7. Capitel.

Von der Darstellung der Exponentialgrössen und der Logarithmen durch Reihen.

§ 114.

Da $a^0 = 1$ ist, und mit wachsendem Exponenten zugleich auch der Wert der Potenz zunimmt, falls a eine Zahl grösser als 1 ist, so folgt daraus, dass, wenn der Exponent unendlich wenig grösser ist als 0, auch die Potenz die Einheit nur um unendlich wenig übersteigen wird. Ist daher ω eine unendlich kleine Zahl oder ein beliebig kleiner, jedoch von 0 verschiedener Bruch, so wird $a^\omega = 1 + \psi$, wenn ψ ebenfalls eine unendlich kleine Zahl bedeutet; denn aus dem vorhergehenden Capitel ist bekannt, dass, wenn nicht ψ unendlich klein sein würde, es auch ω nicht sein könnte. Es ist somit entweder $\psi = \omega$, oder $\psi > \omega$, oder $\psi < \omega$, und zwar wird dies offenbar von der Grösse von a abhängen. Da nun a noch unbekannt ist, so wollen wir $\psi = k\omega$ setzen. Alsdann wird: $a^\omega = 1 + k\omega$, oder wenn wir a als Basis der Logarithmen nehmen:

$$\omega = \log(1 + k\omega).$$

Beispiel.

Damit es desto deutlicher hervortrete, wie die Zahl k von der Basis a abhängt, setzen wir $a = 10$ und suchen aus den gewöhnlichen Tafeln den Logarithmus einer Zahl, die nur sehr wenig grösser ist als 1, z. B. von $1 + \frac{1}{1000000}$, so dass also $k\omega = \frac{1}{1000000}$ ist. Alsdann soll sein:

$$\log\left(1 + \frac{1}{1000000}\right) = \log\frac{1000001}{1000000} = 0{,}00000043429 = \omega.$$

Da $k\omega = 0{,}00000100000$ ist, so ergiebt sich hieraus:

$$\frac{1}{k} = \frac{43429}{100000}, \text{ und somit } k = \frac{100000}{43429} = 2{,}30258,$$

und daraus geht hervor, dass k eine endliche Zahl ist, welche von dem Werte der Basis a abhängt. Denn nimmt man eine andere Zahl als Basis a, so wird der Logarithmus derselben Zahl $1 + k\omega$ zu dem obigen in einem gegebenen Verhältnis stehen, und es wird sich somit ein anderer Wert von k ergeben.

§ 115.

Da $a^\omega = 1 + k\omega$ ist, so wird, welche Zahl man auch für i setzen möge:

$$a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i.$$

Es ist mithin:

$$a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}k^3\omega^3 + \cdots$$

Setzt man nun $i = \frac{z}{\omega}$, wobei z irgend eine endliche Zahl bedeuten soll, so wird i, weil ω eine unendlich kleine Zahl ist, unendlich gross, und da hieraus $\omega = \frac{z}{i}$ folgt, so wird ω gleich einem Bruche mit unendlich grossem Nenner, also, wie angenommen, unendlich klein sein. Substituirt man daher $\frac{z}{i}$ für ω, so erhält man:

$$a^z = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(i-1)}{1\cdot 2i}k^2z^2 + \frac{1(i-1)(i-2)}{1\cdot 2i\cdot 3i}k^3z^3$$
$$+ \frac{1\cdot(i-1)(i-2)(i-3)}{1\cdot 2i\cdot 3i\cdot 4i}k^4z^4 + \cdots,$$

eine Gleichung, die vollkommen richtig ist, sobald für i ein unendlich grosser Wert gesetzt wird. k aber ist darin, wie wir sahen, eine bestimmte endliche Zahl, deren Wert von a abhängt.

§ 116.

Da aber i eine unendlich grosse Zahl ist, so wird $\frac{i-1}{i} = 1$; denn offenbar nähert sich der Wert des Bruches $\frac{i-1}{i}$ immer mehr der Einheit, je grösser die Zahl ist, die man für i setzt; es wird daher, wenn i eine Zahl bedeutet, die grösser ist als jede nur denkbare Zahl, der Bruch $\frac{i-1}{i}$ ge-

gerade gleich der Einheit werden. Aus demselben Grunde aber wird $\frac{i-2}{i}=1$, $\frac{i-3}{i}=1$ u. s. w. Folglich wird:

$$\frac{i-1}{2i}=\frac{1}{2},\quad \frac{i-2}{3i}=\frac{1}{3},\quad \frac{i-3}{4i}=\frac{1}{4} \text{ u. s. w.}$$

und man erhält daher, wenn man diese Werte einsetzt:

$$a^z=1+\frac{kz}{1}+\frac{k^2z^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{k^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots \text{ in inf.}$$

Diese Gleichung giebt aber zugleich die Beziehung an, welche zwischen a und k besteht; denn setzt man $z=1$, so wird:

$$a=1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

Wenn z. B. $a=10$ ist, so muss, wie wir vorher fanden, notwendig ungefähr $k=2{,}30258$ sein.

§ 117.

Nehmen wir an, es sei $b=a^n$, so wird, wenn a als Basis der Logarithmen genommen wird, $\log b=n$. Da nun $b^z=a^{nz}$ ist, so ergiebt sich für b^z die unendliche Reihe:

$$b^z=1+\frac{knz}{1}+\frac{k^2n^2z^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3n^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{k^4n^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots,$$

und wenn man $\log b$ für n schreibt:

$$b^z=1+\frac{kz}{1}\log b+\frac{k^2z^2}{1\cdot 2}(\log b)^2+\frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3}(\log b)^3+\frac{k^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(\log b)^4+\cdots$$

Ist also der Wert von k für einen gegebenen Wert der Basis a bekannt, so lässt sich jede beliebige Exponentialgrösse b^z durch eine unendliche Reihe darstellen, deren Glieder nach den Potenzen von z fortschreiten. Nach diesen Auseinandersetzungen können wir nun auch zeigen, wie sich die Logarithmen in unendliche Reihen entwickeln lassen.

§ 118.

Da $a^\omega=1+k\omega$ ist, wenn ω einen unendlich kleinen Bruch bedeutet, und die Beziehung zwischen a und k durch die Gleichung:

$$a=1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$$

bestimmt wird, so ist, wenn man a als Basis der Logarithmen nimmt:

$$\omega=\log(1+k\omega) \text{ und } i\omega=\log(1+k\omega)^i\cdot$$

Offenbar aber wird die Potenz $(1+k\omega)^i$ um so mehr die Einheit übersteigen, je grösser die Zahl i ist, und wenn man i geradezu unendlich gross annimmt, so wird der Wert der Potenz $(1+k\omega)^i$ jede beliebige Zahl, die grösser als 1 ist, erreichen können. Setzt man daher $(1+k\omega)^i=1+x$, so wird $\log(1+x)=i\omega$ und, da $i\omega$ einen endlichen Wert besitzt, da es der Logarithmus von $1+x$ ist, so folgt hieraus, dass i eine unendlich grosse Zahl sein muss, weil sonst $i\omega$ keinen endlichen Wert haben könnte.

§ 119.

Da wir $(1+k\omega)^i=1+x$ gesetzt haben, so ist $1+k\omega=(1+x)^{\frac{1}{i}}$ und $k\omega=(1+x)^{\frac{1}{i}}-1$. Hieraus folgt:

$$i\omega=\frac{i}{k}\left((1+x)^{\frac{1}{i}}-1\right),$$

und weil $i\omega=\log(1+x)$ ist, so wird:

$$\log(1+x)=\frac{i}{k}\left((1+x)^{\frac{1}{i}}-1\right),$$

wofern i eine unendlich grosse Zahl bedeutet. Nun ist aber:

$$(1+x)^{\frac{1}{i}}=1+\frac{1}{i}x-\frac{1(i-1)}{i\cdot 2i}x^2+\frac{1(i-1)(2i-1)}{i\cdot 2i\cdot 3i}x^3 - \frac{1(i-1)(2i-1)(3i-1)}{i\cdot 2i\cdot 3i\cdot 4i}x^4+\cdots,$$

und ferner, weil i eine unendlich grosse Zahl ist:

$$\frac{i-1}{2i}=\frac{1}{2},\quad \frac{2i-1}{3i}=\frac{2}{3},\quad \frac{3i-1}{4i}=\frac{3}{4} \text{ u. s. w.}$$

Demnach ist:

$$i(1+x)^{\frac{1}{i}}=i+\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots,$$

und folglich:

$$\log(1+x)=\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right),$$

wobei a als Basis der Logarithmen zu nehmen ist und k eine zu dieser Basis gehörige Zahl bedeutet, welche mit ihr durch die Gleichung:

$$a=1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$$

verbunden ist.

§ 120.

Da wir nunmehr eine Reihe für den Logarithmus der Zahl $1+x$ besitzen, so können wir mittelst derselben auch den Wert k für eine gegebene Basis a bestimmen. Setzt man nämlich $1+x=a$, so wird wegen $\log a = 1$

$$1=\frac{1}{k}\left(\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\cdots\right),$$

oder:

$$k=\frac{(a-1)}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\cdots$$

Der Wert dieser Reihe muss, wenn $a=10$ gesetzt wird, annähernd gleich 2,30258 sein, obwohl schwer einzusehen ist, wie

$$2{,}30258=\frac{9}{1}-\frac{9^2}{2}+\frac{9^3}{3}-\frac{9^4}{4}+\cdots$$

sein könne, da doch die Glieder dieser Reihe fortwährend grösser werden, und man daher die Summe derselben nicht auf die Art näherungsweise zu finden im Stande ist, dass man nur einige Glieder davon berechnet und mit einander vereinigt. Indessen wird sich bald ein Mittel darbieten, diesem Uebelstande abzuhelfen.

§ 121.

Es wird nun, wenn man in der Reihe

$$\log(1+x)=\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right)$$

x negativ voraussetzt:

$$\log(1-x)=-\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\right).$$

Subtrahirt man demnach die letztere Reihe von der ersten, so erhält man

$$\log(1+x)-\log(1-x)=\log\frac{1+x}{1-x}=\frac{2}{k}\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right).$$

Setzt man nun:

$$\frac{1+x}{1-x}=a,\ \text{demnach}\ x=\frac{a-1}{a+1},$$

so folgt hieraus, da $\log a = 1$ ist:

$$k=2\left(\frac{a-1}{a+1}+\frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3}+\frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5}+\cdots\right),$$

und aus dieser Gleichung lässt sich der Wert von k aus der Basis a finden. Setzt man also $a=10$, so wird:

$$k=2\left(\frac{9}{11}+\frac{9^3}{3\cdot 11^3}+\frac{9^5}{5\cdot 11^5}+\frac{9^7}{7\cdot 11^7}+\cdots\right).$$

Da die Glieder dieser Reihe sehr merklich abnehmen, so kann man durch Addition einiger Glieder sehr bald einen hinlänglich genauen Wert von k erhalten.

§ 122.

Da man nun bei der Verfertigung eines Logarithmensystems die Basis a nach Belieben wählen kann, so kann man sie auch so annehmen, dass $k=1$ wird. Setzen wir also $k=1$, so erhalten wir nach der § 116 gefundenen Reihe:

$$a=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

Verwandelt man diese Brüche in Decimalbrüche und addirt sie sodann, so erhält man für a folgenden Wert:

$$a=2{,}71828182845904523536028,$$

wo auch noch die letzte Ziffer genau ist. Die auf Grund dieser Basis berechneten Logarithmen werden gewöhnlich **natürliche oder hyperbolische Logarithmen** genannt, weil die Quadratur der Hyperbel durch solche Logarithmen ausgeführt werden kann. Wir werden nun in der Folge der Kürze wegen für diese Zahl 2,718281828459 ⋯ stets den Buchstaben e gebrauchen, so dass also e die Basis der natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen bedeutet, welcher der Wert $k=1$ entspricht, oder es soll e stets die Summe der unendlichen Reihe

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

bezeichnen.

§ 123.

Die hyperbolischen Logarithmen besitzen also die Eigenschaft, dass der Logarithmus der Zahl $1+\omega$ gleich ω ist, wenn ω eine unendlich kleine Zahlgrösse bedeutet, und da vermöge dieser Eigenschaft der Wert $k=1$ bekannt ist, so lassen sich die hyperbolischen Logarithmen aller Zahlen berechnen. Es wird folglich, wenn man e für die oben gefundene Zahl setzt:

$$e^z=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1\cdot 2}+\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots,$$

während die hyperbolischen Logarithmen selbst aus einer der Reihen:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots,$$

$$\log\frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \frac{2x^9}{9} + \cdots,$$

welche sehr stark convergiren, wenn man für x einen sehr kleinen Bruch setzt, gefunden werden können. So findet man aus der letzteren Gleichung mit leichter Mühe die Logarithmen der Zahlen, welche nicht viel grösser als 1 sind. Setzt man nämlich $x = \frac{1}{5}$, so wird:

$$\log\frac{6}{4} = \log\frac{3}{2} = \frac{2}{1\cdot 5} + \frac{2}{3\cdot 5^3} + \frac{2}{5\cdot 5^5} + \frac{2}{7\cdot 5^7} + \cdots$$

Setzt man $x = \frac{1}{7}$, so wird:

$$\log\frac{4}{3} = \frac{2}{1\cdot 7} + \frac{2}{3\cdot 7^3} + \frac{2}{5\cdot 7^5} + \frac{2}{7\cdot 7^7} + \cdots$$

Setzt man $x = \frac{1}{9}$, so wird:

$$\log\frac{5}{4} = \frac{2}{1\cdot 9} + \frac{2}{3\cdot 9^3} + \frac{2}{5\cdot 9^5} + \frac{2}{7\cdot 9^7} + \cdots \text{ u. s. w.}$$

Aus den Logarithmen dieser Brüche aber findet man die Logarithmen der ganzen Zahlen, da nach der Natur der Logarithmen:

$\log\frac{3}{2} + \log\frac{4}{3} = \log 2$; $\log\frac{3}{2} + \log 2 = \log 3$; $2\log 2 = \log 4$; $\log\frac{5}{4} + \log 4 = \log 5$;
$\log 2 + \log 3 = \log 6$; $3\log 2 = \log 8$; $2\log 3 = \log 9$, $\log 2 + \log 5 = \log 10$
ist.

Beispiel.

Es werden daher die hyperbolischen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10 gleich:

log 1 =	0, 00000 00000 00000 00000 00000
log 2 =	0, 69314 71805 59945 30941 72321
log 3 =	1, 09861 22886 68109 69139 52452
log 4 =	1, 38629 43611 19890 61883 44642
log 5 =	1, 60943 79124 34100 37460 07593
log 6 =	1, 79175 94692 28055 00081 24773
log 7 =	1, 94591 01490 55313 30510 54639
log 8 =	2, 07944 15416 79835 92825 16964
log 9 =	2, 19722 45773 36219 38279 04905
log 10 =	2, 30258 50929 94045 68401 79914

Alle diese Logarithmen sind aus den obigen drei Reihen berechnet worden mit Ausnahme von log 7, welcher sich in folgender Weise ergab:

Setzt man in der letzten Reihe $x = \frac{1}{99}$, so wird

$$\log\frac{100}{98} = \log\frac{50}{49} = 0{,}0202027073175194484078230.$$

Zieht man diesen von

$$\log 50 = 2\log 5 + \log 2 = 3{,}9120230054281460586187508$$

ab, so erhält man log 49, und dieser ergiebt, durch 2 dividirt, log 7.

§ 124.

Setzt man den hyperbolischen Logarithmus von $1+x$ oder

$$\log(1+x) = y,$$

so wird:

$$y = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Nimmt man aber die Zahl a als Basis der Logarithmen, und ist der Logarithmus eben der Zahl $1+x$ für diese Basis gleich v, so wird, wie wir sahen:

$$v = \frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right) = \frac{y}{k}.$$

Hieraus folgt $k = \frac{y}{v}$. Es wird daher am passendsten der Wert von k, welcher der Basis a entspricht, dadurch definirt, dass man sagt, er sei gleich dem hyperbolischen Logarithmus irgend einer Zahl dividirt durch den Logarithmus derselben Zahl für die Basis a. Nimmt man also geradezu a als diese Zahl, so wird $v = 1$ und daher k gleich dem hyperbolischen Logarithmus der Basis a. In dem gemeinen Logarithmensystem, in welchem $a = 10$ ist, wird somit k gleich dem hyperbolischen Logarithmus von 10, also:

$$k = 2{,}302585092994045684017991 4\ldots,$$

welchen Wert wir bereits früher (§ 114) näherungsweise gefunden hatten. Wenn man demnach jeden hyperbolischen Logarithmus durch diese Zahl k dividirt oder, was auf dasselbe hinauskommt, mit dem Decimalbruche:

$$0{,}4342944819032518276511289$$

multiplicirt, so erhält man die gemeinen Logarithmen, deren Basis $a = 10$ ist.

§ 125.

Da

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

ist, so wird, wenn man $a^y = e^z$ setzt und die hyperbolischen Logarithmen nimmt, $y \log a = z$, weil $\log e = 1$ ist. Setzt man nun diesen Wert von z oben ein, so erhält man:

$$a^y = 1 + \frac{y \log a}{1} + \frac{y^2 (\log a)^2}{1\cdot 2} + \frac{y^3 (\log a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots,$$

und es kann daher auch jede beliebige Exponentialgrösse mittelst der hyperbolischen Logarithmen durch eine unendliche Reihe dargestellt werden. Bedeutet ferner i eine unendlich grosse Zahl, so lassen sich sowohl die Exponentialgrössen wie die Logarithmen durch gewöhnliche Potenzen ausdrücken. Denn es ist:

$$e^z = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i \quad \text{und folglich} \quad a^y = \left(1 + \frac{y \log a}{i}\right)^i,$$

und ferner erhält man für die hyperbolischen Logarithmen:

$$\log(1+x) = i\left((1+x)^{\frac{1}{i}} - 1\right).$$

Was den weiteren Gebrauch der hyperbolischen Logarithmen betrifft, so wird darüber in der Integralrechnung ausführlicher gehandelt werden.

8. Capitel.

Von den transcendenten Zahlgrössen, welche aus dem Kreise entspringen.

§ 126.

Nach den Logarithmen und den Exponentialgrössen müssen die **Kreisbogen** und deren **Sinus** und **Cosinus** betrachtet werden, nicht nur deshalb, weil sie eine andere Art von transcendenten Zahlgrössen ausmachen, sondern auch, was weiter unten deutlicher hervortreten wird, **weil sie aus den Logarithmen** und den **Exponentialgrössen** selbst **entspringen**, sobald dieselben **imaginäre** Zahlgrössen enthalten.

Setzt man nun den Halbmesser eines Kreises oder den Sinus totus gleich 1, so ist bekannt, dass man den Umfang des Kreises in rationalen Zahlen nicht genau ausdrücken kann, dass man aber näherungsweise für den halben Umfang des Kreises die Zahl

3, 14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510
58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679
82148 08651 32823 06647 09384 46...

gefunden hat. Für diese Zahl wollen wir der Kürze wegen π schreiben, so dass also π gleich dem halben Umfang eines Kreises vom Halbmesser 1 oder gleich der Länge eines Bogens von 180 Graden ist.

§ 127.

Bezeichnet man einen beliebigen Bogen eines Kreises, dessen Halbmesser stets gleich 1 vorausgesetzt wird, mit z, so betrachtet man gewöhnlich vorzugsweise den Sinus und Cosinus dieses Bogens z. In der Folge bezeichnen wir den Sinus eines Bogens z durch $\sin \operatorname{arc} z$ oder kürzer durch $\sin z$, ebenso den Cosinus durch $\cos \operatorname{arc} z$ oder kürzer durch $\cos z$. Es ist daher, da π der Bogen von 180° ist:

$$\sin 0\pi = 0,\ \cos 0\pi = 1;\ \text{ferner}\ \sin\tfrac{1}{2}\pi = 1,\quad \cos\tfrac{1}{2}\pi = 0;$$

$$\sin\pi\ = 0,\ \cos\pi\ = -1;\qquad \sin\tfrac{3}{2}\pi = -1,\ \cos\tfrac{3}{2}\pi = 0;$$

$$\sin 2\pi = 0,\ \cos 2\pi = 1.$$

Es sind daher alle Sinus und Cosinus innerhalb der Grenzen $+1$ und -1 enthalten. Ferner aber wird:

$$\cos z = \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi - z\right),\ \sin z = \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - z\right)\ \text{und}\ \sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

Ausser diesen Bezeichnungen sind auch noch die folgenden zu merken: $\operatorname{tang} z$, welches die Tangente des Bogens z, und $\cot z$, welches die Cotangente des Bogens z bedeutet, und zwar ist, wie aus der Trigonometrie bekannt ist:

$$\operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z}\ \text{und}\ \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{\operatorname{tang} z}.$$

§ 128.

Ferner wird in der Trigonometrie bewiesen, dass, wenn y und z zwei Bogen sind, die Formeln gelten:

$$\sin(y+z) = \sin y \cos z + \cos y \sin z$$
$$\cos(y+z) = \cos y \cos z - \sin y \sin z$$
$$\sin(y-z) = \sin y \cos z - \cos y \sin z$$
$$\cos(y-z) = \cos y \cos z + \sin y \sin z,$$

und hieraus gehen, wenn man für y die Bogen $\frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$ u. s. w. einsetzt, die folgenden hervor:

$\sin\left(\frac{1}{2}\pi + z\right) = +\cos z$ $\cos\left(\frac{1}{2}\pi + z\right) = -\sin z$	$\sin\left(\frac{1}{2}\pi - z\right) = +\cos z$ $\cos\left(\frac{1}{2}\pi - z\right) = +\sin z$
$\sin(\pi + z) = -\sin z$ $\cos(\pi + z) = -\cos z$	$\sin(\pi - z) = +\sin z$ $\cos(\pi - z) = -\cos z$
$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + z\right) = -\cos z$ $\cos\left(\frac{3}{2}\pi + z\right) = +\sin z$	$\sin\left(\frac{3}{2}\pi - z\right) = -\cos z$ $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - z\right) = -\sin z$
$\sin(2\pi + z) = +\sin z$ $\cos(2\pi + z) = +\cos z$	$\sin(2\pi - z) = -\sin z$ $\cos(2\pi - z) = +\cos z.$

Wenn daher n irgend eine ganze Zahl bedeutet, so ist:

$\sin\left(\frac{4n+1}{2}\pi + z\right) = +\cos z$ $\cos\left(\frac{4n+1}{2}\pi + z\right) = -\sin z$	$\sin\left(\frac{4n+1}{2}\pi - z\right) = +\cos z$ $\cos\left(\frac{4n+1}{2}\pi - z\right) = +\sin z$
$\sin\left(\frac{4n+2}{2}\pi + z\right) = -\sin z$ $\cos\left(\frac{4n+2}{2}\pi + z\right) = -\cos z$	$\sin\left(\frac{4n+2}{2}\pi - z\right) = +\sin z$ $\cos\left(\frac{4n+2}{2}\pi - z\right) = -\cos z$
$\sin\left(\frac{4n+3}{2}\pi + z\right) = -\cos z$ $\cos\left(\frac{4n+3}{2}\pi + z\right) = +\sin z$	$\sin\left(\frac{4n+3}{2}\pi - z\right) = -\cos z$ $\cos\left(\frac{4n+3}{2}\pi - z\right) = -\sin z$
$\sin\left(\frac{4n+4}{2}\pi + z\right) = +\sin z$ $\cos\left(\frac{4n+4}{2}\pi + z\right) = +\cos z$	$\sin\left(\frac{4n+4}{2}\pi - z\right) = -\sin z$ $\cos\left(\frac{4n+4}{2}\pi - z\right) = +\cos z$

Diese Formeln gelten, mag n eine positive oder negative ganze Zahl sein.

§ 129.

Wird $\sin z = p$ und $\cos z = q$ gesetzt, so ist $p^2 + q^2 = 1$. Ebenso ist, wenn $\sin y = m$ und $\cos y = n$ gesetzt wird, $m^2 + n^2 = 1$. Die Sinus und Cosinus der aus diesen zusammengesetzten Bogen ergeben sich aus den Formeln:

$\sin z = p$	$\cos z = q$
$\sin(y+z) = mq + np$	$\cos(y+z) = nq - mp$
$\sin(2y+z) = 2mnq + (n^2 - m^2)p$	$\cos(2y+z) = (n^2 - m^2)q - 2mnp$
$\sin(3y+z) = (3n^2m - m^3)q + (n^3 - 3m^2n)p$	$\cos(3y+z) = (n^3 - 3m^2n)q - (3mn^2 - m^3)p$
u. s. w.	u. s. w.

Während also die Bogen z, $y+z$, $2y+z$, $3y+z$ u. s. w. in arithmetischer Progression fortschreiten, bilden ihre Sinus sowohl wie ihre Cosinus eine rekurrente Reihe von der Art, wie sie aus dem Nenner $1 - 2nx + (m^2 + n^2)x^2$ entspringt. Es ist nämlich:

$$\sin(2y+z) = 2n\sin(y+z) - (m^2+n^2)\sin z,\ \text{oder}$$
$$\sin(2y+z) = 2\cos y\sin(y+z) - \sin z,\qquad \text{ebenso}$$
$$\cos(2y+z) = 2\cos y\cos(y+z) - \cos z.$$

Analog ergiebt sich:

$$\sin(3y+z) = 2\cos y \sin(2y+z) - \sin(y+z)$$

$$\cos(3y+z) = 2\cos y \cos(2y+z) - \cos(y+z). \text{ Ferner:}$$

$$\sin(4y+z) = 2\cos y \sin(3y+z) - \sin(2y+z)$$

$$\cos(4y+z) = 2\cos y \cos(3y+z) - \cos(2y+z) \text{ u. s. w.}$$

Mittelst dieses Gesetzes lassen sich die Formeln für die Sinus und Cosinus der Bogen, die in arithmetischer Progression fortschreiten, so weit man will fortsetzen.

§ 130.

Da

$$\sin(y+z) = \sin y \cos z + \cos y \sin z$$

und

$$\sin(y-z) = \sin y \cos z - \cos y \sin z$$

ist, so erhält man, indem man diese Ausdrücke einmal addirt, das andere Mal subtrahirt:

$$\sin y \cos z = \frac{\sin(y+z) + \sin(y-z)}{2}$$

$$\cos y \sin z = \frac{\sin(y+z) - \sin(y-z)}{2}.$$

Da ferner

$$\cos(y+z) = \cos y \cos z - \sin y \sin z$$

und

$$\cos(y-z) = \cos y \cos z + \sin y \sin z$$

ist, so erhält man auf gleiche Weise:

$$\cos y \cos z = \frac{\cos(y-z) + \cos(y+z)}{2}$$

$$\sin y \sin z = \frac{\cos(y-z) - \cos(y+z)}{2}.$$

Setzt man nun $y = z = \frac{v}{2}$, so ergeben sich aus den letzten beiden Formeln die folgenden:

$$\cos^2\frac{v}{2} = \frac{1+\cos v}{2}, \text{ also } \cos\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos v}{2}}$$

$$\sin^2\frac{v}{2} = \frac{1-\cos v}{2}, \text{ also } \sin\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos v}{2}},$$

mittelst welcher man aus dem gegebenen Cosinus irgend eines Winkels den Sinus und Cosinus des halben Winkels finden kann.

§ 131.

Setzt man ferner $y+z=a$ und $y-z=b$, so wird $y=\frac{a+b}{2}$ und $z=\frac{a-b}{2}$. Setzt man diese Werte in die früheren Formeln ein, so erhält man folgende Gleichungen oder Lehrsätze:

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\cos b - \cos a = 2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2},$$

und hieraus entspringen durch Division die Sätze:

$$\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = \operatorname{tang}\frac{a+b}{2}\cdot\cot\frac{a-b}{2} = \frac{\operatorname{tang}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tang}\frac{a-b}{2}}$$

$$\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \operatorname{tang}\frac{a+b}{2}$$

$$\frac{\sin b + \sin a}{\cos b - \cos a} = \cot\frac{a-b}{2}$$

$$\frac{\sin a - \sin b}{\cos a + \cos b} = \operatorname{tang}\frac{a-b}{2}$$

$$\frac{\sin a - \sin b}{\cos b - \cos a} = \cot\frac{a+b}{2}$$

$$\frac{\cos a + \cos b}{\cos a - \cos b} = \cot\frac{a+b}{2}\cdot\cot\frac{a-b}{2}.$$

Endlich leitet man hieraus noch her:

$$\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \frac{\cos b - \cos a}{\sin a - \sin b}$$

$$\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b}\cdot\frac{\cos a + \cos b}{\cos b - \cos a} = \cot^2\frac{a-b}{2}$$

$$\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b}\cdot\frac{\cos b - \cos a}{\cos a + \cos b} = \cot^2\frac{a+b}{2}.$$

§ 132.

Da $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ ist, so ist auch, wenn man die linke Seite dieser Gleichung in ihre Factoren auflöst:

$$(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)(\cos z - \sqrt{-1}\cdot\sin z) = 1.$$

Obwohl nun diese Factoren imaginär sind, so gewähren sie doch bei der Addition und bei der Vervielfältigung der Bogen einen sehr erheblichen Nutzen. Sucht man nämlich das Product zweier solcher Factoren:

$$(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)(\cos y + \sqrt{-1}\sin y),$$

so findet man:

$$\cos y \cos z - \sin y \sin z + (\cos y \sin z + \sin y \cos z)\sqrt{-1}.$$

Da nun aber

$$\cos y \cos z - \sin y \sin z = \cos(y+z), \text{ und}$$
$$\sin y \cos z + \cos y \sin z = \sin(y+z)$$

ist, so ist das Product:

$$(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)(\cos z + \sqrt{-1}\sin z) = \cos(y+z) + \sqrt{-1}\sin(y+z).$$

Ebenso findet man:

$$(\cos y - \sqrt{-1}\sin y)(\cos z - \sqrt{-1}\sin z) = \cos(y+z) - \sqrt{-1}\sin(y+z),$$

und ferner:

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)(\cos y \pm \sqrt{-1}\sin y)(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z) = \cos(x+y+z) \pm \sqrt{-1}\sin(x+y+z).$$

§ 133.

Hieraus folgt:

$$(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^2 = \cos 2z \pm \sqrt{-1}\sin 2z, \text{ und}$$
$$(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^3 = \cos 3z \pm \sqrt{-1}\sin 3z, \text{ und somit allgemein}$$
$$(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1}\sin nz.$$

Wegen des doppelten Vorzeichens erhält man hieraus:

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2}$$
$$\sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2\sqrt{-1}}.$$

Entwickelt man aber diese Binomien in Reihen, so wird:

$$\cos nz = \cos^n z - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2} z \sin^2 z + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{n-4} z \sin^4 z - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cos^{n-6} z \sin^6 z + \cdots,$$

und

$$\sin nz = \frac{n}{1}\cos^{n-1} z \sin z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3} z \sin^3 z + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cos^{n-5} z \sin^5 z - \cdots$$

§ 134.

Is[illegible] n z ein unendlich kleiner Bogen, so wird $\sin z = z$ und $\cos z = 1$. Ist als[illegible] an ferner n eine unendlich grosse Zahl von der Beschaffenheit, dass nz [illegible] inen Bogen von endlicher Grösse, den wir v nennen wollen, darstellt, so wird, weil $\sin z = z = \frac{v}{n}$ ist:

$$\cos v = 1 - \frac{v^2}{1\cdot 2} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{v^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots$$
$$\sin v = v - \frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{v^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \cdots$$

Ist daher der Bogen v gegeben, so kann man mittelst dieser Reihen seinen Sinus und Cosinus finden. Damit jedoch der Nutzen dieser Formeln noch deutlicher hervortrete, wollen wir annehmen, dass v einen Bogen bedeute, der sich zu einem Quadranten oder zu $90°$ verhält, wie $m:n$, d. h. es soll $v = \frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2}$ sein. Da nun der Wert von π bekannt ist, so erhält man, wenn man denselben überall substituirt:

$$\begin{aligned}
\sin \operatorname{arc}\frac{m}{n}90° = &+ \frac{m}{n}\cdot 1{,}570796326794896619231321691 6\\
&- \frac{m^3}{n^3}\cdot 0{,}6459640975062462536557565636\\
&+ \frac{m^5}{n^5}\cdot 0{,}0796926262461670451205055488\\
&- \frac{m^7}{n^7}\cdot 0{,}0046817541353186881006854632\\
&+ \frac{m^9}{n^9}\cdot 0{,}0001604411847873598218726605\\
&- \frac{m^{11}}{n^{11}}\cdot 0{,}0000035988432352120853404580\\
&+ \frac{m^{13}}{n^{13}}\cdot 0{,}0000000569217292196792681171\\
&- \frac{m^{15}}{n^{15}}\cdot 0{,}0000000006688035109811467224\\
&+ \frac{m^{17}}{n^{17}}\cdot 0{,}0000000000060669357311061950\\
&- \frac{m^{19}}{n^{19}}\cdot 0{,}0000000000000437706546731370\\
&+ \frac{m^{21}}{n^{21}}\cdot 0.0000000000000002571422892856
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{m^{23}}{n^{23}} \cdot 0{,}0000000000000000012538995403 \\
&+ \frac{m^{25}}{n^{25}} \cdot 0{,}0000000000000000000051564550 \\
&- \frac{m^{27}}{n^{27}} \cdot 0{,}0000000000000000000000181239 \\
\ldots\; &+ \frac{m^{29}}{n^{29}} \cdot 0{,}0000000000000000000000000549
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\cos \operatorname{arc} \frac{m}{n}\, 90^\circ = &+ \phantom{\frac{m^2}{n^2}\cdot{}} 1{,}0000000000000000000000000000 \\
&- \frac{m^{2}}{n^{2}} \cdot 1{,}2337005501361698273543113745 \\
&+ \frac{m^{4}}{n^{4}} \cdot 0{,}2536695079010480136365633659 \\
&- \frac{m^{6}}{n^{6}} \cdot 0{,}0208634807633529608730516364 \\
&+ \frac{m^{8}}{n^{8}} \cdot 0{,}0009192602748394265802417158 \\
&- \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0{,}0000252020423730606054810526 \\
&+ \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0{,}0000004710874778818171503665 \\
&- \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0{,}0000000063866030837918522408 \\
&+ \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0{,}0000000000656596311497947230 \\
&- \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0{,}0000000000005294400200734620 \\
&+ \frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0{,}0000000000000034377391790981 \\
&- \frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0{,}0000000000000000183599165212 \\
&+ \frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0{,}0000000000000000000820675327 \\
&- \frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0{,}0000000000000000000003115285 \\
&+ \frac{m^{28}}{n^{28}} \cdot 0{,}0000000000000000000000010165 \\
&- \frac{m^{30}}{n^{30}} \cdot 0{,}0000000000000000000000000026.
\end{aligned}
$$

Da es nun genügt, die Sinus und Cosinus der Winkel bis zu 45° zu kennen, so ist der Bruch $\frac{m}{n}$ immer kleiner als $\frac{1}{2}$, und es werden daher die gegebenen Reihen wegen der darin vorkommenden Potenzen des Bruches $\frac{m}{n}$ sehr stark convergiren, so dass man meistens nur einige wenige Glieder zu berechnen braucht, zumal wenn man den Sinus und Cosinus nicht auf so viel Decimalstellen verlangt.

§ 135.

Hat man den Sinus und Cosinus gefunden, so kann man daraus mittelst der Formeln $\operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ und $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ auch die T a n g e n t e und C o t a n g e n t e b e r e c h n e n. Da indessen die Multiplication und Division mit so grossen Zahlen sehr beschwerlich ist, so ist es besser, auch für diese besondere Reihen aufzustellen. Es ist nun:

$$
\operatorname{tang} v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{v - \dfrac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \dfrac{v^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \cdots}{1 - \dfrac{v^2}{1\cdot 2} + \dfrac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \dfrac{v^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots}
$$

$$
\cot v = \frac{\cos v}{\sin v} = \frac{1 - \dfrac{v^2}{1\cdot 2} + \dfrac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \dfrac{v^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots}{v - \dfrac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \dfrac{v^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \cdots}
$$

Setzt man daher wieder den Bogen $v = \frac{m}{n}\, 90^\circ$, so wird analog wie vorher:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tang} \operatorname{arc} \frac{m}{n}\, 90^\circ = \frac{2mn}{n^2 - m^2} \cdot 0{,}6366197723675 & \\
+ \frac{m}{n} \cdot 0{,}2975567820597 & \\
+ \frac{m^3}{n^3} \cdot 0{,}0186886502773 & \\
+ \frac{m^5}{n^5} \cdot 0{,}0018424752034 & \\
+ \frac{m^7}{n^7} \cdot 0{,}0001975800714 & \\
+ \frac{m^9}{n^9} \cdot 0{,}0000216977245 & \\
+ \frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0{,}0000024011370 &
\end{aligned}
$$

$$+\frac{m^{13}}{n^{13}}\cdot 0,0000002664132$$
$$+\frac{m^{15}}{n^{15}}\cdot 0,0000000295864$$
$$+\frac{m^{17}}{n^{17}}\cdot 0,0000000032867$$
$$+\frac{m^{19}}{n^{19}}\cdot 0,0000000003651$$
$$+\frac{m^{21}}{n^{21}}\cdot 0,0000000000405$$
$$+\frac{m^{23}}{n^{23}}\cdot 0,0000000000045$$
$$+\frac{m^{25}}{n^{25}}\cdot 0,0000000000005$$

$$\cot \operatorname{arc}\frac{m}{n}\,90^\circ = +\frac{n}{m}\cdot 0,6366197723675$$
$$-\frac{4mn}{4n^2-m^2}\cdot 0,3183098861837$$
$$-\frac{m}{n}\cdot 0,2052888894145$$
$$-\frac{m^3}{n^3}\cdot 0,0065510747882$$
$$-\frac{m^5}{n^5}\cdot 0,0003450292554$$
$$-\frac{m^7}{n^7}\cdot 0,0000202791060$$
$$-\frac{m^9}{n^9}\cdot 0,0000012366527$$
$$-\frac{m^{11}}{n^{11}}\cdot 0,0000000764959$$
$$-\frac{m^{13}}{n^{13}}\cdot 0,0000000047597$$
$$-\frac{m^{15}}{n^{15}}\cdot 0,0000000002969$$
$$-\frac{m^{17}}{n^{17}}\cdot 0,0000000000185$$
$$-\frac{m^{19}}{n^{19}}\cdot 0,0000000000011.$$

Auf welche Art man zu diesen Reihen gelangt, wird weiter unten (§ 197) auseinandergesetzt werden.

§ 136.

Es ist bereits oben bemerkt worden, dass man, wenn die Sinus und Cosinus aller Winkel, welche kleiner als 45° sind, bekannt sind, dadurch zugleich die Sinus und Cosinus aller grösseren Winkel habe. Man kann aber auch schon aus den Sinus und Cosinus der Winkel bis zu **30°** die Sinus und Cosinus **aller** grösseren Winkel allein **durch Addition** und **Subtraction** finden. Denn da $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ist, so wird nach § 130, wenn man $y = 30^\circ$ setzt:

$$\cos z = \sin(30^\circ + z) + \sin(30^\circ - z), \quad \text{und}$$
$$\sin z = \cos(30^\circ - z) - \cos(30^\circ + z),$$

und somit findet man aus den Sinus und Cosinus der Winkel z und $30^0 - z$:

$$\sin(30^\circ + z) = \cos z - \sin(30^\circ - z) \quad \text{und}$$
$$\cos(30^\circ + z) = \cos(30^\circ - z) - \sin z.$$

Hieraus erhält man also die Sinus und Cosinus der Winkel von 30° bis 60°, und daraus dann auch alle übrigen.

§ 137.

Bei den Tangenten und Cotangenten giebt es ein ähnliches Hülfsmittel. Da nämlich

$$\operatorname{tang}(a+b) = \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b}{1 - \operatorname{tang} a \cdot \operatorname{tang} b}$$

ist, so wird:

$$\operatorname{tang} 2a = \frac{2 \operatorname{tang} a}{1 - \operatorname{tang}^2 a}, \quad \text{und} \quad \cot 2a = \frac{\cot a - \operatorname{tang} a}{2},$$

und aus letzterer Formel ergeben sich aus den Tangenten und Cotangenten der Bogen, welche kleiner als 30° sind, die Cotangenten der Bogen bis zu 60°.

Ist dann ferner $a = 30^\circ - b$, so wird $2a = 60^\circ - 2b$ und $\cot 2a = \operatorname{tang}(30^\circ + 2b)$, demnach:

$$\operatorname{tang}(30^\circ + 2b) = \frac{\cot(30^\circ - b) - \operatorname{tang}(30^\circ - b)}{2},$$

wonach man auch die Tangenten der Bogen, welche grösser als 30° sind, findet.

Die Sekanten und Cosekanten aber lassen sich aus den Tangenten durch blosse Subtraction ableiten, denn es ist:

$$\operatorname{cosec} z = \cot\frac{z}{2} - \cot z, \quad \text{und daher}$$
$$\sec z = \cot\left(45^\circ - \frac{z}{2}\right) - \operatorname{tang} z.$$

Hieraus geht deutlich hervor, auf welche Weise man **die trigonometrischen Tafeln anfertigen** kann.

§ 138.

Es werde nun abermals in den Formeln des § 133 der Bogen z als unendlich klein vorausgesetzt und ferner für n eine unendlich grosse Zahl von der Beschaffenheit angenommen, dass iz einen endlichen Werth erhält. Dann ist also $nz = v$, $z = \frac{v}{i}$, folglich $\sin z = \frac{v}{i}$ und $\cos z = 1$.

Setzt man diese Werte in die Formeln des § 133 ein, so nehmen dieselben die Gestalt an:

$$\cos v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2}$$

und

$$\sin v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2\sqrt{-1}}.$$

Im vorhergehenden Capitel sahen wir aber, dass $\left(1 + \frac{z}{i}\right)^i = e^z$ ist, wenn e die Basis der hyperbolischen Logarithmen bezeichnet; schreibt man daher für z einmal $+v\sqrt{-1}$, das andere Mal $-v\sqrt{-1}$, so erhält man:

$$\cos v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$$

und

$$\sin v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Hieraus ist ersichtlich, wie die imaginären **Exponentialgrössen** auf die Sinus und Cosinus reeller Bogen zurückgeführt werden können. Es ist nämlich:

$$e^{+v\sqrt{-1}} = \cos v + \sqrt{-1}\,\sin v,$$

und

$$e^{-v\sqrt{-1}} = \cos v - \sqrt{-1}\,\sin v.$$

§ 139.

Es sei jetzt in denselben Formeln des § 133 n eine unendlich kleine Zahl oder $n = \frac{1}{i}$, wo i eine unendlich grosse Zahl bedeutet. Dann ist

$$\cos nz = \cos \frac{z}{i} = 1 \text{ und } \sin nz = \sin \frac{z}{i} = \frac{z}{i},$$

da der Sinus eines unendlich kleinen Bogens dem Bogen selbst gleich, der Cosinus aber gleich 1 ist. Man erhält dadurch:

$$1 = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\,\sin z)^{\frac{1}{i}} + (\cos z - \sqrt{-1}\,\sin z)^{\frac{1}{i}}}{2}$$

und

$$\frac{z}{i} = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\,\sin z)^{\frac{1}{i}} - (\cos z - \sqrt{-1}\,\sin z)^{\frac{1}{i}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Nun haben wir aber in § 125 gezeigt, dass, wenn man die hyperbolischen Logarithmen nimmt, $\log(1 + x) = i(1 + x)^{\frac{1}{i}} - i$, oder, wenn man y für $1 + x$ schreibt, $y^{\frac{1}{i}} = \frac{1}{i}\log y + 1$ ist. Setzt man daher hier für y einmal $\cos z + \sqrt{-1}\,\sin z$, das andere Mal $\cos z - \sqrt{-1}\,\sin z$, so ergiebt sich zunächst aus der ersten der eben hingeschriebenen Formeln:

$$1 = \frac{1 + \frac{1}{i}\log(\cos z + \sqrt{-1}\,\sin z) + 1 + \frac{1}{i}\log(\cos z - \sqrt{-1}\,\sin z)}{2} = 1,$$

weil die logarithmischen Glieder wegen des Factors $\frac{1}{i}$ verschwinden. Es folgt daher aus dieser ersten Gleichung nichts Besonderes. Die zweite Gleichung aber giebt:

$$\frac{z}{i} = \frac{\frac{1}{i}\log(\cos z + \sqrt{-1}\,\sin z) - \frac{1}{i}\log(\cos z - \sqrt{-1}\,\sin z)}{2\sqrt{-1}},$$

folglich:

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{\cos z + \sqrt{-1}\,\sin z}{\cos z - \sqrt{-1}\,\sin z}.$$

Hieraus geht hervor, wie man die imaginären **Logarithmen** auf **Kreisbogen** zurückführen kann.

§ 140.

Da $\frac{\sin z}{\cos z} = \operatorname{tang} z$ ist, so drückt sich nach der letzten Formel des vorigen Paragraphen der Bogen z durch seine Tangente folgendermassen aus:

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{1 + \sqrt{-1}\,\operatorname{tang} z}{1 - \sqrt{-1}\,\operatorname{tang} z}.$$

Nun ist aber nach § 123:

$$\log\frac{1+x}{1-x}=\frac{2x}{1}+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\frac{2x^7}{7}+\cdots$$

Setzt man also $x=\sqrt{-1}\,\mathrm{tang}\,z$, so ergiebt sich:

$$z=\frac{\mathrm{tang}\,z}{1}-\frac{\mathrm{tang}^3 z}{3}+\frac{\mathrm{tang}^5 z}{5}-\frac{\mathrm{tang}^7 z}{7}+\cdots$$

Ist also $\mathrm{tang}\,z=t$, folglich z ein Bogen, dessen Tangente t ist, so dass man ihn also mit $\mathrm{arc\,tang}\,t$ bezeichnen, d. h. $z=\mathrm{arc\,tang}\,t$ setzen kann, so ist, wenn die Tangente t bekannt ist, der zu ihr gehörige Bogen:

$$z=\mathrm{arc\,tang}\,t=\frac{t}{1}-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\frac{t^9}{9}-\cdots$$

Da nun, wenn die Tangente t gleich dem Radius 1 ist, der Bogen gleich dem Bogen von 45°, also $z=\frac{\pi}{4}$ wird, so hat man:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots,$$

und dies ist die Reihe, welche zuerst Leibnitz zur **Berechnung des Kreisumfanges** gegeben hat.

§ 141.

Um nun mittelst der gegebenen Reihe die Länge eines Kreisbogens ohne übergrosse Mühe bestimmen zu können, muss man offenbar für die Tangente t einen hinreichend kleinen Bruch setzen. Sucht man z. B. mittelst dieser Reihe die Länge des Bogens z zu bestimmen, dessen Tangente t gleich $\frac{1}{10}$ ist, so findet man diesen Bogen:

$$z=\frac{1}{10}-\frac{1}{3000}+\frac{1}{500000}-\cdots,$$

und der Wert dieser Reihe lässt sich ohne irgend welche Schwierigkeiten näherungsweise durch einen Decimalbruch darstellen. Indessen kann man daraus, dass man einen solchen Bogen kennt, noch nichts in Bezug auf die Länge des ganzen Umfanges schliessen, da man das Verhältnis nicht angeben kann, in welchem der Bogen, dessen Tangente gleich $\frac{1}{10}$ ist, zu dem ganzen Kreisumfange steht. Man muss daher, um den Umfang zu bestimmen, einen Bogen suchen, der ein aliquoter Teil desselben ist, und dessen Tangente sich durch einen hinreichend kleinen Bruch bequem ausdrücken lässt. Zu diesem Zwecke nimmt man gewöhnlich den Bogen von 30°, dessen Tangente gleich $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ist, weil die Tangenten der Bogen, welche kleiner sind als 30° und zum Kreisumfange in einem rationalen Verhältnis stehen, allzu verwickelte irrationale Grössen sind. Da also der Bogen von 30° gleich $\frac{\pi}{6}$ ist, so wird:

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\cdot 3\sqrt{3}}+\frac{1}{5\cdot 3^2\sqrt{3}}-\cdots,$$

und

$$\pi=\frac{2\sqrt{3}}{1}-\frac{2\sqrt{3}}{3\cdot 3}+\frac{2\sqrt{3}}{5\cdot 3^2}-\frac{2\sqrt{3}}{7\cdot 3^3}+\cdots$$

Aus dieser Reihe hat man den oben im § 126 angegebenen Wert von π mit unglaublicher Mühe berechnet.

§ 142.

So gross ist diese Mühe aber deswegen, weil erstens die einzelnen Glieder irrational sind, sodann deshalb, weil jedes Glied nur ungefähr dreimal kleiner ist als das vorhergehende. Diesem Uebelstande kann man jedoch in folgender Weise abhelfen. Man nehme den Bogen von 45° oder $\frac{\pi}{4}$ und behalte dafür die Reihe $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$, obwohl dieselbe nur sehr schwach convergirt, bei, teile aber diesen Bogen in zwei andere a und b, so dass $a+b=\frac{\pi}{4}=45°$ ist. Da nun

$$\mathrm{tang}(a+b)=\frac{\mathrm{tang}\,a+\mathrm{tang}\,b}{1-\mathrm{tang}\,a\cdot\mathrm{tang}\,b}$$

ist, so wird:

$$1-\mathrm{tang}\,a\cdot\mathrm{tang}\,b=\mathrm{tang}\,a+\mathrm{tang}\,b,$$

und daher:

$$\mathrm{tang}\,b=\frac{1-\mathrm{tang}\,a}{1+\mathrm{tang}\,a}.$$

Ist also jetzt $\mathrm{tang}\,a=\frac{1}{2}$, so wird $\mathrm{tang}\,b=\frac{1}{3}$, und es lässt sich daher jeder der beiden Bogen a und b durch eine rationale Reihe ausdrücken, die weit besser als die frühere convergirt. Die Summe dieser beiden Reihen liefert den Wert von $\frac{\pi}{4}$, und es ist somit:

$$\pi=4\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{7\cdot 2^7}+\frac{1}{9\cdot 2^9}-\cdots\\ &\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}-\frac{1}{7\cdot 3^7}+\frac{1}{9\cdot 3^9}-\cdots\end{aligned}\right\}$$

Auf diese Weise hätte man die Länge des halben Kreisumfanges π um vieles leichter finden können, als es mittelst der vorher (§ 141) angeführten Reihe geschehen ist.