16. Capitel.

Von der Zerlegung der Zahlen in Teile.

§ 297.

Ist der Ausdruck:

$$(1 + x^\alpha z)(1 + x^\beta z)(1 + x^\gamma z)(1 + x^\delta z)(1 + x^\varepsilon z)\ldots$$

gegeben, so entsteht die Frage: Welche Form nimmt derselbe an, wenn er durch wirkliche Ausführung der Multiplikation entwickelt wird?

Nehmen wir an, dass dadurch die Reihe:

$$1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + \cdots$$

hervorgehe, so ist offenbar:

P = der Summe der Potenzen $x^\alpha + x^\beta + x^\gamma + x^\delta + x^\varepsilon + \cdots$; ferner ist
Q = der Summe der Producte aus je zwei **verschiedenen** Potenzen, oder es ist Q
= der Summe mehrerer Potenzen von x, nämlich derjenigen, deren Exponenten die Summen je zweier verschiedenen Zahlen der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta \ldots$ sind; dann ist
R = der Summe derjenigen Potenzen von x, deren Exponenten die Summen von je drei verschiedenen; ferner
S = der Summe derjenigen Potenzen von x, deren Exponenten die Summen von je vier verschiedenen Zahlen eben dieser Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ sind;

u. s. w.

§ 298.

Die in den Ausdrücken von $P, Q, R, S, \ldots$ vorkommenden Potenzen von x haben, wenn ihre Exponenten nur auf eine einzige Weise aus $\alpha, \beta, \gamma\ \delta \ldots$ durch Addition gebildet werden können, als Coefficienten **sämtlich** die Ein-

heit; wenn aber der Exponent einer in jenen Ausdrücken vorkommenden Potenz auf **mehrere** Arten aus zwei, oder aus drei, oder aus noch mehr Zahlen der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ durch Addition zusammengesetzt werden kann, so wird der Coefficient jener Potenz aus **soviel Einheiten** bestehen, als es **verschiedene Arten** der Zusammensetzung giebt. Findet sich z. B. in dem Ausdrucke von Q das Glied Nx^n, so ist dies ein Zeichen dafür, dass die Zahl n als Summe von zwei verschiedenen Zahlen der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ auf N verschiedene Arten darstellbar ist. Und wenn in der Entwicklung des gegebenen Products das Glied $Nx^n z^m$ vorkommt, so zeigt der Coefficient N an, **auf wieviel verschiedene Arten die Zahl n als Summe von m verschiedenen Zahlen** der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \ldots$ dargestellt werden kann.

§ 299.

Wenn man daher das gegebene Product

$$(1 + x^\alpha z)(1 + x^\beta z)(1 + x^\gamma z)(1 + x^\delta z)\ldots$$

durch Ausführung der Multiplikation wirklich entwickelt, so geht aus dem sich ergebenden Ausdrucke unmittelbar hervor, auf wieviel verschiedene Arten eine gegebene Zahl als Summe von beliebig vielen verschiedenen Zahlen der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \ldots$ dargestellt werden kann. Wenn nämlich gefragt wird, auf wieviel verschiedene Arten die Zahl n die Summe von m verschiedenen Zahlen jener Reihe sein könne, so hat man in dem entwickelten Ausdrucke das Glied $x^n z^m$ aufzusuchen, dessen Coefficient alsdann die gesuchte Zahl angiebt.

§ 300.

Damit dies recht deutlich werde, sei folgendes aus unendlich vielen Factoren bestehende Product gegeben:

$$(1 + xz)(1 + x^2 z)(1 + x^3 z)(1 + x^4 z)(1 + x^5 z)\ldots$$

Entwickelt man dasselbe durch wirkliche Ausführung der Multiplikation in eine Reihe, so folgt:

$$\begin{aligned}
1 &+ z\,(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + \cdots) \\
&+ z^2 (x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 3x^8 + 4x^9 + 4x^{10} + 5x^{11} + \cdots) \\
&+ z^3 (x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 4x^{10} + 5x^{11} + 7x^{12} + 8x^{13} + 10x^{14} + \cdots) \\
&+ z^4 (x^{10} + x^{11} + 2x^{12} + 3x^{13} + 5x^{14} + 6x^{15} + 9x^{16} + 11x^{17} + 15x^{18} + \cdots) \\
&+ z^5 (x^{15} + x^{16} + 2x^{17} + 3x^{18} + 5x^{19} + 7x^{20} + 10x^{21} + 13x^{22} + 18x^{23} + \cdots) \\
&+ z^6 (x^{21} + x^{22} + 2x^{23} + 3x^{24} + 5x^{25} + 7x^{26} + 11x^{27} + 14x^{28} + 20x^{29} + \cdots) \\
&+ z^7 (x^{28} + x^{29} + 2x^{30} + 3x^{31} + 5x^{32} + 7x^{33} + 11x^{34} + 15x^{35} + 21x^{36} + \cdots) \\
&+ z^8 (x^{36} + x^{37} + 2x^{38} + 3x^{39} + 5x^{40} + 7x^{41} + 11x^{42} + 15x^{43} + 22x^{44} + \cdots) \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Aus diesen Reihen also lässt sich sogleich angeben, auf wieviel verschiedene Arten eine gegebene Zahl aus einer gegebenen Anzahl verschiedener Glieder der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... durch Addition entstehen kann. Wollte man z. B. wissen, auf wie vielerlei Arten die Zahl 35 die Summe von 7 verschiedenen Gliedern der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... sein könne, so suche man in der Reihe, welche mit z^7 multiplicirt ist, die Potenz x^{35} auf, dann giebt der Coefficient 15 derselben an, dass die gegebene Zahl 35 auf 15 verschiedene Arten als Summe von 7 Gliedern der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... dargestellt werden kann.

§ 301.

Setzt man aber $z = 1$ und vereinigt man die gleichen Potenzen von x oder, was dasselbe ist, entwickelt man den unendlichen Ausdruck:

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)(1 + x^4)(1 + x^5)(1 + x^6)\ldots$$

in die Reihe:

$$1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 6x^8 + \ldots,$$

so giebt ein jeder Coefficient an, auf wie vielerlei Arten der Exponent der betreffenden Potenz von x überhaupt aus verschiedenen Gliedern der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... durch Addition entstehen kann. So lässt sich die Zahl 8 augenscheinlich auf 6 Arten durch Addition verschiedener Zahlen hervorbringen, und zwar sind diese:

$$\begin{aligned} 8 &= 8 \\ 8 &= 7 + 1 \\ 8 &= 6 + 2 \\ 8 &= 5 + 3 \\ 8 &= 5 + 2 + 1 \\ 8 &= 4 + 3 + 1. \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass die gegebene Zahl selbst mitgerechnet werden muss, weil die Anzahl der zu nehmenden Glieder nicht vorgeschrieben ist, und daher auch ein einziges genommen werden kann.

§ 302.

Hiernach sieht man also, wie eine jede Zahl durch Addition verschiedener Zahlen entstehen kann. Man lässt aber die Bedingung, dass die einzelnen Zahlen verschieden sein sollen, fallen, sobald man die eben betrachteten Factoren in den Nenner setzt. Ist also der Ausdruck

$$\frac{1}{(1 - x^{\alpha} z)(1 - x^{\beta} z)(1 - x^{\gamma} z)(1 - x^{\delta} z)(1 - x^{\varepsilon} z)\ldots}$$

gegeben, und geht daraus, wenn man die Division wirklich ausführt, die Reihe

$$1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + \cdots$$

hervor, so ist offenbar:

P = der Summe der Potenzen von x, deren Exponenten in der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta \ldots$ enthalten sind; ferner ist

Q = der Summe der Potenzen von x, deren Exponenten Summen zweier Zahlen dieser Reihe sind, so aber, dass diese Zahlen auch einander gleich sein können; ebenso ist

R = der Summe der Potenzen von x, deren Exponenten durch Addition von drei solchen Zahlen jener Reihe entstehen;

S = der Summe der Potenzen von x, deren Exponenten durch Addition von vier solchen, in jener Reihe enthaltenen, Zahlen gebildet sind;

u. s. w.

§ 303.

Wenn man also den ganzen Ausdruck nach allen seinen Gliedern entwickelt und die Glieder mit derselben Potenz von z zusammenfasst, so erkennt man daraus, auf wie viel verschiedene Arten eine gegebene Zahl n durch Addition von m teils verschiedenen, teils nicht verschiedenen Zahlen der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \ldots$ entstehen kann. Sucht man nämlich in dem entwickelten Ausdruck das Glied $x^n z^m$ auf, und ist dessen Coefficient N, so dass also das ganze Glied $Nx^n z^m$ heisst, so zeigt der Coefficient N an, auf wie vielerlei Arten die Zahl n durch Addition von m in der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$ enthaltenen Zahlen gebildet werden kann. Hierdurch wird die gegenwärtige Frage derjenigen, die wir kurz vorher beantwortet haben, vollkommen analog erledigt.

§ 304.

Wir wollen dies auf einen besonders merkwürdigen Fall anwenden. Wir denken uns nämlich den Ausdruck:

$$\frac{1}{(1 - xz)(1 - x^2 z)(1 - x^3 z)(1 - x^4 z)(1 - x^5 z)\ldots}$$

durch Ausführung der Division in die Reihe entwickelt:

$$\begin{aligned} 1 &+ z\,(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + \cdots) \\ &+ z^2 (x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 3x^7 + 4x^8 + 4x^9 + 5x^{10} + \cdots) \\ &+ z^3 (x^3 + x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 4x^7 + 5x^8 + 7x^9 + 8x^{10} + 10x^{11} + \cdots) \\ &+ z^4 (x^4 + x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 5x^8 + 6x^9 + 9x^{10} + 11x^{11} + 15x^{12} + \cdots) \\ &+ z^5 (x^5 + x^6 + 2x^7 + 3x^8 + 5x^9 + 7x^{10} + 10x^{11} + 13x^{12} + 18x^{13} + \cdots) \\ &+ z^6 (x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 5x^{10} + 7x^{11} + 11x^{12} + 14x^{13} + 20x^{14} + \cdots) \\ &+ z^7 (x^7 + x^8 + 2x^9 + 3x^{10} + 5x^{11} + 7x^{12} + 11x^{13} + 15x^{14} + 21x^{15} + \cdots) \\ &+ z^8 (x^8 + x^9 + 2x^{10} + 3x^{11} + 5x^{12} + 7x^{13} + 11x^{14} + 15x^{15} + 22x^{16} + \cdots) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Aus diesen Reihen lässt sich daher unmittelbar angeben, auf wieviel verschiedene Arten eine gegebene Zahl durch Addition einer **vorgeschriebenen** Anzahl von Gliedern **der Reihe** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ... entstehen kann. Wollte man z. B. wissen, auf wie vielerlei Arten die Zahl 13 durch Addition von fünf ganzen Zahlen gebildet werden kann, so suche man das Glied $x^{13}z^5$ auf; dann giebt der Coefficient 18 desselben an, dass die gegebene Zahl 13 durch Addition von 5 Zahlen auf 18 verschiedene Arten entsteht.

§ 305.

Setzt man aber $z = 1$ und zieht die gleich hohen Potenzen von x zusammen, so ergiebt sich durch Entwicklung des Ausdrucks:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\ldots}$$

die Reihe:

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + \cdots,$$

in welcher jeder Coefficient angiebt, auf wie vielerlei Arten der Exponent der zugehörigen Potenz **überhaupt** durch Addition von ganzen Zahlen, mögen dieselben nun **gleich oder ungleich** sein, hervorgebracht werden kann. So erkennt man aus dem Gliede $11x^6$, dass die Zahl 6 aus ganzen Zahlen auf 11 verschiedene Arten durch Addition zusammengesetzt werden kann, und zwar ist:

$$\begin{aligned}
6 &= 6\\
6 &= 5 + 1\\
6 &= 4 + 2\\
6 &= 4 + 1 + 1\\
6 &= 3 + 3\\
6 &= 3 + 2 + 1\\
6 &= 3 + 1 + 1 + 1\\
6 &= 2 + 2 + 2\\
6 &= 2 + 2 + 1 + 1\\
6 &= 2 + 1 + 1 + 1 + 1\\
6 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.
\end{aligned}$$

Dabei ist ebenfalls zu bemerken, dass die gegebene Zahl, da sie in der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6 ... selbst enthalten ist, auch als eine Art der Darstellung gerechnet werden muss.

§ 306.

Nach diesen allgemeinen Erörterungen wollen wir nun näher darauf eingehen, wie man die **Anzahl dieser Darstellungen** wirklich findet, und zwar wollen wir dabei mit dem auch vorher zuerst betrachteten Falle beginnen, in welchem die ganzen Zahlen, welche man bei der Zusammensetzung einer Zahl durch Addition anwendet, von einander **verschieden** sind. Dazu möge der Ausdruck:

$$Z = (1 + xz)(1 + x^2z)(1 + x^3z)(1 + x^4z)(1 + x^5z)\ldots$$

gegeben sein, und dieser möge, wenn man ihn entwickelt und nach Potenzen von z ordnet, die Reihe ergeben:

$$Z = 1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + Tz^5 + \cdots$$

Es handelt sich darum, ein **Verfahren** zu ermitteln, nach welchem man die Functionen $P, Q, R, S, T \ldots$ auf eine leichte Art finden kann. Findet man ein solches, so ist dadurch die vorgelegte Frage in der besten Weise erledigt.

§ 307.

Wenn man nun an Stelle von z setzt xz, so erhält man offenbar:

$$(1 + x^2z)(1 + x^3z)(1 + x^4z)(1 + x^5z)\cdots = \frac{Z}{1+xz}.$$

Es geht somit der Wert des Productes Z dadurch, dass man darin für z setzt xz, über in $\frac{Z}{1+xz}$, und es ist daher, da

$$Z = 1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + \ldots$$

war:

$$\frac{Z}{1+xz} = 1 + Pxz + Qx^2z^2 + Rx^3z^3 + Sx^4z^4 + \cdots$$

Multiplicirt man aber diese Gleichung mit $1 + xz$, so wird:

$$\begin{aligned}
Z = 1 &+ Pxz + Qx^2z^2 + Rx^3z^3 + Sx^4z^4 + \cdots\\
&+ xz + Px^2z^2 + Qx^3z^3 + Rx^4z^4 + \cdots,
\end{aligned}$$

und hieraus folgt, wenn man diesen Wert von Z mit dem früheren vergleicht:

$$P = \frac{x}{1-x},\quad Q = \frac{Px^2}{1-x^2},\quad R = \frac{Qx^3}{1-x^3},\quad S = \frac{Rx^4}{1-x^4},\ \ldots$$

Man erhält daher die folgenden Werte:

$$P = \frac{x}{1-x}$$

$$Q = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}$$

$$R = \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$S = \frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

$$T = \frac{x^{15}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$$

u. s. w.

§ 308.

Wir können daher auf diese Weise eine **jede** derjenigen **Potenzenreihen** von x, aus welchen bestimmt werden soll, auf wieviel verschiedene Arten sich eine gegebene Zahl aus einer vorgeschriebenen Anzahl ganzer Teile durch Addition zusammensetzen lässt, wirklich **besonders darstellen.** Ueberdies aber geht hieraus hervor, dass diese Reihen **rekurrente** Reihen sind, da sie aus der Entwicklung einer gebrochenen Function von x entstehen. So giebt der erste Ausdruck:

$$P = \frac{x}{1-x}$$

die geometrische Reihe:

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \cdots,$$

woraus sofort erhellt, dass jede Zahl nur einmal in der Reihe der ganzen Zahlen enthalten ist.

§ 309.

Der zweite Ausdruck:

$$\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}$$

giebt die Reihe:

$$x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 3x^8 + 4x^9 + 4x^{10} + \cdots,$$

in welcher der Coefficient eines jeden Gliedes angiebt, wie oft der Exponent von x sich in zwei ungleiche Teile zerlegen lässt. So geht aus dem Gliede $4x^9$ hervor, dass die Zahl 9 auf 4 Arten in zwei ungleiche Teile geteilt werden kann. Dividirt man nun obige Reihe durch x^3, so erhält man diejenige Reihe, welche aus der Entwicklung des Bruches:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$$

entspringt, nämlich:

$$1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 4x^7 + \cdots.$$

Bezeichnet man das allgemeine Glied dieser Reihe mit Nx^n, so folgt aus der Art der Entstehung derselben, dass der Coefficient N anzeigt, auf wieviel verschiedene Weisen der Exponent n aus den Zahlen 1 und 2 durch Addition zusammengesetzt werden kann. Da nun das allgemeine Glied der früheren Reihe gleich Nx^{n+3} ist, so ergiebt sich hieraus der **Satz:**

Die Zahl $n+3$ lässt sich auf eben soviele verschiedene Arten in **zwei** ungleiche Teile teilen, als die Zahl n aus den Zahlen 1 und 2 durch Addition zusammengesetzt werden kann.

§ 310.

Der dritte Ausdruck:

$$\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

giebt, wenn man ihn entwickelt, die Reihe:

$$x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 4x^{10} + 5x^{11} + 7x^{12} + 8x^{13} + \cdots,$$

in welcher der Coefficient eines jeden Gliedes angiebt, auf wieviel Arten sich der Exponent der zugehörigen Potenz von x in drei ungleiche Teile teilen lässt. Durch Entwicklung des Bruches:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

aber entsteht die Reihe:

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 7x^6 + 8x^7 + \cdots,$$

und hierin giebt, wenn das allgemeine Glied der Reihe mit Nx^n bezeichnet wird, der Coefficient N an, auf wie vielerlei Arten die Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3 durch Addition entstehen kann. Da nun das allgemeine Glied der vorhergehenden Reihe gleich Nx^{n+6} ist, so folgt hieraus der **Satz:**

Die Zahl $n+6$ lässt sich auf ebenso viele verschiedene Arten in **drei** ungleiche Teile zerlegen, als die Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3 durch Addition zusammengesetzt werden kann.

§ 311.

Der vierte Ausdruck:

$$\frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

giebt, wenn man ihn entwickelt, die rekurrente Reihe:

$$x^{10}+x^{11}+2x^{12}+3x^{13}+5x^{14}+6x^{15}+9x^{16}+\cdots,$$

in welcher der Coefficient eines jeden Gliedes anzeigt, wie oft sich der Exponent der zugehörigen Potenz von x in vier ungleiche Teile teilen lässt. Durch Entwicklung des Bruches:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

aber erhält man die vorhergehende Reihe durch x^{10} dividirt, nämlich:

$$1+x+2x^2+3x^3+5x^4+6x^5+9x^6+11x^7+\cdots$$

Setzt man das allgemeine Glied dieser Reihe gleich Nx^n, so giebt der Coefficient N offenbar an, auf wieviel verschiedene Arten die Zahl n aus den vier Zahlen 1, 2, 3, 4 durch Addition gebildet werden kann. Da nun das allgemeine Glied der vorigen Reihe Nx^{n+10} ist, so folgt hieraus der **Satz**:

Die Zahl $n+10$ lässt sich auf ebenso viele verschiedene Arten in vier ungleiche Teile zerlegen, als die Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, 4 durch Addition zusammengesetzt werden kann.

§ 312.

Allgemein also giebt der Coefficient N, wenn man den Ausdruck:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)\ldots(1-x^m)}$$

in eine Reihe entwickelt und das allgemeine Glied derselben mit Nx^n bezeichnet, an, auf wieviel verschiedene Arten die Zahl n aus den Zahlen $1, 2, 3, 4 \ldots m$ durch Addition entstehen kann. Entwickelt man aber den Ausdruck:

$$\frac{x^{\frac{m(m+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots(1-x^m)}$$

in eine Reihe, so ist das allgemeine Glied derselben gleich $Nx^{n+\frac{m(m+1)}{2}}$, während der Coefficient N dabei anzeigt, wie oft die Zahl $n+\frac{m(m+1)}{2}$ in m ungleiche Teile geteilt werden kann. Daraus folgt also der **Satz**:

Die Zahl $n+\frac{m(m+1)}{2}$ lässt sich auf ebenso viele verschiedene Arten in m ungleiche Teile zerlegen, als die Zahl n aus den Zahlen $1, 2, 3, 4 \ldots m$ durch Addition zusammengesetzt werden kann.

§ 313.

Nachdem wir die Zerlegung der Zahlen in ungleiche Teile betrachtet haben, wollen wir nun auch die Zerlegung der Zahlen in Teile für den Fall untersuchen, wo die **Gleichheit** der einzelnen Teile **nicht ausgeschlossen** ist. Diese Betrachtung beruht auf dem Ausdruck:

$$Z=\frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\ldots},$$

welcher durch Ausführung der Division die Reihe liefern möge:

$$Z=1+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+Tz^5+\cdots$$

Setzt man nun xz an die Stelle von z, so wird offenbar:

$$\frac{1}{(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\ldots}=(1-xz)\,Z,$$

und wenn man in der Reihe dieselbe Substitution macht:

$$(1-xz)\,Z=1+Pxz+Qx^2z^2+Rx^3z^3+Sx^4z^4+\cdots$$

Multiplicirt man aber obige Reihe mit $1-xz$, so erhält man:

$$\begin{aligned}(1-xz)\,Z=1&+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+\cdots\\ &-xz-Pxz^2-Qxz^3-Rxz^4-\cdots\end{aligned}$$

Vergleicht man also die beiden Ausdrücke, so folgt:

$$P=\frac{x}{1-x},\ Q=\frac{Px}{1-x^2},\ R=\frac{Qx}{1-x^3},\ S=\frac{Rx}{1-x^4}\cdots,$$

und hieraus ergeben sich für $P, Q, R, S\ldots$ die Werte:

$$P=\frac{x}{1-x}$$

$$Q=\frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)}$$

$$R=\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$S=\frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

u. s. w.

§ 314.

Diese Ausdrücke unterscheiden sich von den früheren nur dadurch, dass hier die Zähler kleinere Exponenten haben, als im vorhergehenden Falle. Es stimmen daher auch die Reihen, welche sich durch Entwicklung dieser Ausdrücke ergeben, in Bezug auf ihre Coefficienten vollständig mit den früheren überein, ein Umstand, der übrigens auch schon aus der Vergleichung der §§ 300 und 304 erhellt, dessen Grund aber erst hier ersichtlich ist. Hieraus folgen somit ganz ähnliche Sätze wie oben, nämlich:

Die Zahl $n+2$ lässt sich auf ebenso viele verschiedene Arten in zwei Teile zerlegen, als die Zahl n aus den Zahlen 1 und 2 durch Addition zusammengesetzt werden kann.

Die Zahl $n+3$ lässt sich auf ebenso viele verschiedene Arten in drei Teile zerlegen, als die Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3 durch Addition zusammengesetzt werden kann.

Die Zahl $n+4$ lässt sich auf ebenso viele verschiedene Arten in vier Teile zerlegen, als die Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, 4 durch Addition zusammengesetzt werden kann.

Und allgemein:

Die Zahl $n+m$ lässt sich auf ebenso viele verschiedene Arten in m Teile zerlegen, als die Zahl n aus den Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots m$ durch Addition zusammengesetzt werden kann.

§ 315.

Die Frage also, auf wieviel Arten sich eine gegebene Zahl in m ungleiche oder überhaupt in m, teils gleiche, teils ungleiche, Teile zerlegen lasse, kann in jedem Falle beantwortet werden, wenn man weiss, auf wieviel Arten sich eine jede Zahl durch Addition aus den Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots m$ zusammensetzen lässt. Es erhellt dies aus den folgenden Sätzen, die aus den früheren abgeleitet sind:

Eine Zahl n lässt sich auf ebenso viele Arten in m ungleiche Teile zerlegen, als die Zahl $n-\frac{m(m+1)}{2}$ durch Addition aus den Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots m$ zusammengesetzt werden kann.

Eine Zahl n lässt sich auf ebenso viele Arten in m Teile überhaupt, mögen dieselben gleich oder ungleich sein, zerlegen, als die Zahl $n-m$ durch Addition aus den Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots m$ zusammengesetzt werden kann.

Hieraus folgen ferner die Sätze:

Die Zahl n lässt sich ebenso oft in m ungleiche Teile zerlegen, als sich die Zahl $n-\frac{m(m+1)}{2}$ in m Teile überhaupt, seien es gleiche oder ungleiche, zerlegen lässt.

Die Zahl n lässt sich ebenso oft in m Teile überhaupt, seien es gleiche oder ungleiche, zerlegen, als sich die Zahl $n+\frac{m(m+1)}{2}$ in m ungleiche Teile zerlegen lässt.

§ 316.

Dadurch nun, dass man die rekurrenten Reihen wirklich bildet, findet man auch, auf wieviel Arten sich eine gegebene Zahl durch Addition aus den Zahlen $1, 2, 3, \ldots m$ zusammensetzen lässt. Zu diesem Zwecke müsste man den Bruch:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^m)}$$

entwickeln und die daraus entspringende rekurrente Reihe bis zu dem Gliede Nx^n fortsetzen, dessen Coefficient N angiebt, auf wie vielerlei Arten die Zahl n durch Addition aus den Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots m$ entstehen kann. Indessen würde die Erledigung der in Rede stehenden Frage auf diesem Wege nicht geringe Schwierigkeiten darbieten, sobald m und n auch nur mässig grosse Zahlen sind. Denn da die Beziehungsskala, welche sich aus dem durch Ausführung der Multiplikation entwickelten Nenner ergiebt, aus einer grösseren Anzahl von Gliedern besteht, so würde es sehr viel Mühe machen, wenn man die Reihe bis zu einem höheren Gliede fortsetzen wollte.

§ 317.

Man erleichtert sich die Sache aber sehr, wenn man zunächst die einfacheren Fälle entwickelt, da alsdann der Uebergang von diesen zu den zusammengesetzteren leicht ist. Ist nun das allgemeine Glied der Reihe, welche aus dem Bruche:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^m)}$$

entspringt, gleich Nx^n, ferner das allgemeine Glied der aus dem Bruche:

$$\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^m)}$$

entstehenden Reihe gleich Mx^n, wo der Coefficient M angiebt, auf wieviel Arten die Zahl $n-m$ durch Addition aus den Zahlen $1, 2, 3, \ldots m$ zusammengesetzt werden kann, so ergiebt sich, wenn man den letzteren Ausdruck von dem ersten subtrahirt:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^{m-1})},$$

und es ist klar, dass das allgemeine Glied der hieraus entspringenden Reihe gleich $(N-M)x^n$ ist. Es giebt somit der Coefficient $N-M$ an, auf wieviel Arten die Zahl n durch Addition aus den Zahlen $1, 2, 3, \ldots m-1$ gebildet werden kann.

§ 318.

Hieraus ergiebt sich demnach folgende **Regel**:

Es sei L die Zahl, welche angiebt, auf wieviel Arten sich die Zahl n durch Addition aus den Zahlen $1, 2, 3, \ldots m-1$,

ferner M die Zahl, welche angiebt, auf wieviel Arten sich die Zahl $n-m$ durch Addition aus den Zahlen $1, 2, 3, \ldots m$,

endlich N die Zahl, welche angiebt, auf wieviel Arten sich die Zahl n durch Addition aus den Zahlen $1, 2, 3 \ldots m$ zusammensetzen lässt;

alsdann ist, wie wir gesehen haben,

$$L = N - M \text{ und daher } N = L + M.$$

Wenn man daher bereits gefunden hat, auf wieviel Arten sich die Zahlen n und $n-m$, und zwar erstere aus den Zahlen $1, 2, 3, \ldots m-1$, letztere aber aus den Zahlen $1, 2, 3, \ldots m$, durch Addition hervorbringen lassen, so findet man dadurch, dass man die beiden Anzahlen addirt, zugleich, auf wieviel Arten die Zahl n durch Addition aus den Zahlen $1, 2, 3, \ldots m$ hergeleitet werden kann. Mittelst dieses Satzes kann man von den einfacheren Fällen, welche weiter keine Schwierigkeiten darbieten, stufenweise zu den zusammengesetzteren fortgehen. Auf diese Weise ist die nebenstehende **Tabelle** berechnet worden.

Der **Gebrauch** dieser Tabelle ist folgender:

Will man wissen, wie oft die Zahl 50 in 7 ungleiche Teile sich zerlegen lasse, so nehme man in der ersten Vertikalreihe die Zahl $50 - \frac{7 \cdot 8}{2} = 22$ und in der obersten Horizontalreihe die römische Zahl VII. Die Zahl 522, welche sich mit 22 in derselben Horizontal- und mit VII in derselben Vertikalreihe befindet, giebt alsdann die gesuchte Anzahl an.

Will man aber wissen, wie oft die Zahl 50 in 7 Teile überhaupt, seien es gleiche oder ungleiche, zerlegt werden könne, so nehme man in der ersten Vertikalreihe die Zahl $50 - 7 = 43$ und suche die mit 43 in gleicher Horizontalreihe befindliche Zahl der mit VII bezeichneten Vertikalreihe. Die so sich ergebende Zahl 8946 ist die gesuchte.

Tabelle.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	3	4	5	5	5	5	5	5	5	5
5	1	3	5	6	7	7	7	7	7	7	7
6	1	4	7	9	10	11	11	11	11	11	11
7	1	4	8	11	13	14	15	15	15	15	15
8	1	5	10	15	18	20	21	22	22	22	22
9	1	5	12	18	23	26	28	29	30	30	30
10	1	6	14	23	30	35	38	40	41	42	42
11	1	6	16	27	37	44	49	52	54	55	56
12	1	7	19	34	47	58	65	70	73	75	76
13	1	7	21	39	57	71	82	89	94	97	99
14	1	8	24	47	70	90	105	116	123	128	131
15	1	8	27	54	84	110	131	146	157	164	169
16	1	9	30	64	101	136	164	186	201	212	219
17	1	9	33	72	119	163	201	230	252	267	278
18	1	10	37	84	141	199	248	288	318	340	355
19	1	10	40	94	164	235	300	352	393	423	445
20	1	11	44	108	192	282	364	434	488	530	560
21	1	11	48	120	221	331	436	525	598	653	695
22	1	12	52	136	255	391	522	638	732	807	863
23	1	12	56	150	291	454	618	764	887	984	1060
24	1	13	61	169	333	532	733	919	1076	1204	1303
25	1	13	65	185	377	612	860	1090	1291	1455	1586
26	1	14	70	206	427	709	1009	1297	1549	1761	1930
27	1	14	75	225	480	811	1175	1527	1845	2112	2331
28	1	15	80	249	540	931	1367	1801	2194	2534	2812
29	1	15	85	270	603	1057	1579	2104	2592	3015	3370
30	1	16	91	297	674	1206	1824	2462	3060	3590	4035
31	1	16	96	321	748	1360	2093	2857	3589	4242	4802
32	1	17	102	351	831	1540	2400	3319	4206	5013	5788
33	1	17	108	378	918	1729	2738	3828	4904	5888	6751
34	1	18	114	411	1014	1945	3120	4417	5708	6912	7972
35	1	18	120	441	1115	2172	3539	5066	6615	8070	9373
36	1	19	127	478	1226	2432	4011	5812	7657	9418	11004
37	1	19	133	511	1342	2702	4526	6630	8824	10936	12866
38	1	20	140	551	1469	3009	5102	7564	10156	12690	15021
39	1	20	147	588	1602	3331	5731	8588	11648	14663	17475
40	1	21	154	632	1747	3692	6430	9749	13338	16928	20298
41	1	21	161	672	1898	4070	7190	11018	15224	19466	23501
42	1	22	169	720	2062	4494	8033	12450	17354	22367	27169
43	1	22	176	754	2233	4935	8946	14012	19720	25608	31316
44	1	23	184	816	2418	5427	9953	15765	22380	29292	36043
45	1	23	192	864	2611	5942	11044	17674	25331	33401	41373
46	1	24	200	920	2818	6510	12241	19805	28629	38047	47420
47	1	24	208	972	3034	7104	13534	22122	32278	43214	54218
48	1	25	217	1033	3266	7760	14950	24699	36347	49037	61903
49	1	25	225	1089	3507	8442	16475	27493	40831	55494	70515
50	1	26	234	1154	3765	9192	18138	30588	45812	62740	80215

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
51	1	26	243	1215	4033	9975	19928	33940	51294	70760	91058
52	1	27	252	1285	4319	10829	21873	37638	57358	79725	103226
53	1	27	261	1350	4616	11720	23961	41635	64015	89623	116792
54	1	28	271	1425	4932	12692	26226	46031	71362	100654	131970
55	1	28	280	1495	5260	13702	28652	50774	79403	112804	148847
56	1	29	290	1575	5608	14800	31275	55974	88252	126299	167672
57	1	29	300	1650	5969	15944	34082	61575	97922	141136	188550
58	1	30	310	1735	6351	17180	37108	67696	108527	157564	211782
59	1	30	320	1815	6747	18467	40340	74280	120092	175586	237489
60	1	31	331	1906	7166	19858	43819	81457	132751	195491	266006
61	1	31	341	1991	7599	21301	47527	89162	146520	217280	297495
62	1	32	352	2087	8056	22856	51508	97539	161554	241279	332337
63	1	32	363	2178	8529	24473	55748	106522	177884	267507	370733
64	1	33	374	2280	9027	26207	60289	116263	195666	296320	413112
65	1	33	385	2376	9542	28009	65117	126692	214944	327748	459718
66	1	34	397	2484	10083	29941	70281	137977	235899	362198	511045
67	1	34	408	2586	10642	31943	75762	150042	258569	399705	567377
68	1	35	420	2700	11229	34085	81612	163069	283161	440725	629281
69	1	35	432	2808	11835	36308	87816	176978	309729	485315	697097

§ 319.

Die Vertikalreihen dieser Tabelle sind zwar rekurrente Reihen, sie stehen indessen mit den natürlichen Zahlen, sowie mit den Trigonal-, Pyramidalzahlen u. s. w. in so engem Zusammenhange, dass es sich der Mühe lohnt, kurz darauf einzugehen. Da nämlich aus dem Bruche:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$$

die Reihe:

$$1+x+2x^2+2x^3+3x^4+3x^5+\cdots,$$

und somit aus

$$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$$

die Reihe:

$$x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+3x^6+\cdots$$

hervorgeht, so erhält man durch Addition beider Reihen die folgende Reihe:

$$1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6+\cdots,$$

also die Reihe, welche durch Ausführung der Division aus dem Bruche:

$$\frac{1+x}{(1-x)(1-x^2)}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

entspringt. Daraus geht hervor, dass die Coefficienten der einzelnen Glieder der letzten Reihe die Reihe der natürlichen Zahlen ergeben. Wenn man daher aus der Tabelle die Zahlen der Vertikalreihe II nimmt und immer zwei aufeinanderfolgende addirt, so erhält man die Reihe der natürlichen Zahlen, nämlich, wenn oben $x=1$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned}&1+1+2+2+3+3+4+4+5+5+6+6+\cdots\\&1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+\cdots\end{aligned}$$

Umgekehrt findet man aus der Reihe der natürlichen Zahlen die erste Reihe, wenn man jedes Glied der oberen Reihe von dem auf das entsprechende Glied der unteren Reihe folgenden Gliede dieser letzteren subtrahirt.

§ 320.

Die mit III bezeichnete Vertikalreihe entspringt aus dem Bruche:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}.$$

Da nun aber:

$$\frac{1}{(1-x)^3}=\frac{(1+x)(1+x+x^2)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

ist, so muss man offenbar dadurch, dass man zunächst je drei aufeinanderfolgende Glieder dieser Reihe und sodann je zwei aufeinanderfolgende Glieder der dadurch entstehenden neuen Reihe addirt, die Trigonalzahlen erhalten. Dies erhellt aus folgendem Schema:

$$\begin{aligned}&1+1+2+3+4+5+7+8+10+12+14+16+19+\cdots\\&1+2+4+6+9+12+16+20+25+30+36+42+49+\cdots\\&1+3+6+10+15+21+28+36+45+55+66+78+91+\cdots\end{aligned}$$

Umgekehrt ergiebt sich daraus, wie aus der Reihe der Trigonalzahlen die erste Reihe gefunden wird.

§ 321.

Ebenso ist, da die mit IV bezeichnete Vertikalreihe aus dem Bruche:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

entspringt:

$$\frac{(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}=\frac{1}{(1-x)^4}.$$

Wenn man also in der angegebenen Reihe zunächst je vier aufeinanderfolgende Glieder, in der dadurch entstehenden neuen Reihe sodann je drei aufeinanderfolgende, und endlich in der hierdurch erhaltenen Reihe je zwei aufeinanderfolgende Glieder addirt, so erhält man die Pyramidalzahlen, wie aus folgender Rechnung erhellt:

$$\begin{aligned}&1+1+2+3+5+6+9+11+15+18+23+27+\cdots\\&1+2+4+7+11+16+23+31+41+53+67+83+\cdots\\&1+3+7+13+22+34+50+70+95+125+161+203+\cdots\\&1+4+10+20+35+56+84+120+165+220+286+364+\cdots\end{aligned}$$

In derselben Weise führt die mit V bezeichnete Reihe zu den Pyramidalzahlen zweiter Ordnung, die mit VI bezeichnete zu den Pyramidalzahlen dritter Ordnung u. s. w.

§ 322.

Umgekehrt können aus den figurirten Zahlen die in der Tabelle vorkommenden Reihen abgeleitet werden. Das dazu anzuwendende Verfahren leuchtet beim Anblick der folgenden Rechnung von selbst ein:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + \cdots$
$1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + \cdots$ Reihe II

$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 + 55 + \cdots$
$1 + 2 + 4 + 6 + 9 + 12 + 16 + 20 + 25 + 30 + \cdots$
$1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 10 + 12 + \cdots$ Reihe III

$1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 + 84 + 120 + 165 + 220 + \cdots$
$1 + 3 + 7 + 13 + 22 + 34 + 50 + 70 + 95 + 125 + \cdots$
$1 + 2 + 4 + 7 + 11 + 16 + 23 + 31 + 41 + 53 + \cdots$
$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 9 + 11 + 15 + 18 + \cdots$ Reihe IV

$1 + 5 + 15 + 35 + 70 + 126 + 210 + 330 + 495 + 715 + \cdots$
$1 + 4 + 11 + 24 + 46 + 80 + 130 + 200 + 295 + 420 + \cdots$
$1 + 3 + 7 + 14 + 25 + 41 + 64 + 95 + 136 + 189 + \cdots$
$1 + 2 + 4 + 7 + 12 + 18 + 27 + 38 + 53 + 71 + \cdots$
$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 10 + 13 + 18 + 23 + \cdots$ Reihe V

u. s. w.

Hierin sind die ersten Reihen die figurirten Zahlen; zieht man jedes Glied der zweiten Reihe von dem nächstfolgenden der ersten Reihe ab, so erhält man die zweite Reihe. Die dritte Reihe bildet man, indem man die Summe je zweier aufeinanderfolgenden Glieder derselben von dem nächsten Gliede der zweiten Reihe subtrahirt. Ebenso bildet man die Glieder jeder folgenden Reihe, indem man die Summe von je drei, vier u. s. w. benachbarten Gliedern von dem folgenden Gliede der nächstvorhergehenden Reihe abzieht und damit so lange fortfährt, bis man zu einer Reihe gelangt, welche mit $1 + 1 + 2 + \cdots$ anfängt und eben die in der Tabelle befindliche Reihe darstellt.

§ 323.

Die Vertikalreihen der Tabelle fangen sämtlich in derselben Weise an und haben, je grösser der zugehörige Stellenzeiger wird, mehr und mehr Glieder mit einander gemein. Daraus ist ersichtlich, dass sie schliesslich ganz und gar mit einander übereinstimmen werden.

Es ergiebt sich nämlich dann die Reihe, welche aus dem Bruche entspringt:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\cdots}$$

Da dieselbe rekurrent ist, so müssen wir zuerst den Nenner betrachten, um daraus die Beziehungsskala zu erhalten. Multiplicirt man aber die Factoren des Nenners nach und nach mit einander, so ergiebt sich die Reihe:

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + x^{51} + \cdots$$

Sieht man dieselbe näher an, so findet sich, dass sie nur solche Potenzen von x enthält, deren Exponenten von der Form $\frac{3n^2 \pm n}{2}$ sind, und dass die einzelnen Glieder positiv oder negativ sind, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

§ 324.

Da somit die Beziehungsskala die folgende ist:

$$+1,\ +1,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ +1,\ 0,\ 0,\ +1,\ 0,\ 0 \ldots,$$

so ist die aus der Entwicklung des Bruches:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\cdots}$$

entstehende Reihe:

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + 30x^9 + 42x^{10} + 56x^{11} + 77x^{12} + 101x^{13} + 135x^{14} + 176x^{15} + 231x^{16} + 297x^{17} + 385x^{18} + 490x^{19} + 627x^{20} + 792x^{21} + 1002x^{22} + 1250x^{23} + 1570x^{24} + \cdots$$

In dieser Reihe giebt jeder Coefficient an, wie oft der Exponent der zugehörigen Potenz von x aus ganzen Zahlen überhaupt durch Addition zusammengesetzt werden kann. So kann die Zahl 7 auf 15 verschiedene Arten durch Addition entstehen, nämlich:

$7 = 7$
$7 = 6 + 1$
$7 = 5 + 2$
$7 = 5 + 1 + 1$
$7 = 4 + 3$
$7 = 4 + 2 + 1$
$7 = 4 + 1 + 1 + 1$
$7 = 3 + 3 + 1$
$7 = 3 + 2 + 1 + 1$
$7 = 3 + 1 + 1 + 1 + 1$
$7 = 2 + 2 + 2 + 1$
$7 = 2 + 2 + 1 + 1 + 1$
$7 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$

§ 325.

Entwickelt man aber das Product

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)\cdots$$

in eine Reihe, so wird dieselbe:

$$1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+6x^8+8x^9+10x^{10}+\cdots,$$

und hierin giebt jeder Coefficient an, auf wieviel Arten der Exponent der zugehörigen Potenz von x **durch Addition aus ungleichen ganzen Zahlen** gebildet werden kann. So lässt sich die Zahl 9 auf 8 verschiedene Weisen aus ungleichen Zahlen durch Addition zusammensetzen, nämlich:

$$\begin{aligned}9&=9\\9&=8+1\\9&=7+2\\9&=6+3\\9&=6+2+1\\9&=5+4\\9&=5+3+1\\9&=4+3+2.\end{aligned}$$

§ 326.

Um nun eine Vergleichung zwischen diesen Formen anzustellen, sei:

$$\begin{aligned}P&=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\cdots\\Q&=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)\cdots,\end{aligned}$$

also:

$$PQ=(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)(1-x^{10})(1-x^{12})\cdots$$

Da die Factoren dieses Products auch sämtlich in P enthalten sind, so folgt, wenn man P durch PQ dividirt:

$$\frac{1}{Q}=(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)(1-x^9)\cdots,$$

und daher:

$$Q=\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)(1-x^9)\cdots}.$$

Entwickelt man aber diesen Bruch, so erhält man eine Reihe, in welcher jeder Coefficient angiebt, auf wieviel verschiedene Arten der Exponent der betreffenden Potenz von x durch Addition aus den ungeraden Zahlen entstehen kann. Da nun dieser Ausdruck demjenigen gleich ist, den wir im vorhergehenden Paragraphen betrachtet haben, so folgt hieraus der **Satz:**

Jede Zahl lässt sich durch Addition aus lauter ungeraden, sei es gleichen, sei es ungleichen, Zahlen auf **ebenso viele** verschiedene Arten zusammensetzen, als sie durch Addition aus **allen** ganzen, aber von einander **verschiedenen** Zahlen gebildet werden kann.

§ 327.

Wie wir vorher sahen, ist:

$$P=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+\cdots$$

Setzt man hierin x^2 für x, so erhält man:

$$PQ=1-x^2-x^4+x^{10}+x^{14}-x^{24}-x^{30}+x^{44}+x^{52}-\cdots$$

Es ergiebt sich daher, wenn man die zweite Reihe durch die erste dividirt:

$$Q=\frac{1-x^2-x^4+x^{10}+x^{14}-x^{24}-x^{30}+\cdots}{1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-\cdots}.$$

Mithin ist Q ebenfalls eine rekurrente Reihe, die aus der Reihe $\frac{1}{P}$ entsteht, wenn man dieselbe mit $1-x^2-x^4+x^{10}+x^{14}-x^{24}-\cdots$ multiplicirt. Da nun nach § 324:

$$\frac{1}{P}=1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+11x^6+15x^7+22x^8+30x^9+\cdots$$

ist, so wird diese Reihe, wenn man sie mit

$$1-x^2-x^4+x^{10}+x^{14}-\cdots$$

multiplicirt:

$$\begin{aligned}1+x+2x^2+3x^3&+5x^4+7x^5+11x^6+15x^7+22x^8+30x^9+\cdots\\-x^2-x^3&-2x^4-3x^5-5x^6-7x^7-11x^8-15x^9-\cdots\\&-x^4-x^5-2x^6-3x^7-5x^8-7x^9-\cdots\\&\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

oder:

$$1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+6x^8+8x^9+\cdots=Q.$$

Wenn daher die additive Zusammensetzung der Zahlen aus **teils gleichen, teils ungleichen** Zahlen bekannt ist, so kann man daraus auch die additive Zusammensetzung derselben aus **lauter ungleichen** und daraus wieder die additive Zusammensetzung aus **lauter ungeraden** Zahlen ableiten.

§ 328.

Es sind nun hierbei noch einige merkwürdige Fälle übrig, deren Untersuchung bei der Erforschung der Natur der Zahlen nicht ohne Nutzen ist. Man betrachte z. B. den folgenden Ausdruck:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})\cdots,$$

in welchem jeder folgende Exponent von x das Doppelte des vorhergehenden ist. Entwickelt man diesen Ausdruck, so erhält man folgende Reihe:

$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+\cdots$$

Da es indessen dem Zweifel unterliegen könnte, ob diese Reihe auch wirklich bis ins Unendliche dem Gesetze der geometrischen Progression gemäss fortschreite, so wollen wir diese Reihe selbst untersuchen. Es gehe also aus dem Producte:

$$P=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})\cdots$$

durch Entwicklung desselben die Reihe hervor:

$$P=1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\varepsilon x^5+\zeta x^6+\eta x^7+\vartheta x^8+\cdots$$

Nun geht aber offenbar dadurch, dass man x^2 für x setzt, das Product über in:

$$(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})\cdots=\frac{P}{1+x}.$$

Macht man daher in der Reihe dieselbe Substitution, so wird:

$$\frac{P}{1+x}=1+\alpha x^2+\beta x^4+\gamma x^6+\delta x^8+\varepsilon x^{10}+\zeta x^{12}+\cdots,$$

folglich, wenn man mit $1+x$ multiplicirt,

$$P=1+x+\alpha x^2+\alpha x^3+\beta x^4+\beta x^5+\gamma x^6+\gamma x^7+\delta x^8+\delta x^9+\cdots$$

Vergleicht man also die beiden Werte von P mit einander, so ergiebt sich:

$$\alpha=1,\ \beta=\alpha,\ \gamma=\alpha,\ \delta=\beta,\ \varepsilon=\beta,\ \zeta=\gamma,\ \eta=\gamma,\ \text{u. s. w.}$$

Es werden somit alle Coefficienten gleich 1, und durch Entwicklung des gegebenen Productes P entsteht die geometrische Reihe:

$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+\cdots$$

§ 329.

Da nun hierin die sämtlichen Potenzen von x, und zwar jede nur einmal, vorkommen, so folgt aus der Form des Products:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})\cdots,$$

dass sich eine jede ganze Zahl aus verschiedenen Gliedern der geometrischen Progression 1, 2, 4, 8, 16, 32 ..., bei welcher der Quotient aufeinanderfolgender Glieder gleich 2 ist, stets und nur auf eine einzige Weise durch Addition bilden lässt. Diese Eigenschaft ist in der Praxis bekannt beim Wägen. Hat man nämlich Gewichte von 1, 2, 4, 8, 16, 32 ... Pfund, so kann man damit allein jede Last wägen, vorausgesetzt, dass man von den Teilen eines Pfundes absieht. So kann man mit den zehn Gewichten:

1 ℔, 2 ℔, 4 ℔, 8 ℔, 16 ℔, 32 ℔, 64 ℔, 128 ℔, 256 ℔, 512 ℔

jede Last bis zu 1024 ℔ wägen, und wenn man noch ein Gewicht von 1024 ℔ hinzunimmt, so reicht man damit bis zu Lasten von 2048 ℔ aus.

§ 330.

Man pflegt aber in den Anleitungen zum Wägen auch noch zu zeigen, dass man mit noch weniger Gewichten, von denen jedes zu dem nächstgrösseren im Verhältnis von 1:3 steht, also mit Gewichten von 1, 3, 9, 27, 81 ... Pfund jede Last wägen kann, falls man Bruchteile eines Pfundes nicht berücksichtigt. Dabei darf man aber die Gewichte nicht bloss auf die eine Wagschale legen wollen, sondern man muss, sowie es die Umstände erfordern, beide Wagschalen damit belasten. Dies Verfahren beruht darauf, dass man aus den Gliedern der geometrischen Reihe 1, 3, 9, 27, 81 ... eine jede Zahl teils durch Addition, teils durch Subtraction zusammensetzen kann. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}
1&=1\\
2&=3-1\\
3&=3\\
4&=3+1\\
5&=9-3-1\\
6&=9-3\\
7&=9-3+1\\
8&=9-1\\
9&=9\\
10&=9+1\\
11&=9+3-1\\
12&=9+3
\end{aligned}$$

u. s. w.

§ 331.

Um die Richtigkeit dieses Verfahrens zu zeigen, betrachte man das unendliche Product:

$$(x^{-1}+1+x)(x^{-3}+1+x^3)(x^{-9}+1+x^9)(x^{-27}+1+x^{27})\cdots=P.$$

In der Entwicklung desselben kommen nur solche Potenzen von x vor, deren Exponenten aus den Zahlen $1, 3, 9, 27, 81 \ldots$, sei es durch Addition, sei es durch Subtraction, gebildet werden können. Um aber zu erfahren, ob auch alle Potenzen, und zwar jede nur einmal, darin vorkommen, verfahren wir folgendermassen: Ist

$$P = \cdots + cx^{-3} + bx^{-2} + ax^{-1} + 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \cdots,$$

so erhält man offenbar, wenn man x^3 für x schreibt:

$$\frac{P}{x^{-1}+1+x^1} = \cdots + bx^{-6} + ax^{-3} + 1 + \alpha x^3 + \beta x^6 + \gamma x^9 + \cdots$$

Folglich:

$$P = \cdots + ax^{-4} + ax^{-3} + ax^{-2} + x^{-1} + 1 + x + \alpha x^2 + \alpha x^3 + \alpha x^4 + \beta x^5 + \beta x^6 + \beta x^7 + \cdots$$

Vergleicht man aber die beiden Ausdrücke für P mit einander, so ergiebt sich:

$$\alpha = 1,\ \beta = \alpha,\ \gamma = \alpha,\ \delta = \alpha,\ \varepsilon = \beta,\ \zeta = \beta,\ \ldots$$
$$a = 1,\ b = a,\ c = a,\ d = a,\ e = b,\ \ldots$$

Mithin wird:

$$P = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \cdots + x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + x^{-4} + x^{-5} + x^{-6} + x^{-7} + \cdots.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass alle Potenzen von x, sowohl die mit positiven wie die mit negativen Exponenten, vorkommen, und dass somit alle Zahlen aus den Gliedern der geometrischen Progression, deren Quotient 3 ist, teils durch Addition, teils durch Subtraction gebildet werden können, und zwar eine jede nur auf eine einzige Weise.

17. Capitel.

Von dem Gebrauch der rekurrenten Reihen bei der Berechnung der Wurzeln der Gleichungen.

§ 332.

Im dritten Bande der Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Petersburg hat Daniel Bernoulli den grossen **Nutzen der rekurrenten Reihen bei der Berechnung der Wurzeln einer Gleichung** von irgend welchem Grade gezeigt, indem er nachwies, wie man die Werte der Wurzeln irgend einer algebraischen Gleichung, sie möge sein, von welchem Grade sie wolle, mit Hülfe der rekurrenten Reihen annähernd genau bestimmen kann. Da diese Entdeckung sehr häufig grossen Vorteil bietet, so wollen wir sie hier sorgfältiger auseinandersetzen und zeigen, in welchen Fällen sie anwendbar ist. Zuweilen nämlich geschieht es wider alle Erwartung, dass man eine Wurzel der Gleichung auf diesem Wege nicht findet. Wir wollen daher, um die Bedeutung dieses Verfahrens recht klar hervortreten zu lassen, den eigentlichen Grund desselben aus den Eigenschaften der rekurrenten Reihen zu erforschen suchen.

§ 333.

Da jede rekurrente Reihe durch Entwicklung eines rationalen Bruches entsteht, so sei dieser Bruch:

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \cdots}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \cdots}$$

und hieraus entspringe die rekurrente Reihe:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \cdots,$$

wobei sich die Coefficienten $A, B, C, D, \ldots$ durch die Gleichungen bestimmen:

$$\begin{aligned} A &= a \\ B &= \alpha A + b \\ C &= \alpha B + \beta A + c \\ D &= \alpha C + \beta B + \gamma A + d \\ E &= \alpha D + \beta C + \gamma B + \delta A + e \end{aligned}$$
u. s. w.

Das allgemeine Glied der Reihe oder den Coefficienten der Potenz z^n findet man aber durch Zerlegung des gegebenen Bruches in einfache Brüche, welche, wie solches im 13. Capitel gezeigt worden ist, die Factoren des Nenners $1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \cdots$ zu Nennern haben.

§ 334.

Die Form des allgemeinen Gliedes hängt aber vornehmlich ab von der Art der einfachen Factoren des Nenners, ob dieselben nämlich reell oder imaginär, und ob sie alle von einander verschieden, oder zwei oder mehrere von ihnen gleich sind. Um diese verschiedenen Fälle der Reihe nach durchzugehen, nehmen wir zunächst an, dass alle einfachen Factoren des Nenners **reell** und von einander **verschieden** seien. Sind daher:

$$(1 - pz)(1 - qz)(1 - rz)(1 - sz)\cdots$$

die sämtlichen einfachen Factoren des Nenners, so lässt sich der gegebene Bruch in die folgenden einfachen Brüche zerlegen:

$$\frac{\mathfrak{A}}{1 - pz} + \frac{\mathfrak{B}}{1 - qz} + \frac{\mathfrak{C}}{1 - rz} + \frac{\mathfrak{D}}{1 - sz} + \cdots$$

Hat man also diese Brüche gefunden und entwickelt, so ist das allgemeine Glied der rekurrenten Reihe gleich

$$z^n(\mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n + \mathfrak{C}r^n + \mathfrak{D}s^n + \cdots),$$

und dieses wollen wir gleich Pz^n setzen. Es soll nämlich P der Coefficient der Potenz z^n und ferner $Q, R \ldots$ die Coefficienten der folgenden Potenzen sein, so dass also die rekurrente Reihe wird:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots + Pz^n + Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + \cdots$$

§ 335.

Wir setzen nun voraus, dass n eine sehr grosse Zahl, dass also die rekurrente Reihe auf sehr viele Glieder fortgesetzt sei. Weil nun gleichhohe Potenzen von ungleichen Zahlen von einander verschieden sind, und zwar um so mehr, je grösser der Exponent ist, so wird von den einzelnen Grössen $\mathfrak{A}p^n$, $\mathfrak{B}q^n$, $\mathfrak{C}r^n, \ldots$, diejenige, welche aus der grössten der Zahlen $p, q, r \ldots$ entspringt, die andern an Grösse weit übertreffen, und es werden somit die andern im Vergleich zu dieser einen vollständig verschwinden, wenn n geradezu eine unendlich grosse Zahl ist. Da nun die Zahlen $p, q, r \ldots$ von einander verschieden sein sollen, so möge p die grösste unter ihnen sein. Es wird daher, sobald n unendlich gross genommen wird,

$$P = \mathfrak{A}p^n.$$

Ist aber n nur eine sehr grosse Zahl, so wird nur annähernd $P = \mathfrak{A}p^n$ sein. Ebenso ist:

$$Q = \mathfrak{A}p^{n+1},$$

und somit:

$$\frac{Q}{P} = p.$$

Daraus geht hervor, dass, wenn die rekurrente Reihe weit genug fortgesetzt ist, der Coefficient irgend eines Gliedes durch den des vorhergehenden dividirt den Wert der **grössten** Zahl p annähernd genau ausdrücken wird.

§ 336.

Wenn daher der Nenner des gegebenen Bruches:

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \cdots}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \cdots}$$

lauter reelle und ungleiche einfache Factoren hat, so kann man mittelst der daraus entspringenden rekurrenten Reihe einen der einfachen Factoren finden, nämlich denjenigen Factor $1 - pz$, in welchem die Zahl p den grössten Wert besitzt. Dabei kommen die Coefficienten des Zählers $a, b, c, d \ldots$ nicht in Betracht: es ergiebt sich, wie man dieselben auch annehmen möge, doch stets derselbe Wert für die grösste Zahl p. Ganz genau richtig findet man den Wert von p allerdings erst dann, wenn man die Reihe bis ins Unendliche fortgesetzt hat; wenn man aber auch nur eine grössere Anzahl von Gliedern der Reihe gefunden hat, so wird doch der Wert von p dem wahren Werte um so näher kommen, je grösser die Anzahl der Glieder war und je mehr der Wert von p die Werte von $q, r, s \ldots$ übertrifft. Dabei ist es völlig gleichgültig, ob diese grösste Zahl p positiv oder negativ ist, weil die Potenzen derselben in beiden Fällen in derselben Weise wachsen.

§ 337.

In welcher Weise nun diese Untersuchung auf die Berechnung der Wurzeln irgend einer algebraischen Gleichung Anwendung finden könne, ist hiernach hinlänglich ersichtlich. Denn sind die Factoren des Nenners $1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \cdots$ bekannt, so findet man aus diesen leicht die Wurzeln der Gleichung:

$$1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \cdots = 0.$$

Ist nämlich $1 - pz$ ein Factor jenes Nenners, so ist $z = \frac{1}{p}$ eine Wurzel dieser Gleichung. Da man nun die grösste Zahl p aus der rekurrenten

Reihe findet, so erhält man eben auf diese Weise die kleinste Wurzel der Gleichung:

$$1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \cdots = 0.$$

Setzt man aber $z = \frac{1}{x}$, so dass dadurch die Gleichung:

$$x^m - \alpha x^{m-1} - \beta x^{m-2} - \gamma x^{m-3} - \cdots = 0$$

entsteht, so ergiebt sich mittelst dieses Verfahrens die grösste Wurzel $x = p$ dieser letzteren Gleichung.

§ 338.

Wenn also die Gleichung:

$$x^m - \alpha x^{m-1} - \beta x^{m-2} - \gamma x^{m-3} - \cdots = 0$$

gegeben ist, in welcher alle Wurzeln reell und von einander verschieden sind, so findet man die grösste von diesen Wurzeln auf folgende Weise: Man bilde aus den Coefficienten dieser Gleichung den Bruch:

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \cdots}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \cdots},$$

und leite daraus die rekurrente Reihe her, indem man den Zähler des Bruches, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Anfangsglieder der Reihe nach Belieben annimmt. Ist diese Reihe gleich:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots + Pz^n + Qz^{n+1} + \cdots,$$

so wird der Bruch $\frac{Q}{P}$ den Wert der grössten Wurzel x der gegebenen Gleichung um so genauer angeben, je grösser die Zahl n ist.

Erstes Beispiel.

Man soll die grösste Wurzel der Gleichung:

$$x^2 - 3x - 1 = 0$$

bestimmen.

Bildet man den Bruch:

$$\frac{a + bz}{1 - 3z - z^2},$$

und setzt man die ersten beiden Glieder der daraus entstehenden Reihe gleich 1 und 2, so wird diese Reihe:

$$1,\ 2,\ 7,\ 23,\ 76,\ 251,\ 829,\ 2738,\ \ldots.$$

Es giebt daher der Bruch $\frac{2738}{829}$ nahezu genau den Wert der grössten Wurzel der gegebenen Gleichung. Verwandelt man diesen Bruch in einen Decimalbruch, so findet man denselben gleich:

$$3{,}3027744,$$

während der wahre Wert der grössten Wurzel gleich

$$\frac{3 + \sqrt{13}}{2} = 3{,}3027756$$

ist, so dass sich also die beiden Werte nur um $\frac{1}{1000000}$ unterscheiden. Uebrigens ist zu bemerken, dass die Brüche $\frac{Q}{P}$ abwechselnd grösser und kleiner sind als der wahre Wert der Wurzel.

Zweites Beispiel.

Es sei die Gleichung:

$$3x - 4x^3 = \frac{1}{2}$$

gegeben, deren Wurzeln die Sinus dreier Bogen sind, die dreifach genommen den Sinus $\frac{1}{2}$ haben.

Nachdem man die Gleichung auf die Form:

$$1 - 6x + 8x^3 = 0$$

gebracht hat, suche man, um bei ganzen Zahlen zu bleiben, die kleinste Wurzel, so dass man nicht erst $\frac{1}{z}$ für x zu setzen braucht. Bildet man dann den Bruch:

$$\frac{a + bx + cx^2}{1 - 6x + 8x^3},$$

und nimmt man, weil dadurch die Rechnung am leichtesten wird, die drei Anfangsglieder der Reihe gleich 0, 0, 1 an und lässt zugleich die Potenzen von x weg, da man nur die Coefficienten braucht, so erhält man folgende rekurrente Reihe:

$$0,\ 0,\ 1,\ 6,\ 36,\ 208,\ 1200,\ 6912,\ 39808,\ 229248\ \ldots;$$

Es ist daher die kleinste Wurzel der Gleichung nahezu gleich:

$$\frac{39808}{229248} = \frac{311}{1791} = 0{,}1736515,$$

und dieses müsste der Sinus eines Winkels von 10° sein. Aus den Tafeln findet man aber für diesen den Werth 0,1736482, welcher um $\frac{33}{10000000}$ kleiner als der gefundene ist.

Noch leichter kann man eben dieselbe Wurzel dadurch finden, dass man $x = \frac{1}{2} y$ setzt, wodurch sich die Gleichung:

$$1 - 3y + y^3 = 0$$

ergiebt. Aus dieser entspringt auf eine ähnliche Weise die Reihe:

$$0,\ 0,\ 1,\ 3,\ 9,\ 26,\ 75,\ 216,\ 622,\ 1791,\ 5157\ldots,$$

und es wird daher die kleinste Wurzel der Gleichung nahezu gleich:

$$y = \frac{1791}{5157} = \frac{199}{573} = 0{,}3472949,$$

woraus sich

$$x = \frac{1}{2} y = 0{,}1736474$$

ergiebt. Dieser Wert aber ist noch um vieles genauer, als der vorhergehende.

Drittes Beispiel.

Würde von eben derselben Gleichung:

$$0 = 1 - 6x + 8x^3$$

die grösste Wurzel verlangt, so setze man $x = \frac{y}{2}$, wodurch man

$$y^3 - 3y + 1 = 0$$

erhält. Für diese Gleichung findet man die grösste Wurzel mittelst der rekurrenten Reihe, deren Beziehungsskala $(0, 3, -1)$ ist. Es wird daher diese Reihe, wenn man die drei Anfangsglieder nach Belieben annimmt:

$$1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 5,\ 4,\ 13,\ 7,\ 35,\ 8,\ 98,\ -11,\ldots$$

Da man in dieser Reihe zu negativen Gliedern kommt, so ist dies ein Zeichen dafür, dass die grösste Wurzel negativ ist. In der Tat ist $x = -\sin 70° = -0{,}9396926$. Man muss daher hierauf bei den Anfangsgliedern Rücksicht nehmen, wie es z. B. in folgender Reihe geschehen ist:

$$1 - 2 + 4 - 7 + 14 - 25 + 49 - 89 + 172 - 316 + 605 - \cdots$$

Hieraus würde sich

$$y = \frac{-605}{316} \text{ und } x = -\frac{605}{632} = -0{,}957$$

ergeben, welcher Wert jedoch von dem wahren Werte beträchtlich abweicht.

§ 339.

Der Grund dieser Abweichung liegt vornehmlich darin, dass die Wurzeln der gegebenen Gleichung $\sin 10°$, $\sin 50°$ und $-\sin 70°$ sind, und dass somit die beiden grössten Wurzeln sich so wenig von einander unterscheiden, dass die zweite Wurzel $\sin 50°$ in den Coefficienten der Potenzen, bis zu welchen man die Reihe fortgesetzt hat, noch ein beträchtliches Verhältnis zu der grössten Wurzel hat und daher nicht im Vergleich zu dieser verschwindet. Hiervon hängen auch die grossen Unterschiede ab, um welche die gefundenen Werte abwechselnd zu gross oder zu klein sind. So wird, wenn man

$$y = \frac{-316}{172} \text{ nimmt, } x = \frac{-158}{172} = \frac{-79}{86} = -0{,}918.$$

Da nämlich die Potenzen der grössten Wurzel abwechselnd positiv und negativ sind, so werden auch die Potenzen der zweiten Wurzel abwechselnd addirt und subtrahirt; es müsste daher, soll diese Abweichung nicht mehr merklich sein, die Reihe noch sehr viel weiter fortgesetzt werden.

§ 340.

Man kann jedoch diesem Uebelstande auch dadurch abhelfen, dass man die Gleichung mittelst einer geeigneten Substitution auf eine Form bringt, bei welcher die Wurzelwerte einander nicht mehr so nahe liegen. Setzt man z. B. in der Gleichung:

$$0 = 1 - 6x + 8x^3,$$

deren Wurzeln $-\sin 70°$, $+\sin 50°$, $+\sin 10°$ sind, $x = y - 1$, so werden $1 - \sin 70°$, $1 + \sin 50°$, $1 + \sin 10°$ die Wurzeln der Gleichung

$$0 = 8y^3 - 24y^2 + 18y - 1$$

sein, und es ist demnach für diese $1 - \sin 70°$ die kleinste Wurzel, während $\sin 70°$ die grösste Wurzel der vorigen Gleichung war; hingegen ist $1 + \sin 50°$ im gegenwärtigen Falle die grösste Wurzel, während vorher $\sin 50°$ die mittlere Wurzel war. Man kann also auf diese Weise durch eine Substitution jede Wurzel in die grösste oder kleinste Wurzel der neuen Gleichung verwandeln und dieselbe demnach durch das eben beschriebene Verfahren bestimmen. Da überdies in diesem Beispiel die Wurzel $1 - \sin 70°$ um vieles kleiner ist, als die beiden übrigen, so lässt sie sich auch leicht durch eine rekurrente Reihe annähernd bestimmen.

Viertes Beispiel.

Man soll die kleinste Wurzel der Gleichung:

$$0 = 8y^3 - 24y^2 + 18y - 1$$

finden, welche von 1 abgezogen den Sinus des Winkels von 70° liefert.

Setzt man $y = \frac{1}{2} z$, so dass

$$0 = z^3 - 6z^2 + 9z - 1$$

wird, so findet man die kleinste Wurzel dieser Gleichung durch eine rekurrente Reihe mit der Beziehungsskala $(9, -6, +1)$, die grösste Wurzel hingegen durch eine solche mit der Beziehungsskala $(6, -9, +1)$. Bildet man also für die kleinste Wurzel die Reihe:

$$1, 1, 1, 4, 31, 256, 2122, 17593, 145861, \ldots,$$

so wird näherungsweise:

$$z = \frac{17593}{145861} = 0{,}12061483 \text{ und } y = 0{,}06030741,$$

mithin:

$$\sin 70° = 1 - y = 0{,}93969258,$$

welcher Wert selbst in der letzten Stelle noch richtig ist. Aus diesem Beispiele ist daher ersichtlich, einen wie grossen Nutzen eine zweckmässige Umformung der Gleichung mittelst einer Substitution bei der Berechnung ihrer Wurzeln gewährt, und ferner dass das angeführte Verfahren nicht nur auf die Berechnung der grössten und kleinsten Wurzel anwendbar ist, sondern auch alle Wurzeln liefert.

§ 341.

Hat man also bereits irgend eine Wurzel der gegebenen Gleichung näherungsweise bestimmt, so dass z. B. die Zahl k möglichst wenig von dem wahren Werte einer Wurzel abweicht, so setze man $x - k = y$ oder $x = y + k$. Dadurch erhält man eine Gleichung, deren kleinste Wurzel gleich $x - k$ ist. Bestimmt man diese mittelst einer rekurrenten Reihe, was sehr leicht ist, da diese Wurzel sehr viel kleiner ist als die übrigen, so erhält man durch Addition derselben zu k den richtigen Wert von x für die gegebene Gleichung. Dieser Kunstgriff bleibt selbst dann noch anwendbar, wenn die Gleichung imaginäre Wurzeln besitzt.

§ 342.

Ganz unentbehrlich ist dieser Kunstgriff sogar in dem Falle, wenn die Gleichung zwei **gleiche**, aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Wurzeln hat. Wenn nämlich eine Gleichung, deren grösste Wurzel p ist, auch die Wurzel $-p$ hat, so würde man diese Wurzel p selbst dann nicht erhalten, wenn man auch die rekurrente Reihe bis ins Unendliche fortsetzen wollte. Um dies an einem Beispiele zu erläutern, sei die Gleichung:

$$x^3 - x^2 - 5x + 5 = 0$$

gegeben. Dieselbe besitzt die grösste Wurzel $\sqrt{5}$, ausserdem aber auch noch die Wurzel $-\sqrt{5}$. Wollte man nun, um die grösste Wurzel zu finden, das vorher beschriebene Verfahren anwenden und die rekurrente Reihe mit der Beziehungsskala $(1, +5, -5)$, nämlich die Reihe:

$$1, 2, 3, 8, 13, 38, 63, 188, 313, 938, 1563, \ldots$$

bilden, so würde der Quotient zweier aufeinanderfolgenden Glieder niemals constant werden. Dagegen werden hier die Quotienten aus den wechselsweise genommenen Gliedern einander gleich, und zwar findet man so, indem man jedes Glied durch das zweitvorige dividirt, das Quadrat der grössten Wurzel. So ist z. B. näherungsweise:

$$5 = \frac{1563}{313} = \frac{938}{188} = \frac{313}{63}.$$

So oft sich daher die wechselsweise genommenen Glieder einem constanten Verhältnisse nähern, erhält man jedesmal das Quadrat der gesuchten Wurzel näherungsweise. Die Wurzel $x = \sqrt{5}$ selbst aber findet man dadurch, dass man $x = y + 2$ setzt. Dadurch geht die gegebene Gleichung in die folgende über:

$$1 - 3y - 5y^2 - y^3 = 0,$$

deren kleinste Wurzel aus der Reihe

$$1, 1, 1, 9, 33, 145, 609, 2585, 10945, \ldots$$

erhalten wird. Sie ist nämlich nahezu gleich

$$\frac{2585}{10945} = 0{,}2361,$$

während 2,2361 näherungsweise gleich $\sqrt{5}$, d. h. gleich der grössten Wurzel der gegebenen Gleichung ist.

§ 343.

Obwohl der Zähler des Bruches, aus welchem die rekurrente Reihe gebildet wird, nach Belieben angenommen werden darf, so trägt doch eine geschickte Wahl desselben sehr viel dazu bei, den Wert der Wurzel schnell mit grosser Annäherung zu bestimmen. Denn da das allgemeine Glied der rekurrenten Reihe, wenn man die Factoren des Nenners so wie oben im § 334 annimmt, gleich $z^n(\mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n + \mathfrak{C}r^n + \cdots)$ ist, und die Coefficienten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \ldots$ sich aus dem Zähler des Bruches bestimmen, so kann $\mathfrak{A}$ in dem einen Falle einen grossen, in einem anderen einen kleinen Wert erhalten, und es wird im ersten Falle die grösste Wurzel p sehr bald, im letzten aber nur langsam gefunden werden. Ja man kann sogar den Zähler so annehmen, dass $\mathfrak{A}$ vollständig verschwindet, und in diesem Falle wird die Reihe, selbst wenn sie ins Unendliche fortgesetzt wird, überhaupt niemals die grösste Wurzel p liefern. Dieser Fall tritt aber ein, wenn der Zähler so angenommen wird, dass er selbst den Factor $1 - pz$ besitzt, da dieser alsdann vollständig aus der Rechnung verschwindet. Ist z. B. die Gleichung:

$$x^3 - 6x^2 + 10x - 3 = 0$$

gegeben, deren grösste Wurzel gleich 3 ist, und bildet man daraus den Bruch:

$$\frac{1-3z}{1-6z+10z^2-3z^3},$$

so dass die Beziehungsskala der rekurrenten Reihe $(6, -10, +3)$ wäre, so erhielte man die Reihe:

$$1,\ 3,\ 8,\ 21,\ 55,\ 144,\ 377, \ldots,$$

in welcher sich die Quotienten aufeinanderfolgender Glieder durchaus nicht dem Werte $\frac{1}{3}$ nähern. Vielmehr entspringt dieselbe Reihe auch aus dem Bruche:

$$\frac{1}{1-3z+z^2},$$

sie liefert demnach die grösste Wurzel der Gleichung:

$$x^2-3x+1=0.$$

§ 344.

Es kann jedoch der Zähler auch so angenommen werden, dass man mittelst der rekurrenten Reihe eine jede Wurzel der Gleichung findet, und zwar erreicht man dies dadurch, dass man als Zähler das Product aus allen Factoren des Nenners mit Ausnahme desjenigen, welcher der zu findenden Wurzel entspricht, nimmt. Wählt man z. B. im vorigen Beispiele $1-3z+z^2$ als Zähler, so liefert der Bruch:

$$\frac{1-3z+z^2}{1-6z+10z^2-3z^3}$$

die rekurrente Reihe:

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243, \ldots,$$

und diese zeigt, da sie eine geometrische ist, sofort die Wurzel $x=3$ an. Jener Bruch ist nämlich dem einfachen Bruche $\frac{1}{1-3z}$ gleich. Daraus geht hervor, dass, wenn man die Anfangsglieder, welche ja beliebig angenommen werden dürfen, so annimmt, dass sie eine geometrische Progression bilden, deren Verhältniszahl gleich einer Wurzel der Gleichung ist, alsdann die ganze rekurrente Reihe eine geometrische wird, und dass sie daher gerade diese Wurzel giebt, obwohl dieselbe weder die grösste noch die kleinste ist.

§ 345.

Damit man also nicht, während man die grösste oder kleinste Wurzel sucht, wider Erwarten durch die rekurrente Reihe auf eine andere Wurzel

geführt werde, muss man den Zähler so wählen, dass er mit dem Nenner keinen Factor gemeinsam hat, und dies erreicht man, wenn man als Zähler die Einheit nimmt, wodurch das erste Glied der Reihe gleich 1 wird, und sodann aus diesem einzigen Gliede nach der Beziehungsskala alle folgenden Glieder bestimmt. Auf diese Weise findet man dann sicher, je nachdem es vorgeschrieben war, die grösste oder die kleinste Wurzel der Gleichung. Ist z. B. die Gleichung:

$$y^3-3y+1=0$$

gegeben, und soll deren grösste Wurzel bestimmt werden, so entspringt aus der Beziehungsskala $(0, +3, -1)$, wenn man mit 1 anfängt, die rekurrente Reihe:

$$1-0+3-1+9-6+28-27+90-109+297-517+1000-1848 \\ +3517-6544+\cdots,$$

in welcher sich die Quotienten aufeinanderfolgender Glieder offenbar einer constanten Grösse nähern, und welche zeigt, dass die grösste Wurzel negativ und nahezu gleich

$$y=\frac{-6544}{3517}=-1{,}860676$$

ist, während sie in Wahrheit $-1{,}86793852$ sein müsste. Als Grund dafür, dass die Annäherung an den wahren Wert so langsam erfolgt, ist bereits früher der angegeben worden, dass die andere Wurzel nicht viel kleiner als die grösste und zugleich positiv ist.

§ 346.

Wenn man das, was wir sowohl im Allgemeinen als im Anschluss an die angeführten Beispiele auseinandergesetzt haben, wohl überlegt, so wird man den grossen Nutzen dieses Verfahrens zur Berechnung der Wurzeln der Gleichungen deutlich erkennen. Auch die Kunstgriffe, durch welche man die Rechnung abkürzen und leichter machen kann, sind hinlänglich erklärt worden, so dass nichts mehr hinzuzufügen bliebe, wenn wir nicht noch die Fälle, in denen die Gleichung gleiche oder imaginäre Wurzeln besitzt, berücksichtigen müssten. Wir nehmen also an, dass der Nenner des Bruches:

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3+\cdots}{1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\delta z^4-\cdots}$$

den Factor $(1-pz)^2$ besitze, während die anderen Factoren $1-qz$, $1-rz, \cdots$ seien. Alsdann ist das allgemeine Glied der daraus entstehenden rekurrenten Reihe:

$$z^n\left((n+1)\mathfrak{A}p^n+\mathfrak{B}p^n+\mathfrak{C}q^n+\cdots\right).$$

Um nun zu beurteilen, welchen Wert dasselbe annimmt, sobald n eine sehr grosse Zahl ist, müssen wir zwei Fälle unterscheiden, je nachdem nämlich p die grösste von allen Wurzeln $p, q, r \ldots$ darstellt oder nicht. Im ersten Falle, wo p die grösste Wurzel ist, können die übrigen Glieder $\mathfrak{B}p^n + \mathfrak{C}q^n + \cdots$ wegen des Coefficienten $n+1$ nicht so schnell gegen ihn verschwinden wie vorher. Ist aber $q > p$, so wird das Glied $(n+1)\,\mathfrak{A}p^n$ auch nur sehr langsam im Vergleich zu $\mathfrak{C}q^n$ verschwinden, so dass also die Berechnung der grössten Wurzel hier sehr beschwerlich ist.

Erstes Beispiel.

Es sei die Gleichung:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0$$

gegeben, deren grösste Wurzel 2 zweimal vorkommt.

Man suche diese grösste Wurzel auf die vorher beschriebene Weise durch Entwicklung des Bruches:

$$\frac{1}{1 - 3z + 4z^3}.$$

Dieselbe liefert folgende rekurrente Reihe:

$$1,\ 3,\ 9,\ 23,\ 57,\ 135,\ 313,\ 711,\ 1593,\ldots,$$

bei welcher jedes Glied durch das vorhergehende dividirt eine Zahl giebt, welche grösser ist als 2. Der Grund hiervon erhellt leicht aus dem allgemeinen Gliede. Denn lässt man in demselben die Glieder $\mathfrak{C}q^n \ldots$ weg, so wird das der Potenz z^n entsprechende Glied gleich

$$(n+1)\,\mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}p^n,$$

das folgende gleich

$$(n+2)\,\mathfrak{A}p^{n+1} + \mathfrak{B}p^{n+1},$$

und dieses giebt durch jenes dividirt:

$$\frac{(n+2)\,\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}{(n+1)\,\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}\,p,$$

eine Zahl, die stets grösser als p ist, wofern nicht n bereits unendlich gross geworden ist.

Zweites Beispiel.

Ist jetzt die Gleichung:

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$$

gegeben, deren grösste Wurzel gleich 3 ist, während die beiden anderen gleich -1 sind, so suche man die grösste Wurzel mittelst einer rekurrenten Reihe, deren Beziehungsskala $(1, +5, +3)$ ist. Diese Reihe wird:

$$1,\ 1,\ 6,\ 14,\ 47,\ 135,\ 412,\ 1228,\ldots$$

Dieselbe giebt daher ziemlich schnell den Wert 3, weil die Potenzen der kleineren Wurzel -1 trotz der Multiplikation mit $n+1$ doch bald im Vergleich zu den Potenzen von 3 verschwinden.

Drittes Beispiel.

Ist aber die Gleichung:

$$x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$$

gegeben, deren Wurzeln 3, -2, -2 sind, so wird sich die grösste Wurzel viel langsamer ergeben. Denn man erhält die Reihe:

$$1,\ -1,\ 9,\ -5,\ 65,\ 3,\ 457,\ 347,\ 3345,\ 4915,\ldots,$$

welche man noch sehr weit fortsetzen müsste, ehe man daraus erkennen könnte, dass die aus ihr sich ergebende Wurzel gleich 3 sei.

§ 347.

Wenn drei Factoren des Nenners einander gleich sind, wenn derselbe also einen Factor $(1-pz)^3$ und noch andere $1-qz$, $1-rz, \ldots$ besitzt, so ist das allgemeine Glied der daraus entstehenden rekurrenten Reihe:

$$z^n\left(\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}\mathfrak{A}p^n + (n+1)\mathfrak{B}p^n + \mathfrak{C}p^n + \mathfrak{D}q^n + \mathfrak{E}r^n + \cdots\right).$$

Ist daher p die grösste Wurzel und die Zahl n so gross, dass die Potenzen $q^n, r^n \ldots$ im Vergleich zu p^n verschwinden, so erhält man aus der rekurrenten Reihe den Ausdruck:

$$\frac{\frac{1}{2}(n+2)(n+3)\mathfrak{A} + (n+2)\mathfrak{B} + \mathfrak{C}}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\mathfrak{A} + (n+1)\mathfrak{B} + \mathfrak{C}}\,p,$$

welcher aber nur dann den wahren Wert der Wurzel p darstellen wird, wenn n eine überaus, ja gleichsam unendlich grosse Zahl ist. Es ist aber jener Ausdruck gleich:

$$p + \frac{(n+2)\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\mathfrak{A} + (n+1)\mathfrak{B} + \mathfrak{C}}\,p.$$

Wäre aber p nicht die grösste Wurzel, so würde die Berechnung derselben noch weit mehr Schwierigkeiten verursachen. Daraus folgt, dass die Gleichungen, welche gleiche Wurzeln besitzen, auf diesem Wege mittelst der rekurrenten Reihen weit schwieriger aufzulösen sind, als wenn alle Wurzeln von einander verschieden sind.

§ 348.

Sehen wir jetzt zu, wie die ins Unendliche fortgesetzte rekurrente Reihe beschaffen sein muss, wenn der Nenner des Bruches **imaginäre** Factoren hat. Es besitze also der Nenner des Bruches:

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \cdots}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \cdots},$$

die reellen Factoren $1-qz$, $1-rz, \ldots$ und ausserdem den trinomischen Factor $1-2pz\cos\varphi+p^2z^2$, welcher zwei einfache imaginäre Factoren in sich schliesst. Ist nun die aus jenem Bruche entspringende rekurrente Reihe die folgende:

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots+Pz^n+Qz^{n+1}+\cdots,$$

so ist nach dem, was wir oben (im 13. Capitel) gehabt haben, der Coefficient:

$$P=\frac{\mathfrak{A}\sin(n+1)\varphi+\mathfrak{B}\sin n\varphi}{\sin\varphi}p^n+\mathfrak{C}q^n+\mathfrak{D}r^n+\cdots$$

Ist also die Zahl p kleiner als jede der übrigen $q, r, \ldots$, so dass also die grösste Wurzel der Gleichung:

$$x^m-\alpha x^{m-1}-\beta x^{m-2}-\gamma x^{m-3}-\cdots=0$$

reell ist, so findet man diese mittelst der rekurrenten Reihen ebenso, als ob gar keine imaginären Wurzeln vorhanden wären.

§ 349.

Die Berechnung der grössten reellen Wurzel kann also auch beim Vorhandensein imaginärer Wurzeln in derselben Weise wie vorher geschehen, falls diese letzteren so beschaffen sind, dass das Product aus je zweien, welche einen reellen Factor ergeben, nicht grösser ist als das Quadrat der grössten Wurzel. Sind aber zwei imaginäre Wurzeln von solcher Beschaffenheit vorhanden, dass ihr Product ebenso gross oder grösser ist als das Quadrat der grössten reellen Wurzel, so findet man auf die vorher angegebene Weise nichts, weil die Potenz p^n gegen dieselbe Potenz der grössten reellen Wurzel gehalten niemals verschwindet, wenn man auch die Reihe ins Unendliche fortsetzt. Um dies zu erläutern, wollen wir einige Beispiele anführen.

Erstes Beispiel.

Es soll die grösste Wurzel der Gleichung:

$$x^3-2x-4=0$$

gefunden werden.

Löst man diese Gleichung in die beiden Factoren:

$$(x-2)(x^2+2x+2)$$

auf, so folgt hieraus, dass dieselbe eine reelle Wurzel gleich 2 und noch zwei imaginäre Wurzeln hat, deren Product gleich 2, also kleiner als das Quadrat der reellen Wurzel ist. Man kann die letztere also auf dem vorher

beschriebenen Wege finden. Bildet man dazu die rekurrente Reihe mit der Beziehungsskala $(0, +2, +4)$, nämlich:

$$1,\ 0,\ 2,\ 4,\ 4,\ 16,\ 24,\ 48,\ 112,\ 192,\ 416,\ 832,\ \ldots,$$

so lässt sich aus derselben hinreichend deutlich die reelle Wurzel 2 erkennen.

Zweites Beispiel.

Es sei die Gleichung:

$$x^3-4x^2+8x-8=0$$

gegeben, bei welcher die eine reelle Wurzel gleich 2, das Product der beiden imaginären aber gleich 4, also gleich dem Quadrate der reellen Wurzel ist.

Man suche also die Wurzel mittelst einer rekurrenten Reihe und setze dazu, um sich die Rechnung zu erleichtern, $x=2y$. Dadurch entsteht die Gleichung:

$$y^3-2y^2+2y-1=0$$

und aus dieser die rekurrente Reihe:

$$1,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1,\ \ldots$$

Da nun in dieser Reihe stets dieselben Glieder wiederkehren, so lässt sich daraus weiter nichts schliessen, als dass die grösste Wurzel entweder nicht reell ist, oder dass zwei imaginäre Wurzeln vorhanden sind, deren Product entweder ebenso gross oder grösser ist, als das Quadrat der reellen Wurzel.

Drittes Beispiel.

Es sei jetzt die Gleichung:

$$x^3-3x^2+4x-2=0$$

gegeben, bei welcher die reelle Wurzel gleich 1, das Product der imaginären aber gleich 2 ist.

Bildet man gemäss der Beziehungsskala $(3, -4, 2)$ die Reihe:

$$1,\ 3,\ 5,\ 5,\ 1,\ -7,\ -15,\ -15,\ +1,\ 33,\ 65,\ 65,\ 1\ \ldots,$$

so sind in dieser die Glieder bald positiv, bald negativ, und man kann daher hieraus die reelle Wurzel 1 in keiner Weise erkennen. Dergleichen Unregelmässigkeiten sind allemal ein Kennzeichen dafür, dass die Wurzel, welche die Reihe liefern müsste, imaginär ist.

In der Tat ist hier das Product der imaginären Wuzeln grösser als das Quadrat der reellen Wurzel 1.

§ 350.

Ist also in dem allgemeinen Bruche das Product zweier imaginären Wurzeln p^2 grösser als das Quadrat irgend einer reellen Wurzel, so dass die Potenzen q^n, r^n, ..., wenn n eine unendlich grosse Zahl ist, im Vergleich zu p^n verschwinden, so wird:

$$P = \frac{\mathfrak{A}\sin(n+1)\varphi + \mathfrak{B}\sin n\varphi}{\sin\varphi} p^n,$$

$$Q = \frac{\mathfrak{A}\sin(n+2)\varphi + \mathfrak{B}\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} p^{n+1},$$

und somit:

$$\frac{Q}{P} = \frac{\mathfrak{A}\sin(n+2)\varphi + \mathfrak{B}\sin(n+1)\varphi}{\mathfrak{A}\sin(n+1)\varphi + \mathfrak{B}\sin n\varphi} p.$$

Dieser Ausdruck nimmt niemals einen constanten Wert an, wenn auch n ins Unendliche wächst, da die Sinus der Winkel stets sehr veränderlich bleiben, so dass sie bald positiv, bald negativ sind.

§ 351.

Wenn man indessen die beiden Brüche $\frac{R}{Q}$ und $\frac{S}{R}$ in derselben Weise bestimmt und daraus die Grössen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ eliminirt, wodurch zugleich die Zahl n aus der Rechnung wegfällt, so findet man:

$$Pp^2 + R = 2Qp\cos\varphi,$$

und daher:

$$\cos\varphi = \frac{Pp^2 + R}{2Qp}.$$

Ebenso wird:

$$\cos\varphi = \frac{Qp^2 + S}{2Rp}.$$

Durch Vergleichung dieser beiden Werte ergiebt sich:

$$p = \sqrt{\frac{R^2 - QS}{Q^2 - PR}},$$

und

$$\cos\varphi = \frac{QR - PS}{2\sqrt{(Q^2 - PR)(R^2 - QS)}}.$$

Wenn man daher die rekurrente Reihe bereits so weit fortgesetzt hat, dass die Potenzen der anderen Wurzeln im Vergleich zu p^n verschwinden, so kann man auch den trinomischen Factor $1 - 2pz\cos\varphi + p^2z^2$ auf diesem Wege bestimmen.

§ 352.

Da die dazu erforderliche Rechnung aber für Ungeübte Schwierigkeiten haben könnte, so wollen wir dieselbe vollständig hersetzen. Aus dem gefundenen Werte von $\frac{Q}{P}$ folgt:

$$\mathfrak{A}Pp\sin(n+2)\varphi + \mathfrak{B}Pp\sin(n+1)\varphi = \mathfrak{A}Q\sin(n+1)\varphi + \mathfrak{B}Q\sin n\varphi,$$

und hieraus:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{Q\sin n\varphi - Pp\sin(n+1)\varphi}{Pp\sin(n+2)\varphi - Q\sin(n+1)\varphi}.$$

Ebenso wird:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{R\sin(n+1)\varphi - Qp\sin(n+2)\varphi}{Qp\sin(n+3)\varphi - R\sin(n+2)\varphi}.$$

Setzt man diese beiden Werte einander gleich, so erhält man:

$$0 = \begin{cases} Q^2p\sin n\varphi\sin(n+3)\varphi - Q^2p\sin(n+1)\varphi\sin(n+2)\varphi \\ -QR\sin n\varphi\sin(n+2)\varphi + QR\sin(n+1)\varphi\sin(n+1)\varphi \\ -PQp^2\sin(n+1)\varphi\sin(n+3)\varphi + PQp^2\sin(n+2)\varphi\sin(n+2)\varphi. \end{cases}$$

Da aber

$$\sin a\sin b = \frac{1}{2}\cos(a-b) - \frac{1}{2}\cos(a+b)$$

ist, so entsteht hieraus die Gleichung:

$$0 = \frac{1}{2}Q^2p(\cos 3\varphi - \cos\varphi) + \frac{1}{2}QR(1 - \cos 2\varphi) + \frac{1}{2}PQp^2(1 - \cos 2\varphi),$$

und diese geht, wenn man sie durch $\frac{1}{2}Q$ dividirt, in die folgende über:

$$(Pp^2 + R)(1 - \cos 2\varphi) = Qp(\cos\varphi - \cos 3\varphi).$$

Nun ist aber:

$$\cos\varphi = \cos 2\varphi\cos\varphi + \sin 2\varphi\sin\varphi$$

und

$$\cos 3\varphi = \cos 2\varphi\cos\varphi - \sin 2\varphi\sin\varphi,$$

daher:

$$\cos\varphi - \cos 3\varphi = 2\sin 2\varphi\sin\varphi = 4\sin^2\varphi\cos\varphi$$

und

$$1 - \cos 2\varphi = 2\sin^2\varphi.$$

Folglich ist:

$$Pp^2 + R = 2Qp\cos\varphi,$$

also:

$$\cos\varphi = \frac{Pp^2 + R}{2Qp}.$$

Ebenso ist:

$$\cos\varphi = \frac{Qp^2 + S}{2Rp}.$$

Hieraus ergeben sich aber die oben angegebenen Werte:

$$p=\sqrt{\frac{R^2-QS}{Q^2-PR}},$$

und

$$\cos\varphi=\frac{QR-PS}{2\sqrt{(Q^2-PR)\,(R^2-QS)}}.$$

§ 353.

Wenn aber der Nenner des Bruches, aus welchem die rekurrente Reihe gebildet wird, mehrere einander gleiche trinomische Factoren besitzt, so geht aus der oben angegebenen Form des allgemeinen Gliedes hervor, dass alsdann die Berechnung der Wurzeln noch weit unsicherer wird. Ist indessen irgend eine reelle Wurzel bereits näherungsweise bekannt, so kann stets der Wert eben dieser Wurzel durch Transformation der Gleichung noch weit genauer gefunden werden. Setzt man nämlich x gleich der Summe aus y und jenem schon gefundenen Werte, und sucht man sodann die kleinste Wurzel der neuen Gleichung für y, so liefert dieselbe, wenn man sie zu jenem Werte addirt, den genauen Wert von x.

Beispiel.

Es sei die Gleichung:

$$x^3-3x^2+5x-4=0$$

gegeben, von welcher man daraus, dass für $x=1$:

$$x^3-3x^2+5x-4=-1$$

wird, weiss, dass die eine Wurzel nahezu gleich 1 ist.

Man setze also $x=1+y$, wodurch die neue Gleichung:

$$1-2y-y^3=0$$

entsteht. Bildet man hieraus, um die kleinste Wurzel zu finden, die rekurrente Reihe mit der Beziehungsskala $(2,\ 0,\ +1)$, nämlich:

$$1,\ 2,\ 4,\ 9,\ 20,\ 44,\ 97,\ 214,\ 472,\ 1041,\ 2296,\ \ldots,$$

so erhält man dadurch als kleinste Wurzel näherungsweise:

$$y=\frac{1041}{2296}=0{,}453397$$

und daher:

$$x=1{,}453397.$$

Diesen Wert dürfte man auf anderem Wege schwerlich so leicht und so genau finden können.

§ 354.

Wenn sich aber irgend eine rekurrente Reihe schliesslich mehr und mehr einer geometrischen Progression nähert, so lässt sich auch aus dem Fortschreitungsgesetz derselben unmittelbar erkennen, von welcher Gleichung der Quotient, welchen man durch Division irgend eines Gliedes durch das vorhergehende erhält, eine Wurzel ist. Es seien nämlich $P, Q, R, S, T, \ldots$ sehr weit vom Anfang entfernte Glieder einer rekurrenten Reihe, und von der Art, dass man sie als Glieder einer geometrischen Progression betrachten kann, und es sei ferner:

$$T=\alpha S+\beta R+\gamma Q+\delta P,$$

so dass $(\alpha,\ +\beta,\ +\gamma,\ +\delta)$ die Beziehungsskala der Reihe darstellt. Setzt man dann den Wert von $\frac{Q}{P}=x$, so wird $\frac{R}{P}=x^2$, $\frac{S}{P}=x^3$, $\frac{T}{P}=x^4$, und wenn man diese Werte in die eben angegebene Gleichung einsetzt, so wird:

$$x^4=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta,$$

woraus hervorgeht, dass der Quotient $\frac{Q}{P}$ schliesslich eine Wurzel der gefundenen Gleichung liefern wird. Eben dieses lehrt aber auch die vorhergehende Methode, und ferner, dass der Bruch $\frac{Q}{P}$ auch zugleich die grösste Wurzel der Gleichung darstellt.

§ 355.

Man kann dieses Verfahren, die Wurzeln der Gleichungen zu berechnen, auch dann noch zuweilen mit Vorteil anwenden, wenn die Anzahl der Glieder einer Gleichung unendlich ist. Um dies zu zeigen, sei die Gleichung:

$$\frac{1}{2}=z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120}-\frac{z^7}{5040}+\cdots$$

gegeben, deren kleinste Wurzel z den Bogen eines Winkels von 30^0, oder den sechsten Theil des halben Kreisumfanges darstellt. Bringt man diese Gleichung auf die Form:

$$1-2z+\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{60}+\frac{z^7}{2520}-\cdots=0,$$

und bildet man gemäss der ins Unendliche fortgehenden Beziehungsskala:

$$2,\ 0,\ -\frac{1}{3},\ 0,\ +\frac{1}{60},\ 0,\ -\frac{1}{2520},\ 0,\ \cdots,$$

die rekurrente Reihe:

$$1,\ 2,\ 4,\ \frac{23}{3},\ \frac{44}{3},\ \frac{1681}{60},\ \frac{2408}{45},\ \cdots,$$

so wird daraus näherungsweise:

$$z = \frac{1681 \cdot 45}{2408 \cdot 60} = \frac{1681 \cdot 3}{2408 \cdot 4} = \frac{5043}{9632} = 0{,}52356.$$

Aus dem bekannten Verhältnisse des Kreisumfanges zum Durchmesser ergiebt sich aber: $z = 0{,}523598$, so dass also die gefundene Wurzel nur um $\frac{3}{100000}$ von dem wahren Werte abweicht. Es ist jedoch das ein sehr vorteilhafter Umstand bei der gegebenen Gleichung, dass alle ihre Wurzeln reell sind, und dass die anderen Wurzeln sehr beträchtlich von der kleinsten verschieden sind. Da diese Bedingungen aber nur sehr selten bei Gleichungen mit unendlich vielen Gliedern erfüllt sind, so ist das angegebene Verfahren auch nur selten zur Berechnung ihrer Wurzeln brauchbar.

18. Capitel.

Von den Kettenbrüchen.

§ 356.

Nachdem ich in den vorhergehenden Capiteln sowohl über die unendlichen Reihen, als auch über die aus unendlich vielen Factoren bestehenden Producte gehandelt habe, glaube ich auch noch Einiges über die dritte Art unendlicher Ausdrücke, nämlich über die Kettenbrüche, hinzufügen zu müssen. Denn obwohl die Theorie dieser Brüche bisher noch wenig ausgebildet ist, so unterliegt es doch keinem Zweifel, dass man dereinst in der Analysis des Unendlichen einen sehr ausgedehnten Gebrauch davon machen wird. Die Proben, die ich bereits öfter davon gegeben habe, machen die Erfüllung dieser Erwartung in hohem Grade wahrscheinlich. Besonders aber gewährt die Untersuchung, die ich mir im gegenwärtigen Capitel anzustellen vorgenommen habe, der Arithmetik und der gemeinen Algebra nicht zu unterschätzende Hülfsmittel.

§ 357.

Ich verstehe aber unter einem Kettenbruche einen Bruch, dessen Nenner aus einer ganzen Zahl und einem andern Bruche besteht, dessen Nenner seinerseits wieder das Aggregat aus einer ganzen Zahl und einem Bruche ist, der wieder ebenso beschaffen ist. Die Reihe dieser Brüche kann sich dabei ins Unendliche erstrecken, oder auch an irgend einer Stelle abbrechen. Derartige Kettenbrüche sind z. B. die folgenden Ausdrücke:

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{f + \cdots}}}}} \quad \text{oder} \quad a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d + \cfrac{\delta}{e + \cfrac{\varepsilon}{f + \cdots}}}}}$$

In der ersten Form sind die Zähler der Brüche sämtlich gleich 1, und diesen Fall werden wir vorzugsweise betrachten, in der andern Form dagegen sind die Zähler der Brüche irgend welche Zahlen.

§ 358.

Nachdem wir so die Form dieser Kettenbrüche beschrieben haben, müssen wir zunächst sehen, wie man den Wert derselben in der gewöhnlichen Weise ausdrücken kann. Um diesen um so leichter zu finden, gehen wir schrittweise vor, indem wir jene Brüche zuerst beim ersten, dann beim zweiten, dann beim dritten Bruche u. s. w. abbrechen. Dadurch erhält man:

$$a = a$$

$$a + \frac{1}{b} = \frac{ab+1}{b}$$

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}} = \frac{abc + a + c}{bc + 1}$$

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}} = \frac{abcd + ab + ad + cd + 1}{bcd + b + d}$$

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e}}}} = \frac{abcde + abe + ade + cde + abc + a + c + e}{bcde + be + de + bc + 1}$$

u. s. w.

§ 359.

Obwohl sich bei diesen gewöhnlichen Brüchen das **Gesetz**, nach welchem die Zähler und Nenner aus den Buchstaben $a, b, c, d, \ldots$ gebildet werden, nicht so leicht erkennen lässt, so sieht man doch bei einiger Aufmerksamkeit bald, auf welche Art ein jeder dieser Brüche aus den vorhergehenden entsteht. Es ist nämlich jeder Zähler das Aggregat aus dem mit einem neuen Buchstaben multiplicirten letzten und dem einfach genommenen vorletzten Zähler. Eben dasselbe Gesetz befolgen die Nenner. Schreibt man daher die Buchstaben $a, b, c, d, \ldots$ der Reihe nach hin, so kann man daraus die gefundenen Brüche auf folgende Weise bilden:

$$\begin{array}{cccccc} a, & b, & c, & d, & e & \\ \frac{1}{0}, & \frac{a}{1}, & \frac{ab+1}{b}, & \frac{abc+a+c}{bc+1}, & \frac{abcd+ab+ad+cd+1}{bcd+b+d}, & \ldots, \end{array}$$

und zwar findet man hierbei den Zähler irgend eines Bruches, indem man den unmittelbar vorhergehenden mit dem darüber stehenden Index multiplicirt und zum Producte den vorletzten Zähler addirt. Dasselbe Gesetz gilt auch für die Nenner. Damit man aber diese Regel von Anfang an in Anwendung bringen könne, habe ich den Bruch $\frac{1}{0}$ vorangesetzt. Denn obwohl derselbe nicht aus dem Kettenbruche entsteht, so macht er doch das Fortschreitungsgesetz deutlicher. Es stellt aber jeder Bruch den Wert des Kettenbruches bis zu dem Buchstaben einschliesslich dar, welcher über dem unmittelbar vorhergehenden Bruche steht.

§ 360.

Ebenso ergiebt die andere Art der Kettenbrüche:

$$a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d + \cfrac{\delta}{e + \cfrac{\varepsilon}{f + \cdots}}}}},$$

je nachdem man sie an dieser oder jener Stelle abbricht, die folgenden Werte:

$$a = a$$

$$a + \frac{\alpha}{b} = \frac{ab+\alpha}{b}$$

$$a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c}} = \frac{abc + \beta a + \alpha c}{bc + \beta}$$

$$a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d}}} = \frac{abcd + \beta ad + \alpha cd + \gamma ab + \alpha\gamma}{bcd + \beta d + \gamma b}$$

u. s. w.,

und jeder dieser Brüche lässt sich aus den beiden vorhergehenden auf folgende Weise finden:

$$\begin{array}{ccccc} a, & b, & c, & d, & e \\ \frac{1}{0}, & \frac{a}{1}, & \frac{ab+\alpha}{b}, & \frac{abc+\beta a+\alpha c}{bc+\beta}, & \frac{abcd+\beta ad+\alpha cd+\gamma ab+\alpha\gamma}{bcd+\beta d+\gamma b} \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon. \end{array}$$

§ 361.

Man schreibe nämlich über die zu bildenden Brüche die Indices $a, b, c, d, \ldots$, unter dieselben aber die Indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ Ferner setze man an die erste Stelle den Bruch $\frac{1}{0}$, an die zweite aber $\frac{a}{1}$. Alsdann findet man jeden folgenden Bruch, indem man den Zähler des unmittelbar vorhergehenden mit dem darüber stehenden, den Zähler des vorletzten Bruches dagegen mit dem unter ihm stehenden Index multiplicirt und die Producte addirt; das Aggregat ist der Zähler des nächsten Bruches. Ebenso ist der Nenner desselben das Aggregat der Producte, welche man erhält, wenn man den Nenner des letzten Bruches mit dem darüber stehenden und den Nenner des vorletzten Bruches mit dem unter ihm stehenden Index multiplicirt. Ein jeder der so gefundenen Brüche aber stellt den Wert des Kettenbruches dar, wenn derselbe bis zu demjenigen Nenner einschliesslich fortgesetzt wird, welcher dem vorhergehenden Bruche überschrieben ist.

§ 362.

Wenn man daher die Reihe dieser Brüche soweit fortsetzt, als der Kettenbruch Indices giebt, so stellt der letzte Bruch den **wahren Wert** des Kettenbruches dar. Die vorhergehenden Brüche aber kommen diesem Werte immer näher und geben daher ein sehr geeignetes **Annäherungsverfahren** an die Hand.

Setzen wir nämlich den wahren Wert des Kettenbruches gleich x, also:

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\varepsilon}{e+\cdots}}}}=x,$$

so ist offenbar der erste Bruch $\frac{1}{0}$ grösser als x, der zweite $\frac{a}{1}$ aber kleiner als x, der dritte $a+\frac{\alpha}{b}$ wieder grösser, der vierte wiederum kleiner als x, und so geht es weiter, indem diese Brüche abwechselnd grösser und kleiner sind als x. Ferner aber ist ersichtlich, dass jeder Bruch dem wahren Werte von x näher kommt, als irgend einer der vorhergehenden, und man erhält daher auf diese Weise sehr schnell und bequem den Wert von x näherungsweise. Dies findet auch dann statt, wenn der Kettenbruch ins Unendliche fortgeht, wofern nur die Zähler $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ nicht zu sehr wachsen. Sind aber die Zähler sämtlich gleich 1, so ist die näherungsweise Berechnung mit gar keiner Schwierigkeit verbunden.

§ 363.

Damit man den Grund dieser Annäherung an den wahren Wert des Kettenbruches besser einzusehen vermöge, wollen wir die Unterschiede zwischen den verschiedenen Brüchen betrachten. Lässt man dabei den

ersten Bruch $\frac{1}{0}$ bei Seite, so ist der Unterschied zwischen dem zweiten und dritten gleich

$$\frac{\alpha}{b},$$

der Unterschied zwischen dem dritten und vierten gleich

$$\frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)},$$

der Unterschied zwischen dem vierten und fünften gleich

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)}$$

u. s. w. Es wird daher der **Wert** des Kettenbruches **durch** eine gewöhnliche **Reihe** von Gliedern dargestellt wie folgt:

$$x=a+\frac{\alpha}{b}-\frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)}+\frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)}-\cdots,$$

und diese Reihe bricht jederzeit ab, wenn der Kettenbruch nicht ins Unendliche fortgeht.

§ 364.

Wir haben somit ein Mittel gefunden, um einen Kettenbruch in eine Reihe von Gliedern zu verwandeln, deren Vorzeichen stets abwechseln, falls der erste Buchstabe a verschwindet.

Ist nämlich:

$$x=\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\delta}{e+\cfrac{\varepsilon}{f+\cdots}}}}},$$

so ist nach dem, was wir soeben gefunden haben:

$$x=\frac{\alpha}{b}-\frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)}+\frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)}$$
$$-\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{(bc+\beta)(bcde+\beta de+\gamma be+\delta bc+\beta\delta)}+\cdots$$

Wenn daher $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ keine beständig wachsenden Zahlen, sondern etwa sämtlich gleich 1 sind, während die Nenner $a, b, c, d, \ldots$ irgend welche positiven ganzen Zahlen bedeuten, so wird der Wert des Kettenbruches durch eine sehr stark convergirende Reihe von Gliedern darstellbar sein.

§ 365.

Wenn man dies wohl überlegt hat, so wird man auch **umgekehrt** eine jede Reihe von Gliedern mit abwechselnden Vorzeichen in einen Kettenbruch verwandeln, oder also einen Kettenbruch finden können, dessen Wert gleich der Summe der gegebenen Reihe ist.

Ist nämlich die Reihe:

$$x = A - B + C - D + E - F + \cdots$$

gegeben, so erhält man, wenn man die einzelnen Glieder derselben den entsprechenden Gliedern der aus dem Kettenbruche entstandenen Reihe gleich setzt:

$$A = \frac{\alpha}{b} \qquad \text{folglich:} \quad \alpha = Ab$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\beta}{bc + \beta} \qquad \text{„} \qquad \beta = \frac{Bbc}{A - B}$$

$$\frac{C}{B} = \frac{\gamma b}{bcd + \beta d + \gamma b} \qquad \text{„} \qquad \gamma = \frac{Cd(bc + \beta)}{b(B - C)}$$

$$\frac{D}{C} = \frac{\delta(bc + \beta)}{bcde + \beta de + \gamma be + \delta bc + \beta\delta} \qquad \text{„} \qquad \delta = \frac{De(bcd + \beta d + \gamma b)}{(bc + \beta)(C - D)}.$$

Da nun aber

$$\beta = \frac{Bbc}{A - B}$$

ist, so wird:

$$bc + \beta = \frac{Abc}{A - B},$$

und daher:

$$\gamma = \frac{ACcd}{(A - B)(B - C)}.$$

Ferner ist:

$$bcd + \beta d + \gamma b = (bc + \beta)d + \gamma b = \frac{Abcd}{A - B} + \frac{ACbcd}{(A - B)(B - C)} = \frac{ABbcd}{(A - B)(B - C)},$$

folglich:

$$\frac{bcd + \beta d + \gamma b}{bc + \beta} = \frac{Bd}{B - C},$$

und daher:

$$\delta = \frac{BDde}{(B - C)(C - D)}.$$

Ebenso findet man:

$$\varepsilon = \frac{CEef}{(C - D)(D - E)}$$

u. s. w.

§ 366.

Damit dies Gesetz um so deutlicher hervortrete, nehmen wir an, es sei:

$$\begin{aligned}
P &= b \\
Q &= bc + \beta \\
R &= bcd + \beta d + \gamma b \\
S &= bcde + \beta de + \gamma be + \delta bc + \beta\delta \\
T &= bcdef + \beta def + \gamma bef + \delta bcf + \varepsilon bcd + \varepsilon\beta d + \varepsilon\gamma b + \beta\delta f \\
V &= bcdefg + \beta defg + \gamma befg + \delta bcfg + \varepsilon bcdg + \varepsilon bcde + \varepsilon\beta dg + \varepsilon\beta de + \varepsilon\gamma bg \\
&\quad + \varepsilon\gamma be + \beta\delta fg + \varepsilon\delta bc + \varepsilon\beta\delta.
\end{aligned}$$

Dann ist nach dem Gesetz, nach welchem diese Ausdrücke gebildet werden:

$$\begin{aligned}
Q &= Pc + \beta \\
R &= Qd + \gamma P \\
S &= Re + \delta Q \\
T &= Sf + \varepsilon R \\
V &= Tg + \zeta S.
\end{aligned}$$

Es ist daher in diesen Buchstaben:

$$x = \frac{\alpha}{P} - \frac{\alpha\beta}{PQ} + \frac{\alpha\beta\gamma}{QR} - \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{RS} + \frac{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{ST} - \cdots$$

§ 367.

Da wir nun:

$$x = A - B + C - D + E - F + \cdots$$

gesetzt haben, so wird:

$$A = \frac{\alpha}{P}, \text{ also } \alpha = AP$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\beta}{Q}, \quad \text{„} \quad \beta = \frac{BQ}{A}$$

$$\frac{C}{B} = \frac{\gamma P}{R}, \quad \text{„} \quad \gamma = \frac{CR}{BP}$$

$$\frac{D}{C} = \frac{\delta Q}{S}, \quad \text{„} \quad \delta = \frac{DS}{CQ}$$

$$\frac{E}{D} = \frac{\varepsilon R}{T}, \quad \text{„} \quad \varepsilon = \frac{ET}{DR}$$

u. s. w.

Nimmt man aber die Differenzen, so hat man:

$$A-B=\frac{\alpha(Q-\beta)}{PQ}=\frac{\alpha c}{Q}=\frac{APc}{Q}$$
$$B-C=\frac{\alpha\beta(R-\gamma P)}{PQR}=\frac{\alpha\beta d}{PR}=\frac{BQd}{R}$$
$$C-D=\frac{\alpha\beta\gamma(S-\delta Q)}{QRS}=\frac{\alpha\beta\gamma e}{QS}=\frac{CRe}{S}$$
$$D-E=\frac{\alpha\beta\gamma\delta(T-\varepsilon R)}{RST}=\frac{\alpha\beta\gamma\delta f}{RT}=\frac{DSf}{T}$$

u. s. w.

Multiplicirt man je zwei aufeinanderfolgende Differenzen, so ergiebt sich:

$$(A-B)(B-C)=ABcd\cdot\frac{P}{R},\quad\text{und}\quad \frac{R}{P}=\frac{ABcd}{(A-B)(B-C)}$$
$$(B-C)(C-D)=BCde\cdot\frac{Q}{S},\quad \text{„}\quad \frac{S}{Q}=\frac{BCde}{(B-C)(C-D)}$$
$$(C-D)(D-E)=CDef\cdot\frac{R}{T},\quad \text{„}\quad \frac{T}{R}=\frac{CDef}{(C-D)(D-E)}$$

u. s. w.

Da nun

$$P=b,\ Q=\frac{ac}{A-B}=\frac{Abc}{A-B}$$

ist, so wird:

$$\alpha=Ab$$
$$\beta=\frac{Bbc}{A-B}$$
$$\gamma=\frac{ACcd}{(A-B)(B-C)}$$
$$\delta=\frac{BDde}{(B-C)(C-D)}$$
$$\varepsilon=\frac{CEef}{(C-D)(D-E)}$$

u. s. w.

§ 368.

Nachdem wir nun die Werte der Zähler α, β, γ, δ, ... gefunden haben, können wir die Nenner b, c, d, e, ... nach Belieben annehmen; doch ist es gut, dieselben so zu wählen, dass sie nicht allein selbst ganze Zahlen sind, sondern dass sich auch für α, β, γ, δ, ... ganze Werte

ergeben. Es hängt dies jedoch auch noch von der Beschaffenheit der Zahlen A, B, C, D, ... ab, je nachdem dieselben ganze oder gebrochene Zahlen sind. Nimmt man diese als ganze Zahlen an, so wird der gestellten Anforderung genügt, wenn man:

$$\begin{array}{lcl} b=1, & \text{also} & \alpha=A, \\ c=A-B, & \text{„} & \beta=B, \\ d=B-C, & \text{„} & \gamma=AC, \\ e=C-D, & \text{„} & \delta=BD, \\ f=D-E, & \text{„} & \varepsilon=CE, \end{array}$$

u. s. w.

setzt.

Ist demnach:

$$x=A-B+C-D+E-F+\cdots,$$

so kann der Wert von x durch einen Kettenbruch folgendermassen ausgedrückt werden:

$$x=\cfrac{A}{1+\cfrac{B}{A-B+\cfrac{AC}{B-C+\cfrac{BD}{C-D+\cfrac{CE}{D-E+\cdots}}}}}$$

§ 369.

Wenn jedoch alle Glieder der Reihe gebrochene Zahlen sind, so dass

$$x=\frac{1}{A}-\frac{1}{B}+\frac{1}{C}-\frac{1}{D}+\frac{1}{E}-\cdots$$

ist, so erhält man für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ... die folgenden Werte:

$$\alpha=\frac{b}{A}$$
$$\beta=\frac{Abc}{B-A}$$
$$\gamma=\frac{B^2cd}{(B-A)(C-B)}$$
$$\delta=\frac{C^2de}{(C-B)(D-C)}$$
$$\varepsilon=\frac{D^2ef}{(D-C)(E-D)}$$

u. s. w.

Wird daher

$$\begin{array}{lll} b = A, & \text{mithin} & \alpha = 1 \\ c = B - A, & \text{„} & \beta = A^2 \\ d = C - B, & \text{„} & \gamma = B^2 \\ e = D - C, & \text{„} & \delta = C^2 \\ & \text{u. s. w.} & \end{array}$$

gesetzt, so ergiebt sich für x der Kettenbruch:

$$x = \cfrac{1}{A + \cfrac{A^2}{B - A + \cfrac{B^2}{C - B + \cfrac{C^2}{D - C + \cdots}}}}$$

Erstes Beispiel.

Die unendliche Reihe:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Da hier

$$A = 1, \quad B = 2, \quad C = 3, \quad D = 4, \ldots$$

und der Wert der gegebenen Reihe gleich $\log 2$ ist, so wird:

$$\log 2 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{9}{1 + \cfrac{16}{1 + \cfrac{25}{1 + \cdots}}}}}}$$

Zweites Beispiel.

Die unendliche Reihe:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots,$$

worin π den Umfang eines Kreises mit dem Durchmesser 1 bedeutet, in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Setzt man für $A, B, C, D, \ldots$ die Zahlen 1, 3, 5, 7 ... ein, so entsteht der Bruch:

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cdots}}}}},$$

und hieraus durch Umkehrung desselben:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cdots}}}}$$

Diesen Ausdruck hat zuerst Brouncker für den Kreisumfang gegeben.

Drittes Beispiel.

Ist die unendliche Reihe:

$$x = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+2n} - \frac{1}{m+3n} + \cdots$$

gegeben, so lässt sich dieselbe, da hier

$$A = m, \quad B = m + n, \quad C = m + 2n, \ldots$$

ist, in den folgenden Kettenbruch verwandeln:

$$x = \cfrac{1}{m + \cfrac{m^2}{n + \cfrac{(m+n)^2}{n + \cfrac{(m+2n)^2}{n + \cfrac{(m+3n)^2}{n + \cdots}}}}},$$

und daraus wird durch Umkehrung desselben:

$$\frac{1}{x} - m = \cfrac{m^2}{n + \cfrac{(m+n)^2}{n + \cfrac{(m+2n)^2}{n + \cfrac{(m+3n)^2}{n + \cdots}}}}$$

Viertes Beispiel.

Da wir oben im § 178 gefunden haben, dass

$$\frac{\pi \cos \frac{m\pi}{n}}{n \sin \frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \cdots$$

ist, so hat man für den Kettenbruch:

$$A = m,\quad B = n-m,\quad C = n+m,\quad D = 2n-m,\ldots;$$

derselbe wird daher:

$$\frac{\pi\cos\frac{m\pi}{n}}{n\sin\frac{m\pi}{n}} = \cfrac{1}{m+\cfrac{m^2}{n-2m+\cfrac{(n-m)^2}{2m+\cfrac{(n+m)^2}{n-2m+\cfrac{(2n-m)^2}{2m+\cfrac{(2n+m)^2}{n-2m+\cdots}}}}}}$$

§ 370.

Wenn die Glieder der gegebenen Reihe Producte sind, bei denen die Anzahl der Factoren mehr und mehr wächst, wie in der Reihe:

$$x = \frac{1}{A} - \frac{1}{AB} + \frac{1}{ABC} - \frac{1}{ABCD} + \frac{1}{ABCDE} - \cdots,$$

so ergeben sich folgende Werte:

$$\alpha = \frac{b}{A}$$

$$\beta = \frac{bc}{B-1}$$

$$\gamma = \frac{Bcd}{(B-1)(C-1)}$$

$$\delta = \frac{Cde}{(C-1)(D-1)}$$

$$\varepsilon = \frac{Def}{(D-1)(E-1)}$$

u. s. w.

Setzt man daher:

$$\begin{array}{lcl} b = A, & \text{also} & \alpha = 1 \\ c = B-1, & „ & \beta = A \\ d = C-1, & „ & \gamma = B \\ e = D-1, & „ & \delta = C \\ f = E-1, & „ & \varepsilon = D \end{array}$$

u. s. w.,

so erhält man den Bruch:

$$x = \cfrac{1}{A+\cfrac{A}{B-1+\cfrac{B}{C-1+\cfrac{C}{D-1+\cfrac{D}{E-1+\cdots}}}}}$$

Erstes Beispiel.

Bezeichnet e die Zahl, deren hyperbolischer Logarithmus gleich 1 ist, so fanden wir oben:

$$\frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots$$

oder:

$$1 - \frac{1}{e} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

Setzt man daher:

$$A = 1,\quad B = 2,\quad C = 3,\quad D = 4,\ldots,$$

so lässt sich diese Reihe in den folgenden Kettenbruch verwandeln:

$$1 - \frac{1}{e} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\cdots}}}}}},$$

oder wenn man den Anfang durch Umkehrung des Bruches symmetrischer macht:

$$\frac{1}{e-1} = \cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\cdots}}}}}$$

Zweites Beispiel.

Ferner fanden wir für den Cosinus des Bogens, der dem Halbmesser gleich ist, die Reihe:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 12} - \frac{1}{2\cdot 12\cdot 30} + \frac{1}{2\cdot 12\cdot 30\cdot 56} - \cdots$$

Setzt man daher:

$$A = 1,\ B = 2,\ C = 12,\ D = 30,\ E = 56,\ \ldots,$$

und bezeichnet man den Cosinus des Bogens, der dem Halbmesser gleich ist, mit x, so wird:

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{11 + \cfrac{12}{29 + \cfrac{30}{55 + \cdots}}}}},$$

oder:

$$\frac{1}{x} - 1 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{11 + \cfrac{12}{29 + \cfrac{30}{55 + \cdots}}}}$$

§ 371.

Sind aber die Glieder der Reihe mit den Gliedern einer geometrischen Reihe verbunden, oder ist:

$$x = A - Bz + Cz^2 - Dz^3 + Ez^4 - Fz^5 + \cdots,$$

so wird:

$$\alpha = Ab$$

$$\beta = \frac{Bbcz}{A - Bz}$$

$$\gamma = \frac{ACcdz}{(A - Bz)(B - Cz)}$$

$$\delta = \frac{BDdez}{(B - Cz)(C - Dz)}$$

$$\varepsilon = \frac{CEefz}{(C - Dz)(D - Ez)}$$

u. s. w.

Setzt man daher jetzt:

$$\begin{array}{lll} b = 1, & \text{also} & \alpha = A \\ c = A - Bz, & \text{„} & \beta = Bz \\ d = B - Cz, & \text{„} & \gamma = ACz \\ e = C - Dz, & \text{„} & \delta = BDz \end{array}$$

u. s. w.,

so erhält man:

$$x = \cfrac{A}{1 + \cfrac{Bz}{A - Bz + \cfrac{ACz}{B - Cz + \cfrac{BDz}{C - Dz + \cdots}}}}$$

§ 372.

Um nun diesen Fall etwas allgemeiner zu machen, setzen wir:

$$x = \frac{A}{L} - \frac{By}{Mz} + \frac{Cy^2}{Nz^2} - \frac{Dy^3}{Oz^3} + \frac{Ey^4}{Pz^4} - \cdots$$

Hieraus ergeben sich durch Vergleichung mit dem Früheren die Werte:

$$\alpha = \frac{Ab}{L}$$

$$\beta = \frac{BLbcy}{AMz - BLy}$$

$$\gamma = \frac{ACM^2cdyz}{(AMz - BLy)(BNz - CMy)}$$

$$\delta = \frac{BDN^2deyz}{(BNz - CMy)(COz - DNy)}$$

u. s. w.

Setzt man daher:

$$\begin{array}{lll} b = L, & \text{also} & \alpha = A \\ c = AMz - BLy, & \text{„} & \beta = BL^2y \\ d = BNz - CMy, & \text{„} & \gamma = ACM^2yz \\ e = COz - DNy, & \text{„} & \delta = BDN^2yz \\ f = DPz - EOy, & \text{„} & \varepsilon = CEO^2yz \end{array}$$

u. s. w.,

so erhält man für die gegebene Reihe den folgenden Kettenbruch:

$$x = \cfrac{A}{L + \cfrac{BL^2y}{AMz - BLy + \cfrac{ACM^2yz}{BNz - CMy + \cfrac{BDN^2yz}{COz - DNy + \cdots}}}}$$

§ 373.

Hat endlich die gegebene Reihe die folgende Form:

$$x = \frac{A}{L} - \frac{ABy}{LMz} + \frac{ABCy^2}{LMNz^2} - \frac{ABCDy^3}{LMNOz^3} + \cdots,$$

so ergeben sich die folgenden Werte:

$$\alpha = \frac{Ab}{L}$$

$$\beta = \frac{Bbcy}{Mz - By}$$

$$\gamma = \frac{CMcdyz}{(Mz - By)\,(Nz - Cy)}$$

$$\delta = \frac{DNdeyz}{(Nz - Cy)\,(Oz - Dy)}$$

$$\varepsilon = \frac{EOefyz}{(Oz - Dy)\,(Pz - Ey)}$$

u. s. w.

Setzt man daher, um ganze Werte zu erhalten:

$$\begin{array}{lcl} b = Lz, & \text{also} & \alpha = Az \\ c = Mz - By, & „ & \beta = BLyz \\ d = Nz - Cy, & „ & \gamma = CMyz \\ e = Oz - Dy, & „ & \delta = DNyz \\ f = Pz - Ey, & „ & \varepsilon = EOyz \end{array}$$

u. s. w.,

so wird die gegebene Reihe durch folgenden Kettenbruch dargestellt:

$$x = \cfrac{Az}{Lz + \cfrac{BLyz}{Mz - By + \cfrac{CMyz}{Nz - Cy + \cfrac{DNyz}{Oz - Dy + \cdots}}}},$$

oder, wenn das Fortschreitungsgesetz gleich am Anfang deutlich hervortreten soll, durch folgenden:

$$\frac{Az}{x} - Ay = Lz - Ay + \cfrac{BLyz}{Mz - By + \cfrac{CMyz}{Nz - Cy + \cfrac{DNyz}{Oz - Dy + \cdots}}}.$$

§ 374.

Auf diese Weise lassen sich unzählig viele ins Unendliche sich erstreckende Kettenbrüche finden, deren genauer Wert angegeben werden kann. Da man nämlich nach dem, was eben auseinandergesetzt worden ist, alle unendlichen Reihen, deren Summen bekannt sind, hierzu

verwenden kann, so lässt sich eben auch der Wert des Kettenbruches, in welchen eine jede Reihe verwandelt werden kann, finden, indem derselbe gleich der Summe dieser Reihe ist. Die bereits angeführten Beispiele genügen, um dies zu zeigen. Indessen wäre es immerhin wünschenswert, ein Verfahren zu finden, mittelst dessen man den Wert eines gegebenen Kettenbruches unmittelbar darstellen könnte. Denn obwohl man einen Kettenbruch in eine unendliche Reihe, deren Wert sich nach bekannten Methoden finden lässt, verwandeln kann, so wird diese Reihe doch häufig so verwickelt, dass man ihre Summe, obschon dieselbe sehr einfach sein kann, entweder gar nicht oder nur mit grosser Mühe anzugeben im Stande ist.

§ 375.

Damit man deutlich erkenne, dass es solche Kettenbrüche giebt, deren Wert auf anderm Wege sehr leicht erhalten werden kann, obwohl die unendlichen Reihen, in welche sie sich verwandeln lassen, keinen Schluss auf ihren eigentlichen Wert gestatten, wollen wir den folgenden Kettenbruch betrachten:

$$x = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}},$$

dessen Nenner sämtlich einander gleich sind. Bilden wir daraus auf die oben beschriebene Weise die Brüche:

$$0,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2, \ldots,$$

$$\frac{1}{0},\ \frac{0}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{5},\ \frac{5}{12},\ \frac{12}{29},\ \frac{29}{70}, \ldots,$$

so entspringt hieraus die Reihe:

$$x = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 12} - \frac{1}{12 \cdot 29} + \frac{1}{29 \cdot 70} - \cdots,$$

oder, wenn man je zwei Glieder vereinigt,

$$x = \frac{2}{1 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 29} + \frac{2}{29 \cdot 169} + \cdots,$$

oder auch:

$$x = \frac{1}{2} - \frac{2}{2 \cdot 12} - \frac{2}{12 \cdot 70} - \cdots.$$

Ferner ist aus der ersten Reihe für x:

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{4} &- \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 12} - \frac{1}{2 \cdot 12 \cdot 29} + \cdots \\ + \frac{1}{4} &- \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 12} - \frac{1}{2 \cdot 12 \cdot 29} + \cdots \end{aligned}$$

und es wird auch:

$$x = \frac{1}{4} + \frac{1}{1\cdot 5} - \frac{1}{2\cdot 12} + \frac{1}{5\cdot 29} - \frac{1}{12\cdot 70} + \cdots$$

Obwohl nun diese Reihen sehr stark convergiren, so lässt sich doch aus ihrer Form kein Schluss auf ihre eigentliche Summe ziehen.

§ 376.

Für solche Kettenbrüche aber, in welchen die **Nenner** *entweder sämtlich einander* **gleich** *sind, oder doch ebendieselben Nenner immer* **wiederkehren**, so dass, wenn man vom Anfang einige Glieder abschneidet, der dadurch entstehende Bruch immer noch dem ganzen Bruche gleich bleibt, *giebt es ein sehr einfaches Mittel, ihren Wert zu bestimmen.* So ist in dem angeführten Beispiele, in welchem

$$x = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

war,

$$x = \frac{1}{2 + x},$$

daher:

$$x^2 + 2x = 1,$$

und

$$x + 1 = \sqrt{2},$$

so dass also der Wert dieses Kettenbruches gleich

$$\sqrt{2} - 1$$

ist. Die vorher aus dem Kettenbruche hergeleiteten gewöhnlichen Brüche nähern sich diesem Werte immer mehr, und zwar so schnell, dass man *schwerlich ein besseres Verfahren, diesen irrationalen Wert durch rationale Zahlen näherungsweise auszudrücken*, wird finden können. Es ist nämlich $\sqrt{2} - 1$ so nahe gleich $\frac{29}{70}$, dass der Fehler kaum merklich ist. Denn zieht man die Quadratwurzel aus, so erhält man:

$$\sqrt{2} - 1 = 0{,}414213562373,$$

während

$$\frac{29}{70} = 0{,}41428571428$$

ist, so dass also der Fehler erst die Hunderttausendstel betrifft.

§ 377.

Ebenso nun, wie die Kettenbrüche ein sehr bequemes Hülfsmittel an die Hand geben, um den Wert von $\sqrt{2}$ näherungsweise zu bestimmen, öffnen sie auch den Weg, auf welchem man zur *näherungsweisen Berechnung der* **Wurzeln** *anderer Zahlen* gelangt. Setzen wir zu dem Zwecke:

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cdots,}}}}}$$

so wird:

$$x = \frac{1}{a + x},$$

also:

$$x^2 + ax = 1,$$

oder:

$$x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{1 + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{a^2 + 4} - a}{2}.$$

Es kann also dieser Kettenbruch dazu dienen, den Wert der Quadratwurzel aus der Zahl $a^2 + 4$ zu bestimmen.

Setzt man daher für a der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3, 4, ..., und bringt man die Wurzeln auf ihre einfachste Gestalt, so findet man hierdurch $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{53}$, ... nämlich:

$$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots$$
$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \ldots = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ \ldots$$
$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{5},\ \frac{5}{12},\ \frac{12}{29},\ \frac{29}{70},\ \ldots = \sqrt{2} - 1$$

$$3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \ldots$$
$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{10},\ \frac{10}{33},\ \frac{33}{109},\ \frac{109}{360},\ \ldots = \frac{\sqrt{13} - 3}{2}$$

$$4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ \ldots$$
$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{4}{17},\ \frac{17}{72},\ \frac{72}{305},\ \frac{305}{1292},\ \ldots = \sqrt{5} - 2$$

u. s. w.

Dabei ist zu bemerken, dass die Annäherung um so schneller erfolgt, je grösser a ist. So ist in dem letzten Beispiel, in welchem $\sqrt{5}=2+\frac{305}{1292}$ ist, der Fehler kleiner als $\frac{1}{1292\cdot 5473}$, wo 5473 der Nenner des folgenden Bruches $\frac{1292}{5473}$ ist.

§ 378.

Auf diese Weise können aber nur die Wurzeln aus solchen Zahlen gefunden werden, die Summen zweier Quadrate sind. Um daher dieses Näherungsverfahren auch auf andere Zahlen auszudehnen, setzen wir:

$$x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cdots}}}}}}$$

Dann ist:

$$x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+x}}=\frac{b+x}{ab+1+ax},$$

also:

$$ax^2+abx=b,$$

folglich:

$$x=-\frac{1}{2}b\pm\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{b}{a}}=\frac{-ab+\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2a}.$$

Hieraus können bereits die **Quadratwurzeln aller Zahlen** gefunden werden. Ist z. B. $a=2$, $b=7$, so wird:

$$x=\frac{-14+\sqrt{14\cdot 18}}{4}=\frac{-7+3\sqrt{7}}{2}.$$

Diesen Wert von x stellen die folgenden Brüche näherungsweise dar:

$$2,\quad 7,\quad 2,\quad 7,\quad 2,\quad 7,\ldots$$

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{7}{15},\ \frac{15}{32},\ \frac{112}{239},\ \frac{239}{510},\ldots$$

Es ist daher nahezu:

$$\frac{-7+3\sqrt{7}}{2}=\frac{239}{510},\quad \text{also}\quad \sqrt{7}=\frac{2024}{765}=2{,}6457516,$$

während in Wirklichkeit

$$\sqrt{7}=2{,}64575131$$

ist. Es ist also hier der Fehler kleiner als $\frac{3}{10000000}$.

§ 379.

Geht man noch weiter vor, indem man

$$x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a+\cdots}}}}}}}$$

setzt, so ist:

$$x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+x}}}=\cfrac{1}{a+\cfrac{c+x}{bc+1+bx}}=\frac{bx+bc+1}{(ab+1)x+abc+a+c},$$

oder:

$$(ab+1)x^2+(abc+a-b+c)x=bc+1,$$

und daher:

$$x=\frac{-abc-a+b-c+\sqrt{(abc+a+b+c)^2+4}}{2(ab+1)}.$$

Hierbei ist die Grösse unter dem Wurzelzeichen wiederum die Summe zweier Quadrate. Man kann somit mittelst dieser Form auch nur die Wurzeln aus solchen Zahlen ziehen, aus denen man sie bereits nach der ersten Form berechnen konnte. Ebenso reicht die Form des Kettenbruches, in welcher die vier Nenner a, b, c, d fortwährend in derselben Reihenfolge wiederkehren nicht weiter als die zweite, in welcher nur zwei verschiedene Buchstaben auftraten, u. s. w.

§ 380.

Da also die Kettenbrüche mit so grossem Vorteil bei der Ausziehung der Quadratwurzel Anwendung finden, so können sie auch dazu dienen, die **quadratischen Gleichungen aufzulösen.** Dies geht aus der angeführten Rechnung schon von selbst hervor, da ja x aus einer quadratischen Gleichung bestimmt wird. Man kann aber auch leicht umgekehrt die Wurzel einer jeden quadratischen Gleichung durch einen Kettenbruch darstellen. Ist nämlich die Gleichung:

$$x^2 = ax + b$$

gegeben, so findet man hieraus:

$$x = a + \frac{b}{x}.$$

Setzt man daher wieder in dem letzten Gliede für x den eben gefundenen Wert ein, so wird:

$$x = a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{x}},$$

und indem man so weiter fortfährt, erhält man x dargestellt durch den Kettenbruch:

$$x = a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cdots}}},$$

der jedoch deshalb keinen so bequemen Gebrauch gestattet, weil die Zähler b keine Einheiten sind.

§ 381.

Um nun auch den Nutzen, den die Kettenbrüche in der Arithmetik gewähren, zu zeigen, bemerken wir zunächst, dass jeder gewöhnliche Bruch in einen Kettenbruch verwandelt werden kann. Ist nämlich der Bruch $x = \frac{A}{B}$ gegeben, worin $A > B$ sein möge, so dividire man A durch B; dies gebe den Quotienten a und den Rest C. Hierauf dividire man den vorhergehenden Divisor B durch den Rest C; der Quotient sei b und der Rest D. Durch diesen Rest dividire man wieder den vorhergehenden Divisor und setze diese Operation, welche man gewöhnlich bei der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Teilers zweier Zahlen A und B anwendet, so lange fort, bis sie von selbst aufhört.

Man rechne also nach folgendem Schema:

$$\begin{array}{lllll}
B \mid A = a & & & & \\
& C \mid B = b & & & \\
& & D \mid C = c & & \\
& & & E \mid D = d & \\
& & & & F \ldots
\end{array}$$

Dann folgt aus der besonderen Natur der Division:

$$\begin{array}{llll}
A = aB + C, & \text{also} & \frac{A}{B} = a + \frac{C}{B}, & \\
B = bC + D, & \text{„} & \frac{B}{C} = b + \frac{D}{C}, & \frac{C}{B} = \cfrac{1}{b + \cfrac{D}{C}}, \\
C = cD + E, & \text{„} & \frac{C}{D} = c + \frac{E}{D}, & \frac{D}{C} = \cfrac{1}{c + \cfrac{E}{D}}, \\
D = dE + F, & \text{„} & \frac{D}{E} = d + \frac{F}{E}, & \frac{E}{D} = \cfrac{1}{d + \cfrac{F}{E}},
\end{array}$$

u. s. w.

Setzt man daher jeden der folgenden Werte in den vorhergehenden ein, so ergiebt sich:

$$x = \frac{A}{B} = a + \frac{C}{B} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{D}{C}} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{E}{D}}}.$$

Es wird daher x schliesslich allein durch die Quotienten $a, b, c, d, \ldots$ auf folgende Art ausgedrückt:

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{f + \cdots}}}}}$$

Erstes Beispiel.

Ist der Bruch $\frac{1461}{59}$ gegeben, so wird derselbe durch einen Kettenbruch, dessen sämtliche Zähler gleich 1 sind, folgendermassen ausgedrückt. Führt man dieselbe Rechnung aus, mittelst welcher man den grössten gemeinschaftlichen Teiler der Zahlen 59 und 1461 zu suchen pflegt, nämlich:

$$\begin{array}{l}
59\,|\,1461 = 24 \\
\quad\ \ 118 \\
\quad\ \ \overline{281} \\
\quad\ \ 236 \\
\quad\ \ \overline{\ 45}\,|\,59 = 1 \\
\qquad\quad\ \ 45 \\
\qquad\quad\ \ \overline{14}\,|\,45 = 3 \\
\qquad\qquad\quad 42 \\
\qquad\qquad\quad \overline{\ 3}\,|\,14 = 4 \\
\qquad\qquad\qquad 12 \\
\qquad\qquad\qquad \overline{\ 2}\,|\,3 = 1 \\
\qquad\qquad\qquad\quad 2 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \overline{1}\,|\,2 = 2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \overline{0},
\end{array}$$

so erhält man aus den gefundenen Quotienten:

$$\frac{1461}{59} = 24 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}.$$

Zweites Beispiel.

Auch die **Decimalbrüche** können auf diese Weise umgeformt werden. Ist z. B. der Bruch:

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356 = \frac{141421356}{100000000}$$

gegeben, so führe man zuerst folgende Rechnung aus:

100000000	141421356	1
82842712	100000000	2
17157288	41421356	2
14213560	34314576	2
2943728	7106780	2
2438648	5887456	2
505080	1219324	2
418328	1010160	2
u. s. w.	209164	

Aus dieser Rechnung geht bereits hervor, dass die Nenner sämtlich gleich 2 sind, und dass daher

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cdots\cdot}}}}}$$

ist. Dies ist aber bereits aus dem Vorhergehenden (§ 376) bekannt.

Drittes Beispiel.

Besondere Berücksichtigung verdient aber die Zahl e, deren Logarithmus gleich 1, und die selbst gleich $e = 2{,}7182818284\,59$ ist. Hieraus wird:

$$\frac{e-1}{2} = 0{,}8591409142295.$$

Behandelt man diesen Decimalbruch auf die eben beschriebene Weise, so erhält man folgende Quotienten:

8591409142295	10000000000000	1
8451545146224	8591409142295	6
139863996071	1408590857704	10
139312557916	1398639960710	14
551438155	9950896994	18
550224488	9925886790	22
1213667	25010204	

u. s. w.

Setzt man diese Rechnung mit einem genaueren Werte von e noch weiter fort, so ergeben sich die Quotienten:

$$1,\ 6,\ 10,\ 14,\ 18,\ 22,\ 26,\ 30,\ 34, \ldots,$$

welche nach Weglassung des ersten eine arithmetische Progression bilden. Es ist daher:

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{\cdots}}}}}}}$$

Die genauere Untersuchung dieses Bruches lässt sich nur mittelst der Infinitesimalrechnung führen.

§ 382.

Da man also aus dergleichen Ausdrücken Brüche ableiten kann, welche dem wahren Werte des in Betracht gezogenen Ausdrucks immer näher kommen, so kann man auch dieses Verfahren anwenden, um **Decimalbrüche durch gewöhnliche Brüche näherungsweise auszudrücken.** Ja, wenn ein Bruch gegeben ist, in welchem Zähler und Nenner sehr grosse Zahlen sind, so kann man dafür Brüche finden, die in kleineren Zahlen ausgedrückt und dem gegebenen Bruche zwar nicht vollständig gleich, aber doch nur sehr wenig von ihm verschieden sind. Hierdurch findet eine leichte Erledigung die von Wallis behandelte Aufgabe, wonach man Brüche finden soll, welche, in kleineren Zahlen ausgedrückt, den Wert irgend eines gegebenen Bruches so genau darstellen, als es überhaupt durch Zahlen, die nicht grösser sind, geschehen kann. Die Brüche nämlich, die man auf dem angegebenen Wege erhält, nähern sich dem Werte des Kettenbruches, aus welchem sie abgeleitet werden, so sehr, dass es keine anderen, in nicht grösseren Zahlen ausgedrückten Brüche giebt, welche sich ihm mehr näherten.

Erstes Beispiel.

Es soll das Verhältnis des Durchmessers zum Kreisumfange durch so kleine Zahlen ausgedrückt werden, dass es auf genauere Art nicht geschehen kann, wofern man nicht grössere Zahlen anwendet.

Wenn man den bekannten Decimalbruch:

$$3{,}1415926535\ldots$$

auf die angegebene Weise durch fortgesetzte Division entwickelt, so erhält man folgende Quotienten:

$$3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1\ldots,$$

aus denen sodann die Brüche:

$$\frac{1}{0},\ \frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102},\ldots$$

entstehen. Schon der zweite Bruch zeigt an, dass sich der Durchmesser zum Umfange wie $1:3$ verhalte, und in der Tat lässt sich dieses Verhältnis nur durch grössere Zahlen genauer angeben. Der dritte Bruch giebt das von Archimedes angegebene Verhältnis $7:22$, der fünfte das des Metius, welches dem wahren Werte bereits so nahe kommt, dass der Fehler kleiner als $\frac{1}{113\cdot 33102}$ ist. Uebrigens sind die Brüche abwechselnd zu gross und zu klein.

Zweites Beispiel.

Es soll das Verhältnis eines Tages zum mittleren Sonnenjahre in möglichst kleinen Zahlen näherungsweise ausgedrückt werden.

Da dieses Jahr gleich 365 Tagen 5 Stunden 48 Minuten 55 Sekunden ist, so hat dasselbe, wenn man die Stunden, Minuten und Sekunden als Bruchteile eines Tages ausdrückt, $365\frac{20935}{86400}$ Tage. Man braucht daher nur diesen Bruch zu entwickeln, wodurch man folgende Quotienten:

$$4,\ 7,\ 1,\ 6,\ 1,\ 2,\ 2,\ 4,$$

und hieraus die Brüche:

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{7}{29},\ \frac{8}{33},\ \frac{55}{227},\ \frac{63}{260},\ \frac{181}{747},\ldots$$

erhält. Die Stunden, Minuten und Sekunden zusammengenommen, welche das Jahr mehr als 365 Tage enthält, machen also alle vier Jahre ungefähr einen Tag aus. Darauf beruht der **Julianische Kalender.** Genauer gerechnet, ist in 33 Jahren ein Ueberschuss von 8 Tagen, oder in 747 Jahren ein solcher von 181 Tagen, in 400 Jahren also ein Ueberschuss von 97 Tagen vorhanden. Während also der Julianische Kalender in diesem Zeitraum 100 Tage einschaltet, verwandelt der **Gregorianische** in je 400 Jahren drei Schaltjahre in gemeine Jahre.