14. Capitel.

Von der Vervielfachung und Teilung der Winkel.

§ 234.

Es bezeichne z einen Winkel oder einen Bogen eines Kreises vom Radius 1, ferner x seinen Sinus, y seinen Cosinus und t seine Tangente. Dann ist:

$$x^2+y^2=1 \text{ und } t=\frac{x}{y}\cdot$$

Da wir nun oben (§ 129) gesehen haben, dass sowohl die Sinus wie die Cosinus der Winkel $z, 2z, 3z, 4z, 5z, \ldots$ eine rekurrente Reihe bilden, deren Beziehungsskala $(2y, -1)$ ist, so erhalten wir zunächst für die Sinus der genannten Bogen folgende Formeln:

$$\begin{aligned}
\sin 0z &= 0\\
\sin 1z &= x\\
\sin 2z &= 2xy\\
\sin 3z &= 4xy^2-x\\
\sin 4z &= 8xy^3-4xy\\
\sin 5z &= 16xy^4-12xy^2+x\\
\sin 6z &= 32xy^5-32xy^3+6xy\\
\sin 7z &= 64xy^6-80xy^4+24xy^2-x\\
\sin 8z &= 128xy^7-192xy^5+80xy^3-8xy,
\end{aligned}$$

und hieraus schliesst man allgemein:

$$\sin nz$$
$$=x\Big(2^{n-1}y^{n-1}-(n-2)\,2^{n-3}y^{n-3}+\frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 2}2^{n-5}y^{n-5}$$
$$-\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3}2^{n-7}y^{n-7}+\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}2^{n-9}y^{n-9}-\cdots\Big)$$

§ 235.

Setzt man den Bogen $nz=s$, so wird:

$$\sin nz=\sin s=\sin(\pi-s)=\sin(2\pi+s)=\sin(3\pi-s)=\cdots,$$

da alle diese Sinus unter einander gleich sind. Hieraus erhalten wir mehrere Werte für x, nämlich:

$$\sin\frac{s}{n},\ \sin\frac{\pi-s}{n},\ \sin\frac{2\pi+s}{n},\ \sin\frac{3\pi-s}{n},\ \sin\frac{4\pi+s}{n},\ \ldots,$$

welche alle der gefundenen Gleichung genügen. Da sich nun so viele verschiedene Werte für x ergeben, als die Zahl n Einheiten enthält, so sind diese Werte die Wurzeln der gefundenen Gleichung. Man muss also wohl darauf achten, dass man lauter verschiedene Werte für die Wurzeln erhält, und dies wird man erreichen, wenn man von jenen Ausdrücken immer nur einen um den andern nimmt. Nachdem man nun nachträglich die Wurzeln der Gleichung erkannt hat, ergeben sich durch Vergleichung derselben mit den Gliedern der Gleichung sehr bemerkenswerte Eigenschaften. Da man aber zu diesem Zwecke eine Gleichung haben muss, in welcher nur noch x als Unbekannte vorkommt, so muss man für y seinen Wert $\sqrt{1-x^2}$ substituiren, und man wird daher zwei Fälle unterscheiden müssen, je nachdem nämlich n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

§ 236.

Es sei also zunächst n eine ungerade Zahl. Da die Bogen $-z, +z, +3z, +5z, \ldots$ eine Reihe bilden, deren Differenz $2z$ ist, und da der Cosinus dieser Differenz gleich $1-2x^2$ ist, so ist die Beziehungsskala für die Reihe der Sinus gleich $(2-4x^2, -1)$. Es ist daher:

$$\begin{aligned}
\sin(-z) &= -x\\
\sin z &= x\\
\sin 3z &= 3x-4x^3\\
\sin 5z &= 5x-20x^3+16x^5\\
\sin 7z &= 7x-56x^3+112x^5-64x^7\\
\sin 9z &= 9x-120x^3+432x^5-576x^7+256x^9,
\end{aligned}$$

folglich allgemein, wenn n eine ungerade Zahl ist:

$$\sin nz=nx-\frac{n(n^2-1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5-\frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}x^7+\cdots$$

Die Wurzeln dieser Gleichung aber sind:

$$\sin z,\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right),\ \sin\left(\frac{4\pi}{n}+z\right),\ \sin\left(\frac{6\pi}{n}+z\right),\ \sin\left(\frac{8\pi}{n}+z\right),\ldots$$

und ihre Anzahl ist gleich n.

§ 237.

Es besitzt daher die Gleichung:

$$0 = 1 - \frac{nx}{\sin nz} + \frac{n(n^2-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{x^3}{\sin nz} - \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\frac{x^5}{\sin nz} + \cdots \pm 2^{n-1}\frac{x^n}{\sin nz}$$

wobei das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die Zahl n um eine Einheit kleiner oder grösser ist als ein Vielfaches von 4, die Factoren:

$$\left(1 - \frac{x}{\sin z}\right)\left(1 - \frac{x}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)}\right)\left(1 - \frac{x}{\sin\left(\frac{4\pi}{n}+z\right)}\right)\cdots,$$

und hieraus folgt:

$$\frac{n}{\sin nz} = \frac{1}{\sin z} + \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{4\pi}{n}+z\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{6\pi}{n}+z\right)} + \cdots,$$

worin rechterseits n Glieder vorkommen, und ferner ist das Product aller

$$\mp\frac{2^{n-1}}{\sin nz} = \frac{1}{\sin z\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)\sin\left(\frac{4\pi}{n}+z\right)\sin\left(\frac{6\pi}{n}+z\right)\cdots}$$

oder:

$$\sin nz = \mp 2^{n-1}\sin z\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)\sin\left(\frac{4\pi}{n}+z\right)\sin\left(\frac{6\pi}{n}+z\right)\cdots$$

Endlich ist, weil in der Gleichung das Glied mit der Potenz x^{n-1} nicht vorkommt:

$$0 = \sin z + \sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{n}+z\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{n}+z\right) + \cdots$$

Erstes Beispiel.

Ist also $n = 3$, so erhält man die Gleichungen:

$$0 = \sin z + \sin(120^\circ + z) + \sin(240^\circ + z),$$

oder:

$$0 = \sin z + \sin(60^\circ - z) - \sin(60^\circ + z).$$

Ferner:

$$\frac{3}{\sin 3z} = \frac{1}{\sin z} + \frac{1}{\sin(120^\circ + z)} + \frac{1}{\sin(240^\circ + z)},$$

oder:

$$\frac{3}{\sin 3z} = \frac{1}{\sin z} + \frac{1}{\sin(60^\circ - z)} - \frac{1}{\sin(60^\circ + z)}.$$

Endlich:

$$\sin 3z = -4\sin z\sin(120^\circ + z)\sin(240^\circ + z) = 4\sin z\sin(60^\circ - z)\sin(60^\circ + z).$$

Es ist daher, wie bereits oben bemerkt worden:

$$\sin(60^\circ + z) = \sin z + \sin(60^\circ - z)$$
$$3\operatorname{cosec} 3z = \operatorname{cosec} z + \operatorname{cosec}(60^\circ - z) - \operatorname{cosec}(60^\circ + z).$$

Zweites Beispiel.

Setzt man $n = 5$, so erhält man folgende Gleichungen:

$$0 = \sin z + \sin\left(\frac{2}{5}\pi + z\right) + \sin\left(\frac{4}{5}\pi + z\right) + \sin\left(\frac{6}{5}\pi + z\right) + \sin\left(\frac{8}{5}\pi + z\right),$$

oder:

$$0 = \sin z + \sin\left(\frac{2}{5}\pi + z\right) + \sin\left(\frac{1}{5}\pi - z\right) - \sin\left(\frac{1}{5}\pi + z\right) - \sin\left(\frac{2}{5}\pi - z\right),$$

oder:

$$0 = \sin z + \sin\left(\frac{1}{5}\pi - z\right) - \sin\left(\frac{1}{5}\pi + z\right) - \sin\left(\frac{2}{5}\pi - z\right) + \sin\left(\frac{2}{5}\pi + z\right).$$

Ferner wird:

$$\frac{5}{\sin 5z} = \frac{1}{\sin z} + \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{5}\pi - z\right)} - \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{5}\pi + z\right)} - \frac{1}{\sin\left(\frac{2}{5}\pi - z\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{2}{5}\pi + z\right)}$$

und:

$$\sin 5z = 16\sin z\sin\left(\frac{1}{5}\pi - z\right)\sin\left(\frac{1}{5}\pi + z\right)\sin\left(\frac{2}{5}\pi - z\right)\sin\left(\frac{2}{5}\pi + z\right).$$

Drittes Beispiel.

Setzt man $n = 2m + 1$, so wird:

$$\begin{aligned}0 = \sin z &+ \sin\left(\frac{\pi}{n} - z\right) - \sin\left(\frac{\pi}{n} + z\right)\\ &- \sin\left(\frac{2\pi}{n} - z\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n} + z\right)\\ &+ \sin\left(\frac{3\pi}{n} - z\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{n} + z\right)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\pm \sin\left(\frac{m}{n}\pi - z\right) \mp \sin\left(\frac{m}{n}\pi + z\right),\end{aligned}$$

wobei die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem m eine ungerade oder eine gerade Zahl ist.

Die andere Gleichung ist dann:

$$\frac{n}{\sin nz}=\frac{1}{\sin z}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{n}-z\right)}-\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{n}+z\right)}$$

$$-\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}-z\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)}$$

$$+\frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{n}-z\right)}-\frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{n}+z\right)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\pm\frac{1}{\sin\left(\frac{m\pi}{n}-z\right)}\mp\frac{1}{\sin\left(\frac{m\pi}{n}+z\right)}.$$

Dieselbe lässt sich bequem auf die Cosekanten übertragen. Drittens endlich ist:

$$\sin nz = 2^{2m}\sin z \sin\left(\frac{\pi}{n}-z\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}+z\right)\times$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{n}-z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)\times$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{n}-z\right)\sin\left(\frac{3\pi}{n}+z\right)\times$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sin\left(\frac{m\pi}{n}-z\right)\sin\left(\frac{m\pi}{n}+z\right).$$

§ 238.

Es sei nunmehr n eine gerade Zahl. Da nun $y=\sqrt{1-x^2}$ und $\cos 2z = 1-2x^2$ ist, so ist die Beziehungsscala der Reihe der Sinus ebenso wie vorher gleich $(2-4x^2, -1)$, und es wird:

$$\sin 0z = 0$$

$$\sin 2z = 2x\sqrt{1-x^2}$$

$$\sin 4z = (4x-8x^3)\sqrt{1-x^2}$$

$$\sin 6z = (6x-32x^3+32x^5)\sqrt{1-x^2}$$

$$\sin 8z = (8x-80x^3+192x^5-128x^7)\sqrt{1-x^2},$$

und allgemein, wenn n eine gerade Zahl bedeutet:

$$\sin nz = \Big(nx-\frac{n(n^2-4)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}x^5$$

$$-\frac{n(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}x^7+\cdots\pm 2^{n-1}x^{n-1}\Big)\sqrt{1-x^2}.$$

§ 239.

Erhebt man diese Gleichung, um sie rational zu machen, ins Quadrat, so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$\sin^2 nz = n^2x^2+Px^4+Qx^6+\cdots-2^{2n-2}x^{2n}$$

oder:

$$x^{2n}-\cdots-\frac{n^2}{2^{2n-2}}x^2+\frac{1}{2^{2n-2}}\sin^2 nz = 0.$$

Als **Wurzeln** dieser Gleichung hat man sowohl die positiven als die negativen Werte zu nehmen. Dieselben sind also:

$$\pm\sin z,\quad \pm\sin\left(\frac{\pi}{n}-z\right),\quad \pm\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right),\quad \pm\sin\left(\frac{3\pi}{n}-z\right),\quad \pm\sin\left(\frac{4\pi}{n}+z\right)\ldots,$$

wenn man im Ganzen n solcher Ausdrücke nimmt. Da nun das letzte Glied gleich dem Product aus allen diesen Wurzeln ist, so erhält man, indem man auf beiden Seiten die Quadratwurzel auszieht:

$$\sin nz = \pm 2^{n-1}\sin z\sin\left(\frac{\pi}{n}-z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)\sin\left(\frac{3\pi}{n}-z\right)\cdots$$

Welches Vorzeichen jedesmal das richtige ist, wird aus den besonderen Fällen ersichtlich werden.

Beispiel.

Setzt man für n der Reihe nach die Zahlen $2, 4, 6\ldots$, und nimmt man dabei immer n verschiedene Sinus, so ergiebt sich:

$$\sin 2z = 2\sin z\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$$

$$\sin 4z = 8\sin z\sin\left(\frac{\pi}{4}-z\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+z\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$$

$$\sin 6z = 32\sin z\sin\left(\frac{\pi}{6}-z\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{6}-z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{6}+z\right)\sin\left(\frac{3\pi}{6}-z\right)$$

$$\sin 8z = 128\sin z\sin\left(\frac{\pi}{8}-z\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}+z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{8}-z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{8}+z\right)\sin\left(\frac{3\pi}{8}-z\right)\times$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{8}+z\right)\sin\left(\frac{4\pi}{8}-z\right).$$

§ 240.

Es ist also offenbar allgemein, wenn n eine gerade Zahl ist:

$$\begin{aligned}\sin nz = 2^{n-1} \sin z \sin\left(\frac{\pi}{n} - z\right) \sin\left(\frac{\pi}{n} + z\right) \times \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n} - z\right) \sin\left(\frac{2\pi}{n} + z\right) \times \\ \sin\left(\frac{3\pi}{n} - z\right) \sin\left(\frac{3\pi}{n} + z\right) \times \\ \dots\dots\dots\dots \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right).\end{aligned}$$

Wenn man aber diese Gleichung mit der früheren, in welcher n eine ungerade Zahl war, vergleicht, so findet zwischen beiden eine so grosse Aehnlichkeit statt, dass man sie beide in eine zusammenziehen kann. Es wird daher, mag nun n eine gerade oder eine ungerade Zahl bedeuten:

$$\begin{aligned}\sin nz = 2^{n-1} \sin z \sin\left(\frac{\pi}{n} - z\right) \sin\left(\frac{\pi}{n} + z\right) \times \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n} - z\right) \sin\left(\frac{2\pi}{n} + z\right) \times \\ \sin\left(\frac{3\pi}{n} - z\right) \sin\left(\frac{3\pi}{n} + z\right) \times \\ \dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

und zwar hat man dieses Product soweit fortzusetzen, bis man so viele Factoren hat, als die Zahl n Einheiten enthält.

§ 241.

Derartige Ausdrücke, welche die **Sinus der Vielfachen** eines Winkels in der **Form von Producten** darstellen, gewähren nicht nur grossen Nutzen, wenn es sich darum handelt, die Logarithmen der Sinus vielfacher Winkel zu bestimmen, sondern sie geben auch noch mehrere Ausdrücke für die Sinus von derselben Art, wie wir oben § 184 betrachtet haben. Es ist, wenn wir einige derselben zusammenstellen:

$$\begin{aligned}\sin z &= 1 \sin z \\ \sin 2z &= 2 \sin z \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) \\ \sin 3z &= 4 \sin z \sin\left(\frac{\pi}{3} - z\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + z\right) \\ \sin 4z &= 8 \sin z \sin\left(\frac{\pi}{4} - z\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + z\right) \sin\left(\frac{2\pi}{4} - z\right) \\ \sin 5z &= 16 \sin z \sin\left(\frac{\pi}{5} - z\right) \sin\left(\frac{\pi}{5} + z\right) \sin\left(\frac{2\pi}{5} - z\right) \sin\left(\frac{2\pi}{5} + z\right) \\ \sin 6z &= 32 \sin z \sin\left(\frac{\pi}{6} - z\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} + z\right) \sin\left(\frac{2\pi}{6} - z\right) \sin\left(\frac{2\pi}{6} + z\right) \sin\left(\frac{3\pi}{6} - z\right)\end{aligned}$$

u. s. w.

§ 242.

Da ferner $\frac{\sin 2nz}{\sin nz} = 2 \cos nz$ ist, so lassen sich auch die **Cosinus der Vielfachen** eines Winkels in ähnlicher Weise **als Producte** darstellen, nämlich:

$$\begin{aligned}\cos z &= 1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) \\ \cos 2z &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - z\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + z\right) \\ \cos 3z &= 4 \sin\left(\frac{\pi}{6} - z\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} + z\right) \sin\left(\frac{3\pi}{6} - z\right) \\ \cos 4z &= 8 \sin\left(\frac{\pi}{8} - z\right) \sin\left(\frac{\pi}{8} + z\right) \sin\left(\frac{3\pi}{8} - z\right) \sin\left(\frac{3\pi}{8} + z\right) \\ \cos 5z &= 16 \sin\left(\frac{\pi}{10} - z\right) \sin\left(\frac{\pi}{10} + z\right) \sin\left(\frac{3\pi}{10} - z\right) \sin\left(\frac{3\pi}{10} + z\right) \sin\left(\frac{5\pi}{10} - z\right),\end{aligned}$$

und allgemein:

$$\begin{aligned}\cos nz = 2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2n} - z\right) \sin\left(\frac{\pi}{2n} + z\right) \times \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2n} - z\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2n} + z\right) \times \\ \sin\left(\frac{5\pi}{2n} - z\right) \sin\left(\frac{5\pi}{2n} + z\right) \times \\ \dots\dots\dots\dots\dots,\end{aligned}$$

wobei das Product so lange fortzusetzen ist, bis die Anzahl der Factoren gleich n ist.

§ 243.

Dieselben Ausdrücke erhält man auch, wenn man die Cosinus der Vielfachen eines Winkels **von vornherein** betrachtet. Ist nämlich $\cos z = y$, so wird:

$$\begin{aligned}\cos 0z &= 1 \\ \cos 1z &= y \\ \cos 2z &= 2y^2 - 1 \\ \cos 3z &= 4y^3 - 3y \\ \cos 4z &= 8y^4 - 8y^2 + 1 \\ \cos 5z &= 16y^5 - 20y^3 + 5y \\ \cos 6z &= 32y^6 - 48y^4 + 18y^2 - 1 \\ \cos 7z &= 64y^7 - 112y^5 + 56y^3 - 7y,\end{aligned}$$

und allgemein:

$$\cos n\varepsilon = 2^{n-1} y^n - \frac{n}{1} 2^{n-3} y^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2} 2^{n-5} y^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3} 2^{n-7} y^{n-6} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} 2^{n-9} y^{n-8} - \cdots$$

Da nun

$$\cos n\varepsilon = \cos(2\pi - n\varepsilon) = \cos(2\pi + n\varepsilon) = \cos(4\pi \pm n\varepsilon) = \cos(6\pi \pm n\varepsilon) = \cdots$$

ist, so sind die Wurzeln dieser Gleichung:

$$\cos\varepsilon,\ \cos\left(\frac{2\pi}{n} \pm \varepsilon\right),\ \cos\left(\frac{4\pi}{n} \pm \varepsilon\right),\ \cos\left(\frac{6\pi}{n} \pm \varepsilon\right), \cdots,$$

und zwar sind hieraus alle diejenigen Werte für y herauszusuchen, welche von einander verschieden sind. Solcher verschiedenen Werte giebt es aber immer ebenso viele, als n Einheiten enthält.

§ 244.

Nun ist zunächst klar, dass mit alleiniger Ausnahme des Falles $n=1$ die **Summe** aller dieser Wurzeln stets gleich 0 ist, da in jener Gleichung ein Glied mit y^{n-1} nicht vorkommt. Es ist daher:

$$0 = \cos\varepsilon + \cos\left(\frac{2\pi}{n} - \varepsilon\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{n} + \varepsilon\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{n} - \varepsilon\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{n} + \varepsilon\right) + \cdots$$

wobei man so viele, dem Werte nach von einander verschiedene Glieder zu nehmen hat, als n Einheiten enthält. Diese Gleichung ist aber von selbst erfüllt, wenn n eine gerade Zahl ist, da alsdann immer zwei gleiche und entgegengesetzte Glieder vorkommen, die einander zerstören. Ziehen wir daher nur ungerade Zahlen n, die 1 ausgeschlossen, in Betracht, so wird, da $\cos v = -\cos(\pi - v)$ ist:

$$0 = \cos\varepsilon - \cos\left(\frac{\pi}{3} - \varepsilon\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} + \varepsilon\right)$$

$$0 = \cos\varepsilon - \cos\left(\frac{\pi}{5} - \varepsilon\right) - \cos\left(\frac{\pi}{5} + \varepsilon\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5} - \varepsilon\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5} + \varepsilon\right)$$

$$0 = \cos\varepsilon - \cos\left(\frac{\pi}{7} - \varepsilon\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7} + \varepsilon\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7} - \varepsilon\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7} + \varepsilon\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{7} - \varepsilon\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{7} + \varepsilon\right),$$

und allgemein, wenn n irgend eine ungerade Zahl bedeutet:

$$\begin{aligned} 0 = \cos\varepsilon &- \cos\left(\frac{\pi}{n} - \varepsilon\right) - \cos\left(\frac{\pi}{n} + \varepsilon\right) \\ &+ \cos\left(\frac{2\pi}{n} - \varepsilon\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{n} + \varepsilon\right) \\ &- \cos\left(\frac{3\pi}{n} - \varepsilon\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{n} + \varepsilon\right) \\ &+ \cos\left(\frac{4\pi}{n} - \varepsilon\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{n} + \varepsilon\right) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Hierin sind immer soviel Glieder zu nehmen, als die Zahl n Einheiten enthält. Ferner muss die Zahl n, wie bereits erwähnt, ungerade und grösser als 1 sein.

§ 245.

Was das **Product** aus allen diesen Wurzeln anlangt, so erhält man dafür verschiedene Ausdrücke, je nachdem n eine ungerade oder eine ungerademal gerade oder eine gerademal gerade Zahl ist. Es sind jedoch alle diese Ausdrücke in dem allgemeinen, im § 242 gefundenen Ausdrucke enthalten, wenn man jeden Sinus in den Cosinus verwandelt. Es ist nämlich:

$$\cos\varepsilon = 1 \cos\varepsilon$$

$$\cos 2\varepsilon = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon\right)$$

$$\cos 3\varepsilon = 4\cos\left(\frac{2\pi}{6} + \varepsilon\right)\cos\left(\frac{2\pi}{6} - \varepsilon\right)\cos\varepsilon$$

$$\cos 4\varepsilon = 8\cos\left(\frac{3\pi}{8} + \varepsilon\right)\cos\left(\frac{3\pi}{8} - \varepsilon\right)\cos\left(\frac{\pi}{8} + \varepsilon\right)\cos\left(\frac{\pi}{8} - \varepsilon\right)$$

$$\cos 5\varepsilon = 16\cos\left(\frac{4\pi}{10} + \varepsilon\right)\cos\left(\frac{4\pi}{10} - \varepsilon\right)\cos\left(\frac{2\pi}{10} + \varepsilon\right)\cos\left(\frac{2\pi}{10} - \varepsilon\right)\cos\varepsilon,$$

und allgemein:

$$\begin{aligned} \cos n\varepsilon = 2^{n-1} &\cos\left(\frac{n-1}{2n}\pi + \varepsilon\right)\cos\left(\frac{n-1}{2n}\pi - \varepsilon\right) \times \\ &\cos\left(\frac{n-3}{2n}\pi + \varepsilon\right)\cos\left(\frac{n-3}{2n}\pi - \varepsilon\right) \times \\ &\cos\left(\frac{n-5}{2n}\pi + \varepsilon\right)\cos\left(\frac{n-5}{2n}\pi - \varepsilon\right) \times \\ &\cos\left(\frac{n-7}{2n}\pi + \varepsilon\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot, \end{aligned}$$

wobei die Anzahl der Factoren stets gleich n ist.

§ 246.

Ist n eine **ungerade** Zahl und schreibt man die Gleichung in der Form:

$$0 = 1 \mp \frac{ny}{\cos nz} + \cdots ;$$

wobei das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n eine ungerade Zahl von der Form $4m+1$ oder eine von der Form $4m-1$ ist, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{\cos z} = \frac{1}{\cos z}$$

$$-\frac{3}{\cos 3z} = \frac{1}{\cos z} - \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3} - z\right)} - \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3} + z\right)}$$

$$+\frac{5}{\cos 5z} = \frac{1}{\cos z} - \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{5} - z\right)} - \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{5} + z\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{5} - z\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{5} + z\right)},$$

und allgemein, wenn man $n = 2m+1$ setzt:

$$\frac{n}{\cos nz} = \frac{2m+1}{\cos(2m+1)z} = \frac{1}{\cos\left(\frac{m}{n}\pi + z\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{m}{n}\pi - z\right)}$$

$$- \frac{1}{\cos\left(\frac{m-1}{n}\pi + z\right)} - \frac{1}{\cos\left(\frac{m-1}{n}\pi - z\right)}$$

$$+ \frac{1}{\cos\left(\frac{m-2}{n}\pi + z\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{m-2}{n}\pi - z\right)}$$

$$- \frac{1}{\cos\left(\frac{m-3}{n}\pi + z\right)} \cdots\cdots\cdots ,$$

wobei ebenfalls soviel Glieder zu nehmen sind, als n Einheiten enthält.

§ 247.

Da nun $\frac{1}{\cos v} = \sec v$ ist, so folgen hieraus bemerkenswerte Eigenschaften für die **Sekanten**, nämlich:

$$\sec z = \sec z$$

$$3 \sec 3z = \sec\left(\frac{\pi}{3} + z\right) + \sec\left(\frac{\pi}{3} - z\right) - \sec\left(\frac{0\pi}{3} + z\right)$$

$$5 \sec 5z = \sec\left(\frac{2\pi}{5} + z\right) + \sec\left(\frac{2\pi}{5} - z\right) - \sec\left(\frac{\pi}{5} + z\right) - \sec\left(\frac{\pi}{5} - z\right) + \sec\left(\frac{0\pi}{5} + z\right)$$

$$7 \sec 7z = \sec\left(\frac{3\pi}{7} + z\right) + \sec\left(\frac{3\pi}{7} - z\right) - \sec\left(\frac{2\pi}{7} + z\right) - \sec\left(\frac{2\pi}{7} - z\right)$$

$$+ \sec\left(\frac{\pi}{7} + z\right) + \sec\left(\frac{\pi}{7} - z\right) - \sec\left(\frac{0\pi}{7} + z\right),$$

und allgemein, wenn $n = 2m+1$ gesetzt wird:

$$n \sec nz = \sec\left(\frac{m}{n}\pi + z\right) + \sec\left(\frac{m}{n}\pi - z\right)$$

$$- \sec\left(\frac{m-1}{n}\pi + z\right) - \sec\left(\frac{m-1}{n}\pi - z\right)$$

$$+ \sec\left(\frac{m-2}{n}\pi + z\right) + \sec\left(\frac{m-2}{n}\pi - z\right)$$

$$- \sec\left(\frac{m-3}{n}\pi + z\right) - \sec\left(\frac{m-3}{n}\pi - z\right)$$

$$+ \sec\left(\frac{m-4}{n}\pi + z\right) + \cdots\cdots\cdots \pm \sec z.$$

§ 248.

Ebenso ergeben sich aus § 237 für die **Cosekanten** die Formeln:

$$\operatorname{cosec} z = \operatorname{cosec} z$$

$$3 \operatorname{cosec} 3z = \operatorname{cosec} z + \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{3} - z\right) - \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{3} + z\right)$$

$$5 \operatorname{cosec} 5z = \operatorname{cosec} z + \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{5} - z\right) - \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{5} + z\right) - \operatorname{cosec}\left(\frac{2\pi}{5} - z\right)$$

$$+ \operatorname{cosec}\left(\frac{2\pi}{5} + z\right)$$

$$7 \operatorname{cosec} 7z = \operatorname{cosec} z + \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{7} - z\right) - \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{7} + z\right) - \operatorname{cosec}\left(\frac{2\pi}{7} - z\right)$$

$$+ \operatorname{cosec}\left(\frac{2\pi}{7} + z\right) + \operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{7} - z\right) - \operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{7} + z\right),$$

und allgemein, wenn man $n = 2m+1$ setzt:

$$n \operatorname{cosec} nz = \operatorname{cosec} z + \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{n} - z\right) - \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{n} + z\right)$$

$$- \operatorname{cosec}\left(\frac{2\pi}{n} - z\right) + \operatorname{cosec}\left(\frac{2\pi}{n} + z\right)$$

$$+ \operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{n} - z\right) - \operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{n} + z\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mp \operatorname{cosec}\left(\frac{m\pi}{n} - z\right) \pm \operatorname{cosec}\left(\frac{m\pi}{n} + z\right),$$

wobei die oberen oder unteren Vorzeichen gelten, je nachdem m eine gerade oder ungerade Zahl ist.

§ 249.

Wie wir oben in § 133 gesehen haben, ist:

$$\cos nz \pm \sqrt{-1}\sin nz = (\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^n,$$

folglich:

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2}$$

$$\sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2\sqrt{-1}},$$

und daher:

$$\operatorname{tang} nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n\sqrt{-1} + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n\sqrt{-1}}$$

Setzt man nun:

$$\operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z} = t,$$

so wird:

$$\operatorname{tang} nz = \frac{(1+t\sqrt{-1})^n - (1-t\sqrt{-1})^n}{(1+t\sqrt{-1})^n\sqrt{-1} + (1-t\sqrt{-1})^n\sqrt{-1}},$$

und hieraus ergeben sich für die **Tangenten der Vielfachen** eines Winkels die folgenden Formeln:

$$\operatorname{tang} z = t$$

$$\operatorname{tang} 2z = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\operatorname{tang} 3z = \frac{3t-t^3}{1-3t^2}$$

$$\operatorname{tang} 4z = \frac{4t-4t^3}{1-6t^2+t^4}$$

$$\operatorname{tang} 5z = \frac{5t-10t^3+t^5}{1-10t^2+5t^4},$$

und allgemein:

$$\operatorname{tang} nz = \frac{nt - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}t^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}t^5 - \cdots}{1 - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}t^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}t^4 - \cdots}$$

Da nun:

$$\operatorname{tang}(nz) = \operatorname{tang}(\pi+nz) = \operatorname{tang}(2\pi+nz) = \operatorname{tang}(3\pi+nz) = \cdots$$

ist, so sind die Werte von t, welche der vorstehenden Gleichung Genüge leisten, die folgenden:

$$\operatorname{tang} z,\ \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{n}+z\right),\ \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{n}+z\right),\ \operatorname{tang}\left(\frac{3\pi}{n}+z\right),\cdots$$

Die Anzahl derselben ist stets gleich n.

§ 250.

Lässt man obige Gleichung mit 1 beginnen, so wird dieselbe:

$$0 = 1 - \frac{n}{\operatorname{tang} nz}t - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}t^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \operatorname{tang} nz}t^3 + \cdots$$

Vergleicht man nun die Coefficienten dieser Gleichung mit ihren Wurzeln, so wird:

$$n\cot nz = \cot z + \cot\left(\frac{\pi}{n}+z\right) + \cot\left(\frac{2\pi}{n}+z\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{n}+z\right) + \cot\left(\frac{4\pi}{n}+z\right) + \cdots + \cot\left(\frac{n-1}{n}\pi+z\right).$$

Ferner ist die Summe der Quadrate aller dieser **Cotangenten** gleich $\frac{n^2}{\sin^2 nz} - n$, und ebenso lassen sich auch die Summen der höheren Potenzen bestimmen. Setzt man aber für n bestimmte Zahlen, so erhält man:

$$\cot z = \cot z$$

$$2\cot 2z = \cot z + \cot\left(\frac{\pi}{2}+z\right)$$

$$3\cot 3z = \cot z + \cot\left(\frac{\pi}{3}+z\right) + \cot\left(\frac{2\pi}{3}+z\right)$$

$$4\cot 4z = \cot z + \cot\left(\frac{\pi}{4}+z\right) + \cot\left(\frac{2\pi}{4}+z\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{4}+z\right)$$

$$5\cot 5z = \cot z + \cot\left(\frac{\pi}{5}+z\right) + \cot\left(\frac{2\pi}{5}+z\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{5}+z\right) + \cot\left(\frac{4\pi}{5}+z\right).$$

§ 251.

Weil aber $\cot v = -\cot(\pi - v)$ ist, so gehen diese Formeln über in:

$$\cot z = \cot z$$

$$2\cot 2z = \cot z - \cot\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$$

$$3\cot 3z = \cot z - \cot\left(\frac{\pi}{3}-z\right) + \cot\left(\frac{\pi}{3}+z\right)$$

$$4\cot 4z = \cot z - \cot\left(\frac{\pi}{4}-z\right) + \cot\left(\frac{\pi}{4}+z\right) - \cot\left(\frac{2\pi}{4}-z\right)$$

$$5\cot 5z = \cot z - \cot\left(\frac{\pi}{5}-z\right) + \cot\left(\frac{\pi}{5}+z\right) - \cot\left(\frac{2\pi}{5}-z\right) + \cot\left(\frac{2\pi}{5}+z\right),$$

und allgemein:

$$
\begin{aligned}
n \cot nz = \cot z &- \cot\left(\frac{\pi}{n} - z\right) + \cot\left(\frac{\pi}{n} + z\right) \\
&- \cot\left(\frac{2\pi}{n} - z\right) + \cot\left(\frac{2\pi}{n} + z\right) \\
&- \cot\left(\frac{3\pi}{n} - z\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{n} + z\right) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

wobei die Reihe rechterseits so lange fortzusetzen ist, bis die Anzahl ihrer Glieder gleich n ist.

§ 252.

Lässt man aber die gefundene Gleichung mit der höchsten Potenz von t beginnen, so sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich n eine gerade oder ungerade Zahl ist. Es sei zunächst n eine ungerade Zahl, also $n = 2m + 1$, so ist:

$$
\begin{aligned}
& t - \operatorname{tang} z = 0 \\
& t^3 - 3t^2 \operatorname{tang} 3z - 3t + \operatorname{tang} 3z = 0 \\
& t^5 - 5t^4 \operatorname{tang} 5z - 10t^3 + 10t^2 \operatorname{tang} 5z + 5t - \operatorname{tang} 5z = 0,
\end{aligned}
$$

und allgemein:

$$
t^n - nt^{n-1} \operatorname{tang} nz - \cdots \mp \operatorname{tang} nz = 0.
$$

Hierin gilt das obere Zeichen, wenn m eine gerade, das untere dagegen, wenn m eine ungerade Zahl ist. Man erhält daher aus dem Coefficienten des zweiten Gliedes:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tang} z &= \operatorname{tang} z \\
3 \operatorname{tang} 3z &= \operatorname{tang} z + \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{3} + z\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{3} + z\right) \\
5 \operatorname{tang} 5z &= \operatorname{tang} z + \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{5} + z\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{5} + z\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{3\pi}{5} + z\right) + \operatorname{tang}\left(\ldots\right.
\end{aligned}
$$

u. s. w.

§ 253.

Da nun $\operatorname{tang} v = -\operatorname{tang}(\pi - v)$ ist, so lassen sich die Winkel, welche grösser als ein Rechter sind, auf solche zurückführen, welche kleiner als ein Rechter sind. Es ist demnach:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tang} z &= \operatorname{tang} z \\
3 \operatorname{tang} 3z &= \operatorname{tang} z - \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{3} - z\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{3} + z\right) \\
5 \operatorname{tang} 5z &= \operatorname{tang} z - \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{5} - z\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{5} + z\right) - \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{5} - z\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{5} \ldots\right. \\
7 \operatorname{tang} 7z &= \operatorname{tang} z - \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{7} - z\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{7} + z\right) - \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{7} - z\right) \\
&\quad + \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{7} + z\right) - \operatorname{tang}\left(\frac{3\pi}{7} - z\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{3\pi}{7} \ldots\right.
\end{aligned}
$$

und allgemein, wenn $n = 2m + 1$ ist:

$$
\begin{aligned}
n \operatorname{tang} nz = \operatorname{tang} z &- \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{n} - z\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{n} + z\right) \\
&- \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{n} - z\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{n} + z\right) \\
&- \operatorname{tang}\left(\frac{3\pi}{n} - z\right) + \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&- \operatorname{tang}\left(\frac{m\pi}{n} - z\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{m\pi}{n} + z\right).
\end{aligned}
$$

§ 254.

Ferner aber wird das **Product** aller dieser **Tangenten** gleich $\operatorname{tang} nz$, weil die Zweideutigkeit in Bezug auf das Vorzeichen wegen der abwechselnd geraden und ungeraden Anzahl der negativen Zeichen wegfällt. Es wird daher:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tang} z &= \operatorname{tang} z \\
\operatorname{tang} 3z &= \operatorname{tang} z \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{3} - z\right) \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{3} + z\right) \\
\operatorname{tang} 5z &= \operatorname{tang} z \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{5} - z\right) \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{5} + z\right) \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{5} - z\right) \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{5} + z\right),
\end{aligned}
$$

und allgemein, wenn $n = 2m + 1$ ist:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tang} nz = \operatorname{tang} z &\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{n} - z\right) \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{n} + z\right) \times \\
&\operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{n} - z\right) \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{n} + z\right) \times \\
&\operatorname{tang}\left(\frac{3\pi}{n} - z\right) \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\operatorname{tang}\left(\frac{m\pi}{n} - z\right) \operatorname{tang}\left(\frac{m\pi}{n} + z\right).
\end{aligned}
$$

§ 255.

Ist jetzt n eine gerade Zahl, und lässt man die Gleichung mit der höchsten Potenz anfangen, so ist:

$$
\begin{aligned}
& t^2 + 2t \cot 2z - 1 = 0 \\
& t^4 + 4t^3 \cot 4z - 6t^2 - 4t \cot 4z + 1 = 0,
\end{aligned}
$$

und allgemein, wenn $n = 2m$ ist:

$$
t^n + nt^{n-1} \cot nz - \cdots \mp 1 = 0,
$$

wobei das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem m eine ungerade oder eine gerade Zahl ist. Vergleicht man also die Wurzeln mit dem Coefficienten des zweiten Gliedes, so erhält man:

$$-2\cot 2z = \operatorname{tang} z + \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}+z\right)$$

$$-4\cot 4z = \operatorname{tang} z + \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+z\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{4}+z\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{3\pi}{4}+z\right)$$

$$-6\cot 6z = \operatorname{tang} z + \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{6}+z\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{6}+z\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{3\pi}{6}+z\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{4\pi}{6}+z\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{5\pi}{6}+z\right)$$

u. s. w.

§ 256.

Da $\operatorname{tang} v = -\operatorname{tang}(\pi - v)$ ist, so ergeben sich hieraus die folgenden Gleichungen:

$$2\cot 2z = -\operatorname{tang} z + \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$$

$$4\cot 4z = -\operatorname{tang} z + \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-z\right) - \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+z\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{4}-z\right)$$

$$6\cot 6z = -\operatorname{tang} z + \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{6}-z\right) - \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{6}+z\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{6}-z\right) - \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{6}+z\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{3\pi}{6}-z\right),$$

und allgemein, wenn $n = 2m$ ist:

$$n\cot nz = -\operatorname{tang} z + \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{n}-z\right) - \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{n}+z\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{n}-z\right) - \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{n}+z\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{3\pi}{n}-z\right) - \operatorname{tang}\left(\frac{3\pi}{n}+z\right) \cdots\cdots + \operatorname{tang}\left(\frac{m\pi}{n}-z\right)$$

§ 257.

Bei dieser Form fällt wiederum die Zweideutigkeit des Products aller Wurzeln weg, und es wird somit:

$$1 = \operatorname{tang} z \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$$

$$1 = \operatorname{tang} z \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-z\right) \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+z\right) \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{4}-z\right)$$

$$1 = \operatorname{tang} z \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{6}-z\right) \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{6}+z\right) \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{6}-z\right) \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{6}+z\right) \operatorname{tang}\left(\frac{3\pi}{6}-z\right)$$

u. s. w.

Der wahre Grund dieser Gleichungen fällt aber sofort von selbst in die Augen, da in ihnen stets je zwei Winkel vorkommen, die einander zu einem rechten Winkel ergänzen. Da nun das Product der Tangenten zweier solcher Winkel gleich 1 ist, so muss auch das Product aller gleich 1 sein.

§ 258.

Da die **Sinus** und **Cosinus** von **Winkeln**, welche in einer **arithmetischen** Progression fortgehen, eine rekurrente Reihe bilden, so kann man auch nach dem vorhergehenden Capitel die **Summe** von beliebig vielen solcher Sinus und Cosinus bestimmen. Sind die in arithmetischer Progression fortschreitenden Winkel die folgenden:

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ a+4b,\ a+5b,\ \ldots,$$

und soll zunächst die Summe der Sinus dieser unendlich vielen Winkel gefunden werden, so setze man:

$$s = \sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \sin(a+3b) + \cdots$$

Da diese Reihe eine rekurrente und ihre Beziehungsskala gleich $(2\cos b, -1)$ ist, so entspringt dieselbe aus der Entwicklung eines Bruches mit dem Nenner $1 - 2z\cos b + z^2$, wenn in derselben $z = 1$ gesetzt wird. Der Bruch selbst aber ist:

$$\frac{\sin a + z(\sin(a+b) - 2\sin a\cos b)}{1 - 2z\cos b + z^2},$$

und es wird somit, wenn man $z = 1$ setzt:

$$s = \frac{\sin a + \sin(a+b) - 2\sin a\cos b}{2 - 2\cos b} = \frac{\sin a - \sin(a-b)}{2(1-\cos b)},$$

weil

$$2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$$

ist. Da aber

$$\sin f - \sin g = 2\cos\frac{f+g}{2}\sin\frac{f-g}{2}$$

ist, so wird:

$$\sin a - \sin(a-b) = 2\cos\left(a - \frac{1}{2}b\right)\sin\frac{b}{2};$$

ferner ist:

$$1 - \cos b = 2\sin^2\frac{b}{2},$$

folglich:

$$s = \frac{\cos\left(a - \frac{1}{2}b\right)}{2\sin\frac{b}{2}}.$$

§ 259.

Hiernach kann nun auch die Summe einer endlichen Anzahl solcher Sinus, deren Bogen in arithmetischer Progression fortschreiten, angegeben werden. Es möge z. B. die Summe der Reihe:

$$\sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \sin(a+3b) + \cdots + \sin(a+nb)$$

gesucht werden. Da die Summe dieser Reihe, wenn man sich dieselbe ins Unendliche fortgesetzt denkt, bekannt, nämlich gleich $\dfrac{\cos\left(a-\frac{b}{2}\right)}{2\sin\frac{b}{2}}$ ist, so betrachte man die unendlich vielen Glieder, welche auf jenes letzte Glied folgen, nämlich:

$$\sin\left(a+(n+1)b\right) + \sin\left(a+(n+2)b\right) + \sin\left(a+(n+3)b\right) + \cdots$$

Da sich die Summe dieser Reihe gleich $\dfrac{\cos\left(a+(n+\frac{1}{2})b\right)}{2\sin\frac{1}{2}b}$ ergiebt, so erhält man, wenn man diesen Ausdruck von dem früheren abzieht, die gesuchte Summe. Es wird daher, wenn

$$s = \sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \sin(a+3b) + \cdots + \sin(a+nb)$$

gesetzt wird:

$$s = \frac{\cos(a-\frac{1}{2}b) - \cos\left(a+(n+\frac{1}{2})b\right)}{2\sin\frac{1}{2}b} = \frac{\sin(a+\frac{1}{2}nb)\sin\frac{1}{2}(n+1)b}{\sin\frac{1}{2}b}.$$

§ 260.

Ebenso erhält man, wenn man die Summe der **Cosinus** betrachtet und

$$s = \cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \cos(a+3b) + \cdots \text{ in inf.}$$

setzt:

$$s = \frac{\cos a + z\left(\cos(a+b) - 2\cos a \cos b\right)}{1 - 2z\cos b + z^2} \text{ für } z = 1.$$

Da nun

$$2\cos a \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

ist, so wird:

$$s = \frac{\cos a - \cos(a-b)}{2(1-\cos b)}.$$

Ferner ist aber:

$$\cos f - \cos g = 2\sin\frac{f+g}{2}\sin\frac{g-f}{2}, \text{ also } \cos a - \cos(a-b) = -2\sin(a-\tfrac{1}{2}b)\sin\tfrac{1}{2}b$$

und:

$$1 - \cos b = 2\sin^2\frac{b}{2};$$

folglich:

$$s = -\frac{\sin(a-\frac{1}{2}b)}{2\sin\frac{1}{2}b}.$$

Ebenso findet man die Summe der Reihe

$$\cos\left(a+(n+1)b\right) + \cos\left(a+(n+2)b\right) + \cos\left(a+(n+3)b\right) + \cdots \text{ in inf.}$$

gleich:

$$-\frac{\sin\left(a+(n+\frac{1}{2})b\right)}{2\sin\frac{1}{2}b}.$$

Zieht man demnach diesen Ausdruck von dem vorhergehenden ab, so bleibt die Summe der Reihe:

$$s = \cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \cos(a+3b) + \cdots + \cos(a+nb)$$

übrig, und zwar wird dieselbe:

$$s = \frac{-\sin(a-\frac{1}{2}b) + \sin\left(a+(n+\frac{1}{2})b\right)}{2\sin\frac{1}{2}b} = \frac{\cos(a+\frac{1}{2}nb)\sin\frac{1}{2}(n+1)b}{\sin\frac{1}{2}b}.$$

§ 261.

Mittelst der angegebenen Sätze lassen sich noch manche andere Fragen, die Sinus und Tangenten betreffend, erledigen; z. B. wie man die Summen der Quadrate oder der höheren Potenzen der Sinus oder der Tangenten findet. Indessen wollen wir uns hierbei nicht länger aufhalten, da sich dies aus den übrigen Coefficienten der obigen Gleichungen in ähnlicher Weise ergiebt.

In Bezug auf diese letzteren Summationen bemerken wir daher nur, dass sich eine jede **Potenz** des Sinus und Cosinus durch die einzelnen Sinus und Cosinus ausdrücken lässt. Um dies klarzustellen, wollen wir darauf noch kurz eingehen.

§ 262.

Wir führen hierzu aus dem Vorhergehenden (§ 130) die folgenden Hülfssätze an:

$$2\sin a \sin z = \cos(a-z) - \cos(a+z)$$
$$2\cos a \sin z = \sin(a+z) - \sin(a-z)$$
$$2\sin a \cos z = \sin(a+z) + \sin(a-z)$$
$$2\cos a \cos z = \cos(a-z) + \cos(a+z).$$

Hieraus findet man zunächst die **Potenzen der Sinus:**

$$\begin{aligned}
\sin z &= \sin z\\
2\sin^2 z &= 1-\cos 2z\\
4\sin^3 z &= 3\sin z-\sin 3z\\
8\sin^4 z &= 3-4\cos 2z+\cos 4z\\
16\sin^5 z &= 10\sin z-5\sin 3z+\sin 5z\\
32\sin^6 z &= 10-15\cos 2z+6\cos 4z-\cos 6z\\
64\sin^7 z &= 35\sin z-21\sin 3z+7\sin 5z-\sin 7z\\
128\sin^8 z &= 35-56\cos 2z+28\cos 4z-8\cos 6z+\cos 8z\\
256\sin^9 z &= 126\sin z-84\sin 3z+36\sin 5z-9\sin 7z+\sin 9z
\end{aligned}$$

u. s. w.

Das Gesetz, nach welchem hier die Coefficienten fortschreiten, stimmt mit demjenigen überein, welches die Coefficienten der Potenz eines Binoms befolgen; nur ist das bei den geraden Potenzen der Sinus vorhandene absolute Glied gleich der Hälfte des entsprechenden Coefficienten in der Entwicklung derselben Potenz des Binoms.

§ 263.

Auf ebendieselbe Weise lassen sich die **Potenzen der Cosinus** finden. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}
\cos z &= \cos z\\
2\cos^2 z &= 1+\cos 2z\\
4\cos^3 z &= 3\cos z+\cos 3z\\
8\cos^4 z &= 3+4\cos 2z+\cos 4z\\
16\cos^5 z &= 10\cos z+5\cos 3z+\cos 5z\\
32\cos^6 z &= 10+15\cos 2z+6\cos 4z+\cos 6z\\
64\cos^7 z &= 35\cos z+21\cos 3z+7\cos 5z+\cos 7z
\end{aligned}$$

u. s. w.

Hier ist in Bezug auf das Gesetz, nach welchem die Coefficienten fortschreiten, dasselbe zu sagen, wie bei den Sinus.

15. Capitel.

Von den Reihen, welche aus der Entwicklung von Producten entspringen.

§ 264.

Ist ein Product gegeben von der Form:

$$(1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)(1+\delta z)(1+\varepsilon z)(1+\zeta z)\cdots,$$

in welchem die Anzahl der Factoren sowohl endlich als unendlich gross sein kann, und giebt dasselbe, wenn die Multiplikation wirklich ausgeführt wird, die Reihe:

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+Fz^6+\cdots,$$

so bestimmen sich offenbar die Coefficienten $A, B, C, D, E\ldots$ derselben aus den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta\ldots$ derart, dass

$A=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\cdots=$ der Summe der einzelnen Zahlen,
$B=$ der Summe der Producte aus je zweien,
$C=$ der Summe der Producte aus je dreien,
$D=$ der Summe der Producte aus je vieren,
$E=$ der Summe der Producte aus je fünfen von diesen Zahlen u. s. w.

ist, bis man zu dem Producte aus allen gekommen ist. Man darf aber hierbei **keine** der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ **mit sich selbst verbinden.**

§ 265.

Setzt man also $z=1$, so ist das Product:

$$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)(1+\varepsilon)\cdots$$

gleich der Einheit vermehrt um die Reihe aller der Zahlen, welche aus den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\ldots$ dadurch gebildet werden können, dass man dieselben zunächst einzeln nimmt und darauf je zwei oder mehrere von einander **verschiedene** mit einander multiplicirt. Ergiebt sich dabei eine und dieselbe Zahl auf zwei oder mehrere Arten, so muss dieselbe auch in der in Rede stehenden Zahlenreihe zwei- oder mehreremal vorkommen.

§ 266.

Setzt man $z = -1$, so ist das Product:

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)(1-\varepsilon)\cdots$$

wiederum gleich der Einheit vermehrt um die Reihe aller der Zahlen, welche aus den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ dadurch gebildet werden können, dass man dieselben zunächst einzeln nimmt und sodann je zwei oder mehrere von einander verschiedene mit einander multiplicirt. Im Gegensatz zu dem Früheren findet aber hier der Unterschied statt, dass sowohl die einzelnen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$, als auch die Producte aus je dreien, fünfen, überhaupt aus einer **ungeraden** Anzahl derselben **negativ**, dagegen die Producte aus je zweien, vieren, sechsen und überhaupt aus einer **geraden** Anzahl von ihnen **positiv** genommen werden müssen.

§ 267.

Schreibt man für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ die sämtlichen **Primzahlen** 2, 3, 5, 7, 11, 13 ..., so wird das Product:

$$(1+2)(1+3)(1+5)(1+7)(1+11)(1+13)\cdots = P$$

gleich der Einheit vermehrt um die Reihe aller Zahlen, die entweder selbst Primzahlen sind oder durch Multiplikation aus verschiedenen Primzahlen entstanden sind. Es ist also:

$$P = 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 10 + 11 + 13 + 14 + 15 + 17 + \cdots$$

In dieser Reihe kommen alle natürlichen Zahlen vor mit Ausnahme der Potenzen und derer, die durch irgend eine Potenz teilbar sind. Es fehlen darin also die Zahlen 4, 8, 9, 12, 16, 18 ..., da dieselben teils Potenzen, wie 4, 8, 9, 16 ..., teils durch Potenzen teilbar sind, wie 12, 18 ...

§ 268.

Aehnlich verhält sich die Sache, wenn man an Stelle von $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ irgend welche **Potenzen** der **Primzahlen** setzt. Macht man nämlich:

$$P = \left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1+\frac{1}{5^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right)\cdots,$$

so wird nach Ausführung der Multiplikation:

$$P = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{11^n} + \cdots$$

und in diesen Brüchen treten **alle** Zahlen auf mit **Ausnahme** derer, die entweder selbst Potenzen, oder durch irgend eine Potenz teilbar sind. Denn da alle ganzen Zahlen entweder Primzahlen oder aus Primzahlen durch Multiplikation zusammengesetzt sind, so sind hier nur diejenigen Zahlen auszuschliessen, zu deren Bildung eine und dieselbe Primzahl zwei oder mehreremal gebraucht wird.

§ 269.

Nimmt man, wie im § 266, die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ negativ an, und setzt man:

$$P = \left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\cdots,$$

so ist:

$$P = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{11^n} - \frac{1}{13^n} + \frac{1}{14^n} + \frac{1}{15^n} - \cdots,$$

wobei ebenso wie vorher **die sämtlichen** Zahlen mit **Ausnahme** der Potenzen und der durch Potenzen teilbaren auftreten. Es haben jedoch die Primzahlen selbst, ferner die aus je drei, fünf und überhaupt aus einer ungeraden Anzahl derselben zusammengesetzten Zahlen das negative, dagegen die aus je zwei, vier, sechs und überhaupt aus einer geraden Anzahl von Primzahlen gebildeten Zahlen das positive Vorzeichen. So kommt z. B. in dieser Reihe das Glied $\frac{1}{30^n}$ vor, weil $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ ist und somit keine Potenz enthält. Dieses Glied $\frac{1}{30^n}$ hat aber das negative Vorzeichen, weil 30 das Product dreier Primzahlen ist.

§ 270.

Betrachten wir jetzt den folgenden Ausdruck:

$$\frac{1}{(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\gamma z)(1-\delta z)(1-\varepsilon z)\ldots},$$

welcher nach wirklicher Ausführung der Division die Reihe:

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + Fz^6 + \ldots$$

ergeben möge, so sind offenbar die Coefficienten $A, B, C, D, E \ldots$ derart aus den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ zusammengesetzt, dass

$A =$ der Summe dieser Zahlen einzeln genommen,
$B =$ der Summe der Producte aus je zweien,
$C =$ der Summe der Producte aus je dreien,
$D =$ der Summe der Producte aus je vieren von ihnen u. s. w. ist,

jedoch so, dass bei der Bildung dieser Summen diejenigen Producte, welche zwei oder mehrere gleiche Factoren enthalten, nicht ausgeschlossen werden dürfen.

§ 271.

Setzt man daher $z=1$, so wird der Ausdruck:

$$\frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)(1-\varepsilon)\ldots}$$

gleich der Einheit vermehrt um die Reihe aller Zahlen, welche aus $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \ldots$ dadurch gebildet werden können, dass man zunächst diese einzeln nimmt und sodann zwei oder mehrere mit einander multiplicirt, wobei auch gleiche Factoren nicht auszuschliessen sind.

Es unterscheidet sich demnach die frühere, im § 265 erhaltene Zahlenreihe von der jetzigen dadurch, dass in jener nur von einander verschiedene Factoren zur Bildung einer Zahl genommen werden durften, während in dieser ein und derselbe Factor zwei- oder mehreremal in einer Zahl vorkommen kann.

Es treten also hier überhaupt alle Zahlen auf, welche aus $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ durch Multiplikation entstehen können.

§ 272.

Es besteht daher die Reihe immer aus unendlich vielen Gliedern, mag nun die Anzahl der Factoren eine unendlich grosse oder eine endliche Zahl sein. So ist:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots,$$

in welcher Reihe alle Zahlen vorkommen, welche aus der 2 durch wiederholte Multiplikation entstehen, welche somit Potenzen von 2 sind. Ferner ist:

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}+\frac{1}{18}+\cdots,$$

und hierin kommen nur alle diejenigen Zahlen vor, welche durch Multiplikation aus 2 und 3 entstehen, oder welche nur durch 2 oder 3 theilbar sind.

§ 273.

Setzt man daher für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ alle Brüche, deren Zähler gleich 1 und deren Nenner die einzelnen Primzahlen sind, und macht man:

$$P=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right)\cdots},$$

so wird:

$$P=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots$$

Hierin kommen alle Zahlen vor, welche entweder selbst Primzahlen sind, oder aus diesen durch Multiplikation entstehen. Da nun aber überhaupt alle Zahlen entweder Primzahlen sind oder durch Multiplikation aus den Primzahlen gebildet werden, so müssen hier in den Nennern überhaupt alle ganzen Zahlen auftreten.

§ 274.

Dasselbe ist der Fall, wenn man irgend welche Potenzen der Primzahlen nimmt. Denn setzt man:

$$P=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\cdots},$$

so wird:

$$P=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{8^n}+\cdots,$$

wobei die natürlichen Zahlen ohne jede Ausnahme vorkommen. Wenn man aber in den Factoren den einzelnen Brüchen das positive Vorzeichen giebt, also

$$P=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1+\frac{1}{5^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right)\cdots}$$

setzt, so wird:

$$P=1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}-\frac{1}{8^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{10^n}-\cdots$$

Hierbei haben die Primzahlen das negative, die Producte aus zwei gleichen oder verschiedenen Primzahlen aber das positive Vorzeichen.

Ueberhaupt aber sind alle Zahlen, welche aus einer geraden Anzahl von Primfactoren gebildet sind, mit dem Vorzeichen $+$, diejenigen dagegen, welche aus einer ungeraden Anzahl von Primfactoren bestehen, mit dem Vorzeichen $-$ versehen. So hat das Glied $\frac{1}{240^n}$ das Vorzeichen $+$, weil $240=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5$ ist. Den Grund dieses Gesetzes erkennt man aus § 270, wenn man darin $z=-1$ setzt.

§ 275.

Wenn man das unmittelbar Vorhergehende mit dem Früheren verbindet, so hat man zwei Reihen, deren Product der Einheit gleich ist. Ist nämlich:

$$P = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\cdots}$$

und

$$Q = \left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\cdots,$$

so ist:

$$P = 1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{8^n}+\cdots$$

$$Q = 1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}+\frac{1}{10^n}-\frac{1}{11^n}+\cdots,$$

und es ist offenbar $PQ=1$.

§ 276.

Setzt man aber:

$$P = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1+\frac{1}{5^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right)\cdots},$$

und

$$Q = \left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1+\frac{1}{5^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right)\cdots,$$

so wird:

$$P = 1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}-\frac{1}{8^n}+\frac{1}{9^n}+\cdots$$

$$Q = 1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{10^n}+\frac{1}{11^n}+\cdots,$$

und es ist ebenfalls $PQ=1$. Ist demnach die Summe der einen Reihe bekannt, so kennt man auch die der anderen.

§ 277.

Umgekehrt kann man, wenn die **Summen** dieser **Reihen** bekannt sind, auch die Werte der **unendlichen Producte** angeben. Denn setzt man

$$M = 1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\cdots$$

$$N = 1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{6^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\cdots,$$

so ist:

$$M = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\cdots}$$

$$N = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{3^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{5^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{7^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{11^{2n}}\right)\cdots},$$

und hieraus folgt durch Division:

$$\frac{M}{N} = \left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1+\frac{1}{5^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right)\cdots$$

Ferner wird:

$$\frac{M^2}{N} = \frac{2^n+1}{2^n-1}\cdot\frac{3^n+1}{3^n-1}\cdot\frac{5^n+1}{5^n-1}\cdot\frac{7^n+1}{7^n-1}\cdot\frac{11^n+1}{11^n-1}\cdots$$

Kennt man daher M und N, so kann man nicht nur die Werte dieser Producte, sondern auch die Summen folgender Reihen angeben:

$$\frac{1}{M} = 1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}+\frac{1}{10^n}-\frac{1}{11^n}-\cdots$$

$$\frac{1}{N} = 1-\frac{1}{2^{2n}}-\frac{1}{3^{2n}}-\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{6^{2n}}-\frac{1}{7^{2n}}+\frac{1}{10^{2n}}-\frac{1}{11^{2n}}-\cdots$$

$$\frac{M}{N} = 1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{10^n}+\frac{1}{11^n}+\cdots$$

$$\frac{N}{M} = 1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}-\frac{1}{8^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{10^n}-\cdots,$$

und durch Combination dieser lassen sich noch viele andere ableiten.

Erstes Beispiel.

Es sei $n=1$. Da wir nun oben gezeigt haben, dass

$$\log\frac{1}{1-x} = x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}+\cdots$$

ist, so erhält man, wenn man $x=1$ setzt:

$$\log\frac{1}{1-1} = \log\infty = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots$$

Da aber der Logarithmus einer unendlich grossen Zahl selbst unendlich gross ist, so folgt:

$$M = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots=\infty.$$

Hieraus ergiebt sich wegen $\frac{1}{M}=\frac{1}{\infty}=0$:

$$0=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}-\cdots$$

Ferner ist:

$$M=\infty=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})\ldots},$$

folglich:

$$\infty=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{18}\cdots$$

$$0=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{16}{17}\cdot\frac{18}{19}\cdots$$

Nach § 167 ist ferner die Summe der Reihe:

$$N=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Daraus ergeben sich die Summen folgender Reihen:

$$\frac{6}{\pi^2}=1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{10^2}-\frac{1}{11^2}-\cdots$$

$$\infty=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots$$

$$0=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}-\cdots$$

Ferner erhält man die Producte:

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\cdot\frac{11^2}{11^2-1}\cdots,$$

oder

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{49}{48}\cdot\frac{121}{120}\cdot\frac{169}{168}\cdots,$$

und da $\frac{M}{N}=\infty$, also $\frac{N}{M}=0$ ist, so ist:

$$\infty=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{18}{17}\cdot\frac{20}{19}\cdots$$

oder

$$0=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{19}{20}\cdots$$

und

$$\infty=\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{6}{4}\cdot\frac{8}{6}\cdot\frac{12}{10}\cdot\frac{14}{12}\cdot\frac{18}{16}\cdot\frac{20}{18}\cdots$$

oder

$$0=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{10}\cdots$$

In diesen letzteren Brüchen sind mit Ausnahme des ersten die Zähler überall um 1 kleiner als die Nenner; addirt man aber den Zähler und Nenner eines jeden Bruches, so ergeben diese Summen die aufeinanderfolgenden Primzahlen 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19...

Zweites Beispiel.

Ist $n=2$, so ist aus § 167:

$$M=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

$$N=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{7^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}.$$

Hieraus folgen zunächst die Summen der Reihen:

$$\frac{6}{\pi^2}=1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{10^2}-\frac{1}{11^2}-\cdots$$

$$\frac{90}{\pi^4}=1-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{3^4}-\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}-\frac{1}{7^4}+\frac{1}{10^4}-\frac{1}{11^4}-\cdots$$

$$\frac{15}{\pi^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\cdots$$

$$\frac{\pi^2}{15}=1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}-\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{10^2}-\cdots$$

Ferner sind die Werte der folgenden Producte bekannt:

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\cdot\frac{11^2}{11^2-1}\cdots$$

$$\frac{\pi^4}{90}=\frac{2^4}{2^4-1}\cdot\frac{3^4}{3^4-1}\cdot\frac{5^4}{5^4-1}\cdot\frac{7^4}{7^4-1}\cdot\frac{11^4}{11^4-1}\cdots$$

$$\frac{15}{\pi^2}=\frac{2^2+1}{2^2}\cdot\frac{3^2+1}{3^2}\cdot\frac{5^2+1}{5^2}\cdot\frac{7^2+1}{7^2}\cdot\frac{11^2+1}{11^2}\cdots$$

oder

$$\frac{\pi^2}{15}=\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{25}{26}\cdot\frac{49}{50}\cdot\frac{121}{122}\cdot\frac{169}{170}\cdots$$

und

$$\frac{5}{2}=\frac{2^2+1}{2^2-1}\cdot\frac{3^2+1}{3^2-1}\cdot\frac{5^2+1}{5^2-1}\cdot\frac{7^2+1}{7^2-1}\cdot\frac{11^2+1}{11^2-1}\cdots$$

oder

$$\frac{5}{2}=\frac{5}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{61}{60}\cdot\frac{85}{84}\cdots$$

oder

$$\frac{3}{2}=\frac{5}{4}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{61}{60}\cdot\frac{85}{84}\cdots$$

In diesen Brüchen sind die Zähler um 1 grösser als die Nenner, und die Summen von Zähler und Nenner der einzelnen Brüche ergeben die Quadrate der aufeinanderfolgenden Primzahlen $3^2, 5^2, 7^2, 11^2 \ldots$

Drittes Beispiel.

Da wir bei unseren früheren Untersuchungen den Wert von M nur für den Fall bestimmen konnten, dass n eine gerade Zahl ist, so setzen wir weiter $n=4$. Dann ist:

$$M=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}.$$

$$N=1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{6^8}+\cdots=\frac{\pi^8}{9450}.$$

Hiernach lassen sich zunächst die Summen folgender Reihen angeben:

$$\frac{90}{\pi^4}=1-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{3^4}-\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}-\frac{1}{7^4}+\frac{1}{10^4}-\frac{1}{11^4}-\cdots$$

$$\frac{9450}{\pi^8}=1-\frac{1}{2^8}-\frac{1}{3^8}-\frac{1}{5^8}+\frac{1}{6^8}-\frac{1}{7^8}+\frac{1}{10^8}-\frac{1}{11^8}-\cdots$$

$$\frac{105}{\pi^4}=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{11^4}+\cdots$$

$$\frac{\pi^4}{105}=1-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}-\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}-\frac{1}{7^4}-\frac{1}{8^4}+\frac{1}{9^4}+\cdots$$

Ferner erhält man auch die Werte der Producte:

$$\frac{\pi^4}{90}=\frac{2^4}{2^4-1}\cdot\frac{3^4}{3^4-1}\cdot\frac{5^4}{5^4-1}\cdot\frac{7^4}{7^4-1}\cdot\frac{11^4}{11^4-1}\cdots$$

$$\frac{\pi^8}{9450}=\frac{2^8}{2^8-1}\cdot\frac{3^8}{3^8-1}\cdot\frac{5^8}{5^8-1}\cdot\frac{7^8}{7^8-1}\cdot\frac{11^8}{11^8-1}\cdots$$

$$\frac{105}{\pi^4}=\frac{2^4+1}{2^4}\cdot\frac{3^4+1}{3^4}\cdot\frac{5^4+1}{5^4}\cdot\frac{7^4+1}{7^4}\cdot\frac{11^4+1}{11^4}\cdots$$

und

$$\frac{7}{6}=\frac{2^4+1}{2^4-1}\cdot\frac{3^4+1}{3^4-1}\cdot\frac{5^4+1}{5^4-1}\cdot\frac{7^4+1}{7^4-1}\cdot\frac{11^4+1}{11^4-1}\cdots$$

oder

$$\frac{35}{34}=\frac{41}{40}\cdot\frac{313}{312}\cdot\frac{1201}{1200}\cdot\frac{7321}{7320}\cdots$$

In diesen Brüchen sind die Zähler um 1 grösser als die Nenner; addirt man aber in jedem Bruche Zähler und Nenner, so erhält man die vierten Potenzen der Primzahlen 3, 5, 7, 11 ...

§ 278.

Da wir nun die Summe der Reihe:

$$M=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\cdots$$

auch durch ein Product dargestellt haben, so kann man bequem zu den Logarithmen übergehen. Denn da

$$M=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\cdots}$$

ist, so wird:

$$\log M=-\log\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-\log\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\log\left(1-\frac{1}{5^n}\right)-\log\left(1-\frac{1}{7^n}\right)-\cdots,$$

und hieraus folgt, wenn man sich der hyperbolischen Logarithmen bedient:

$$\begin{aligned}\log M=&+1\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\cdots\right)\\&+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\frac{1}{11^{2n}}+\cdots\right)\\&+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{3n}}+\frac{1}{3^{3n}}+\frac{1}{5^{3n}}+\frac{1}{7^{3n}}+\frac{1}{11^{3n}}+\cdots\right)\\&+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{4n}}+\frac{1}{3^{4n}}+\frac{1}{5^{4n}}+\frac{1}{7^{4n}}+\frac{1}{11^{4n}}+\cdots\right)\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Setzt man ferner:

$$N=1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{6^{2n}}+\cdots,$$

so dass

$$N=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{3^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{5^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{7^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{11^{2n}}\right)\cdots}$$

ist, so wird, wenn man die hyperbolischen Logarithmen nimmt:

$$\log N = +1\left(\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\frac{1}{11^{2n}}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{4n}}+\frac{1}{3^{4n}}+\frac{1}{5^{4n}}+\frac{1}{7^{4n}}+\frac{1}{11^{4n}}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{6n}}+\frac{1}{3^{6n}}+\frac{1}{5^{6n}}+\frac{1}{7^{6n}}+\frac{1}{11^{6n}}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{8n}}+\frac{1}{3^{8n}}+\frac{1}{5^{8n}}+\frac{1}{7^{8n}}+\frac{1}{11^{8n}}+\cdots\right)$$
$$+\cdots\cdots\cdots$$

Verbindet man diese beiden Gleichungen, so folgt:

$$\log M-\frac{1}{2}\log N = +1\left(\frac{1}{2^{n}}+\frac{1}{3^{n}}+\frac{1}{5^{n}}+\frac{1}{7^{n}}+\frac{1}{11^{n}}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{3n}}+\frac{1}{3^{3n}}+\frac{1}{5^{3n}}+\frac{1}{7^{3n}}+\frac{1}{11^{3n}}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^{5n}}+\frac{1}{3^{5n}}+\frac{1}{5^{5n}}+\frac{1}{7^{5n}}+\frac{1}{11^{5n}}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2^{7n}}+\frac{1}{3^{7n}}+\frac{1}{5^{7n}}+\frac{1}{7^{7n}}+\frac{1}{11^{7n}}+\cdots\right)$$
$$+\cdots\cdots\cdots$$

§ 279.

Ist $n=1$, so wird:

$$M = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots = \log\infty$$

und

$$N=\frac{\pi^2}{6};$$

es wird also auch:

$$\log(\log\infty)-\frac{1}{2}\log\frac{\pi^2}{6} = +1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{3}}+\frac{1}{3^{3}}+\frac{1}{5^{3}}+\frac{1}{7^{3}}+\frac{1}{11^{3}}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^{5}}+\frac{1}{3^{5}}+\frac{1}{5^{5}}+\frac{1}{7^{5}}+\frac{1}{11^{5}}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2^{7}}+\frac{1}{3^{7}}+\frac{1}{5^{7}}+\frac{1}{7^{7}}+\frac{1}{11^{7}}+\cdots\right)$$
$$+\cdots\cdots\cdots$$

Nun haben aber diese Reihen mit Ausnahme der ersten nicht nur endliche Summen, sondern sie geben auch alle zusammengenommen eine endliche und sogar ziemlich kleine Summe; es muss daher notwendig die Summe der ersten Reihe $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots$ unendlich gross sein. Dieselbe ist nämlich um eine hinlänglich kleine Grösse kleiner als der hyperbolische Logarithmus der Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots$

§ 280.

Ist $n=2$, so ist $M=\frac{\pi^2}{6}$ und $N=\frac{\pi^4}{90}$; mithin:

$$2\log\pi-\log 6 = 1\left(\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{3^{2}}+\frac{1}{5^{2}}+\frac{1}{7^{2}}+\frac{1}{11^{2}}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{4}}+\frac{1}{3^{4}}+\frac{1}{5^{4}}+\frac{1}{7^{4}}+\frac{1}{11^{4}}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{6}}+\frac{1}{3^{6}}+\frac{1}{5^{6}}+\frac{1}{7^{6}}+\frac{1}{11^{6}}+\cdots\right)$$
$$+\cdots\cdots\cdots$$

$$4\log\pi-\log 90 = +1\left(\frac{1}{2^{4}}+\frac{1}{3^{4}}+\frac{1}{5^{4}}+\frac{1}{7^{4}}+\frac{1}{11^{4}}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{8}}+\frac{1}{3^{8}}+\frac{1}{5^{8}}+\frac{1}{7^{8}}+\frac{1}{11^{8}}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+\frac{1}{7^{12}}+\frac{1}{11^{12}}+\cdots\right)$$
$$+\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2}\log\frac{5}{2} = +1\left(\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{3^{2}}+\frac{1}{5^{2}}+\frac{1}{7^{2}}+\frac{1}{11^{2}}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{6}}+\frac{1}{3^{6}}+\frac{1}{5^{6}}+\frac{1}{7^{6}}+\frac{1}{11^{6}}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\frac{1}{7^{10}}+\frac{1}{11^{10}}+\cdots\right)$$
$$+\cdots\cdots\cdots$$

§ 281.

Obgleich das Gesetz, nach welchem die Primzahlen fortschreiten, nicht bekannt ist, so kann man doch ohne Schwierigkeit die Summen derartiger Reihen, wenn darin höhere Potenzen vorkommen, näherungsweise bestimmen.

Ist nämlich:

$$M = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \cdots$$

und

$$S = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \cdots,$$

so ist:

$$S = M - 1 - \frac{1}{4^n} - \frac{1}{6^n} - \frac{1}{8^n} - \frac{1}{9^n} - \frac{1}{10^n} - \cdots;$$

und da

$$\frac{M}{2^n} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{12^n} + \cdots$$

ist, so wird:

$$S = M - \frac{M}{2^n} - 1 + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{9^n} - \frac{1}{15^n} - \frac{1}{21^n} - \cdots$$

$$= (M-1)\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{9^n} - \frac{1}{15^n} - \frac{1}{21^n} - \frac{1}{25^n} - \frac{1}{27^n} - \cdots,$$

und da ferner

$$M\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{15^n} + \frac{1}{21^n} + \cdots$$

ist, so ergiebt sich:

$$S = (M-1)\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{25^n} - \frac{1}{35^n} - \frac{1}{45^n} - \cdots$$

Hieraus kann man aber, da der Wert von M bekannt ist, den Wert von S mit grosser Leichtigkeit finden, sobald n eine einigermassen grosse Zahl ist.

§ 282.

Hat man aber die Summen der höheren Potenzen gefunden, so lassen sich auch die **Summen der niedrigeren Potenzen** mit Hülfe der angegebenen Formeln leicht bestimmen. Auf diesem Wege hat man die Summe der Reihe:

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} + \cdots$$

für verschiedene Werte von n berechnet.

Ist nämlich	so ist die Summe der Reihe:
$n = 2$	0,452247420041222
$n = 4$	0,076993139764252
$n = 6$	0,017070086850639
$n = 8$	0,004061405366515
$n = 10$	0,000993603573633
$n = 12$	0,000246026470033
$n = 14$	0,000061244396725
$n = 16$	0,000015282026219
$n = 18$	0,000003817278702
$n = 20$	0,000000953961123
$n = 22$	0,000000238450446
$n = 24$	0,000000059608184
$n = 26$	0,000000014901555
$n = 28$	0,000000003725333
$n = 30$	0,000000000931323
$n = 32$	0,000000000232830
$n = 34$	0,000000000058207
$n = 36$	0,000000000014551.

Die übrigen Summen der geraden Potenzen erhält man hieraus, indem man wiederholt durch 4 dividirt.

§ 283.

Die **Verwandlung** der **Reihe**:

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots$$

in ein unendliches **Product** kann aber auch in folgender Weise direct ausgeführt werden. Ist nämlich:

$$A = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{8^n} + \cdots,$$

und subtrahirt man hiervon:

$$\frac{1}{2^n}A = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} + \cdots,$$

so bleibt:

$$\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)A = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{11^n} + \cdots = B.$$

Auf diese Weise sind also alle durch 2 teilbaren Zahlen weggefallen. Subtrahirt man hiervon wieder:

$$\frac{1}{3^n}B = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{15^n} + \frac{1}{21^n} + \cdots,$$

wodurch man

$$\left(1-\frac{1}{3^n}\right)B = 1+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}+\cdots = C$$

erhält, so sind dadurch auch alle durch 3 teilbaren Zahlen weggeschafft. Subtrahirt man also wieder hiervon:

$$\frac{1}{5^n}C = \frac{1}{5^n}+\frac{1}{25^n}+\frac{1}{35^n}+\frac{1}{55^n}+\cdots,$$

so ist:

$$\left(1-\frac{1}{5^n}\right)C = 1+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}+\frac{1}{17^n}+\cdots,$$

worin nunmehr auch alle durch 5 teilbaren Zahlen fehlen. Auf dieselbe Weise kann man nun auch die durch 7, 11 und die anderen Primzahlen teilbaren Zahlen wegschaffen. Offenbar wird dann, nachdem die durch die einzelnen Primzahlen teilbaren Zahlen fortgefallen sind, nur allein die Einheit übrig bleiben, und es wird daher, wenn man für $B, C, D, E \ldots$ ihre Werte substituirt, schliesslich

$$A\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\cdots = 1$$

werden, woraus sich für die Summe der gegebenen Reihe:

$$A = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\cdots}$$

oder

$$A = \frac{2^n}{2^n-1}\cdot\frac{3^n}{3^n-1}\cdot\frac{5^n}{5^n-1}\cdot\frac{7^n}{7^n-1}\cdot\frac{11^n}{11^n-1}\cdots$$

ergiebt.

§ 284.

Dasselbe Verfahren lässt sich nun auch anwenden, um andere Reihen, deren Summen wir oben gefunden haben, in unendliche Producte zu verwandeln. Wir kennen aber aus § 175 die Summen der Reihen von der Form:

$$1-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}-\cdots,$$

sobald n eine ungerade Zahl bedeutet. Es ist nämlich die Summe dieser Reihe gleich $N\pi^n$, wobei der Wert von N aus dem angeführten Paragraphen entnommen werden kann. Da hierin nur die ungeraden Zahlen vorkommen,

so beachte man, dass die Zahlen von der Form $4m+1$ mit dem Vorzeichen $+$, die anderen von der Form $4m-1$ mit dem Vorzeichen $-$ versehen sind. Ist nun:

$$A = 1-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}-\cdots,$$

und addirt man hierzu:

$$\frac{1}{3^n}A = \frac{1}{3^n}-\frac{1}{9^n}+\frac{1}{15^n}-\frac{1}{21^n}+\frac{1}{27^n}-\cdots,$$

so ergiebt sich:

$$\left(1+\frac{1}{3^n}\right)A = 1+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{7^n}-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}+\frac{1}{17^n}-\cdots = B.$$

Subtrahirt man hiervon wieder:

$$\frac{1}{5^n}B = \frac{1}{5^n}+\frac{1}{25^n}-\frac{1}{35^n}-\frac{1}{55^n}+\cdots,$$

so wird:

$$\left(1-\frac{1}{5^n}\right)B = 1-\frac{1}{7^n}-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}+\frac{1}{17^n}-\cdots = C,$$

worin nun schon die durch 3 und 5 teilbaren Zahlen nicht mehr vorkommen. Addirt man hierzu:

$$\frac{1}{7^n}C = \frac{1}{7^n}-\frac{1}{49^n}-\frac{1}{77^n}+\cdots,$$

so wird:

$$\left(1+\frac{1}{7^n}\right)C = 1-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}+\frac{1}{17^n}-\cdots = D,$$

wodurch die durch 7 teilbaren Zahlen fortgefallen sind. Addirt man weiter:

$$\frac{1}{11^n}D = \frac{1}{11^n}-\frac{1}{121^n}+\cdots,$$

wodurch sich

$$\left(1+\frac{1}{11^n}\right)D = 1+\frac{1}{13^n}+\frac{1}{17^n}-\cdots = E$$

ergiebt, so sind nun auch die durch 11 teilbaren Zahlen weggeschafft. Schafft man in derselben Weise auch alle übrigen durch die verschiedenen Primzahlen teilbaren Zahlen weg, so ergiebt sich schliesslich:

$$A\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right)\left(1-\frac{1}{13^n}\right)\cdots = 1$$

oder

$$A = \frac{3^n}{3^n+1} \cdot \frac{5^n}{5^n-1} \cdot \frac{7^n}{7^n+1} \cdot \frac{11^n}{11^n+1} \cdot \frac{13^n}{13^n-1} \cdot \frac{17^n}{17^n-1} \cdots$$

Hierbei kommen in den Zählern die Potenzen aller Primzahlen vor, und eben dieselben Potenzen sind in den Nennern um 1 vermehrt oder vermindert, je nachdem die betreffende Primzahl von der Form $4m-1$ oder $4m+1$ ist.

§ 285.

Setzt man daher $n=1$, so erhält man, da $A = \frac{\pi}{4}$ ist:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{23}{24} \cdots$$

Oben § 277 fanden wir aber:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3^2}{2\cdot 4} \cdot \frac{5^2}{4\cdot 6} \cdot \frac{7^2}{6\cdot 8} \cdot \frac{11^2}{10\cdot 12} \cdot \frac{13^2}{12\cdot 14} \cdot \frac{17^2}{16\cdot 18} \cdot \frac{19^2}{18\cdot 20} \cdots$$

Dividirt man daher die zweite Formel durch die erste, so folgt:

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{22} \cdots,$$

oder

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{22} \cdots$$

Hierin sind die Zähler die aufeinanderfolgenden Primzahlen, während die Nenner, welche sich um 1 von den Zählern unterscheiden, die ungerademal geraden Zahlen sind. Dividirt man diese letztere Gleichung von Neuem durch den für $\frac{\pi}{4}$ gefundenen Ausdruck, so erhält man noch:

$$2 = \frac{4}{2} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{12}{10} \cdot \frac{12}{14} \cdot \frac{16}{18} \cdot \frac{20}{18} \cdot \frac{24}{22} \cdots$$

oder

$$2 = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{12}{11} \cdots$$

Diese Brüche entstehen aus den Primzahlen 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... dadurch, dass man jede derselben in zwei sich um eine Einheit unterscheidende Teile zerlegt und sodann die geraden Teile als Zähler, die ungeraden dagegen als Nenner nimmt.

§ 286.

Vergleicht man diese Ausdrücke mit der Wallis'schen Formel:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdot 10\cdot 10\cdot 12\ldots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot 9\cdot 11\cdot 11\ldots}$$

oder

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3\cdot 3}{2\cdot 4} \cdot \frac{5\cdot 5}{4\cdot 6} \cdot \frac{7\cdot 7}{6\cdot 8} \cdot \frac{9\cdot 9}{8\cdot 10} \cdot \frac{11\cdot 11}{10\cdot 12} \cdot \frac{13\cdot 13}{12\cdot 14} \cdots,$$

so findet man, da nach dem vorigen § 285:

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{3\cdot 3}{2\cdot 4} \cdot \frac{5\cdot 5}{4\cdot 6} \cdot \frac{7\cdot 7}{6\cdot 8} \cdot \frac{11\cdot 11}{10\cdot 12} \cdot \frac{13\cdot 13}{12\cdot 14} \cdots$$

ist, wenn man den Wert von $\frac{4}{\pi}$ durch diese letztere Formel dividirt:

$$\frac{32}{\pi^3} = \frac{9\cdot 9}{8\cdot 10} \cdot \frac{15\cdot 15}{14\cdot 16} \cdot \frac{21\cdot 21}{20\cdot 22} \cdot \frac{25\cdot 25}{24\cdot 26} \cdots$$

Hierbei kommen im Zähler alle ungeraden Zahlen vor, welche keine Primzahlen sind.

§ 287.

Setzt man $n=3$, so wird (nach § 175) $A = \frac{\pi^3}{32}$ und daher:

$$\frac{\pi^3}{32} = \frac{3^3}{3^3+1} \cdot \frac{5^3}{5^3-1} \cdot \frac{7^3}{7^3+1} \cdot \frac{11^3}{11^3+1} \cdot \frac{13^3}{13^3-1} \cdot \frac{17^3}{17^3-1} \cdots$$

Nun giebt aber die Reihe:

$$\frac{\pi^6}{945} = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \cdots$$

(nach § 277) die Formel:

$$\frac{\pi^6}{945} = \frac{2^6}{2^6-1} \cdot \frac{3^6}{3^6-1} \cdot \frac{5^6}{5^6-1} \cdot \frac{7^6}{7^6-1} \cdot \frac{11^6}{11^6-1} \cdot \frac{13^6}{13^6-1} \cdots$$

oder

$$\frac{\pi^6}{960} = \frac{3^6}{3^6-1} \cdot \frac{5^6}{5^6-1} \cdot \frac{7^6}{7^6-1} \cdot \frac{11^6}{11^6-1} \cdot \frac{13^6}{13^6-1} \cdots$$

Folglich erhält man, wenn man diese durch die erste dividirt:

$$\frac{\pi^3}{30} = \frac{3^3}{3^3-1} \cdot \frac{5^3}{5^3+1} \cdot \frac{7^3}{7^3-1} \cdot \frac{11^3}{11^3-1} \cdot \frac{13^3}{13^3+1} \cdot \frac{17^3}{17^3+1} \cdots,$$

und wenn man diese nochmals durch die erste dividirt:

$$\frac{16}{15} = \frac{3^3+1}{3^3-1} \cdot \frac{5^3-1}{5^3+1} \cdot \frac{7^3+1}{7^3-1} \cdot \frac{11^3+1}{11^3-1} \cdot \frac{13^3-1}{13^3+1} \cdot \frac{17^3-1}{17^3+1} \cdots,$$

oder

$$\frac{16}{15}=\frac{14}{13}\cdot\frac{62}{63}\cdot\frac{172}{171}\cdot\frac{666}{665}\cdot\frac{1098}{1099}\cdots$$

Diese Brüche entstehen aus den Kuben der ungeraden Primzahlen, wenn man einen jeden in zwei sich um eine Einheit unterscheidende Teile zerlegt und die geraden Teile als Zähler, die ungeraden dagegen als Nenner nimmt.

§ 288.

Aus diesen Ausdrücken kann man wieder neue Reihen bilden, in welchen alle natürlichen Zahlen in den Nennern vorkommen.

Da nämlich

$$\frac{\pi}{4}=\frac{3}{3+1}\cdot\frac{5}{5-1}\cdot\frac{7}{7+1}\cdot\frac{11}{11+1}\cdot\frac{13}{13-1}\cdots$$

ist, so wird:

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\cdots},$$

und hieraus entsteht, wenn man entwickelt, die Reihe:

$$\frac{\pi}{6}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\cdots$$

Hierin ist das Gesetz der Vorzeichen so beschaffen, dass die 2 und alle Primzahlen von der Form $4m-1$ das Zeichen $-$, die Primzahlen von der Form $4m+1$ das Zeichen $+$ und die zusammengesetzten Zahlen dasjenige Vorzeichen haben, welches ihnen nach Massgabe ihrer Zusammensetzung aus den Primzahlen zukommt. So ist das Vorzeichen von $\frac{1}{60}$ offenbar $-$, da $60=2\cdot2\cdot3\cdot5$ ist und die ersten drei Factoren mit dem Vorzeichen $-$, der letzte aber mit dem Vorzeichen $+$ behaftet ist. Ebenso ist ferner:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\cdots},$$

und hieraus entspringt die Reihe:

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\cdots$$

Hierin hat die 2 das Vorzeichen $+$; ferner sind die Primzahlen von der Form $4m-1$ mit dem Zeichen $-$, die von der Form $4m+1$ mit dem Zeichen $+$ und die zusammengesetzten Zahlen mit demjenigen Vorzeichen zu versehen, welches ihnen nach Massgabe ihrer Zusammensetzung aus den Primzahlen zukommt.

§ 289.

Da ferner

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})\cdots}$$

ist, so entsteht durch Entwicklung die Reihe:

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\cdots,$$

worin nur die ungeraden Zahlen vorkommen, die Vorzeichen aber so beschaffen sind, dass die Primzahlen von der Form $4m-1$ das Zeichen $+$, die anderen von der Form $4m+1$ das Zeichen $-$ haben, wodurch sich dann zugleich nach den Regeln der Multiplikation die Vorzeichen der zusammengesetzten Zahlen bestimmen. Hieraus lassen sich aber ferner zwei Reihen finden, worin alle Zahlen vorkommen. Es ist nämlich:

$$\pi=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})\cdots},$$

und hieraus folgt durch Entwicklung:

$$\pi=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\cdots$$

Hierin haben die 2 und alle Primzahlen von der Form $4m-1$ das Vorzeichen $+$, die Primzahlen von der Form $4m+1$ dagegen das Vorzeichen $-$. Ferner ist aber auch:

$$\frac{\pi}{3}=\frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})\cdots},$$

und hieraus folgt durch Entwicklung:

$$\frac{\pi}{3}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots,$$

wobei die 2 und alle Primzahlen von der Form $4m+1$ das Vorzeichen $-$, die Primzahlen von der Form $4m-1$ aber das Vorzeichen $+$ haben.

§ 290.

Man kann aber noch unzählig viele andere Folgen der Vorzeichen finden, für welche die Summen von Reihen, welche aus den Zahlen

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{8},\ \cdots$$

gebildet sind, angegeben werden können. Da nämlich

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})\ldots}$$

ist, so erhält man, wenn man diesen Ausdruck mit $\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2$ multiplicirt,

$$\pi=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})\ldots},$$

und hieraus:

$$\pi=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\cdots$$

Es haben also die Zahlen 2 und 3 und alle Primzahlen von der Form $4m+1$ das Vorzeichen $+$, die übrigen Primzahlen von der Form $4m-1$ das Vorzeichen $-$ und die zusammengesetzten Zahlen dasjenige Vorzeichen, welches ihnen nach Massgabe ihrer Zusammensetzung zukommt. Ebenso ergiebt sich aus

$$\pi=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})\ldots},$$

wenn man diesen Ausdruck mit $\frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{3}{2}$ multiplicirt:

$$\frac{3\pi}{2}=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})(1+\frac{1}{17})\ldots},$$

und hieraus:

$$\frac{3\pi}{2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}-\frac{1}{13}\cdots,$$

wobei die 2 und alle Primzahlen von der Form $4m-1$ das positive, die Primzahlen von der Form $4m+1$ dagegen mit alleiniger Ausnahme der Zahl 5 das negative Vorzeichen besitzen.

§ 291.

Es lassen sich aber auch unzählig viele solche Reihen angeben, deren Summe gleich 0 ist. Denn da

$$0=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{18}\cdots$$

ist, so wird:

$$0=\frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})\cdots},$$

und hieraus folgt, wie wir früher sahen, die Reihe:

$$0=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\cdots,$$

worin alle Primzahlen das Vorzeichen $-$ haben, während die Vorzeichen der zusammengesetzten Zahlen sich aus den Regeln der Multiplikation ergeben. Multipliciren wir aber jenen Ausdruck mit $\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$, wodurch derselbe in

$$0=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})\cdots}$$

übergeht, so entsteht daraus die Reihe:

$$0=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}-\cdots,$$

wobei die 2 das Vorzeichen $+$, alle anderen Primzahlen aber das Zeichen $-$ haben. Auf ebensolche Weise erhält man auch:

$$0=\frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})\cdots}$$

und

$$0=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}-\cdots,$$

worin alle Primzahlen ausser 3 und 5 das negative Vorzeichen haben. Ueberhaupt kann man bemerken, dass so oft die sämtlichen Primzahlen, einige wenige etwa ausgenommen, das negative Vorzeichen besitzen, die Summe der Reihe gleich 0 ist, dass dagegen die Summe der Reihe unendlich gross ist, so oft die sämtlichen Primzahlen ausser einigen wenigen das positive Vorzeichen haben.

§ 292.

In § 176 haben wir auch die Summe der Reihe:

$$A=1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}-\frac{1}{8^n}+\frac{1}{10^n}-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}-\cdots$$

für den Fall angegeben, wo n eine ungerade Zahl ist. Addirt man hierzu:

$$\frac{1}{2^n}A=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^n}+\frac{1}{8^n}-\frac{1}{10^n}+\frac{1}{14^n}-\cdots,$$

so folgt:

$$B=\left(1+\frac{1}{2^n}\right)A=1-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}-\frac{1}{17^n}+\frac{1}{19^n}-\frac{1}{23^n}+\frac{1}{25^n}-\cdots;$$

und wenn man hierzu wieder

$$\frac{1}{5^n}B=\frac{1}{5^n}-\frac{1}{25^n}+\frac{1}{35^n}-\frac{1}{55^n}+\cdots$$

addirt:

$$C=\left(1+\frac{1}{5^n}\right)B=1+\frac{1}{7^n}-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}-\frac{1}{17^n}+\frac{1}{19^n}-\frac{1}{23^n}+\cdots.$$

Subtrahirt man hiervon:

$$\frac{1}{7^n}C=\frac{1}{7^n}+\frac{1}{49^n}-\frac{1}{77^n}+\cdots,$$

so wird:

$$D=\left(1-\frac{1}{7^n}\right)C=1-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}-\frac{1}{17^n}+\frac{1}{19^n}-\cdots$$

Auf diese Weise entsteht schliesslich:

$$A\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right)\left(1-\frac{1}{13^n}\right)\cdots=1,$$

wobei alle Primzahlen, welche die Vielfachen von 6 um 1 übersteigen, das Zeichen —, diejenigen aber, welche um 1 kleiner sind, ebenso wie die 2, das Vorzeichen + haben. Es wird also:

$$A=\frac{2^n}{2^n+1}\cdot\frac{5^n}{5^n+1}\cdot\frac{7^n}{7^n-1}\cdot\frac{11^n}{11^n+1}\cdot\frac{13^n}{13^n-1}\cdots$$

§ 293.

Betrachten wir den Fall $n=1$, in welchem $A=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ ist, so folgt:

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{19}{18}\cdots,$$

wobei in den Zählern alle auf 3 folgenden Primzahlen vorkommen, die Nenner aber von den Zählern um eine Einheit verschieden und sämtlich durch 6 teilbar sind. Da nun

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{5\cdot 5}{4\cdot 6}\cdot\frac{7\cdot 7}{6\cdot 8}\cdot\frac{11\cdot 11}{10\cdot 12}\cdot\frac{13\cdot 13}{12\cdot 14}\cdots$$

ist, so ergiebt sich, wenn man diesen Ausdruck durch jenen dividirt:

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{20}\cdots,$$

worin die Nenner nicht mehr durch 6 teilbar sind, oder es ist:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{19}{18}\cdot\frac{23}{24}\cdots$$

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{23}{22}\cdots$$

Dividirt man den letzten von diesen Ausdrücken durch den vorhergehenden, so folgt:

$$\frac{4}{3}=\frac{6}{4}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{12}{10}\cdot\frac{12}{14}\cdot\frac{18}{16}\cdot\frac{18}{20}\cdot\frac{24}{22}\cdots,$$

oder:

$$\frac{4}{3}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{12}{11}\cdots,$$

und hierin entstehen die einzelnen Brüche aus den Primzahlen 5, 7, 11... dadurch, dass man dieselben in zwei um eine Einheit von einander verschiedene Teile zerlegt und die durch 3 teilbaren als Zähler, die andern Teile aber als Nenner nimmt.

§ 294.

Da wir oben (§ 285) gesehen haben, dass

$$\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdots,$$

oder:

$$\frac{\pi}{3}=\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{20}\cdots$$

ist, so erhält man, wenn man die für $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ und $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ gefundenen Ausdrücke durch diesen Ausdruck dividirt:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{14}{15}\cdot\frac{16}{15}\cdots$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{24}{23}\cdot\frac{30}{29}\cdots$$

Die Brüche des ersten Ausdrucks erhält man aus den Primzahlen von der Form $12m+6\pm 1$, die des letzteren aus den Primzahlen von der Form $12m\pm 1$, wenn man jede derselben in zwei um eine Einheit von einander verschiedene Teile zerlegt und die geraden Teile als Zähler, die ungeraden aber als Nenner nimmt.

§ 295.

Betrachten wir nun noch die oben im § 179 gefundene Reihe:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots = A,$$

so wird, wenn man hiervon

$$\frac{1}{3}A = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} - \frac{1}{21} + \frac{1}{27} + \frac{1}{33} - \cdots$$

subtrahirt:

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right)A = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \cdots = B.$$

Addirt man hierzu wieder:

$$\frac{1}{5}B = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{35} + \frac{1}{55} - \cdots,$$

so folgt:

$$\left(1 + \frac{1}{5}\right)B = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \cdots = C,$$

und indem man auf diese Weise fortfährt, erhält man schliesslich:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right)\left(1 + \frac{1}{7}\right)\left(1 - \frac{1}{11}\right)\left(1 + \frac{1}{13}\right)\left(1 - \frac{1}{17}\right)\left(1 - \frac{1}{19}\right)\cdots = 1,$$

wobei die Vorzeichen sich durch die Regel bestimmen, dass die Primzahlen von der Form $8m+1$ und $8m+3$ das Vorzeichen $-$, die Primzahlen von der Form $8m+5$ und $8m+7$ aber das Vorzeichen $+1$ haben müssen. Hiernach wird:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{24} \cdots,$$

wobei die Nenner entweder durch 8 teilbar oder nur ungerademal gerade Zahlen sind. Da nun

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{23}{24} \cdots$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{22} \cdots$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 8} \cdot \frac{11 \cdot 11}{10 \cdot 12} \cdot \frac{13 \cdot 13}{12 \cdot 14} \cdots$$

ist, so folgt:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{23}{22} \cdots,$$

wobei keine durch 8 teilbaren Nenner vorkommen, die gerademal geraden Zahlen aber auftreten, sobald sie von den Zählern nur um eine Einheit verschieden sind. Dividirt man aber den ersten Ausdruck durch den letzten, so folgt:

$$1 = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{11}{12} \cdots,$$

wo die Brüche aus den Primzahlen dadurch entstehen, dass man jede derselben in zwei Teile zerlegt, die sich um eine Einheit unterscheiden, und die geraden Teile (ausgenommen, wenn sie gerademal gerade sind) als Zähler nimmt.

§ 296.

Ebenso lassen sich die übrigen Reihen, welche wir § 179 u. ff. für die Ausdrücke der Kreisbogen gefunden haben, in Producte verwandeln, in denen nur die Primzahlen auftreten, und man kann daher auf diesem Wege viele andere bemerkenswerte Eigenschaften sowohl der unendlichen Producte wie der unendlichen Reihen finden. Da wir indessen bereits die hauptsächlichsten angeführt haben, so wollen wir uns mit der Entdeckung noch anderer nicht länger aufhalten, sondern vielmehr zu einem anderen hiermit nahe zusammenhängenden Gegenstande übergehen. So wie wir nämlich in diesem Capitel die Zahlen, insofern sie **durch Multiplikation** entstehen, betrachtet haben, so wollen wir im nächsten Capitel auf die Entstehung der **Zahlen durch Addition** unser Augenmerk richten.