3. Capitel.

Von der Umformung der Functionen durch Substitution.

§ 46.

Wenn y irgend eine Function von z ist, und z durch eine neue Veränderliche x bestimmt wird, so lässt sich auch y durch x bestimmen.

Während also vorher y eine Function von z war, sollen jetzt durch Einführung einer neuen veränderlichen Zahlgrösse x die beiden Grössen y und z durch x ausgedrückt werden. Ist z. B.

$$y=\frac{1-z^2}{1+z^2},$$

und setzt man:

$$z=\frac{1-x}{1+x},$$

so geht y durch diese Substitution über in:

$$y=\frac{2x}{1+x^2}.$$

Aus jedem beliebigen bestimmten Werte von x erhält man also bestimmte Werte von z und y, und zwar ist der so gefundene Wert von y derselbe wie der, welchen man aus dem Ausdruck von y durch z erhält, wenn man darin für z den soeben erhaltenen Wert einsetzt. So wird für $x=\frac{1}{2}$: $z=\frac{1}{3}$ und $y=\frac{4}{5}$; denselben Wert für y findet man aber auch, wenn man in dem Ausdrucke $\frac{1-z^2}{1+z^2}$ den Wert $z=\frac{1}{3}$ substituirt.

Der Einführung einer neuen Veränderlichen bedient man sich zu einem doppelten Zwecke: **Entweder** nämlich geschieht dies, um dadurch **die Irrationalität wegzuschaffen,** wenn eine solche in dem Ausdrucke von y durch z vorkommt, **oder** man sucht, wenn die Beziehung zwischen y

und z durch eine Gleichung höheren Grades gegeben ist, aus welcher man y nicht explicite durch z darzustellen vermag, eine neue Veränderliche x einzuführen, um durch sie sowohl y als z in **bequemer Weise** zu **bestimmen.** Obwohl bereits hieraus der ausserordentliche Nutzen der Substitutionen zur Genüge erhellt, so wird derselbe im Folgenden doch noch um vieles deutlicher ersichtlich werden.

§ 47.

Ist $y=\sqrt{a+bz}$, so findet man eine neue Veränderliche x, durch welche sich z und y rational ausdrücken lassen, in folgender Weise:

Dass z und y rationale Functionen von x werden, erreicht man offenbar dadurch, dass man $\sqrt{a+bz}=bx$ setzt. Denn es ist dann $y=bx$ und $a+bz=b^2x^2$, also $z=bx^2-\frac{a}{b}$. Um also sowohl y als z rational durch x auszudrücken, braucht man nur, wenn $y=\sqrt{a+bz}$ ist, $z=bx^2-\frac{a}{b}$ zu setzen, indem dann $y=bx$ wird.

§ 48.

Wenn $y=(a+bz)^{m:n}$ ist, so findet man eine neue Veränderliche x, durch welche sich z und y rational ausdrücken lassen, in folgender Weise:

Setzt man $y=x^m$, so wird $(a+bz)^{m:n}=x^m$, folglich $(a+bz)^{1:n}=x$ und $a+bz=x^n$, also $z=\frac{x^n-a}{b}$. Auf diese Weise ist also jede der beiden Grössen y und z rational ausgedrückt durch x, und zwar mittelst der Substitution $z=\frac{x^n-a}{b}$, aus der dann weiter $y=x^m$ folgt. Obwohl also weder y durch z, noch umgekehrt z durch y rational ausdrückbar ist, so ist doch jede dieser Grössen eine rationale Function der neu eingeführten Veränderlichen x geworden, und dies gerade sollte durch die Substitution erreicht werden.

§ 49.

Ist $y=\left(\frac{a+bz}{f+gz}\right)^{m:n}$, so soll eine neue Veränderliche x gefunden werden, durch welche sich y und z rational ausdrücken lassen.

Zunächst genügt man der gestellten Forderung augenscheinlich, wenn man $y=x^m$ setzt, denn es wird:

$$\left(\frac{a+bz}{f+gz}\right)^{m:n}=x^m,$$

also

$$\frac{a+bz}{f+gz}=x^n,$$

und hieraus:

$$z=\frac{a-fx^n}{gx^n-b}.$$

Umgekehrt erhält man aus diesem Werte von z wieder $y=x^m$. Hiernach ist auch leicht ersichtlich, dass wenn

$$\left(\frac{\alpha+\beta y}{\gamma+\delta y}\right)^n=\left(\frac{a+bz}{f+gz}\right)^m$$

ist, sowohl y als z rational ausgedrückt werden kann, indem man jeden dieser Ausdrücke gleich x^{mn} setzt. Man findet nämlich ohne Schwierigkeit:

$$y=\frac{\alpha-\gamma x^m}{\delta x^m-\beta},\quad z=\frac{a-fx^n}{gx^n-b}.$$

§ 50.

Ist $y=\sqrt{(a+bz)(c+dz)}$, so findet man eine passende Substitution, um y und z rational auszudrücken, in folgender Weise:

Setzt man:

$$\sqrt{(a+bz)(c+dz)}=(a+bz)\,x,$$

so ergiebt sich offenbar ein rationaler Wert für z, da z sich aus einer linearen Gleichung bestimmt. Es wird nämlich:

$$c+dz=(a+bz)x^2,$$

und daher:

$$z=\frac{c-ax^2}{bx^2-d}.$$

Ferner wird:

$$a+bz=\frac{bc-ad}{bx^2-d}$$

und, da

$$y=\sqrt{(a+bz)(c+dz)}=(a+bz)\,x$$

ist, so wird:

$$y=\frac{(bc-ad)x}{bx^2-d}.$$

Es ist demnach die irrationale Function

$$y=\sqrt{(a+bz)(c+dz)}$$

mittelst der Substitution

$$z=\frac{c-ax^2}{bx^2-d},$$

welche

$$y=\frac{(bc-ad)x}{bx^2-d}$$

liefert, auf eine rationale Form gebracht. Ist z. B.

$$y=\sqrt{a^2-z^2}=\sqrt{(a+z)(a-z)},$$

so ist $b=+1$, $c=a$, $d=-1$, und somit:

$$z=\frac{a-ax^2}{1+x^2}\text{ und }y=\frac{2ax}{1+x^2}.$$

So oft also die Function unter dem Quadratwurzelzeichen aus zwei einfachen reellen Factoren besteht, kann man auf die beschriebene Weise die rationale Form herstellen; sind dagegen diese Factoren imaginär, so wendet man besser folgendes Verfahren an:

§ 51.

Es sei $y=\sqrt{p+qz+rz^2}$; es soll eine Substitution für z gesucht werden, so dass der Wert von y rational wird.

Es kann dies auf mehrere Arten geschehen, je nachdem p und r positive oder negative Zahlgrössen sind. Ist zunächst p eine positive Zahlgrösse, so kann man $p=a^2$ setzen; denn obwohl p nicht gerade eine Quadratzahl zu sein braucht, so ist doch die Irrationalität constanter Zahlgrössen für die gegenwärtige Frage ohne Bedeutung.

Es sei also:

I. $$y=\sqrt{a^2+bz+cz^2}.$$

Setzt man dann:

$$\sqrt{a^2+bz+cz^2}=a+xz,$$

so wird:

$$b+cz=2ax+x^2z,$$

demnach:

$$z=\frac{b-2ax}{x^2-c},$$

und ferner:

$$y=a+xz=\frac{bx-ax^2-ac}{x^2-c}.$$

Es sind also z und y rationale Functionen von x. Ist nun

II. $$y=\sqrt{a^2z^2+bz+c},$$

so setze man:

$$\sqrt{a^2z^2+bz+c}=az+x.$$

Alsdann wird:

$$bz+c=2axz+x^2,$$

also:

$$z=\frac{x^2-c}{b-2ax},$$

und ferner:

$$y=az+x=\frac{-ac+bx-ax^2}{b-2ax}.$$

III. Sind endlich p und r negative Zahlgrössen, so ist der Wert von y nur dann nicht imaginär, wenn $q^2>4pr$ ist. Im letzteren Falle aber kann man den Ausdruck $p+qz+rz^2$ in zwei reelle Factoren zerlegen und damit diesen Fall auf den vorhergehenden Paragraphen zurückführen. Häufig ist es jedoch zweckmässiger, y auf die Form zu bringen:

$$y=\sqrt{a^2+(b+cz)(d+ez)}.$$

Um diese rational zu machen, setze man

$$y=a+(b+cz)x,$$

dann wird:

$$d+ez=2ax+bx^2+cx^2z,$$

demnach:

$$z=\frac{d-2ax-bx^2}{cx^2-e}$$

und

$$y=\frac{-ae+(cd-be)x-acx^2}{cx^2-e}.$$

In andern Fällen ist es zweckmässiger, y die Form zu geben:

$$y=\sqrt{a^2z^2+(b+cz)(d+ez)}.$$

Dann setze man:

$$y=az+(b+cz)x;$$

daraus wird:

$$d+ez=2axz+bx^2+cx^2z,$$

folglich:

$$z=\frac{bx^2-d}{e-2ax-cx^2}$$

und

$$y=\frac{-ad+(be-cd)x-abx^2}{e-2ax-cx^2}.$$

Beispiel.

So lässt sich z. B. die irrationale Function $y=\sqrt{-1+3z-z^2}$ auf die Form bringen:

$$y=\sqrt{1-2+3z-z^2}=\sqrt{1-(1-z)(2-z)}.$$

Setzt man daher:

$$y=1-(1-z)x,$$

so wird:

$$-2+z=-2x+x^2-x^2z,$$

demnach:

$$z=\frac{2-2x+x^2}{1+x^2}$$

und

$$1-z=\frac{-1+2x}{1+x^2},$$

also:

$$y=1-(1-z)\,x=\frac{1+x-x^2}{1+x^2}.$$

Dies sind ungefähr die Fälle, welche die unbestimmte Analytik oder die Lehre von den Diophantischen Gleichungen darbietet. Andere in diesen nicht mit einbegriffene Fälle lassen sich durch rationale Substitutionen nicht auf rationale Form bringen. Wir gehen daher dazu über, die zweite Art des Gebrauchs der Substitutionen zur Umformung der Functionen auseinanderzusetzen.

§ 52.

Ist y eine solche Function von z, dass $ay^\alpha+bz^\beta+cy^\gamma z^\delta=0$ ist, so soll man eine neue Veränderliche x finden, vermittelst welcher sich die Werte von y und z explicite darstellen lassen.

Da man ein allgemeines Verfahren zur Auflösung der Gleichungen nicht kennt, so kann man aus der gegebenen Gleichung

$$ay^\alpha+bz^\beta+cy^\gamma z^\delta=0$$

weder y durch z, noch umgekehrt z durch y explicite darstellen. Um daher diesem Uebelstande abzuhelfen, setze man:

$$y=x^m z^n.$$

Dadurch geht die Gleichung über in folgende:

$$ax^{\alpha m}z^{\alpha n}+bz^\beta+cx^{\gamma m}z^{\gamma n+\delta}=0.$$

Den Exponenten n bestimmen wir nun so, dass man aus dieser Gleichung den Wert von z finden kann. Es kann dies auf dreierlei Weise geschehen:

I. Wenn $\alpha n = \beta$, also $n = \frac{\beta}{\alpha}$ ist, so wird obige Gleichung, wenn man sie durch $z^{\alpha n} = z^{\beta}$ dividirt:

$$ax^{\alpha m} + b + cx^{\gamma m} z^{\gamma n - \beta + \delta} = 0,$$

und hieraus folgt:

$$z = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - b}{cx^{\gamma m}}\right)^{\frac{1}{\gamma n - \beta + \delta}}$$

oder:

$$z = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - b}{cx^{\gamma m}}\right)^{\frac{\alpha}{\beta\gamma - \alpha\beta + \alpha\delta}}$$

und:

$$y = x^m \left(\frac{-ax^{\alpha m} - b}{cx^{\gamma m}}\right)^{\frac{\beta}{\beta\gamma - \alpha\beta + \alpha\delta}}.$$

II. Wenn $\beta = \gamma n + \delta$, oder $n = \frac{\beta - \delta}{\gamma}$ ist, so geht obige Gleichung, nachdem sie durch z^{β} dividirt worden, in folgende über:

$$ax^{\alpha m} z^{\alpha n - \beta} + b + cx^{\gamma m} = 0.$$

Hieraus folgt:

$$z = \left(\frac{-b - cx^{\gamma m}}{ax^{\alpha m}}\right)^{\frac{1}{\alpha n - \beta}} = \left(\frac{-b - cx^{\gamma m}}{ax^{\alpha m}}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha\beta - \alpha\delta - \beta\gamma}}$$

und:

$$y = x^m \left(\frac{-b - cx^{\gamma m}}{ax^{\alpha m}}\right)^{\frac{\beta - \delta}{\alpha\beta - \alpha\delta - \beta\gamma}}.$$

III. Wenn $\alpha n = \gamma n + \delta$, oder $n = \frac{\delta}{\alpha - \gamma}$ ist, so wird die Gleichung, nachdem sie durch $z^{\alpha n}$ dividirt worden:

$$ax^{\alpha m} + bz^{\beta - \alpha n} + cx^{\gamma m} = 0.$$

Hieraus folgt:

$$z = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - cx^{\gamma m}}{b}\right)^{\frac{1}{\beta - \alpha n}} = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - cx^{\gamma m}}{b}\right)^{\frac{\alpha - \gamma}{\alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\delta}}$$

und:

$$y = x^m \left(\frac{-ax^{\alpha m} - cx^{\gamma m}}{b}\right)^{\frac{\delta}{\alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\delta}}.$$

Wir haben also auf drei verschiedene Arten Functionen von x gefunden welche y und z gleich sind. Da man nun noch für m jede beliebige Zahl mit Ausnahme der 0 setzen darf, so kann man die gefundenen Ausdrücke auf die bequemste Form bringen.

Beispiel.

Es werde eine Function y durch die Gleichung

$$y^3 + z^3 - cyz = 0$$

definirt; man soll Functionen von x suchen, welche y und z gleich sind.

Es ist also hier:

$$a = -1, \quad b = -1, \quad \alpha = 3, \quad \beta = 3, \quad \gamma = 1 \text{ und } \delta = 1.$$

Die erste Bestimmungsart giebt daher, wenn man $m = 1$ setzt:

$$z = \left(\frac{x^3 + 1}{cx}\right)^{-1} \text{ und } y = x\left(\frac{x^3 + 1}{cx}\right)^{-1},$$

oder:

$$z = \frac{cx}{1 + x^3} \text{ und } y = \frac{cx^2}{1 + x^3},$$

also Ausdrücke, welche sogar rational sind.

Die zweite Art giebt folgende Werte:

$$z = \left(\frac{cx - 1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ und } y = x\left(\frac{cx - 1}{x^3}\right)^{\frac{2}{3}},$$

oder:

$$z = \frac{1}{x}\sqrt[3]{cx - 1} \text{ und } y = \frac{1}{x}\sqrt[3]{(cx - 1)^2}.$$

Endlich wird nach der dritten Art:

$$z = (cx - x^3)^{\frac{1}{3}} \text{ und } y = x(cx - x^3)^{\frac{1}{3}}.$$

§ 53.

Hieraus lässt sich rückwärts beurteilen, wie beschaffen die Gleichungen zwischen y und z sein müssen, wenn dieselben in dieser Weise **durch Einführung einer neuen Veränderlichen** x sollen aufgelöst werden können.

Nehmen wir nämlich an, dass man die Auflösung bereits ausgeführt und dadurch die Werte

$$z = \left(\frac{ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \cdots}{A + Bx^{\mu} + Cx^{\nu} + \cdots}\right)^{p:r}$$

und

$$y = x\left(\frac{ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \cdots}{A + Bx^{\mu} + Cx^{\nu} + \cdots}\right)^{q:r}$$

erhalten habe, so wird

$$y^p = x^p z^q, \text{ und daher } x = yz^{-q:p}$$

sein. Da nun:

$$z^{r:p} = \frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \cdots}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + \cdots}$$

ist, so erhält man hieraus, wenn man für x seinen Wert $yz^{-q:p}$ substituirt, die Gleichung:

$$z^{r:p} = \frac{ay^\alpha z^{-\alpha q:p} + by^\beta z^{-\beta q:p} + cy^\gamma z^{-\gamma q:p} + \cdots}{A + By^\mu z^{-\mu q:p} + Cy^\nu z^{-\nu q:p} + \cdots}$$

oder:

$$Az^{r:p} + By^\mu z^{(r-\mu q):p} + Cy^\nu z^{(r-\nu q):p} + \cdots = ay^\alpha z^{-\alpha q:p} + by^\beta z^{-\beta q:p} + cy^\gamma z^{-\gamma q:p} + \cdots$$

Multiplicirt man die letztere mit $z^{\alpha q:p}$, so geht sie über in:

$$Az^{(\alpha q + r):p} + By^\mu z^{(\alpha q - \mu q + r):p} + Cy^\nu z^{(\alpha q - \nu q + r):p} + \cdots$$
$$= ay^\alpha + by^\beta z^{(\alpha q - \beta q):p} + cy^\gamma z^{(\alpha q - \gamma q):p} + \cdots$$

Setzt man hierin:

$$\frac{\alpha q + r}{p} = m; \quad \frac{\alpha q - \beta q}{p} = n, \text{ und } p = \alpha - \beta,$$

so wird:

$$q = n \text{ und } r = \alpha m - \beta m - \alpha n,$$

und es entsteht folgende Gleichung:

$$Az^m + By^\mu z^{m - \mu n:(\alpha - \beta)} + Cy^\nu z^{m - \nu n:(\alpha - \beta)} + \cdots$$
$$= ay^\alpha + by^\beta z^n + cy^\gamma z^{(\alpha - \gamma)n:(\alpha - \beta)} + \cdots$$

Aus dieser Gleichung erhält man also bei der Auflösung:

$$z = \left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \cdots}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + \cdots}\right)^{\frac{\alpha - \beta}{\alpha m - \beta m - \alpha n}}$$

und

$$y = x\left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \cdots}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + \cdots}\right)^{\frac{n}{\alpha m - \beta m - \alpha n}}.$$

Oder man setze:

$$\frac{\alpha q + r}{p} = m, \quad \frac{\alpha q - \mu q + r}{p} = n, \quad p = \mu,$$

so wird:

$$m - n = \mu \frac{q}{p} = q, \quad \frac{q}{p} = \frac{m - n}{\mu}, \quad \frac{r}{p} = m - \frac{\alpha m - \alpha n}{\mu}, \quad r = \mu m - \alpha m + \alpha n,$$

und es entsteht die Gleichung:

$$Az^m + By^\mu z^n + Cy^\nu z^{m - \nu(m-n):\mu} + \cdots = ay^\alpha + by^\beta z^{(\alpha-\beta)(m-n):\mu} + cy^\gamma z^{(\alpha-\gamma)(m-n):\mu} + \cdots$$

Dies ist somit die Gleichung, welche bei der Auflösung giebt:

$$z = \left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \cdots}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + \cdots}\right)^{\frac{\mu}{\mu m - \alpha m + \alpha n}}$$

und

$$y = x\left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \cdots}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + \cdots}\right)^{\frac{m - n}{\mu m - \alpha m + \alpha n}}.$$

§ 54.

Wenn y und z durch die Gleichung $ay^2 + byz + cz^2 + dy + ez = 0$ mit einander verbunden sind, so lässt sich sowohl y als z auf folgende Weise rational durch eine neue Veränderliche x ausdrücken:

Setzt man $y = xz$ und dividirt alsdann die Gleichung durch z, so wird dieselbe:

$$ax^2z + bxz + cz + dx + e = 0,$$

und hieraus findet man:

$$z = \frac{-dx - e}{ax^2 + bx + c} \text{ und } y = \frac{-dx^2 - ex}{ax^2 + bx + c}.$$

Auf die gegebene Form lässt sich nun aber auch die Gleichung

$$ay^2 + byz + cz^2 + dy + ez + f = 0$$

bringen, indem man jede der beiden Veränderlichen um eine gewisse constante Grösse vermehrt oder vermindert. Es lässt sich demnach auch diese Gleichung mit Hülfe einer neuen Veränderlichen x durch rationale Ausdrücke auflösen.

§ 55.

Wenn y und z durch die Gleichung $ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3 + ey^2 + fyz + gz^2 = 0$ mit einander verbunden sind, so lässt sich sowohl y als z auf folgende Weise rational durch eine neue Veränderliche x ausdrücken:

Setzt man $y = xz$ und dividirt alsdann die ganze Gleichung durch z^2, so geht dieselbe über in:

$$ax^3z + bx^2z + cxz + dz + ex^2 + fx + g = 0.$$

Hieraus folgt:

$$z = \frac{-ex^2 - fx - g}{ax^3 + bx^2 + cx + d} \text{ und } y = \frac{-ex^3 - fx^2 - gx}{ax^3 + bx^2 + cx + d}.$$

Aus den angeführten Beispielen ist leicht ersichtlich, von welcher Beschaffenheit die Gleichungen höheren Grades zwischen y und z sein müssen, wenn dieselben in der beschriebenen Weise sollen aufgelöst werden können. Uebrigens sind die hierher gehörigen Fälle in den allgemeinen Formeln des § 53 enthalten. Da jedoch die Anwendung der allgemeinen Formeln auf solche öfters vorkommenden Fälle nicht ohne Schwierigkeiten ist, so schien es vorteilhafter, einige derselben besonders zu betrachten.

§ 56.

Wenn y und z durch die **Gleichung** $ay^2 + byz + cz^2 = d$ mit einander verbunden sind, so lässt sich y und z durch eine neue Veränderliche x **wie folgt** ausdrücken:

Setzt man $y = xz$, so wird:

$$(ax^2 + bx + c)\, z^2 = d,$$

folglich:

$$z = \sqrt{\frac{d}{ax^2 + bx + c}}$$

und

$$y = x\sqrt{\frac{d}{ax^2 + bx + c}}.$$

Ist ebenso:

$$ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3 = ey + fz,$$

so erhält man, wenn man $y = xz$ setzt und die ganze Gleichung durch z dividirt:

$$(ax^3 + bx^2 + cx + d)\, z^2 = ex + f$$

und hieraus:

$$z = \sqrt{\frac{ex + f}{ax^3 + bx^2 + cx + d}}$$

und

$$y = x\sqrt{\frac{ex + f}{ax^3 + bx^2 + cx + d}}.$$

Diese Fälle, sowie alle andern, welche eine ähnliche Auflösung zulassen, sind aber in dem allgemeinen Falle mit einbegriffen, welcher im folgenden Paragraphen behandelt werden wird.

§ 57.

Wenn y und z durch eine **Gleichung** von der Form:

$$ay^m + by^{m-1}z + cy^{m-2}z^2 + dy^{m-3}z^3 + \cdots = \alpha y^n + \beta y^{n-1}z + \gamma y^{n-2}z^2 + \delta y^{n-3}z^3 + \cdots$$

mit einander verbunden sind, so kann man **zweckmässig** y und z durch eine **neue** Veränderliche x in folgender Weise ausdrücken:

Setzt man $y = xz$ und dividirt man, falls der Exponent m grösser ist als n, die ganze Gleichung durch z^n, so erhält man:

$$(ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + \cdots)\, z^{m-n} = \alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \delta x^{n-3} + \cdots,$$

und hieraus folgt:

$$z = \left(\frac{\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \delta x^{n-3} + \cdots}{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + \cdots}\right)^{1:(m-n)}$$

und

$$y = x\left(\frac{\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \delta x^{n-3} + \cdots}{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + \cdots}\right)^{1:(m-n)}.$$

Diese Art der Auflösung findet nämlich allemal dann statt, wenn in der Gleichung zwischen y und z die Summe der Exponenten von y und z in jedem einzelnen Gliede nur entweder der einen oder der andern von zwei bestimmten Zahlen gleich ist. So ist in dem behandelten Falle diese Summe in den einzelnen Gliedern entweder gleich m oder gleich n.

§ 58.

Wenn sich in einer Gleichung zwischen y und z als Summen der Exponenten von y und z in den einzelnen Gliedern nur drei verschiedene Zahlen von der Art ergeben, dass die höchste unter ihnen die mittlere um ebensoviel übersteigt, wie diese die niedrigste, so lassen sich y und z **mittelst einer quadratischen Gleichung** durch eine **neue** Veränderliche x ausdrücken.

Setzt man nämlich $y = xz$ und dividirt alsdann die Gleichung durch die niedrigste Potenz von z, so ergiebt sich der Wert von z, in x ausgedrückt, durch Ausziehung einer Quadratwurzel. Dies wird aus den folgenden Beispielen klar werden:

Erstes Beispiel.

Ist

$$ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3 = 2ey^2 + 2fyz + 2gz^2 + hy + iz,$$

so setze man $y = xz$ und dividire dann die Gleichung durch z. Dadurch erhält man:

$$(ax^3 + bx^2 + cx + d)z^2 = 2\,(ex^2 + fx + g)\, z + hx + i.$$

Hieraus folgt:

$$z = \frac{ex^2 + fx + g \pm \sqrt{(ex^2 + fx + g)^2 + (ax^3 + bx^2 + cx + d)(hx + i)}}{ax^3 + bx^2 + cx + d}.$$

Nachdem z gefunden, wird $y = xz$.

Zweites Beispiel.

Ist
$$y^5 = 2az^3 + by + cz,$$
und setzt man $y = xz$, so wird:
$$x^5 z^4 = 2az^2 + bx + c.$$

Hieraus findet man:
$$z^2 = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + bx^6 + cx^5}}{x^5}$$
und daher:
$$z = \frac{\sqrt{a \pm \sqrt{a^2 + bx^6 + cx^5}}}{x^2\sqrt{x}} \text{ und } y = \frac{\sqrt{a \pm \sqrt{a^2 + bx^6 + cx^5}}}{x\sqrt{x}}.$$

Drittes Beispiel.

Es sei:
$$y^{10} = 2ayz^6 + byz^3 + cz^4.$$
Hierin ergeben sich als Summen der Exponenten von y und z in den einzelnen Gliedern die Zahlen 10,7 und 4. Setzt man also $y = xz$ und dividirt durch z^4, so geht die Gleichung über in folgende:
$$x^{10}z^6 = 2axz^3 + bx + c \text{ oder: } z^6 = \frac{2axz^3 + bx + c}{x^{10}};$$
und hieraus findet man:
$$z^3 = \frac{ax \pm x\sqrt{a^2 + bx^9 + cx^8}}{x^{10}},$$
und demnach:
$$z = \frac{\sqrt[3]{a \pm \sqrt{a^2 + bx^9 + cx^8}}}{x^3} \text{ und } y = \frac{\sqrt[3]{a \pm \sqrt{a^2 + bx^9 + cx^8}}}{x^2}.$$

Aus diesen Beispielen lässt sich der Nutzen derartiger Substitutionen zur Genüge erkennen.

4. Capitel.

Von der Darstellung der Functionen durch unendliche Reihen.

§ 59.

Da die gebrochenen und irrationalen Functionen von z nicht unter der Form $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$ enthalten sind, wenn die Anzahl der Glieder eine endliche ist, so pflegt man ins **Unendliche fortlaufende Ausdrücke derselben Art** zu suchen, um den Wert irgend einer gebrochenen oder irrationalen Function darzustellen. *Ja es dürfte sogar die Natur transcendenter Functionen besser zu erkennen sein, sobald dieselben in einer solchen, wenn auch ins Unendliche fortlaufenden Form ausgedrückt sind.*)* Denn ebenso wie *die Natur einer ganzen Function am besten* dann *erkennbar* ist, *wenn sie nach Potenzen von z entwickelt, also* auf *die Form* $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$ gebracht ist, *so ist auch* diese Form, selbst *wenn die Anzahl der Glieder unendlich gross* ist, *am geeignetsten, um sich von der eigentlichen Beschaffenheit aller anderen Functionen eine klare Vorstellung zu bilden.* Offenbar aber kann eine Function, welche nicht eine ganze Function ist, nicht durch eine endliche Anzahl von Gliedern wie $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$ dargestellt werden, denn sonst wäre sie ja eben eine ganze Function.

Wenn jedoch einer Zweifel hegen sollte, ob eine solche Function durch eine unendliche Reihe von derartigen Gliedern darstellbar sei, so wird dieser Zweifel durch die wirkliche Entwickelung einer jeden Function beseitigt werden. *Damit sich* aber *die gegenwärtige Untersuchung auf ein möglichst weites Gebiet erstrecke,* sollen *ausser den Potenzen* von z *mit ganzen positiven Exponenten auch solche mit beliebigen Exponenten* zugelassen werden. Alsdann dürfte es zweifellos sein, dass sich jede Function von z in einen ins Unendliche fortlaufenden Ausdruck von der Form $Az^\alpha + Bz^\beta + Cz^\gamma + Dz^\delta + \cdots$, in welchem die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ irgend welche Zahlen bedeuten, verwandeln lässt.

*) Diese Stelle (u. d. Folg.) gewinnt angesichts der Entwickelung, welche die Funktionentheorie im XIX. Jahrhundert genommen hat, besonderes Interesse.
Anm. d. Uebers.

§ 60.

Es ist leicht ersichtlich, dass sich der Bruch $\frac{a}{\alpha+\beta z}$ durch fortgesetzte Division in die unendliche Reihe:

$$\frac{a}{\alpha}-\frac{a\beta z}{\alpha^2}+\frac{a\beta^2 z^2}{\alpha^3}-\frac{a\beta^3 z^3}{\alpha^4}+\frac{a\beta^4 z^4}{\alpha^5}-\cdots$$

verwandeln lässt. Da hierin ein jedes Glied zu dem nächstfolgenden in dem constanten Verhältnis $-1:\frac{\beta z}{\alpha}$ steht, so heisst diese Reihe eine geometrische Reihe.

Man kann indessen diese Reihe auch so finden, dass man den Anfang derselben als unbekannt betrachtet, nämlich:

$$\frac{a}{\alpha+\beta z}=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\cdots$$

setzt, und nun die Coefficienten $A, B, C, D, \ldots$ so zu bestimmen sucht, dass beide Seiten in der Tat gleich werden. Es wird hieraus:

$$a=(\alpha+\beta z)(A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots),$$

und wenn man die Multiplikation wirklich ausführt:

$$\begin{aligned} a = \alpha A &+ \alpha Bz + \alpha Cz^2 + \alpha Dz^3 + \alpha Ez^4 + \cdots \\ &+ \beta Az + \beta Bz^2 + \beta Cz^3 + \beta Dz^4 + \cdots \end{aligned}$$

Es muss daher $a=\alpha A$ oder $A=\frac{a}{\alpha}$, und ferner die Summe der Coefficienten einer jeden Potenz von z gleich 0 sein, so dass sich die Gleichungen ergeben:

$$\begin{aligned} \alpha B+\beta A &= 0 \\ \alpha C+\beta B &= 0 \\ \alpha D+\beta C &= 0 \\ \alpha E+\beta D &= 0 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Kennt man demnach irgend einen der Coefficienten, so findet man leicht den nächstfolgenden; denn ist der Coefficient irgend eines Gliedes gleich P, der des folgenden gleich Q, so ist $\alpha Q+\beta P=0$, also $Q=-\frac{\beta P}{\alpha}$. Da nun das erste Glied bereits bestimmt, nämlich $A=\frac{a}{\alpha}$ ist, so findet man für die folgenden Unbekannten $B, C, D, \ldots$ genau dieselben Werte, welche sich aus der Division ergaben. Uebrigens lehrt der blosse Anblick der für $\frac{a}{\alpha+\beta z}$ gefundenen unendlichen Reihe, dass der Coefficient von z^n gleich $\pm\frac{a\beta^n}{\alpha^{n+1}}$ ist, wobei das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist, oder mit andern Worten: Der Coefficient ist jederzeit gleich $\frac{a}{\alpha}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^n$.

§ 61.

Ebenso kann durch fortgesetzte Division die **gebrochene Function** $\frac{a+bz}{\alpha+\beta z+\gamma z^2}$ in eine unendliche Reihe verwandelt werden.

Da jedoch die Division ziemlich beschwerlich ist, und überdies die eigentliche Natur der unendlichen Reihe sich nicht so leicht daraus erkennen lässt, so ist es vorteilhafter, die gesuchte Reihe zunächst willkürlich anzunehmen und sie dann auf die soeben beschriebene Art zu bestimmen. Es sei also:

$$\frac{a+bz}{\alpha+\beta z+\gamma z^2}=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\cdots$$

Multiplicirt man beiderseits mit $\alpha+\beta z+\gamma z^2$, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} a+bz = \alpha A &+ \alpha Bz + \alpha Cz^2 + \alpha Dz^3 + \alpha Ez^4 + \cdots \\ &+ \beta Az + \beta Bz^2 + \beta Cz^3 + \beta Dz^4 + \cdots \\ &\qquad + \gamma Az^2 + \gamma Bz^3 + \gamma Cz^4 + \cdots \end{aligned}$$

Hieraus erhält man $\alpha A=a$ und $\alpha B+\beta A=b$ oder $A=\frac{a}{\alpha}$ und $B=\frac{b}{\alpha}-\frac{a\beta}{\alpha^2}$, während sich die übrigen Unbekannten aus den folgenden Gleichungen bestimmen:

$$\begin{aligned} \alpha C+\beta B+\gamma A &= 0 \\ \alpha D+\beta C+\gamma B &= 0 \\ \alpha E+\beta D+\gamma C &= 0 \\ \alpha F+\beta E+\gamma D &= 0 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Es wird also aus je zwei benachbarten Coefficienten der nächstfolgende bestimmt; denn sind P, Q, R drei aufeinanderfolgende Coefficienten, so wird:

$$\alpha R+\beta Q+\gamma P=0 \text{ oder } R=\frac{-\beta Q-\gamma P}{\alpha}.$$

Da nun die beiden ersten Coefficienten A und B bereits gefunden sind, so kann man aus ihnen der Reihe nach auch die andern $C, D, E, F, \ldots$ finden und somit die Reihe $A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots$ aufstellen, welche der gegebenen gebrochenen Function $\frac{a+bz}{\alpha+\beta z+\gamma z^2}$ gleich ist.

Beispiel.

Wäre z. B. der Bruch

$$\frac{1+2z}{1-z-z^2}$$

gegeben, und setzte man dafür die Reihe an:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots,$$

so erhielte man, da hier

$$a = 1,\quad b = 2,\quad \alpha = 1,\quad \beta = -1,\quad \gamma = -1$$

ist,

$$A = 1,\quad B = 3$$

und ferner:

$$\begin{aligned} C &= B + A \\ D &= C + B \\ E &= D + C \\ F &= E + D \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Es ist daher jeder Coefficient gleich der Summe der beiden vorhergehenden. Sind demnach zwei benachbarte Coefficienten P und Q bekannt, so ist der nächstfolgende $R = P + Q$. Da man die beiden ersten Coefficienten A und B kennt, so verwandelt sich der gegebene Bruch

$$\frac{1 + 2z}{1 - z - z^2}$$

in die unendliche Reihe:

$$1 + 3z + 4z^2 + 7z^3 + 11z^4 + 18z^5 + \ldots,$$

welche man leicht beliebig weit fortsetzen kann.

§ 62.

Hieraus erkennt man schon zur Genüge das **Wesen derjenigen unendlichen Reihen,** in welche sich die **gebrochenen Functionen verwandeln lassen. Sie befolgen nämlich das Gesetz, dass sich jedes Glied aus einer gewissen Anzahl der vorhergehenden bestimmen lässt.** Ist nämlich $\alpha + \beta z$ der Nenner des gegebenen Bruches und setzt man dafür die unendliche Reihe an:

$$A + Bz + Cz^2 + \cdots + Pz^n + Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + Sz^{n+3} + \cdots,$$

so bestimmt sich ein beliebiger Coefficient Q nur allein aus dem einen unmittelbar vorhergehenden P, und zwar ist $\alpha Q + \beta P = 0$. Ist aber der Nenner ein dreigliedriger Ausdruck $\alpha + \beta z + \gamma z^2$, so bestimmt sich irgend ein Coefficient R der Reihe aus den beiden unmittelbar vorhergehenden P und Q mittelst der Gleichung $\alpha R + \beta Q + \gamma P = 0$.

Ebenso bestimmt sich, wenn der Nenner aus vier Gliedern besteht, also gleich $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3$ ist, irgend ein Coefficient S der Reihe aus den drei vorhergehenden P, Q, R mittelst der Gleichung $\alpha S + \beta R + \gamma Q + \delta P = 0$ u. s. f. Es wird daher bei derartigen Reihen jedes Glied aus einer gewissen

Anzahl der vorhergehenden nach einem bestimmten unveränderlichen Gesetz gefunden, und zwar ist dieses Gesetz unmittelbar aus dem Nenner des die Reihe liefernden Bruches zu ersehen. Solche Reihen nennt man gewöhnlich nach Moivre, der sich zuerst eingehend mit ihnen beschäftigte, **rekurrente Reihen**, weil man bei ihnen auf die vorhergehenden Glieder zurückgehen muss, wenn man die folgenden bestimmen will.

§ 63.

Um solche Reihen zu erhalten, ist es aber notwendig, **dass das constante Glied des Nenners nicht gleich 0 sei.** Denn wäre dies der Fall, so würde ja, da $A = \frac{a}{\alpha}$ ist, sowohl A, als alle übrigen Glieder unendlich werden. Schliesst man diesen Fall, der später betrachtet werden soll, aus, so wird die in eine unendliche rekurrente Reihe zu verwandelnde Function die Gestalt haben:

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \cdots}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \cdots}.$$

Dabei ist das constante Glied des Nenners gleich 1 gesetzt, da sich, falls dieses Glied nicht gleich 0 ist, der Bruch immer in dieser Form schreiben lässt, und ferner sind die übrigen Glieder des Nenners mit dem negativen Zeichen versehen, damit alle Glieder der daraus entstehenden Reihe das positive Vorzeichen erhalten. Setzt man nun für die aus jener Function hervorgehende Reihe die folgende an:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \cdots,$$

so bestimmen sich die einzelnen Coefficienten aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} A &= a \\ B &= \alpha A + b \\ C &= \alpha B + \beta A + c \\ D &= \alpha C + \beta B + \gamma A + d \\ E &= \alpha D + \beta C + \gamma B + \delta A + e \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Es ist daher **jeder Coefficient gleich einem Aggregat aus Vielfachen einer gewissen Anzahl der vorhergehenden Coefficienten, vermehrt noch um eine gewisse Zahl, die aus dem Zähler hinzutritt.** Wofern aber der Zähler nicht etwa in's Unendliche fortschreitet, hört dieses Hinzutreten einer Zahl aus dem Zähler bald auf, und es bestimmt sich alsdann jedes Glied aus einer gewissen Anzahl der vorhergehenden nach einem unveränderlichen Gesetze. Damit jedoch dieses Fortschreitungsgesetz an keiner Stelle eine Unterbrechung erleide, muss man eine echte gebrochene Function nehmen. Denn nimmt man einen unechten Bruch, so hat man den in ihm enthaltenen ganzen Teil noch zur Reihe hinzuzufügen, wodurch das Fortschreitungsgesetz bei denjenigen Gliedern, welche durch diese Hinzufügung eine Vermehrung oder Verminderung erfahren haben, unterbrochen wird. So giebt z. B. der unechte Bruch $\frac{1+2z-z^3}{1-z-z^2}$ die folgende Reihe:

$$1+3z+4z^2+6z^3+10z^4+16z^5+26z^6+42z^7+\cdots$$

In dieser aber macht das Glied $6z^3$ eine Ausnahme von der Regel, nach welcher jeder Coefficient gleich der Summe der beiden vorhergehenden ist.

§ 64.

Eine besondere Betrachtung verdienen diejenigen rekurrenten Reihen, welche aus **Brüchen** entspringen, deren **Nenner** eine **Potenz** ist. So geht z. B. aus dem Bruche:

$$\frac{a+bz}{(1-\alpha z)^2}$$

die folgende Reihe hervor:

$$\begin{aligned} &a+2\alpha az+3\alpha^2az^2+4\alpha^3az^3+5\alpha^4az^4+\cdots\\ &+\quad bz+\ 2\alpha bz^2+3\alpha^2bz^3+4\alpha^3bz^4+\cdots, \end{aligned}$$

in welcher der Coefficient von z^n gleich $(n+1)\alpha^n a+n\alpha^{n-1}b$ ist. Es ist jedoch auch diese Reihe eine rekurrente, weil jedes Glied aus den beiden vorhergehenden gebildet wird, und zwar ergiebt sich das Gesetz, nach welchem diese Bildung erfolgt, sehr leicht, wenn man den Nenner in $1-2\alpha z+\alpha^2z^2$ auflöst. Setzt man $\alpha=1$ und $z=1$, so geht die Reihe in die allgemeine arithmetische Progression:

$$a+(2a+b)+(3a+2b)+(4a+3b)+\cdots$$

über, in welcher die Differenzen zweier aufeinanderfolgender Glieder constant sind. Folglich ist jede arithmetische Progression eine rekurrente Reihe; denn ist $A+B+C+D+E+F+\ldots$ eine arithmetische Progression, so ist:

$$C=2B-A,\ D=2C-B,\ E=2D-C \text{ u. s. w.}$$

§ 65.

Ferner lässt sich der **Bruch**:

$$\frac{a+bz+cz^2}{(1-\alpha z)^3},$$

da:

$$\frac{1}{(1-\alpha z)^3}=(1-\alpha z)^{-3}=1+3\alpha z+6\alpha^2z^2+10\alpha^3z^3+15\alpha^4z^4+\cdots$$

ist, in folgende unendliche Reihe verwandeln:

$$\begin{aligned} &a+3\alpha az+6\alpha^2az^2+10\alpha^3az^3+15\alpha^4az^4+\cdots\\ &+\ \ bz+\ 3\alpha bz^2+\ 6\alpha^2bz^3+10\alpha^3bz^4+\cdots\\ &\qquad+\quad cz^2+\ \ 3\alpha cz^3+\ 6\alpha^2cz^4+\cdots \end{aligned}$$

In dieser Reihe besitzt die Potenz z^n den Coefficienten:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}\alpha^n a+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\alpha^{n-1}b+\frac{(n-1)n}{1\cdot 2}\alpha^{n-2}c.$$

Setzt man aber $\alpha=1$ und $z=1$, so geht die Reihe über in die allgemeine Progression zweiter Ordnung, bei welcher die zweiten Differenzen aufeinanderfolgender Glieder constant sind. Bezeichnet

$$A+B+C+D+E+\cdots$$

eine solche Progression, so ist dieselbe zugleich eine rekurrente Reihe, in welcher sich jedes Glied aus den drei vorhergehenden wie folgt bestimmt:

$$D=3C-3B+A,\quad E=3D-3C+B,\quad F=3E-3D+C,\ldots$$

Da nun bei einer arithmetischen Progression erster Ordnung auch die zweiten Differenzen aufeinanderfolgender Glieder constant, nämlich gleich 0 sind, so kommt die erwähnte Eigenschaft auch den arithmetischen Progressionen erster Ordnung zu.

§ 66.

Ebenso ergiebt der **Bruch**

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3}{(1-\alpha z)^4}$$

eine unendliche Reihe, in welcher die Potenz z^n den Coefficienten besitzt

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^n a+\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^{n-1}b+\frac{(n-1)n\cdot(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^{n-2}c$$
$$+\frac{(n-2)(n-1)n}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^{n-3}d.$$

Setzt man daher $\alpha=1$ und $z=1$, so umfasst diese Reihe alle arithmetischen Reihen dritter Ordnung, bei welchen die dritten Differenzen aufeinanderfolgender Glieder constant sind. Es werden somit alle Progressionen dieser Ordnung zugleich rekurrente Reihen sein, welche aus dem Nenner $1-4z+6z^2-4z^3+z^4$ entspringen. Ist z. B.

$$A+B+C+D+E+F+\cdots$$

eine solche, so ist:

$$E=4D-6C+4B-A,\quad F=4E-6D+4C-B \text{ u. s. w.},$$

und diese letztere Eigenschaft kommt zugleich allen Progressionen der niedrigeren Ordnungen zu.

§ 67.

Auf diese Weise lässt sich zeigen, dass jede algebraische Progression irgend welcher Ordnung, welche schliesslich auf constante Differenzen führt, eine rekurrente Reihe ist, deren Gesetz sich aus dem Nenner $(1-z)^n$ bestimmt, wenn n eine Zahl ist, welche grösser ist als die, welche die Ordnung der Progression angiebt. Da also:

$$a^m + (a+b)^m + (a+2b)^m + (a+3b)^m + \cdots$$

eine Progression $m$ter Ordnung darstellt, so folgt aus der Natur der rekurrenten Reihen:

$$0 = a^m - \frac{n}{1}(a+b)^m + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(a+2b)^m - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(a+3b)^m + \cdots$$
$$\pm \frac{n}{1}(a+(n-1)b)^m \mp (a+nb)^m,$$

wobei die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist, und zwar ist diese Gleichung stets richtig, sobald die ganze Zahl n grösser ist als m. Hieraus lässt sich beurteilen, von welchem Umfange die Lehre von den rekurrenten Reihen ist.

§ 68.

Wenn der Nenner nicht die Potenz eines Binoms, sondern die Potenz eines Polynoms ist, so lässt sich die Natur der Reihe auch auf eine andere Art erklären. Ist nämlich die gegebene gebrochene Function:

$$\frac{1}{(1-\alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \cdots)^{m+1}},$$

so ist die daraus entstehende unendliche Reihe:

$$1 + \frac{m+1}{1}\alpha z + \frac{(m+1)(m+2)}{1\cdot 2}\alpha^2 z^2 + \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3 z^3 + \cdots$$
$$+ \frac{m+1}{1}\beta z^2 \quad + \frac{(m+1)(m+2)}{1\cdot 2}2\alpha\beta z^3 \quad + \cdots$$
$$+ \frac{m+1}{1}\gamma z^3 \quad + \cdots$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Um in die Natur dieser Reihe eine bessere Einsicht zu erlangen, stelle man sie durch allgemeine Buchstaben wie folgt dar:

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \cdots + Kz^{n-3} + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n + \cdots$$

Hierbei wird jeder Coefficient N aus so viel vorhergehenden, als Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ vorkommen, in der Weise bestimmt, dass

$$N = \frac{m+n}{n}\alpha M + \frac{2m+n}{n}\beta L + \frac{3m+n}{n}\gamma K + \frac{4m+n}{n}\delta J + \cdots$$

ist. Obwohl nun hier das Fortschreitungsgesetz nicht ein unveränderliches

ist, sondern von dem Exponenten der betreffenden Potenz von z abhängt, so kommt der Reihe doch ein anderes unveränderliches Fortschreitungsgesetz zu, welches man aus dem entwickelten Nenner ableiten kann, und das der Natur der rekurrenten Reihen entspricht. Jenes oben angeführte veränderliche Gesetz findet aber nur so lange statt, als der Zähler des Bruches gleich der Einheit, oder gleich einer constanten Zahlgrösse ist. Enthielte derselbe ebenfalls noch gewisse Potenzen von z, so würde jenes Gesetz weit verwickelter werden, was nach der Entwickelung der Anfangsgründe der Differentialrechnung leichter zu erkennen sein wird.

§ 69.

Bisher haben wir angenommen, dass das erste constante Glied des Nenners nicht gleich 0 sei, weshalb wir dasselbe gleich 1 setzen konnten. Jetzt wollen wir zusehen, was für Reihen entstehen, wenn das constante Glied des Nenners verschwindet. Es wird alsdann die gebrochene Function die Form haben:

$$\frac{a + bz + cz^2 + \cdots}{z(1-\alpha z - \beta z^2 - \cdots)}.$$

Lässt man zunächst den Factor z des Nenners weg und verwandelt dann den übrig bleibenden Bruch:

$$\frac{a + bz + cz^2 + \cdots}{1-\alpha z - \beta z^2 - \cdots}$$

in die rekurrente Reihe:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots,$$

so ist offenbar:

$$\frac{a + bz + cz^2 + \cdots}{z(1-\alpha z - \beta z^2 - \cdots)} = \frac{A}{z} + B + Cz + Dz^2 + Ez^3 + \cdots$$

Ebenso wird:

$$\frac{a + bz + cz^2 + \cdots}{z^2(1-\alpha z - \beta z^2 - \cdots)} = \frac{A}{z^2} + \frac{B}{z} + C + Dz + Ez^2 + \cdots$$

und allgemein, welche Zahl der Exponent m auch sein möge:

$$\frac{a + bz + cz^2 + \cdots}{z^m(1-\alpha z - \beta z^2 - \cdots)} = \frac{A}{z^m} + \frac{B}{z^{m-1}} + \frac{C}{z^{m-2}} + \frac{D}{z^{m-3}} + \cdots$$

§ 70.

Da man für z durch Substitution eine andere Veränderliche x einführen, und demnach die gebrochene Function auf unzählig viele Arten umformen kann, so kann die gebrochene Function auch auf unendlich viele Arten durch rekurrente Reihen dargestellt werden. Ist z. B. der Bruch:

$$y = \frac{1+z}{1-z-z^2},$$

und die ihm gleiche rekurrente Reihe:

$$y = 1 + 2z + 3z^2 + 5z^3 + 8z^4 + \cdots$$

gegeben, und setzt man $z = \frac{1}{x}$, so wird:

$$y = \frac{x^2 + x}{x^2 - x - 1} = \frac{-x(1+x)}{1 + x - x^2}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{1+x}{1+x-x^2} = 1 + 0 \cdot x + x^2 - x^3 + 2x^4 - 3x^5 + 5x^6 - \cdots,$$

folglich auch:

$$y = -x + 0 \cdot x^2 - x^3 + x^4 - 2x^5 + 3x^6 - 5x^7 + \cdots$$

Oder setzt man $z = \frac{1-x}{1+x}$, so wird:

$$y = \frac{-2-2x}{1-4x-x^2},$$

und hieraus:

$$y = -2 - 10x - 42x^2 - 178x^3 - 754x^4 - \cdots$$

Derartige rekurrente Reihen lassen sich für y unzählig viele finden.

§ 71.

Die **irrationalen Functionen** entwickelt man gewöhnlich mit Hülfe der Formel:

$$(P+Q)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} P^{\frac{m-n}{n}} Q + \frac{m(m-n)}{n \cdot 2n} P^{\frac{m-2n}{n}} Q^2 + \frac{m(m-n)(m-2n)}{n \cdot 2n \cdot 3n} P^{\frac{m-3n}{n}} Q^3 + \cdots$$

in unendliche Reihen; es laufen nämlich in der Tat die Glieder bis ins Unendliche fort, wofern nicht etwa $\frac{m}{n}$ eine ganze positive Zahl ist. So erhält man z. B., wenn man für m und n bestimmte Zahlen setzt, die Reihen:

$$(P+Q)^{\frac{1}{2}} = P^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} P^{-\frac{1}{2}} Q - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} P^{-\frac{3}{2}} Q^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} P^{-\frac{5}{2}} Q^3 - \cdots$$

$$(P+Q)^{-\frac{1}{2}} = P^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} P^{-\frac{3}{2}} Q + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} P^{-\frac{5}{2}} Q^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} P^{-\frac{7}{2}} Q^3 + \cdots$$

$$(P+Q)^{\frac{1}{3}} = P^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} P^{-\frac{2}{3}} Q - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6} P^{-\frac{5}{3}} Q^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} P^{-\frac{8}{3}} Q^3 - \cdots$$

$$(P+Q)^{-\frac{1}{3}} = P^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} P^{-\frac{4}{3}} Q + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6} P^{-\frac{7}{3}} Q^2 - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9} P^{-\frac{10}{3}} Q^3 + \cdots$$

$$(P+Q)^{\frac{2}{3}} = P^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} P^{-\frac{1}{3}} Q - \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 6} P^{-\frac{4}{3}} Q^2 + \frac{2 \cdot 1 \cdot 4}{3 \cdot 6 \cdot 9} P^{-\frac{7}{3}} Q^3 - \cdots$$

u. s. w.

§ 72.

Die Glieder solcher Reihen schreiten also in der Weise fort, dass man ein jedes aus dem unmittelbar vorhergehenden erhält. Ist nämlich irgend ein Glied der Reihe, welche aus $(P+Q)^{\frac{m}{n}}$ entsteht, gleich

$$MP^{\frac{m-kn}{n}} Q^k,$$

so ist das nächstfolgende gleich

$$\frac{m-kn}{(k+1)n} MP^{\frac{m-(k+1)n}{n}} Q^{k+1}.$$

Es ist also zu beachten, dass bei jedem folgenden Gliede der Exponent von P um 1 abnimmt, während der Exponent von Q um 1 wächst. Um dies bequemer auf einzelne Fälle anwenden zu können, schreiben wir $(P+Q)^{\frac{m}{n}}$ in der Form $P^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{\frac{m}{n}}$; dies ist erlaubt, da die Entwickelung von $\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{\frac{m}{n}}$ mit $P^{\frac{m}{n}}$ multiplicirt dieselbe Reihe wie vorher ergiebt. Ferner können wir, wenn wir m nicht bloss ganze Zahlen, sondern jeden beliebigen Bruch bedeuten lassen, n geradezu der Einheit gleichsetzen. Schreibt man endlich für $\frac{Q}{P}$, welches als Function von z betrachtet wird, den Buchstaben Z, so hat man:

$$(1+Z)^m = 1 + \frac{m}{1} Z + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} Z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} Z^3 + \cdots$$

Wir wollen jedoch, um im Folgenden die Fortschreitungsgesetze besser übersehen zu können, die allgemeine Formel auch in der Form uns merken:

$$(1+Z)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1} Z + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} Z^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} Z^3 + \cdots$$

§ 73.

Es sei also zunächst $Z = \alpha z$; dann ist:

$$(1+\alpha z)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1} \alpha z + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} \alpha^2 z^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^3 z^3 + \cdots$$

Schreibt man diese Reihe in der allgemeinen Form:

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \cdots + Mz^{n-1} + Nz^n + \cdots,$$

so bestimmt sich jeder Coefficient N aus dem vorhergehenden M mittelst der Gleichung:

$$N = \frac{m-n}{n} \alpha M.$$

Für $n = 1$ ist $M = 1$, und daher:

$$N = A = \frac{m-1}{1} \alpha.$$

Für $n = 2$ ist $M = A = \frac{m-1}{1} \alpha$, und daher:

$$N = B = \frac{m-2}{2} \alpha M = \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} \alpha^2;$$

ebenso ferner:

$$C = \frac{m-3}{3} \alpha B = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^3,$$

u. s. w. übereinstimmend mit der vorher gefundenen Reihe.

§ 74.

Ist:

$$Z = \alpha z + \beta z^2,$$

so wird:

$$(1 + \alpha z + \beta z^2)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1} (\alpha z + \beta z^2) + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} (\alpha z + \beta z^2)^2 + \cdots,$$

und wenn man diese Reihe nach Potenzen von z ordnet:

$$(1 + \alpha z + \beta z^2)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1} \alpha z + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} \alpha^2 z^2$$

$$+ \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^3 z^3 + \cdots + \frac{m-1}{1} \beta z^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} 2\alpha\beta z^3 + \cdots$$

Schreibt man diese Reihe in der allgemeinen Form:

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \cdots + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n + \cdots,$$

so bestimmt sich jeder Coefficient aus den beiden vorhergehenden mittelst der Gleichung:

$$N = \frac{m-n}{n} \alpha M + \frac{2m-n}{n} \beta L,$$

so dass alle Glieder aus dem ersten, welches gleich 1 ist, gefunden werden können.

Es wird nämlich:

$$A = \frac{m-1}{1} \alpha$$

$$B = \frac{m-2}{2} \alpha A + \frac{2m-2}{2} \beta$$

$$C = \frac{m-3}{3} \alpha B + \frac{2m-3}{3} \beta A$$

$$D = \frac{m-4}{4} \alpha C + \frac{2m-4}{4} \beta B$$

u. s. w.

§ 75.

Ist:

$$Z = \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3,$$

so wird:

$$(1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1} (\alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3)$$

$$+ \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} (\alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3)^2 + \cdots,$$

oder wenn man diese Reihe nach den Potenzen von z ordnet:

$$(1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1} \alpha z + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} \alpha^2 z^2$$

$$+ \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^3 z^3 + \cdots$$

$$+ \frac{m-1}{1} \beta z^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} 2\alpha\beta z^3 + \cdots$$

$$+ \frac{m-1}{1} \gamma z^3 + \cdots$$

Schreibt man diese Reihe, um das Fortschreitungsgesetz besser hervortreten zu lassen, in der allgemeinen Form:

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \cdots + Kz^{n-3} + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n + \cdots,$$

so bestimmt sich jeder Coefficient aus den drei vorhergehenden mittelst der Gleichung:

$$N = \frac{m-n}{n} \alpha M + \frac{2m-n}{n} \beta L + \frac{3m-n}{n} \gamma K.$$

Da nun das erste Glied gleich 1 und die vorhergehenden gleich 0 sind, so folgt:

$$A=\frac{m-1}{1}\alpha$$
$$B=\frac{m-2}{2}\alpha A+\frac{2m-2}{2}\beta$$
$$C=\frac{m-3}{3}\alpha B+\frac{2m-3}{3}\beta A+\frac{3m-3}{3}\gamma$$
$$D=\frac{m-4}{4}\alpha C+\frac{2m-4}{4}\beta B+\frac{3m-4}{4}\gamma A$$
$$E=\frac{m-5}{5}\alpha D+\frac{2m-5}{5}\beta C+\frac{3m-5}{5}\gamma B$$

u. s. w.

§ 76.

Setzt man daher allgemein:

$$(1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4+\cdots)^{m-1}=1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+\cdots$$

so bestimmen sich die einzelnen Glieder dieser Reihe aus den vorhergehenden in folgender Weise:

$$A=\frac{m-1}{1}\alpha$$
$$B=\frac{m-2}{2}\alpha A+\frac{2m-2}{2}\beta$$
$$C=\frac{m-3}{3}\alpha B+\frac{2m-3}{3}\beta A+\frac{3m-3}{3}\gamma$$
$$D=\frac{m-4}{4}\alpha C+\frac{2m-4}{4}\beta B+\frac{3m-4}{4}\gamma A+\frac{4m-4}{4}\delta$$
$$E=\frac{m-5}{5}\alpha D+\frac{2m-5}{5}\beta C+\frac{3m-5}{5}\gamma B+\frac{4m-5}{5}\delta A+\frac{5m-5}{5}\varepsilon$$

u. s. w.

Ein jedes Glied nämlich bestimmt sich durch ebenso viele der vorhergehenden, als Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ in der Function von z enthalten sind, deren Potenz in eine Reihe entwickelt wird. Uebrigens stimmt dieses Gesetz mit dem des § 68, wo wir die analoge Form $(1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\cdots)^{-m}$ in eine unendliche Reihe entwickelten, überein. Denn setzt man hier $-m$ für m, und nimmt man die Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ negativ, so ergiebt sich dieselbe Reihe, wie dort. Indessen ist hier nicht der Ort, um durch allgemeine Schlüsse zu zeigen, warum ein solches Fortschreitungsgesetz stattfindet, da dies erst nach Entwickelung der Prinzipien der Differentialrechnung in einfacher Weise geschehen kann. Inzwischen wird es genügen, sich von der Richtigkeit desselben durch die Anwendung auf Beispiele jeglicher Art überzeugt zu haben.

5. Capitel.

Von den Functionen zweier oder mehrerer Veränderlichen.

§ 77.

Bisher haben wir zwar auch schon mehrere veränderliche Zahlgrössen betrachtet, dieselben waren jedoch so beschaffen, dass sie sämtlich Functionen einer einzigen unter ihnen waren, und dass somit, wenn diese eine einen bestimmten Wert erhielt, die übrigen dadurch mitbestimmt wurden. Jetzt dagegen werden wir **veränderliche Zahlgrössen** betrachten, welche **von einander nicht abhängen**, so dass, wenn auch der einen von ihnen ein bestimmter Wert beigelegt wird, die andern nichtsdestoweniger unbestimmt und veränderlich bleiben. Derartige veränderliche Zahlgrössen, z. B. x, y, z, stimmen also hinsichtlich ihrer Bedeutung mit einander überein, da eine jede derselben alle bestimmten Werte unter sich begreift; trotzdem aber findet zwischen ihnen, wenn man sie mit einander vergleicht, die grösste Verschiedenheit statt, indem, wenn auch die eine z einen bestimmten Wert erhält, die übrigen x und y sich noch ebenso weit erstrecken, wie vorher. Der Unterschied zwischen von einander abhängigen und von einander unabhängigen veränderlichen Zahlgrössen besteht also darin, dass bei jenen das Bestimmtwerden der einen zugleich das aller übrigen nach sich zieht, während bei diesen das Bestimmtwerden der einen auf die Bedeutung der übrigen nicht den geringsten Einfluss hat.

§ 78.

Eine Function von **zwei** oder **mehreren** Veränderlichen x, y, z ist also ein **Ausdruck**, der auf irgend eine Weise aus diesen Grössen zusammengesetzt ist.

So ist z. B. der Ausdruck $x^3+xyz+az^2$ eine Function der drei veränderlichen Zahlgrössen x, y, z, und diese Function bleibt, wenn man eine dieser Grössen, etwa z, als bestimmt ansieht, d. h. einen festen Zahlwert für sie setzt, immer noch eine veränderliche Zahlgrösse, nämlich eine Function von x und y. Ja selbst wenn ausser z auch noch y bestimmt wird, bleibt sie noch immer Function von x. Eine solche Function mehrerer Veränderlichen erhält daher nicht eher einen bestimmten Wert, als bis die einzelnen veränderlichen Zahlgrössen bestimmt sind. Da nun eine einzige veränderliche Zahlgrösse auf unendlich viele Arten bestimmt werden kann, so muss eine Function von zwei Veränderlichen, da sie für jeden bestimmten Wert der einen derselben immer noch unendlich viele Werte annehmen kann, auf unendlichmal unendlichviele Arten bestimmt werden können. Bei einer Function von drei Veränderlichen aber ist die Anzahl der Werte, welche sie annehmen kann, wieder noch unendlich vielmal grösser, und so wächst diese Anzahl weiter bei mehreren Veränderlichen.

§ 79.

Die Functionen **mehrerer Veränderlichen** teilt man ebenso wie die Functionen einer einzigen Veränderlichen sehr passend in **algebraische** und **transcendente** ein.

Unter jenen versteht man solche, zu deren Bildung nur algebraische Operationen erforderlich sind, unter diesen aber solche, in denen auch transcendente Operationen vorkommen. Bei letzteren können wieder mehrere Arten unterschieden werden, je nachdem die transcendenten Operationen entweder auf alle veränderlichen Zahlgrössen, oder auf einen Teil derselben, oder nur auf eine einzige sich beziehen. So ist zwar der Ausdruck $z^2 + y \log z$, weil darin der Logarithmus von z vorkommt, eine transcendente Function von y und z; man wird sie aber deshalb für transcendent in geringerem Masse halten, weil nach der Bestimmung von z eine algebraische Function von y übrig bleibt. Indessen hat es keinen Nutzen, durch derartige Unterabteilungen die Untersuchung weitläufiger zu machen.

§ 80.

Die algebraischen Functionen werden in **rationale** und **irrationale**, die rationalen ihrerseits wieder in **ganze** und **gebrochene** eingeteilt.

Was man für Functionen unter diesen Bezeichnungen zu verstehen habe, ist bereits aus dem ersten Capitel hinreichend ersichtlich. Eine Function ist nämlich rational, wenn in ihr die veränderlichen Zahlgrössen, von denen sie eine Function ist, nicht unter einem Wurzelzeichen vorkommen, und eine solche ist ferner ganz, wenn sie keine Brüche enthält, in deren Nennern die veränderlichen Zahlgrössen auftreten; im entgegengesetzten Falle heisst sie gebrochen. Es ist daher:

$$\alpha + \beta y + \gamma z + \delta y^2 + \varepsilon yz + \zeta z^2 + \eta y^3 + \vartheta y^2 z + \iota y z^2 + \varkappa z^3 + \cdots$$

die allgemeine Form einer ganzen Function der beiden veränderlichen Zahlgrössen y und z, und somit, wenn P und Q zwei solche ganze Functionen von zwei oder mehreren Veränderlichen bezeichnen, $\frac{P}{Q}$ die allgemeine Form der gebrochenen Functionen. Eine **irrationale** Function ferner ist entweder **entwickelt** oder **unentwickelt**. Unter der ersteren versteht man eine solche, welche durch Wurzelgrössen bereits vollständig dargestellt ist, die letztere dagegen wird durch eine noch nicht aufgelöste Gleichung gegeben. So ist z. B. V eine unentwickelte irrationale Function von y und z, wenn die Gleichung:

$$V^5 = (ayz + z^3)\, V^2 + (y^4 + z^4)\, V + y^5 + 2ayz^3 + z^5$$

besteht.

§ 81.

Ferner wird die **Vieldeutigkeit** bei diesen Functionen in derselben Weise definirt wie bei denen, die nur von einer einzigen Veränderlichen abhängen.

So sind die rationalen Functionen eindeutig, weil sie für bestimmte Werte der einzelnen veränderlichen Zahlgrössen stets nur einen bestimmten Wert geben. Bezeichnen ferner $P, Q, R, S\ldots$ rationale oder eindeutige Functionen von x, y, z, so ist V eine zweideutige Function derselben Veränderlichen, wenn

$$V^2 - PV + Q = 0$$

ist; denn es besitzt die Function V, wenn man den Grössen x, y, z irgend welche bestimmten Werte zuerteilt, stets nicht nur einen, sondern zwei bestimmte Werte. Ebenso ist die Function V, wenn

$$V^3 - PV^2 + QV - R = 0$$

ist, eine dreideutige, und wenn

$$V^4 - PV^3 + QV^2 - RV + S = 0,$$

eine vierdeutige Function. Aehnlich verhält es sich mit den übrigen mehrdeutigen Functionen.

§ 82.

Ebenso wie, wenn man eine Function der einen Veränderlichen z gleich 0 setzt, dadurch die veränderliche Zahlgrösse z entweder nur einen einzigen oder mehrere bestimmte Werte erhält, so wird auch, wenn man eine Function der beiden Veränderlichen y und z gleich 0 setzt, die eine dieser Veränderlichen durch die andere bestimmt, und daher eine Function derselben, obgleich sie vorher nicht von einander abhingen. Ebenso wird, wenn man eine Function von drei Veränderlichen x, y, z gleich 0 setzt, die eine der drei Veränderlichen durch die beiden andern bestimmt, und demnach eine Function derselben. Dasselbe ist der Fall, wenn man eine Function nicht der 0, sondern einer constanten Zahlgrösse, oder irgend einer andern Function gleichsetzt, denn aus **jeder Gleichung wird**, so viel Veränderliche darin auch vorkommen mögen, doch immer **die eine der Veränderlichen durch die übrigen bestimmt**, und demnach Function derselben. Ferner lassen sich aus **zwei verschiedenen Gleichungen** zwischen denselben Veränderlichen immer **zwei der Veränderlichen durch die übrigen bestimmen** u. s. f.

§ 83.

Besonders beachtenswert ist aber die Einteilung der Functionen zweier oder mehrerer Veränderlichen in **homogene** und **heterogene**.

Homogen heisst eine Function, wenn in ihr sämtliche Glieder von einer und derselben Dimension sind, heterogen dagegen, wenn dies nicht der Fall ist. Es wird dabei aber eine jede Veränderliche für eine Dimension, das Quadrat davon oder das Product aus zweien für zwei, das Product aus drei Veränderlichen, sie mögen nun einander gleich oder verschieden sein, für drei Dimensionen u. s. w. gerechnet, während die constanten Grössen bei der Abzählung der Dimensionen nicht in Betracht kommen. So sagt man, es seien die Ausdrücke αy, βz von einer, αy^2, βyz, γz^2 von zwei, αy^3, $\beta y^2 z$, $\gamma y z^2$, δz^3 von drei, αy^4, $\beta y^3 z$, $\gamma y^2 z^2$, $\delta y z^3$, εz^4 von vier Dimensionen u. s. f.

§ 84.

Wir wollen diese Einteilung zunächst auf die ganzen Functionen anwenden, und dabei annehmen, dass dieselben nur zwei Veränderliche enthalten, da sich die Sache bei mehreren Veränderlichen ganz ebenso verhält.

Eine **ganze** Function ist also **homogen**, wenn in ihr die einzelnen Glieder alle von derselben Dimension sind.

Man teilt daher solche Functionen am passendsten wieder nach der Anzahl der Dimensionen ihrer Glieder ein. So sind

$$\begin{aligned}
&\alpha y + \beta z\\
&\alpha y^2 + \beta y z + \gamma z^2\\
&\alpha y^3 + \beta y^2 z + \gamma y z^2 + \delta z^3\\
&\alpha y^4 + \beta y^3 z + \gamma y^2 z^2 + \delta y z^3 + \varepsilon z^4 \text{ u. s. w.}
\end{aligned}$$

bezüglich die allgemeinen Formen der ganzen homogenen Functionen von einer, zwei, drei, vier u.s.w. Dimensionen. Analog hierzu wird daher eine constante Zahlgrösse α für sich allein von gar keiner Dimension sein.

§ 85.

Eine **gebrochene** Function ferner ist **homogen**, wenn Zähler und Nenner derselben homogene Functionen sind.

So ist der Bruch $\frac{ay^2 + bz^2}{\alpha y + \beta z}$ eine homogene Function von y und z. Die Anzahl der Dimensionen bei derartigen Functionen findet man aber, wenn man die Anzahl der Dimensionen des Nenners von der des Zählers subtrahirt. Es ist daher der angeführte Bruch von einer Dimension, dagegen der Bruch $\frac{y^5 + z^5}{y^2 + z^2}$ eine Function von drei Dimensionen. Sobald also der Nenner von derselben Dimension ist, wie der Zähler, so ist der Bruch eine homogene Function von gar keiner Dimension, was z. B. bei dem Bruche $\frac{y^3 + z^3}{y^2 z}$ oder bei den folgenden $\frac{y}{z}$, $\frac{\alpha z^2}{y^2}$, $\frac{\beta y^3}{z^3}$ der Fall ist. Ist aber der Nenner von einer höheren Dimension als der Zähler, so ist die Zahl, welche die Dimension des Bruches angiebt, negativ. So ist $\frac{y}{z^2}$ eine Function von -1, $\frac{y + z}{y^4 + z^4}$ eine solche von -3, $\frac{1}{y^5 + ayz^4}$ eine Function von -5 Dimensionen, da im letzteren Beispiele der Zähler von keiner Dimension ist. Uebrigens ist sofort ersichtlich, dass, wenn man mehrere homogene Functionen von einer und derselben Dimension zu einander addirt oder von einander subtrahirt, man ebenfalls wieder eine homogene Function von derselben Dimension erhält. So stellt der Ausdruck

$$\alpha y + \frac{\beta z^2}{y} + \frac{\gamma y^4 - \delta z^4}{y^2 z + y z^2}.$$

eine Function von einer, und

$$\alpha + \frac{\beta y}{z} + \frac{\gamma z^2}{y^2} + \frac{y^2 + z^2}{y^2 - z^2}$$

eine solche von keiner Dimension dar.

§ 86.

Auch auf **irrationale** Functionen lässt sich der Begriff der Homogeneität ausdehnen. Ist nämlich P irgend eine homogene Function von n Dimensionen, so ist $\sqrt{P}$ von $\frac{n}{2}$, $\sqrt[3]{P}$ von $\frac{n}{3}$ und allgemein $P^{\frac{\mu}{\nu}}$ von $\frac{\mu}{\nu}\, n$ Dimensionen. Es sind also z. B.:

$$\sqrt{y^2 + z^2},\quad \sqrt[3]{y^9 + z^9},\quad (yz + z^2)^{\frac{3}{4}},\quad \frac{y^2 + z^2}{\sqrt{y^4 + z^4}}$$

Functionen bezüglich von einer, von drei, von $\frac{3}{2}$ und von keiner Dimension. Verbindet man dies mit dem Vorhergehenden, so sieht man, dass der Ausdruck:

$$\frac{1}{y} + \frac{y\sqrt{y^2 + z^2}}{z^3} - \frac{y}{\sqrt[3]{y^6 - z^6}} + \frac{y\sqrt{z}}{z^2\sqrt{y} + \sqrt{y^5 + z^5}}$$

eine homogene Function von -1 Dimension ist.

§ 87.

Hiernach lässt sich leicht beurteilen, ob eine implicite irrationale Function homogen ist oder nicht. Es sei z. B. V eine solche implicite Function, und

$$V^3 + PV^2 + QV + R = 0,$$

wobei P, Q, R Functionen von y und z sind. Dann ist zunächst klar, dass V nur dann eine homogene Function sein kann, wenn P, Q, R homogene Functionen sind. Nehmen wir ferner an, V sei von n Dimensionen, so ist V^2 eine Function von $2n$ und V^3 eine solche von $3n$ Dimensionen. Damit also in den einzelnen Gliedern die Zahl der Dimensionen dieselbe sei, muss notwendig P eine Function von n, Q eine von $2n$ und R eine von $3n$ Dimensionen sein. Umgekehrt aber kann man, wenn P, Q, R homogene Functionen respective von $n, 2n, 3n$ Dimensionen sind, schliessen, dass V eine homogene Function von n Dimensionen ist. Ist z. B.

$$V^5 + (y^4 + z^4) V^3 + ay^8 V - z^{10} = 0,$$

so ist V eine homogene Function von y und z von zwei Dimensionen.

§ 88.

Ist V eine homogene Function von y und z von n Dimensionen, und setzt man in ihr überall $y = uz$, so verwandelt sich V in das Product aus der Potenz z^n und einer gewissen Function der Veränderlichen u.

Durch diese Substitution $y = uz$ tritt nämlich zu jedem einzelnen Gliede dieselbe Potenz von z noch hinzu, in welcher vorher y darin vorkam. Da nun in jedem einzelnen Gliede die Anzahl der Dimensionen von y und z zusammengenommen gleich der Zahl n war, so wird jetzt die Veränderliche z für sich allein überall in der $n$ten Dimension auftreten, d. h. es wird überall die Potenz z^n vorkommen. Es wird somit die Function V durch die Potenz z^n teilbar, und der Quotient wird eine Function sein, welche nur noch die eine Veränderliche u enthält.

Dies ist zunächst klar bei den ganzen Functionen; denn ist:

$$V = ay^3 + \beta y^2 z + \gamma y z^2 + \delta z^3,$$

so wird, wenn $y = uz$ gesetzt wird,

$$V = z^3(au^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta).$$

Dasselbe gilt aber auch von den Brüchen; denn ist z. B.

$$V = \frac{ay + \beta z}{y^2 + z^2},$$

also V eine homogene Function von -1 Dimension, so wird dadurch, dass man $y = uz$ setzt,

$$V = z^{-1} \cdot \frac{au + \beta}{u^2 + 1}.$$

Endlich findet hiervon auch bei den irrationalen Functionen keine Ausnahme statt. Denn ist z. B.

$$V = \frac{y + \sqrt{y^2 + z^2}}{z\sqrt{y^3 + z^3}},$$

welcher Ausdruck von $-\frac{3}{2}$ Dimensionen ist, so wird für $y = uz$:

$$V = z^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{u + \sqrt{u^2 + 1}}{\sqrt{u^3 + 1}}.$$

Auf diese Weise lassen sich also die homogenen Functionen von nur zwei Veränderlichen auf Functionen einer einzigen Veränderlichen zurückführen, da die Potenz von z, weil sie als Factor auftritt, auf die Function von u keinen Einfluss ausübt.

§ 89.

Wenn daher V eine homogene Function zweier Veränderlichen y und z von keiner Dimension ist, so kann man sie dadurch, dass man $y = uz$ setzt, in eine blosse Function einer einzigen Veränderlichen u verwandeln.

Denn da die Anzahl der Dimensionen gleich 0 ist, so ist die Potenz von z, mit welcher die Function von u multiplicirt werden müsste, $z^0 = 1$. Es verschwindet also in diesem Falle die Veränderliche z vollständig aus der Rechnung. So entsteht, wenn

$$V = \frac{y + z}{y - z}$$

ist und $y = uz$ gesetzt wird,

$$V = \frac{u + 1}{u - 1},$$

und ist die Function irrational und z. B.

$$V = \frac{y - \sqrt{y^2 + z^2}}{z},$$

so wird für $y = uz$:

$$V = u - \sqrt{u^2 + 1}.$$

§ 90.

Eine ganze homogene Function zweier Veränderlichen y und z lässt sich in so viele einfache Factoren von der Form $\alpha y + \beta z$ zerlegen, als die Anzahl ihrer Dimensionen angiebt.

Denn da die Function homogen ist, so geht sie, wenn man $y = uz$ setzt, über in das Product aus z^n und einer gewissen ganzen Function von u, welche letztere demnach in einfache Factoren von der Form $\alpha u + \beta$ zerlegt werden kann. Multiplicirt man sodann jeden einzelnen Factor mit z, so wird jeder derselben von der Form $\alpha uz + \beta z = \alpha y + \beta z$, da $uz = y$ ist. Wegen des Factors z^n giebt es aber gerade so viele Factoren von dieser Form, als der Exponent n Einheiten enthält. Diese einfachen Factoren können jedoch sowohl reell als imaginär sein, d. h. es können die Coefficienten α und β zum Teil reell, zum Teil imaginär sein.

Hieraus folgt also, dass die Function von zwei Dimensionen: $ay^2 + byz + cz^2$ zwei einfache Factoren von der Form $\alpha y + \beta z$ besitzt; ebenso hat die Function $ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3$ drei einfache Factoren von der Form $\alpha y + \beta z$, und analog verhält es sich mit den ganzen homogenen Functionen von noch mehr Dimensionen.

§ 91.

So wie also der Ausdruck $\alpha y + \beta z$ die allgemeine Form der ganzen (homogenen) Functionen von einer Dimension darstellt, so ist $(\alpha y + \beta z)(\gamma y + \delta z)$ die allgemeine Form der ganzen (homogenen) Functionen von zwei Dimensionen. Ebenso sind in der Form $(\alpha y + \beta z)(\gamma y + \delta z)(\varepsilon y + \zeta z)$ alle ganzen (homogenen) Functionen von drei Dimensionen enthalten, und so können sämtliche ganzen homogenen Functionen als Producte von so vielen Factoren von der Form $\alpha y + \beta z$ dargestellt werden, als die Anzahl ihrer Dimensionen angiebt. Diese Factoren werden aber genau ebenso mittelst der Auflösung der Gleichungen gefunden, wie wir oben die einfachen Factoren der ganzen Functionen von nur einer Veränderlichen finden lehrten. Uebrigens lässt sich diese Eigenschaft der homogenen Functionen von zwei Veränderlichen nicht ausdehnen auf die homogenen Functionen von drei oder mehr Veränderlichen. Denn die allgemeine Form einer solchen Function von nur zwei Dimensionen, nämlich: $ay^2 + byz + cyx + dxz + ex^2 + fz^2$ lässt sich im allgemeinen nicht auf ein Product von der Form $(\alpha y + \beta z + \gamma x)(\delta y + \varepsilon z + \zeta x)$ zurückführen, und noch viel weniger ist dies bei Functionen von noch mehr Dimensionen der Fall.

§ 92.

Aus dem, was wir über die homogenen Functionen gesagt haben, erhellt zugleich, was man unter einer **heterogenen** Function zu verstehen hat. Es ist dies nämlich eine Function, deren einzelne Glieder nicht alle von derselben Dimension sind. Man kann aber die heterogenen Functionen darnach einteilen, dass man angiebt, wie viele verschiedene Zahlen bei ihnen als Dimensionszahlen der einzelnen Glieder vorkommen. So heisst eine Function zweiteilig, wenn in ihr nur Glieder von zwei verschiedenen Dimensionen auftreten; eine solche Function wird daher das Aggregat zweier homogener Functionen von verschiedener Dimension sein. Z. B. ist $y^5 + 2y^3z^2 + y^2 + z^2$ eine zweiteilige Function, weil ihre Glieder zum Teil von fünf, zum Teil von zwei Dimensionen sind. Ferner ist eine Function dreiteilig, wenn in ihr nur Glieder von drei verschiedenen Dimensionen vorkommen, oder wenn sie in drei homogene Functionen zerteilt werden kann, wie z. B. $y^6 + y^3z^2 + z^4 + y - z$.

Ausserdem aber giebt es noch gebrochene und irrationale heterogene Functionen, die so vermischt sind, dass sie nicht in homogene Functionen zerteilt werden können, z. B. $\dfrac{y^3 + ayz}{by + z^2}$, oder $\dfrac{a + \sqrt{y^2 + z^2}}{y^2 - bz}$.

§ 93.

Zuweilen lässt sich auch eine **heterogene** Function dadurch, dass man für die eine oder auch für beide Veränderlichen eine passende Substitution einführt, auf eine homogene zurückführen; indessen ist es nicht leicht anzugeben, in welchem Falle dies möglich ist. Es mag daher genügen, einige Beispiele anzuführen, bei denen eine solche Reduction stattfindet. Ist z. B. die Function

$$y^5 + z^2y + y^3z + \frac{z^3}{y}$$

gegeben, so sieht man bald, dass dieselbe homogen wird, wenn man $z = x^2$ setzt; denn dadurch verwandelt sie sich in:

$$y^5 + x^4y + y^3x^2 + \frac{x^6}{y},$$

also in eine homogene Function von x und y von fünf Dimensionen. Ferner wird die Function

$$y + y^2x + y^3x^2 + y^5x^4 + \frac{a}{x}$$

dadurch auf eine homogene Form gebracht, dass man $x = \frac{1}{z}$ setzt; denn dadurch geht sie in die Function von einer Dimension:

$$y + \frac{y^2}{z} + \frac{y^3}{z^2} + \frac{y^5}{z^4} + az$$

über. Weit mehr Schwierigkeiten aber bieten die Fälle, bei denen man nicht durch eine so einfache Substitution die homogene Form herstellen kann.

§ 94.

Endlich verdient noch die sehr gebräuchliche Einteilung der ganzen Functionen **nach ihrer Ordnung** hervorgehoben zu werden, nach welcher sich die Ordnung einer Function durch die höchste derjenigen Zahlen bestimmt, welche die Dimensionen der einzelnen Glieder angeben. So ist z. B.:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ay - a^2$$

eine Function zweiter Ordnung, weil die Glieder höchster Dimension von zwei Dimensionen sind. Ferner gehört

$$y^4 + yz^3 - ay^2z + abyz - a^2y^2 + b^4$$

zu den Functionen der vierten Ordnung. Diese Einteilung der Functionen ist besonders wichtig für die Lehre von den krummen Linien; ebendaher stammt auch noch die im folgenden Paragraphen zu erwähnende Einteilung der ganzen Functionen.

§ 95.

Es bleibt nämlich noch die Einteilung der ganzen Functionen in **zusammengesetzte** und **nichtzusammengesetzte** übrig. Eine Function heisst zusammengesetzt, wenn sie in rationale Factoren zerlegt werden kann, oder wenn sie das Product aus zwei oder mehreren rationalen Functionen ist. Eine solche Function ist z. B.

$$y^4 - z^4 + 2az^3 - 2byz^2 - a^2z^2 + 2abzy - b^2y^2,$$

da sie gleich dem Producte aus den zwei Functionen

$$(y^2 + z^2 - az + by)(y^2 - z^2 + az - by)$$

ist. Nach dem Obigen ist daher jede ganze homogene Function von nur zwei Veränderlichen eine zusammengesetzte Function, da sie stets in so viele einfache Factoren von der Form $\alpha y + \beta z$ zerlegt werden kann, als die Anzahl ihrer Dimensionen beträgt. Eine ganze Function heisst aber nichtzusammengesetzt, wenn sie auf keinerlei Weise in rationale Factoren zerlegbar ist. Eine solche Function ist z. B.

$$y^2 + z^2 - a^2,$$

bei welcher offenbar eine Zerlegung in rationale Factoren nicht möglich ist. Durch Aufsuchung der Teiler einer Function erkennt man, ob dieselbe zusammengesetzt ist oder nicht.

6. Capitel.

Von den Exponentialgrössen und den Logarithmen.

§ 96.

Obgleich die **transcendenten** Functionen erst in der Integralrechnung genauer zu untersuchen sein werden, wollen wir doch, bevor wir dazu gelangen, einige besonders oft vorkommende und zu vielen Untersuchungen den Weg bahnende Arten derselben schon jetzt betrachten. Dahin gehören zunächst die **Exponentialgrössen** oder die Potenzen, deren **Exponent** eine **veränderliche** Zahlgrösse ist. Offenbar nämlich können derartige Zahlgrössen nicht zu den algebraischen Functionen gerechnet werden, da in diesen nur constante Exponenten vorkommen dürfen. Es giebt aber verschiedene Arten von Exponentialgrössen, je nachdem der Exponent für sich allein oder auch noch die zur Potenz erhobene Zahlgrösse veränderlich ist. Zur ersteren Art gehört a^z, zur letzteren y^z; ausserdem aber kann der Exponent selbst wieder eine Exponentialgrösse sein, wie in a^{a^z}, a^{y^z}, y^{a^z}, x^{y^z}. Indessen wollen wir uns bei der weiteren Einteilung dieser Grössen nicht länger aufhalten, da man ihre Beschaffenheit hinlänglich klar zu erkennen im Stande ist, wenn man nur die erste Art a^z genauer untersucht hat.

§ 97.

Es sei also eine solche Exponentialgrösse a^z, d. h. eine Potenz der constanten Zahlgrösse a mit dem veränderlichen Exponenten z gegeben. Da der Exponent z alle möglichen bestimmten Werte unter sich begreift, so ist zunächst klar, dass, wenn man an Stelle von z nach und nach alle ganzen positiven Zahlen setzt, dadurch die bestimmten Werte a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 u. s. w. hervorgehen werden. Setzt man aber der Reihe nach für z die negativen ganzen Zahlen -1, -2, -3 u. s. w., so erhält man $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^4}$ u. s. w., und für $z = 0$ wird $a^0 = 1$. Lässt man z einen

Bruch wie $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ u. s. w. bedeuten, so ergeben sich die Werte $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[4]{a^3}$ u. s. w. Obwohl diese an und für sich betrachtet zwei oder mehrere Werte annehmen, weil die Wurzelausziehung stets mehrdeutige Functionen liefert, so lässt man doch an diesem Orte gewöhnlich nur die Hauptwerte, d. h. die reellen und positiven Werte, gelten, weil man die Grösse a^z in gewissem Sinne als eine eindeutige Function ansieht. So nimmt $a^{\frac{5}{2}}$ zwischen a^2 und a^3 gewissermassen einen mittleren Platz ein und ist demgemäss eine Grösse derselben Art. Obwohl daher $a^{\frac{5}{2}}$ an und für sich ebensowohl gleich $-a^2\sqrt{a}$ als gleich $+a^2\sqrt{a}$ sein kann, so kommt hier doch nur der letztere Wert dafür in Betracht. Ebenso verhält sich die Sache, wenn der Exponent z irrationale Werte annimmt. Denn da es in einem solchen Falle schwer sein würde, sich die Anzahl der darin enthaltenen Werte vorzustellen, so betrachtet man nur den einen reellen Wert davon. Es besitzt also $a^{\sqrt{7}}$ einen bestimmten Wert, der zwischen den Grenzen a^2 und a^3 liegt.

§ 98.

Hauptsächlich hängen aber die Werte der Exponentialgrösse a^z von der Grösse der constanten Zahl a ab. Ist nämlich $a=1$, so ist stets $a^z=1$, welchen Wert auch der Exponent z haben möge. Ist aber $a>1$, so wird der Wert von a^z um so grösser, je grösser die Zahl ist, die man für z setzt, bis er für $z=\infty$ ebenfalls unendlich gross wird. Für $z=0$ wird $a^z=1$, und ist $z<0$, so werden die Werte von a^z kleiner als 1, bis für $z=-\infty$ $a^z=0$ wird. Gerade das Umgekehrte findet statt, wenn $a<1$, aber immer noch positiv ist; dann nehmen nämlich die Werte von a^z ab, während z über 0 hinaus wächst, und sie nehmen zu, wenn für z negative Zahlen gesetzt werden. Denn ist $a<1$, so ist $\frac{1}{a}>1$. Setzt man daher $\frac{1}{a}=b$, so wird $a^z=b^{-z}$, wonach man den letzteren Fall nach dem ersteren beurteilen kann.

§ 99.

Ist $a=0$, so findet sich zwischen den Werten von a^z ein sehr grosser Sprung. So lange nämlich z eine positive Zahl und grösser wie 0 ist, ist beständig $a^z=0$; ist $z=0$, so wird $a^0=1$; ist aber z eine negative Zahl, so erhält a^z einen unendlich grossen Wert. Denn ist z. B. $z=-3$, so wird $a^z=0^{-3}=\frac{1}{0^3}=\frac{1}{0}$, also unendlich gross. Noch viel grössere Sprünge aber kommen vor, wenn die constante Zahlgrösse a einen negativen Wert, z. B. den Wert -2 hat. Denn setzt man dann für z ganze Zahlen, so werden die Werte von a^z abwechselnd positiv und negativ, wie aus der Reihe ersichtlich ist:

$$a^{-4},\ a^{-3},\ a^{-2},\ a^{-1},\ a^0,\ a^1,\ a^2,\ a^3,\ a^4 \text{ u. s. w.}$$
$$+\frac{1}{16},\ -\frac{1}{8},\ +\frac{1}{4},\ -\frac{1}{2},\ 1,\ -2,\ +4,\ -8,\ +16 \text{ u. s. w.}$$

Ausserdem aber werden, wenn man dem Exponenten z gebrochene Werte giebt, die Potenzen $a^z=(-2)^z$ bald reelle, bald imaginäre Werte besitzen. So wird z. B. $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-2}$ imaginär, während $a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-2}=-\sqrt[3]{2}$ reell ist. Ob aber die Potenz a^z, sobald der Exponent z irrationale Werte erhält, reelle oder imaginäre Werte liefert, lässt sich überhaupt gar nicht bestimmen.

§ 100.

Der angeführten Unbequemlichkeiten bei negativen Werten von a halber wollen wir voraussetzen, dass a eine positive Zahl und grösser als 1 sei, da sich auf diesen Fall der andere, wo a eine positive Zahl, aber kleiner als 1 ist, leicht zurückführen lässt. Setzt man dann $a^z=y$, und nimmt man für z alle reellen Werte, welche zwischen den Grenzen $+\infty$ und $-\infty$ liegen, so wird y alle positiven zwischen den Grenzen $+\infty$ und 0 enthaltenen Werte annehmen. Denn für $z=\infty$ ist $y=\infty$, für $z=0$ ist $y=1$, und für $z=-\infty$ ist $y=0$. Umgekehrt giebt es zu jedem beliebigen positiven Werte von y immer auch einen reellen Wert von z von der Beschaffenheit, dass $a^z=y$ ist. Dagegen kann der Exponent z keinen reellen Wert besitzen, wenn y einen negativen Wert hat.

§ 101.

Wenn also $y=a^z$ ist, so ist y eine gewisse Function von z, und es lässt sich aus der Natur der Potenzen leicht absehen, in welcher Weise y von z abhängt, da man daraus, welchen Wert man auch z geben möge, den zugehörigen Wert von y bestimmen kann. Es ist aber $y^2=a^{2z}$, $y^3=a^{3z}$, und allgemein $y^n=a^{nz}$, woraus folgt, dass $\sqrt{y}=a^{\frac{1}{2}z}$, $\sqrt[3]{y}=a^{\frac{1}{3}z}$; $\frac{1}{y}=a^{-z}$, $\frac{1}{y^2}=a^{-2z}$, $\frac{1}{\sqrt{y}}=a^{-\frac{1}{2}z}$ u. s. w. ist. Ausserdem wird, wenn $v=a^x$ ist, $vy=a^{x+z}$ und $\frac{v}{y}=a^{x-z}$. Mit Hülfe dieser Formeln lässt sich der Wert von y, der zu einem gegebenen Werte von z gehört, noch weit leichter finden.

Beispiel.

Ist z. B. $a=10$, so kennt man aus unserm dekadischen Zahlensystem ohne Weiteres die Werte von y, welche zu ganzzahligen Werten von z gehören; denn es ist $10^1=10$, $10^2=100$, $10^3=1000$, $10^4=10000$, ferner $10^0=1$ und $10^{-1}=\frac{1}{10}=0{,}1$, $10^{-2}=\frac{1}{100}=0{,}01$, $10^{-3}=\frac{1}{1000}=0{,}001$.

Setzt man aber für z einen Bruch, so findet man den Wert von y durch Wurzelausziehung. So ist z. B. $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3{,}162277$ u. s. w.

§ 102.

Ebenso aber, wie bei gegebenem Werte von a zu jedem Werte von z der entsprechende Wert von y gefunden werden kann, lässt sich auch umgekehrt zu jedem gegebenen positiven Werte von y der Wert von z angeben, für welchen $a^z = y$ ist. Dieser Wert von z heisst, insofern er als Function von y betrachtet wird, der **Logarithmus** von y. Es setzt daher die Lehre von den Logarithmen die Annahme einer bestimmten constanten Zahl a voraus, welche deshalb die Basis der Logarithmen genannt wird. Ist diese angenommen, so ist der Logarithmus irgend einer Zahl y der Exponent einer Potenz a^z von der Beschaffenheit, dass $a^z = y$ ist, und diesen Logarithmus der Zahl y bezeichnet man gewöhnlich durch $\log y$. Ist somit $a^z = y$, so ist $z = \log y$. Hieraus geht hervor, dass die Basis der Logarithmen, obwohl sie im Uebrigen willkürlich angenommen werden darf, doch eine Zahl sein muss, die grösser als 1 ist, und dass somit nur die Logarithmen der positiven Zahlen reelle Zahlgrössen sind.

§ 103.

Welche Zahl man aber auch als **Basis** a der Logarithmen nehmen möge, so ist immer $\log 1 = 0$. Denn setzt man in der Gleichung $a^z = y$ oder, was dasselbe ist, in $z = \log y$, $y = 1$, so wird $z = 0$. Ferner sind die Logarithmen von Zahlen, welche grösser sind als 1, positiv und hängen ab von dem Werte der Basis a. So ist $\log a = 1$, $\log a^2 = 2$, $\log a^3 = 3$, $\log a^4 = 4$. Hiernach kann man rückwärts schliessen, dass, welche Zahl auch als Basis genommen sein möge, diejenige Zahl die Basis der Logarithmen sein werde, deren Logarithmus gleich 1 ist. Die Logarithmen der positiven Zahlen aber, welche kleiner als 1 sind, sind negativ; denn es ist $\log \frac{1}{a} = -1$, $\log \frac{1}{a^2} = -2$, $\log \frac{1}{a^3} = -3$ u. s. w. Endlich sind die Logarithmen der negativen Zahlen, wie bereits bemerkt, nicht reell, sondern imaginär.

§ 104.

Ebenso wird, wenn $\log y = z$ ist, $\log y^2 = 2z$, $\log y^3 = 3z$ und allgemein $\log y^n = nz$, oder da $z = \log y$ ist,

$$\log y^n = n \log y.$$

Man findet daher den **Logarithmus** irgend **einer Potenz** von y, indem man den Logarithmus von y mit dem Exponenten der Potenz multiplicirt. So ist z. B.

$$\log \sqrt{y} = \frac{1}{2} \log y,\ \log \frac{1}{\sqrt{y}} = \log y^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \log y \text{ u. s. w.,}$$

und es können somit aus dem gegebenen Logarithmus irgend einer Zahl die Logarithmen aller ihrer Potenzen gefunden werden. Sind aber bereits zwei Logarithmen gefunden, z. B. $\log y = z$ und $\log v = x$, so dass also $a^z = y$ und $a^x = v$ ist, so wird

$$\log (vy) = x + z = \log v + \log y,$$

und es ist somit der **Logarithmus des Products** zweier Zahlen gleich der Summe der Logarithmen der Factoren. Ebenso ist:

$$\log \frac{y}{v} = z - x = \log y - \log x,$$

d. h. man findet den **Logarithmus eines Bruches**, indem man den Logarithmus des Nenners von dem des Zählers subtrahirt. Diese Regeln dienen dazu, um aus einigen schon bekannten Logarithmen die Logarithmen noch vieler anderer Zahlen zu finden.

§ 105.

Hieraus folgt aber auch, dass es ausser den Logarithmen der Potenzen der Basis a keine rationalen Logarithmen weiter giebt; denn es lässt sich der Logarithmus einer Zahl b nur dann durch eine rationale Zahl darstellen, wenn b eine Potenz der Basis a ist. Der Logarithmus von b kann aber auch keine irrationale Zahl sein; denn wäre $\log b = \sqrt{n}$, so müsste $a^{\sqrt{n}} = b$ sein, was unmöglich ist, wenn die Zahlen a und b als rational vorausgesetzt werden. Man pflegt aber eben nur die Logarithmen der rationalen und ganzen Zahlen zu suchen, da man aus diesen die Logarithmen der Brüche und der irrationalen Zahlen finden kann. Da sich somit die Logarithmen der Zahlen, welche nicht gerade Potenzen der Basis a sind, weder rational noch irrational darstellen lassen, so rechnet man dieselben mit Recht zu den transcendenten Grössen, daher man denn auch gewöhnlich die Logarithmen überhaupt den transcendenten Grössen zuzählt.

§ 106.

Aus diesem Grunde können die Logarithmen der Zahlen auch nur annäherungsweise durch **Decimalbrüche** dargestellt werden, die aber um so weniger von dem wahren Werte abweichen werden, auf je mehr Stellen man sie berechnet, und zwar kann man auf folgende Weise nur allein durch Ausziehung der Quadratwurzel den Logarithmus einer jeden Zahl mit grosser Annäherung bestimmen. Da nämlich, wenn $\log y = z$ und $\log v = x$ gesetzt wird, $\log \sqrt{vy} = \frac{x+z}{2}$ ist, so suche man, wenn die gegebene Zahl b zwischen den Grenzen a^2 und a^3, deren Logarithmen 2 und 3 sind, enthalten ist, den Wert von $a^{2\frac{1}{2}}$ oder $a^2\sqrt{a}$. Alsdann liegt b entweder zwischen den Grenzen a^2 und $a^2\sqrt{a}$, oder zwischen $a^2\sqrt{a}$ und a^3. Welches von beiden auch der Fall sein möge, man erhält, indem man wieder zwischen den beiden Grenzen die mittlere Proportionalzahl aufsucht, zwei neue sich enger anschliessende Grenzen und kann dann, auf diesem Wege fortfahrend, zu Grenzen gelangen, welche um weniger als eine gegebene Zahlgrösse von einander abweichen, und die man daher ohne merklichen Fehler für die gegebene Zahlgrösse b nehmen kann. Da man nun aber die Logarithmen der einzelnen Grenzen leicht finden kann, so kann auch der Logarithmus der Zahl b gefunden werden.

Beispiel.

Man setze, wie es in den gewöhnlichen Tafeln zu geschehen pflegt, die logarithmische Basis $a = 10$ und suche den Logarithmus der Zahl 5 näherungsweise zu bestimmen. Da diese Zahl zwischen den Grenzen 1 und 10, deren Logarithmen 0 und 1 sind, liegt, so hat man auf folgende Weise eine Reihe von Quadratwurzeln auszuziehen, bis man zu Grenzen kommt, die von der gegebenen Zahl 5 nicht mehr verschieden sind:

		Es sei:
$A = 1{,}000000,$	$\log A = 0{,}0000000.$	$C = \sqrt{AB}$
$B = 10{,}000000,$	$\log B = 1{,}0000000.$	$D = \sqrt{BC}$
$C = 3{,}162277,$	$\log C = 0{,}5000000.$	$E = \sqrt{CD}$
$D = 5{,}623413,$	$\log D = 0{,}7500000.$	$F = \sqrt{DE}$
$E = 4{,}216964,$	$\log E = 0{,}6250000.$	$G = \sqrt{DF}$
$F = 4{,}869674,$	$\log F = 0{,}6875000.$	$H = \sqrt{FG}$
$G = 5{,}232991,$	$\log G = 0{,}7187500.$	$J = \sqrt{FH}$
$H = 5{,}048065,$	$\log H = 0{,}7031250.$	$K = \sqrt{HJ}$
$J = 4{,}958069,$	$\log J = 0{,}6953125.$	$L = \sqrt{JK}$
$K = 5{,}002865,$	$\log K = 0{,}6992187.$	$M = \sqrt{KL}$
$L = 4{,}980416,$	$\log L = 0{,}6972656.$	$N = \sqrt{KM}$
$M = 4{,}991627,$	$\log M = 0{,}6982421.$	$O = \sqrt{KN}$
$N = 4{,}997242,$	$\log N = 0{,}6987304.$	$P = \sqrt{NO}$
$O = 5{,}000052,$	$\log O = 0{,}6989745.$	$Q = \sqrt{OP}$
$P = 4{,}998647,$	$\log P = 0{,}6988525.$	$R = \sqrt{OQ}$
$Q = 4{,}999350,$	$\log Q = 0{,}6989135.$	$S = \sqrt{OR}$
$R = 4{,}999701,$	$\log R = 0{,}6989440.$	$T = \sqrt{OS}$
$S = 4{,}999876,$	$\log S = 0{,}6989592.$	$V = \sqrt{OT}$
$T = 4{,}999963,$	$\log T = 0{,}6989668.$	$W = \sqrt{TV}$
$V = 5{,}000008,$	$\log V = 0{,}6989707.$	$X = \sqrt{VW}$
$W = 4{,}999984,$	$\log W = 0{,}6989687.$	$Y = \sqrt{VX}$
$X = 4{,}999997,$	$\log X = 0{,}6989697.$	$Z = \sqrt{XY}$
$Y = 5{,}000003,$	$\log Y = 0{,}6989702.$	
$Z = 5{,}000000,$	$\log Z = 0{,}6989700.$	

Auf diese Weise sind wir also, indem wir nur immer die mittlere Proportionalzahl suchten, zur Zahl $Z = 5{,}000000$ gelangt, und es ist daher der gesuchte Logarithmus der Zahl 5 gleich 0,6989700, wenn als Basis der Logarithmen die Zahl $a = 10$ genommen wird. Es ist somit annähernd $10^{\frac{69897}{100000}} = 5$. **Briggs** und **Vlacq** haben auf diese Weise in der Tat das gemeine Logarithmensystem berechnet; jedoch hat man später weit bequemere Hülfsmittel entdeckt, um die Logarithmen auf viel kürzerem Wege zu bestimmen.

§ 107.

Es giebt demnach so viel verschiedene **Logarithmensysteme**, als man verschiedene Zahlen für die Basis a nehmen kann, und es ist somit die Zahl der logarithmischen Systeme unendlich gross. Indessen **haben die Logarithmen derselben Zahl in zwei verschiedenen Systemen stets unter einander dasselbe Verhältnis.** Ist nämlich die Basis des einen Systems gleich a, die des andern gleich b, und ist der Logarithmus der Zahl n in jenem Systeme gleich p, in diesem gleich q, so ist $a^p = n$ und $b^q = n$, folglich $a^p = b^q$, und daher $a = b^{\frac{q}{p}}$. Es muss daher der Bruch $\frac{q}{p}$ einen constanten Wert behalten, welche Zahl man auch für n nehmen möge. Hat man daher für ein einziges System die Logarithmen aller Zahlen berechnet, so lassen sich daraus sehr leicht die Logarithmen für jedes andere System nach der Regeldetri finden. So können, wenn die Logarithmen für die Basis 10 bekannt sind, daraus die Logarithmen für jede andere Basis, z. B. für die Basis 2, berechnet werden. Es möge z. B. der Logarithmus der Zahl n für die Basis 2 gesucht werden, wenn der Logarithmus der Zahl n für die Basis 10 gleich p ist. Da nun für die Basis $10 : \log 2 = 0{,}3010300$, und für die Basis $2 : \log 2 = 1$ ist, so wird:

$$0{,}3010300 : 1 = p : q$$

und daher

$$q = \frac{p}{0{,}3010300} = 3{,}3219277 \cdot p.$$

Multiplicirt man somit alle gemeinen Logarithmen mit der Zahl 3,3219277, so erhält man die Tafel der Logarithmen für die Basis 2.

§ 108.

Hieraus folgt, dass die Logarithmen zweier Zahlen in jedem beliebigen Systeme dasselbe Verhältnis zu einander haben.

Sind nämlich M und N zwei Zahlen, deren Logarithmen für die Basis a m und n seien, so ist $M = a^m$, $N = a^n$, folglich $a^{mn} = M^n = N^m$, und daher $M = N^{\frac{m}{n}}$. Da in dieser Gleichung die Basis a nicht mehr vorkommt, so ist offenbar der Wert des Bruches $\frac{m}{n}$ von der Basis a unabhängig. Denn sind für eine andere Basis b die Logarithmen derselben Zahlen M und N bezüglich μ und ν, so ist auf gleiche Weise $M = N^{\frac{\mu}{\nu}}$ und daher $N^{\frac{m}{n}} = N^{\frac{\mu}{\nu}}$, folglich $\frac{m}{n} = \frac{\mu}{\nu}$, oder $m:n = \mu:\nu$. So haben wir bereits gesehen, dass in jedem Logarithmensysteme die Logarithmen der verschiedenen Potenzen von y z. B. y^m und y^n in dem Verhältnis ihrer Exponenten $m:n$ stehen (§ 104).

§ 109.

Um also **ein Logarithmensystem** für irgend eine Basis a **zu verfertigen**, genügt es, nur die Logarithmen der Primzahlen auf die vorher beschriebene Weise oder auf irgend einem anderen bequemeren Wege zu berechnen. Denn da der Logarithmus einer zusammengesetzten Zahl gleich ist der Summe der Logarithmen der einzelnen Factoren, so lassen sich die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen durch blosse Addition finden. So wird, wenn man die Logarithmen von 3 und 5 kennt, $\log 15 = \log 3 + \log 5$, $\log 45 = 2\log 3 + \log 5$, und da wir oben für die Basis $a = 10 : \log 5 = 0{,}6989700$ gefunden haben, ausserdem aber $\log 10 = 1$ ist, so wird $\log\frac{10}{5} = \log 2 = \log 10 - \log 5$, und somit $\log 2 = 1 - 0{,}6989700 = 0{,}3010300$. Sind aber so die Logarithmen der Primzahlen 2 und 5 gefunden, so findet man auch die Logarithmen aller Zahlen, welche aus 2 und 5 zusammengesetzt sind, z. B. von 4, 8, 16, 32, 64 u. s. w., 20, 40, 80, 25, 50 u. s. w.

§ 110.

Die **Logarithmentafeln** sind aber bei numerischen Rechnungen von ausserordentlichem Nutzen, weil man aus ihnen nicht nur den Logarithmus einer gegebenen Zahl, sondern auch zu jedem gegebenen Logarithmus die zugehörige Zahl finden kann. Bezeichnen z. B. c, d, e, f, g, h irgend welche Zahlen, so kann man den Wert des Ausdruckes

$$\frac{c^2 d\sqrt{e}}{f\sqrt[3]{gh}}$$

ohne alle Multiplication finden; denn es ist der Logarithmus dieses Ausdrucks gleich

$$2\log c + \log d + \frac{1}{2}\log e - \log f - \frac{1}{3}\log g - \frac{1}{3}\log h,$$

und hieraus erhält man den gesuchten Wert, wenn man die Zahl aufsucht, welche zu diesem Logarithmus gehört. Vorzüglichen Nutzen aber gewähren die Logarithmen, wenn es sich darum handelt, sehr hohe und schwierige Potenzerhebungen oder Wurzelausziehungen auszuführen, da durch die Anwendung der Logarithmen diese Operationen in einfache Multiplicationen und Divisionen verwandelt werden.

Erstes Beispiel.

Sucht man etwa den Wert der Potenz $2^{\frac{7}{12}}$, so hat man, da der Logarithmus davon gleich $\frac{7}{12}\log 2$ ist, den Logarithmus von 2, nämlich 0,3010300 mit $\frac{7}{12}$ oder $\frac{1}{2} + \frac{1}{12}$ zu multipliciren, wodurch man $\log 2^{\frac{7}{12}} = 0{,}1756008$ erhält. Diesem Logarithmus entspricht die Zahl 1,498307, welche somit den Wert von $2^{\frac{7}{12}}$ näherungsweise darstellt.

Zweites Beispiel.

Wenn die Zahl der Einwohner eines Landes sich jährlich um den dreissigsten Teil vermehrte, und dieselbe anfänglich 100000 Menschen betragen hätte, wie gross würde alsdann die Bevölkerung nach 100 Jahren sein?

Wird der Kürze wegen die ursprüngliche Einwohnerzahl gleich n gesetzt, so dass $n = 100000$ ist, so ist dieselbe nach Ablauf eines Jahres gleich $\left(1 + \frac{1}{30}\right)n = \frac{31}{30}n$, nach zwei Jahren gleich $\left(\frac{31}{30}\right)^2 n$, nach drei Jahren gleich $\left(\frac{31}{30}\right)^3 n$, endlich nach hundert Jahren gleich $\left(\frac{31}{30}\right)^{100} n$. Der Logarithmus dieser Zahl ist gleich $100 \cdot \log\frac{31}{30} + \log 100000$. Da nun aber $\log\frac{31}{30} = \log 31 - \log 30 = 0{,}014240439$, also $100\log\frac{31}{30} = 1{,}4240439$ und ferner $\log 100000 = 5$ ist, so wird der Logarithmus der gesuchten Einwohnerzahl gleich 6,4240439, und somit diese selbst gleich 2654874 sein. Nach Verlauf von hundert Jahren würde also die Bevölkerung des Landes mehr denn $26\frac{1}{2}$mal so stark wie am Anfang sein.

Drittes Beispiel.

Wenn nach der Sündflut das menschliche Geschlecht von 6 Personen fortgepflanzt worden wäre, und man annimmt, dass nach 200 Jahren die Zahl der Menschen bereits auf 1000000 angewachsen wäre, um den wievielsten Teil müsste sich alsdann die Zahl der Menschen jährlich vermehrt haben?

Nimmt man an, dass zu jener Zeit die Zahl der Menschen jährlich um den $x$ten Teil gewachsen sei, so müsste sie nach 200 Jahren notwendig $\left(\frac{1+x}{x}\right)^{200} \cdot 6$ Mann betragen haben, und da diese Zahl gleich 1000000 sein sollte, so folgt $\frac{1+x}{x} = \left(\frac{1000000}{6}\right)^{\frac{1}{200}}$. Es ist daher $\log\frac{1+x}{x} = \frac{1}{200}\log\frac{1000000}{6} = \frac{1}{200} \cdot 5{,}2218487 = 0{,}0261092$, folglich $\frac{1+x}{x} = \frac{1061963}{1000000}$ oder $1000000 = 61963x$. Hieraus ergiebt sich ungefähr $x = 16$. Es würde also, um die anfängliche Zahl der Menschen zu einer so grossen Menge anwachsen zu lassen, genügt haben, wenn sich die

Menschenzahl jährlich um den 16ten Teil vermehrt hätte. Diese Zahl darf wegen des hohen Alters, das man den ersten Menschen beilegt, als nicht zu hoch angesehen werden. Hätten sich jedoch die Menschen noch weitere zweihundert Jahre in demselben Masse vermehrt, so hätte ihre Zahl auf $1000000 \cdot \frac{1000000}{6} = 166666666666$ steigen müssen, eine Menge, zu deren Unterhaltung der ganze Erdboden nicht ausreichend gewesen wäre.

Viertes Beispiel.

Die jährliche Vermehrung der Menschen zu finden, wenn sich deren Anzahl alle hundert Jahre verdoppelt.

Wenn man die jährliche Zunahme der Menschenzahl gleich $\frac{1}{x}$ und die anfängliche Menschenmenge gleich n setzt, so ist dieselbe nach 100 Jahren gleich $\left(\frac{1+x}{x}\right)^{100} n$ und, da diese gleich $2n$ sein soll, so muss $\frac{1+x}{x} = 2^{\frac{1}{100}}$ oder $\log\frac{1+x}{x} = \frac{1}{100}\log 2 = 0{,}0030103$ sein. Hieraus ergiebt sich $\frac{1+x}{x} = \frac{10069555}{10000000}$, und somit $x = \frac{10000000}{69555} = 144$ ungefähr. Es hätte sich daher die Zahl der Menschen jährlich um den 144ten Teil vermehren müssen, und es sind somit die Einwürfe derjenigen Leute recht lächerlich, welche nicht zugeben wollen, dass die ganze Erde von einem Menschenpaare aus in so kurzer Zeit habe bevölkert werden können.

§ 111.

Von besonderem Nutzen sind die Logarithmen bei der Auflösung solcher Gleichungen, in denen die unbekannte Grösse in einem Exponenten vorkommt. Erhält man z. B. eine Gleichung wie $a^x = b$, so lässt sich der Wert der Unbekannten x nur mit Hülfe der Logarithmen aus ihr bestimmen. Da nämlich $a^x = b$ ist, so wird $\log a^x = x \log a = \log b$, und daher $x = \frac{\log b}{\log a}$. Dabei ist es gleichgültig, was für eines Logarithmensystems man sich bedient, da die Logarithmen der Zahlen a und b nach § 108 in allen Systemen dasselbe Verhältnis haben.

Erstes Beispiel.

Wenn sich die Zahl der Menschen jährlich um den hundertsten Teil vermehrte, nach wieviel Jahren würde alsdann dieselbe zehnmal so gross sein?

Nehmen wir an, es sei dies nach x Jahren der Fall, und bezeichnen wir die anfängliche Menschenzahl mit n, so ist dieselbe nach Verlauf von x Jahren gleich $\left(\frac{101}{100}\right)^x \cdot n$, und da diese gleich $10n$ sein soll, so wird $\left(\frac{101}{100}\right)^x = 10$, folglich $x \log\frac{101}{100} = \log 10$ oder $x = \frac{\log 10}{\log 101 - \log 100}$. Hieraus ergiebt sich $x = \frac{10000000}{43214} = 231$. Nach 231 Jahren wird also die Zahl der

Menschen, wenn sie sich jährlich nur um den hundertsten Teil vermehrt, zehnmal so gross, und folglich nach 462 Jahren hundert- und nach 693 Jahren tausendmal so gross sein wie jetzt.

Zweites Beispiel.

Jemand hat von einem andern 400000 Fl. zu 5 % Zinsen entliehen und zahlt in jedem Jahre 25000 Fl. dem andern aus. Nach wieviel Jahren wird er seine Schuld vollständig getilgt haben?

Bezeichnen wir die ganze Schuld mit a und die jährlich ausgezahlte Summe mit b, so dass $a = 400000$ Fl. und $b = 25000$ Fl. ist, so wird die Schuld nach Verlauf eines Jahres noch $\frac{105}{100}a - b$, nach zwei Jahren noch $\left(\frac{105}{100}\right)^2 a - \left(\frac{105}{100}\right) b - b$, nach drei Jahren noch $\left(\frac{105}{100}\right)^3 a - \left(\frac{105}{100}\right)^2 b - \frac{105}{100} b - b$, und folglich nach x Jahren, wenn wir der Kürze halber n für $\frac{105}{100}$ schreiben, noch

$$n^x a - n^{x-1} b - n^{x-2} b - n^{x-3} b - \cdots - b = n^x a - b(1 + n + n^2 + \cdots + n^{x-1})$$

betragen. Da nun nach der Lehre von den geometrischen Progressionen

$$1 + n + n^2 + \cdots + n^{x-1} = \frac{n^x - 1}{n - 1}$$

ist, so wird sich die Schuld nach x Jahren noch auf

$$n^x a - \frac{n^x b - b}{n - 1} \text{ Fl.}$$

belaufen. Setzt man nun dieses gleich 0, so erhält man die Gleichung:

$$n^x a = \frac{n^x b - b}{n - 1} \quad \text{oder} \quad (n-1) n^x a = n^x b - b,$$

und daher:

$$(b - na + a) n^x = b \quad \text{oder} \quad n^x = \frac{b}{b - (n-1)a}.$$

Hieraus folgt:

$$x = \frac{\log b - \log(b - (n-1)a)}{\log n}.$$

Da nun $a = 400000$, $b = 25000$ und $n = \frac{105}{100}$ ist, so wird

$$(n-1)a = 20000 \quad \text{und} \quad b - (n-1)a = 5000,$$

und daher ist die Anzahl der Jahre, nach denen die Schuld vollständig getilgt ist:

$$x = \frac{\log 25000 - \log 5000}{\log\frac{105}{100}} = \frac{\log 5}{\log\frac{21}{20}} = \frac{6989700}{211893}.$$

Es wird somit x etwas kleiner als 33. Nach Verlauf von 33 Jahren wird nämlich nicht nur die ganze Schuld getilgt sein, sondern es muss sogar der Gläubiger dem Schuldner:

$$\frac{(n^{33}-1)b}{n-1} - n^{33}a = \frac{\left(\frac{21}{20}\right)^{33}5000-25000}{\frac{1}{20}} = 100000\left(\frac{21}{20}\right)^{33} - 500000 \text{ Fl.}$$

wieder herausgeben. Da aber $\log\frac{21}{20} = 0{,}0211892991$ ist, so wird $\log\left(\frac{21}{20}\right)^{33} = 0{,}69924687$ und $\log 100000\left(\frac{21}{20}\right)^{33} = 5{,}6992469$. Letzterem entspricht die Zahl 500318,8. Es muss somit nach dem 33ten Jahre der Gläubiger dem Schuldner $318\frac{4}{5}$ Fl. wieder zurückzahlen.

§ 112.

Die gemeinen Logarithmen, **deren Basis 10 ist,** haben jedoch neben dem Nutzen, den die Logarithmen überhaupt gewähren, bei unserm dekadischen Zahlensysteme noch einen besonderen Vorteil und sind gerade deswegen vor allen andern Systemen brauchbar. Da nämlich die Logarithmen aller Zahlen mit alleiniger Ausnahme der Potenzen von 10 als Decimalbrüche sich darstellen, und die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10 zwischen den Grenzen 0 und 1, die der Zahlen zwischen 10 und 100 zwischen den Grenzen 1 und 2 u. s. w. enthalten sind, so besteht jeder Logarithmus aus einer ganzen Zahl und einem Decimalbruch, und zwar nennt man gewöhnlich die ganze Zahl die **Charakteristik** und den Decimalbruch die **Mantisse.** Die Charakteristik ist daher stets um eine Einheit kleiner als die Anzahl der Ziffern beträgt, welche der ganze Teil der gegebenen Zahl enthält.

So ist die Charakteristik des Logarithmus der Zahl 78509 gleich 4, weil diese Zahl 5 Ziffern enthält. Umgekehrt kann man aus dem Logarithmus einer Zahl sofort ersehen, aus wieviel Ziffern dieselbe besteht. So wird z. B. die Zahl, welche zu dem Logarithmus 7,5804631 gehört, mit 8 Ziffern geschrieben.

§ 113.

Wenn daher die Mantissen zweier Logarithmen mit einander übereinstimmen, während ihre Charakteristiken verschieden sind, so werden die zu diesen Logarithmen gehörigen Zahlen in demselben Verhältnis zu einander stehen, wie eine gewisse Potenz von 10 zur Einheit, und werden demgemäss mit denselben Ziffern geschrieben werden. So sind die zu den Logarithmen 4,9130187 und 6,9130187 gehörigen Zahlen bezüglich 81850 und 8185000; ferner entspricht dem Logarithmus 3,9130187 die Zahl 8185 und dem Logarithmus 0,9130187 die Zahl 8,185. Es zeigt daher die Mantisse für sich allein an, mit welchen Ziffern

die Zahl geschrieben wird; sind diese gefunden, so ergiebt sich aus der Charakteristik, wie viele davon, von links nach rechts gerechnet, den ganzen Teil ausmachen, während die übrig bleibenden bis zur letzten rechter Hand den Decimalbruch geben. Hätte man z. B. den Logarithmus 2,7603429 gefunden, so giebt die Mantisse die Ziffern 5758945; die Chararakteristik 2 aber bestimmt diese Zahl für den angeführten Logarithmus genauer so, wie folgt: 575,8945. Wäre die Charakteristik 0, so würde die Zahl 5,758945 heissen, und wenn man die Charakteristik noch um eine Einheit vermindert, so wird die zugehörige Zahl dadurch zehnmal kleiner, nämlich 0,5758945. Ebenso gehört zur Charakteristik — 2 die Zahl 0,05758945 u. s. w. An Stelle der negativen Charakteristiken — 1, — 2, — 3 u. s. w. schreibt man jedoch gewöhnlich 9, 8, 7 u. s. w., indem man im Gedächtnis behält, dass diese Logarithmen um 10 vermindert werden müssen. Indessen pflegt dies in den Einleitungen zu den logarithmischen Tafeln weitläufig auseinandergesetzt zu werden.

Beispiel.

Wenn die Reihe 2, 4, 16, 256 u. s. w., in welcher jedes Glied das Quadrat des vorhergehenden ist, bis zum 25ten Gliede fortgesetzt wird, so verlangt man die Grösse des letzten Gliedes zu wissen.

Drückt man die Glieder dieser Reihe in bequemerer Weise mittelst der Exponenten aus, nämlich $2, 2^2, 2^4, 2^8 \ldots$, so sieht man sofort, dass diese Exponenten eine geometrische Progression bilden, und dass der Exponent des 25ten Gliedes gleich $2^{24} = 16777216$ ist. Es wird daher dieses Glied selbst gleich $2^{16777216}$, und sein Logarithmus gleich $16777216 \log 2$. Da nun $\log 2 = 0{,}30102999566398 1195$ ist, so wird der Logarithmus des gesuchten Gliedes gleich 5050445,25973367, aus dessen Charakteristik erhellt, dass die gesuchte Zahl in gewöhnlicher Weise dargestellt mit 5050446 Ziffern geschrieben wird. Sucht man aber die Mantisse 259733675932 in der Logarithmentafel auf, so findet man als erste Ziffern der gesuchten Zahl: 181858. Obwohl man daher jene Zahl nicht ganz darstellen kann, so kann man von ihr doch sagen, dass sie aus 5050446 Ziffern besteht, und dass die ersten sechs Ziffern 181858 sind, auf welche dann rechts noch 5050440 andere folgen. Uebrigens lassen sich noch einige derselben aus grösseren Logarithmentafeln finden; z. B. werden die ersten elf Ziffern 18185852986 sein.