$$\alpha=0{,}41123351671205660911810$$
$$\beta=0{,}06764520210694613696975$$
$$\gamma=0{,}01589598534350701780804$$
$$\delta=0{,}00392217717264822007570$$
$$\varepsilon=0{,}00097753376477325984898$$
$$\zeta=0{,}00024420070472492872274$$
$$\eta=0{,}00006103889453949332915$$
$$\vartheta=0{,}00001525902225127269977$$
$$\iota=0{,}00000381471182744318008$$
$$\varkappa=0{,}00000095367522617534053$$
$$\lambda=0{,}00000023841863595259154$$
$$\mu=0{,}00000005960464832831555$$
$$\nu=0{,}00000001490116141589813$$

$$\xi=0{,}00000000372529031233986$$
$$o=0{,}00000000093132257548284$$
$$\pi=0{,}00000000023283064370807$$
$$\rho=0{,}000000000005820766091685$$
$$\sigma=0{,}000000000001455191522858$$
$$\tau=0{,}000000000000363797880710$$
$$\upsilon=0{,}000000000000090949470177$$
$$\varphi=0{,}000000000000022737367544$$
$$\chi=0{,}000000000000005684341886$$
$$\psi=0{,}000000000000001421085471$$
$$\omega=0{,}000000000000000355271367.$$

Die übrigen Summen erhält man, wenn man die jedesmal vorhergehende durch 4 dividirt.

§ 194.

Nimmt man nun dies zu Hülfe, so ist:

$$\log\sin\frac{m\pi}{2n}=\log m+\log(2n-m)+\log(2n+m)-3\log n+\log\pi-\log 8$$
$$-\frac{m^2}{n^2}\left(\alpha-\frac{1}{2^2}\right)-\frac{m^4}{2n^4}\left(\beta-\frac{1}{2^4}\right)-\frac{m^6}{n^6}\left(\gamma-\frac{1}{2^6}\right)-\cdots$$

$$\log\cos\frac{m\pi}{2n}=\log(n-m)+\log(n+m)-2\log n$$
$$-\frac{m^2}{n^2}(A-1)-\frac{m^4}{2n^4}(B-1)-\frac{m^6}{3n^6}(C-1)-\cdots$$

Da nun die Logarithmen von π und 8 bekannt sind, so ist der **hyperbolische** Logarithmus des Sinus des Winkels $\frac{m}{n}90^\circ$:

$$\log\sin\frac{m}{n}90^\circ=\log m+\log(2n-m)+\log(2n+m)-3\log n$$
$$-0{,}93471165583043575410$$
$$-\frac{m^2}{n^2}\cdot 0{,}16123351671205660911$$
$$-\frac{m^4}{n^4}\cdot 0{,}00257260105347306848$$
$$-\frac{m^6}{n^6}\cdot 0{,}00009032844783567260$$
$$-\frac{m^8}{n^8}\cdot 0{,}00000398179316205501$$
$$-\frac{m^{10}}{n^{10}}\cdot 0{,}00000019425295465196$$

$$-\frac{m^{12}}{n^{12}}\cdot 0{,}00000001001328748812$$
$$-\frac{m^{14}}{n^{14}}\cdot 0{,}00000000053404135618$$
$$-\frac{m^{16}}{n^{16}}\cdot 0{,}00000000002914859658$$
$$-\frac{m^{18}}{n^{18}}\cdot 0{,}00000000000161797979$$
$$-\frac{m^{20}}{n^{20}}\cdot 0{,}00000000000009097690$$
$$-\frac{m^{22}}{n^{22}}\cdot 0{,}00000000000000516827$$
$$-\frac{m^{24}}{n^{24}}\cdot 0{,}00000000000000029607$$
$$-\frac{m^{26}}{n^{26}}\cdot 0{,}00000000000000001708$$
$$-\frac{m^{28}}{n^{28}}\cdot 0{,}00000000000000000099$$
$$-\frac{m^{30}}{n^{30}}\cdot 0{,}00000000000000000005.$$

Dagegen ist der hyperbolische Logarithmus des Cosinus des Winkels $\frac{m}{n}\,90°$:

$$\log\cos\frac{m}{n}\,90° = \log(n-m) + \log(n+m) - 2\log n$$
$$-\frac{m^{2}}{n^{2}}\cdot 0{,}23370055013616982735$$
$$-\frac{m^{4}}{n^{4}}\cdot 0{,}00733901580209602727$$
$$-\frac{m^{6}}{n^{6}}\cdot 0{,}00048235888031404063$$
$$-\frac{m^{8}}{n^{8}}\cdot 0{,}00003879475632402982$$
$$-\frac{m^{10}}{n^{10}}\cdot 0{,}00000340827260896510$$
$$-\frac{m^{12}}{n^{12}}\cdot 0{,}00000031430809718659$$
$$-\frac{m^{14}}{n^{14}}\cdot 0{,}00000002989150274450$$
$$-\frac{m^{16}}{n^{16}}\cdot 0{,}00000000290464467239$$
$$-\frac{m^{18}}{n^{18}}\cdot 0{,}00000000028682639518$$

$$-\frac{m^{20}}{n^{20}}\cdot 0{,}00000000002868076974$$
$$-\frac{m^{22}}{n^{22}}\cdot 0{,}00000000000289697956$$
$$-\frac{m^{24}}{n^{24}}\cdot 0{,}00000000000029506024$$
$$-\frac{m^{26}}{n^{26}}\cdot 0{,}00000000000003026249$$
$$-\frac{m^{28}}{n^{28}}\cdot 0{,}00000000000000312232$$
$$-\frac{m^{30}}{n^{30}}\cdot 0{,}00000000000000032379$$
$$-\frac{m^{32}}{n^{32}}\cdot 0{,}00000000000000003373$$
$$-\frac{m^{34}}{n^{34}}\cdot 0{,}00000000000000000352$$
$$-\frac{m^{36}}{n^{36}}\cdot 0{,}00000000000000000037$$
$$-\frac{m^{38}}{n^{38}}\cdot 0{,}00000000000000000004.$$

§ 195.

Wenn man die hyperbolischen Logarithmen der Sinus und Cosinus mit 0,4342944819... multiplicirt, so erhält man die gemeinen Logarithmen derselben für den Radius 1. Da man jedoch in den Tafeln den Logarithmus des Sinus des rechten Winkels gewöhnlich gleich 10 setzt, so muss man, um die Logarithmen der Sinus und Cosinus, so wie sie in den Tafeln stehen, zu erhalten, nach der gedachten Multiplikation noch 10 dazu addiren. Es wird daher der in den Tafeln befindliche:

$$\log\sin\frac{m}{n}\,90° = \log m + \log(2n-m) + \log(2n+m) - 3\log n$$
$$+\quad 9{,}594059885702190$$
$$-\frac{m^{2}}{n^{2}}\cdot 0{,}070022826605901$$
$$-\frac{m^{4}}{n^{4}}\cdot 0{,}001117266441661$$
$$-\frac{m^{6}}{n^{6}}\cdot 0{,}000039229146453$$
$$-\frac{m^{8}}{n^{8}}\cdot 0{,}000001729270798$$
$$-\frac{m^{10}}{n^{10}}\cdot 0{,}000000084362986$$

$$-\frac{m^{12}}{n^{12}}\cdot 0{,}000000004348715$$
$$-\frac{m^{14}}{n^{14}}\cdot 0{,}000000000231931$$
$$-\frac{m^{16}}{n^{16}}\cdot 0{,}000000000012659$$
$$-\frac{m^{18}}{n^{18}}\cdot 0{,}000000000000702$$
$$-\frac{m^{20}}{n^{20}}\cdot 0{,}000000000000039$$

und der in den Tafeln befindliche Logarithmus des Cosinus von $\frac{m}{n}90°$ ist

$$\log\cos\frac{m}{n}90° = \log(n-m) + \log(n+m) - 2\log n$$
$$+ \quad 10{,}000000000000000$$
$$-\frac{m^{2}}{n^{2}}\cdot 0{,}101494859341892$$
$$-\frac{m^{4}}{n^{4}}\cdot 0{,}003187294065451$$
$$-\frac{m^{6}}{n^{6}}\cdot 0{,}000209485800017$$
$$-\frac{m^{8}}{n^{8}}\cdot 0{,}000016848348597$$
$$-\frac{m^{10}}{n^{10}}\cdot 0{,}000001480193986$$
$$-\frac{m^{12}}{n^{12}}\cdot 0{,}000000136502272$$
$$-\frac{m^{14}}{n^{14}}\cdot 0{,}000000012981715$$
$$-\frac{m^{16}}{n^{16}}\cdot 0{,}000000001261471$$
$$-\frac{m^{18}}{n^{18}}\cdot 0{,}000000000124567$$
$$-\frac{m^{20}}{n^{20}}\cdot 0{,}000000000012456$$
$$-\frac{m^{22}}{n^{22}}\cdot 0{,}000000000001258$$
$$-\frac{m^{24}}{n^{24}}\cdot 0{,}000000000000128$$
$$-\frac{m^{26}}{n^{26}}\cdot 0{,}000000000000013.$$

§ 196.

Mittelst dieser Formeln kann man also sowohl die hyperbolischen wie die gemeinen Logarithmen der Sinus und Cosinus aller Winkel finden, ohne dass man die Sinus und Cosinus selbst zu kennen braucht. Aus den Logarithmen der Sinus und Cosinus findet man aber weiter die der Tangenten, Cotangenten, Sekanten und Cosekanten bloss allein durch Subtraction, so dass für diese besondere Formeln nicht erforderlich sind. Man muss indessen wohl beachten, dass man von den Zahlen $m, n, n-m, n+m$ u. s. w. die hyperbolischen Logarithmen nehmen muss, falls man die hyperbolischen Logarithmen der Sinus und Cosinus sucht, die gemeinen aber, wenn diese mit Hülfe der vorhergehenden Formeln gefunden werden sollen. Da überdies der Bruch $\frac{m}{n}$ das Verhältnis bezeichnet, in welchem der gegebene Winkel zum rechten Winkel steht, und da ferner die Sinus der Winkel, welche grösser als ein halber Rechter sind, den Cosinus der Winkel, die kleiner sind als 45°, gleich sind, so braucht der Bruch $\frac{m}{n}$ niemals grösser als $\frac{1}{2}$ angenommen zu werden, und es convergiren daher die angeführten Glieder noch um vieles stärker, so dass man meistens mit der Hälfte derselben auskommt.

§ 197.

Bevor wir jedoch diesen Gegenstand verlassen, wollen wir noch zeigen, wie man die Tangenten und Sekanten auf eine bequemere Weise finden kann, als es im vorigen Capitel geschehen ist. Obwohl man nämlich die Tangenten und Sekanten aus den Sinus und Cosinus erhalten kann, so ist dazu doch immer eine Division erforderlich, und diese ist bei so viel Stellen überaus beschwerlich. Zwar haben wir die Formeln für die Tangenten und Cotangenten bereits oben im § 135 angegeben, indessen waren wir da noch nicht im Stande, dieselben näher zu begründen. Dies haben wir dem gegenwärtigen Capitel vorbehalten.

§ 198a.*)

Zunächst leiten wir also aus § 181 einen Ausdruck für die Tangente des Winkels $\frac{m}{2n}\pi$ her. Da nämlich:

$$\frac{1}{n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}+\frac{1}{25n^2-m^2}+\cdots=\frac{\pi}{4mn}\operatorname{tang}\frac{m}{2n}\pi$$

ist, so wird:

$$\operatorname{tang}\frac{m}{2n}\pi=\frac{4mn}{\pi}\left(\frac{1}{n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}+\frac{1}{25n^2-m^2}+\cdots\right).$$

*) Im Originale finden sich zwei mit der Zahl 198 versehene Paragraphen. Dieselben sind daher hier mit 198a und 198b bezeichnet. Anm. d. Uebers.

Ferner ist:

$$\frac{1}{n^2-m^2}+\frac{1}{4n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}+\cdots=\frac{1}{2m^2}-\frac{\pi}{2mn}\cot\frac{m}{n}\pi,$$

oder, wenn wir $2n$ für n schreiben:

$$\cot\frac{m}{2n}\pi=\frac{2n}{m\pi}-\frac{4mn}{\pi}\left(\frac{1}{4n^2-m^2}+\frac{1}{16n^2-m^2}+\frac{1}{36n^2-m^2}+\cdots\right).$$

Entwickelt man hierin die einzelnen Brüche, die ersten, welche leicht berechnet werden können, ausgenommen, in unendliche Reihen, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\operatorname{tang}\frac{m}{2n}\pi=&\frac{mn}{n^2-m^2}\frac{4}{\pi}\\&+\frac{4}{\pi}\left(\frac{m}{3^2n}+\frac{m^3}{3^4n^3}+\frac{m^5}{3^6n^5}+\cdots\right)\\&+\frac{4}{\pi}\left(\frac{m}{5^2n}+\frac{m^3}{5^4\cdot n^3}+\frac{m^5}{5^6\cdot n^5}+\cdots\right)\\&+\frac{4}{\pi}\left(\frac{m}{7^2n}+\frac{m^3}{7^4\cdot n^3}+\frac{m^5}{7^6\cdot n^5}+\cdots\right)\\&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cot\frac{m}{2n}\pi=&\frac{n}{m}\frac{2}{\pi}-\frac{mn}{4n^2-m^2}\frac{4}{\pi}\\&-\frac{4}{\pi}\left(\frac{m}{4^2n}+\frac{m^3}{4^4\cdot n^3}+\frac{m^5}{4^6\cdot n^5}+\cdots\right)\\&-\frac{4}{\pi}\left(\frac{m}{6^2n}+\frac{m^3}{6^4\cdot n^3}+\frac{m^5}{6^6\cdot n^5}+\cdots\right)\\&-\frac{4}{\pi}\left(\frac{m}{8^2n}+\frac{m^3}{8^4\cdot n^3}+\frac{m^5}{8^6\cdot n^5}+\cdots\right)\\&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\end{aligned}$$

§ 198b.

Aus dem bekannten Werte von π aber findet man:

$$\frac{1}{\pi}=0{,}31830\ 98861\ 83790\ 67153\ 77679\ 26745\ 02872\ 4,$$

und ausserdem treten hier eben dieselben Reihen auf, die wir oben (§ 190 und § 193) mit den Buchstaben $A, B, C, D\ldots$ und $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ bezeichnet haben.

Es ist daher:

$$\begin{aligned}&\operatorname{tang}\frac{m}{2n}\pi\\&=\frac{mn}{n^2-m^2}\frac{4}{\pi}+\frac{m}{n}\frac{4}{\pi}(A-1)+\frac{m^3}{n^3}\frac{4}{\pi}(B-1)+\frac{m^5}{n^5}\frac{4}{\pi}(C-1)+\frac{m^7}{n^7}\frac{4}{\pi}(D-1)+\cdots\end{aligned}$$

und ebenso für die Cotangente:

$$\begin{aligned}&\cot\frac{m}{2n}\pi\\&=\frac{n}{m}\frac{2}{\pi}-\frac{mn}{4n^2-m^2}\frac{4}{\pi}-\frac{m}{n}\frac{4}{\pi}\left(\alpha-\frac{1}{2^2}\right)-\frac{m^3}{n^3}\frac{4}{\pi}\left(\beta-\frac{1}{2^4}\right)-\frac{m^5}{n^5}\frac{4}{\pi}\left(\gamma-\frac{1}{2^6}\right)\\&\qquad-\frac{m^7}{n^7}\frac{4}{\pi}\left(\delta-\frac{1}{2^8}\right)-\cdots\end{aligned}$$

Aus diesen Formeln nun sind die Ausdrücke entstanden, die wir oben im § 135 für die Tangente und Cotangente gegeben haben; ferner haben wir im § 137 gezeigt, wie man aus den Tangenten und Cotangenten allein durch Addition und Subtraction die Sekanten und Cosekanten finden kann. Vermittelst dieser Formeln hätten daher die Tafeln der Sinus, Tangenten und Sekanten und ihrer Logarithmen weit leichter berechnet werden können, als es von den ersten Verfertigern derselben geschehen ist.