12. Capitel.

Von der Entwicklung der gebrochenen Functionen in reeller Form.

§ 199.

Wir haben bereits oben im zweiten Capitel gezeigt, wie man jede gebrochene Function in soviel Teile zerlegen kann, als der Nenner derselben einfache Factoren enthält. Diese letzteren nämlich liefern die Nenner der Partialbrüche. Besitzt nun der Nenner einfache imaginäre Factoren, so werden offenbar auch die daraus entspringenden Partialbrüche imaginär sein, und es wird daher in diesem Falle wenig Zweck haben, einen reellen Bruch in imaginäre zu zerlegen. Da wir indessen auch gezeigt haben, dass sich jede ganze Function, wie es ja der Nenner eines Bruches ist, mag sie auch noch so viele einfache imaginäre Factoren besitzen, doch immer in zweifache reelle Factoren zerlegen lässt, so können wir bei der Zerlegung der Brüche die imaginären Grössen dadurch vermeiden, dass man als **Nenner der Partialbrüche** nicht die einfachen, sondern die **reellen zweifachen Factoren des Hauptnenners** gebraucht.

§ 200.

Ist daher die gebrochene Function $\frac{M}{N}$ gegeben, so suche man daraus nach dem oben auseinandergesetzten Verfahren alle die einfachen Brüche, welche den einfachen reellen Factoren des Nenners N entsprechen. Anstatt der imaginären Factoren nehme man aber den Ausdruck $p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2$ als Factor von N an. Da man jedoch bei dieser Untersuchung den Zähler und Nenner in entwickelter Form betrachten muss, so wollen wir den gegebenen Bruch in der Gestalt:

$$\frac{A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\cdots}{(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)(\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\cdots)}$$

voraussetzen und annehmen, dass der aus dem Factor $p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2$ des Nenners entstehende Partialbruch der folgende sei:

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{a}z}{p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2}.$$

Hier kann nämlich der Zähler, da die höchste im Nenner vorkommende Potenz von z die zweite ist, die Veränderliche z nur in der ersten, nicht aber in einer höheren Potenz enthalten, weil sonst der Bruch eine ganze Function einschliessen würde, welche abgesondert werden müsste.

§ 201.

Setzt man der Kürze wegen den Zähler:

$$A+Bz+Cz^2+\cdots=M,$$

den andern Factor des Nenners

$$\alpha+\beta z+\gamma z^2+\cdots=Z,$$

und nimmt man an, dass der aus diesem zweiten Factor Z entstehende Partialbruch gleich $\frac{Y}{Z}$ sei, so wird:

$$Y=\frac{M-\mathfrak{A}Z-\mathfrak{a}Zz}{p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2}.$$

Dieser Ausdruck muss eine ganze Function und somit $M-\mathfrak{A}Z-\mathfrak{a}Zz$ notwendig durch $p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2$ teilbar sein; es muss daher der Ausdruck $M-\mathfrak{A}Z-\mathfrak{a}Zz$ verschwinden, wenn man $p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2=0$, d. h. also entweder $z=\frac{p}{q}(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)$ oder $z=\frac{p}{q}(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi)$ setzt. Macht man noch $\frac{p}{q}=f$, so wird $z^n=f^n(\cos n\varphi\pm\sqrt{-1}\sin n\varphi)$, und wenn man diese beiden Werte von z substituirt, so erhält man zwei Gleichungen, aus denen man die beiden Unbekannten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$ bestimmen kann.

§ 202.

Führt man die angegebene Substitution wirklich aus, so ergiebt die Entwicklung der Gleichung $M=\mathfrak{A}Z+\mathfrak{a}Zz$ die folgende Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}&A+Bf\cos\varphi+Cf^2\cos2\varphi+Df^3\cos3\varphi+\cdots\\&\pm(Bf\sin\varphi+Cf^2\sin2\varphi+Df^3\sin3\varphi+\cdots)\sqrt{-1}\end{aligned}\right\}$$
$$=\left\{\begin{aligned}&\mathfrak{A}(\alpha+\beta f\cos\varphi+\gamma f^2\cos2\varphi+\delta f^3\cos3\varphi+\cdots)\\&\pm\mathfrak{A}(\beta f\sin\varphi+\gamma f^2\sin2\varphi+\delta f^3\sin3\varphi+\cdots)\sqrt{-1}\\&+\mathfrak{a}(\alpha f\cos\varphi+\beta f^2\cos2\varphi+\gamma f^3\cos3\varphi+\cdots)\\&\pm\mathfrak{a}(\alpha f\sin\varphi+\beta f^2\sin2\varphi+\gamma f^3\sin3\varphi+\cdots)\sqrt{-1},\end{aligned}\right.$$

und hieraus entsteht, wenn man der Kürze wegen:

$$\begin{aligned}
A + Bf\cos\varphi + Cf^2\cos 2\varphi + Df^3\cos 3\varphi + \cdots &= \mathfrak{P}\\
Bf\sin\varphi + Cf^2\sin 2\varphi + Df^3\sin 3\varphi + \cdots &= \mathfrak{p}\\
\alpha + \beta f\cos\varphi + \gamma f^2\cos 2\varphi + \delta f^3\cos 3\varphi + \cdots &= \mathfrak{Q}\\
\beta f\sin\varphi + \gamma f^2\sin 2\varphi + \delta f^3\sin 3\varphi + \cdots &= \mathfrak{q}\\
\alpha f\cos\varphi + \beta f^2\cos 2\varphi + \gamma f^3\cos 3\varphi + \cdots &= \mathfrak{R}\\
\alpha f\sin\varphi + \beta f^2\sin 2\varphi + \gamma f^3\sin 3\varphi + \cdots &= \mathfrak{r}
\end{aligned}$$

setzt:

$$\mathfrak{P} \pm \mathfrak{p}\sqrt{-1} = \mathfrak{A}\mathfrak{Q} \pm \mathfrak{A}\mathfrak{q}\sqrt{-1} + \mathfrak{a}\mathfrak{R} \pm \mathfrak{a}\mathfrak{r}\sqrt{-1}.$$

§ 203.

Wegen der doppelten Vorzeichen erhält man hieraus die beiden Gleichungen:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{A}\mathfrak{Q} + \mathfrak{a}\mathfrak{R}$$
$$\mathfrak{p} = \mathfrak{A}\mathfrak{q} + \mathfrak{a}\mathfrak{r},$$

aus denen sich die beiden Unbekannten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$ wie folgt bestimmen:

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{r} - \mathfrak{p}\mathfrak{R}}{\mathfrak{Q}\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\mathfrak{R}}$$
$$\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q}}{\mathfrak{q}\mathfrak{R} - \mathfrak{Q}\mathfrak{r}}.$$

Wenn also der Bruch:

$$\frac{M}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)\,Z}$$

gegeben ist, so findet man den daraus entstehenden Partialbruch:

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{a}z}{p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2}$$

nach folgender **Regel**:

Man setze $f = \frac{p}{q}$ und mache für jeden Werth von n

erstens in M die Substitution $z^n = f^n\cos n\varphi$; dadurch wird $M = \mathfrak{P}$;
zweitens in M die Substitution $z^n = f^n\sin n\varphi$; dadurch wird $M = \mathfrak{p}$;
drittens in Z die Substitution $z^n = f^n\cos n\varphi$; dadurch wird $Z = \mathfrak{Q}$;
viertens in Z die Substitution $z^n = f^n\sin n\varphi$; dadurch wird $Z = \mathfrak{q}$;
fünftens in zZ die Substitution $z^n = f^n\cos n\varphi$; dadurch wird $zZ = \mathfrak{R}$;
sechstens in zZ die Substitution $z^n = f^n\sin n\varphi$; dadurch wird $zZ = \mathfrak{r}$.

Hat man auf diese Weise die Werte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ gefunden, so bestimmen sich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$ durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{r} - \mathfrak{p}\mathfrak{R}}{\mathfrak{Q}\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\mathfrak{R}} \qquad \mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{Q} - \mathfrak{P}\mathfrak{q}}{\mathfrak{Q}\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\mathfrak{R}}.$$

Erstes Beispiel.

Ist die gebrochene Function gegeben:

$$\frac{z^2}{(1 - z + z^2)(1 + z^4)},$$

und soll für diese der aus dem Factor $1 - z + z^2$ des Nenners entspringende Partialbruch, welcher

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{a}z}{1 - z + z^2}$$

sein möge, gefunden werden, so erhält man durch Vergleichung dieses Factors mit der allgemeinen Form $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$:

$$p = 1;\ q = 1;\ \cos\varphi = \frac{1}{2},\ \text{also}\ \varphi = 60^\circ = \frac{\pi}{3}.$$

Da nun $M = z^2$, $Z = 1 + z^4$ und $f = 1$ ist, so wird:

$$\mathfrak{P} = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}; \qquad \mathfrak{p} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\mathfrak{Q} = 1 + \cos\frac{4\pi}{3} = \frac{1}{2}; \qquad \mathfrak{q} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\mathfrak{R} = \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{3} = 1; \qquad \mathfrak{r} = 0.$$

Hieraus findet man: $\mathfrak{A} = -1$, $\mathfrak{a} = 0$, und es ist somit der gesuchte Bruch:

$$\frac{-1}{1 - z + z^2}.$$

Derjenige Bruch aber, welcher diesen zur gegebenen Function ergänzt, ist:

$$\frac{1 + z + z^2}{1 + z^4},$$

und da dessen Nenner $1 + z^4$ die beiden Factoren $1 + z\sqrt{2} + z^2$ und $1 - z\sqrt{2} + z^2$ hat, so kann man eine derartige Zerlegung von Neuem ausführen, und zwar wird dabei im ersten Falle $f = -1$, im zweiten $f = +1$ während für beide Fälle $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ist.

Zweites Beispiel.

Soll also der gegebene Bruch:

$$\frac{1 + z + z^2}{(1 + z\sqrt{2} + z^2)(1 - z\sqrt{2} + z^2)}$$

in Partialbrüche zerlegt werden, so ist $M = 1 + z + z^2$, und für den ersten Factor wird:

$$f = -1, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad Z = 1 - z\sqrt{2} + z^2.$$

Folglich:

$$\mathfrak{P} = 1 - \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{2\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathfrak{p} = \quad -\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{2\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathfrak{Q} = 1 + \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{2\pi}{4} = 2$$

$$\mathfrak{q} = \quad +\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{2\pi}{4} = 2$$

$$\mathfrak{R} = \quad -\cos\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4} = 0$$

$$\mathfrak{r} = \quad -\sin\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\sin\frac{2\pi}{4} - \sin\frac{3\pi}{4} = -2\sqrt{2}.$$

Hieraus folgt:

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\mathfrak{R} = -4\sqrt{2}$$

und

$$\mathfrak{A} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}, \quad \mathfrak{a} = 0.$$

Es ist daher der aus dem Factor $1 + z\sqrt{2} + z^2$ entspringende Partialbruch:

$$\frac{(\sqrt{2}-1):2\sqrt{2}}{1 + z\sqrt{2} + z^2}.$$

Der andere Factor aber ergiebt ebenso den Partialbruch:

$$\frac{(\sqrt{2}+1):2\sqrt{2}}{1 - z\sqrt{2} + z^2}.$$

Man erhält somit für die anfänglich gegebene Function (Beispiel 1) die folgende Zerlegung in Partialbrüche:

$$\frac{z^2}{(1 - z + z^2)(1 + z^4)} = \frac{-1}{1 - z + z^2} + \frac{(\sqrt{2}-1):2\sqrt{2}}{1 + z\sqrt{2} + z^2} + \frac{(\sqrt{2}+1):2\sqrt{2}}{1 - z\sqrt{2} + z^2}$$

Drittes Beispiel.

Es sei der Bruch

$$\frac{1 + 2z + z^2}{(1 - \frac{8}{5}z + z^2)(1 + 2z + 3z^2)}$$

gegeben. Setzt man hier den Bruch, der aus dem Factor $1 - \frac{8}{5}z + z^2$ entspringt, gleich

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{a}z}{1 - \frac{8}{5}z + z^2},$$

so wird:

$$p = 1, \quad q = 1, \quad \cos\varphi = \frac{4}{5}, \quad f = 1.$$

und ferner:

$$M = 1 + 2z + z^2 \quad \text{und} \quad Z = 1 + 2z + 3z^2.$$

Da aber hier das Verhältnis, in welchem der Winkel φ zu einem Rechten steht, nicht bekannt ist, so muss man die Sinus und Cosinus seiner Vielfachen besonders suchen. Da nun:

$$\cos\varphi = \frac{4}{5} \text{ ist, so wird } \sin\varphi = \frac{3}{5}$$

$$\cos 2\varphi = \frac{7}{25} \qquad \sin 2\varphi = \frac{24}{25},$$

$$\cos 3\varphi = -\frac{44}{125} \qquad \sin 3\varphi = \frac{117}{125}$$

und somit:

$$\mathfrak{P} = 1 + 2\cdot\frac{4}{5} + \frac{7}{25} = \frac{72}{25}$$

$$\mathfrak{p} = \quad 2\cdot\frac{3}{5} + \frac{24}{25} = \frac{54}{25}$$

$$\mathfrak{Q} = 1 + 2\cdot\frac{4}{5} + 3\cdot\frac{7}{25} = \frac{86}{25}$$

$$\mathfrak{q} = \quad 2\cdot\frac{3}{5} + 3\cdot\frac{24}{25} = \frac{102}{25}$$

$$\mathfrak{R} = \frac{4}{5} + 2\cdot\frac{7}{25} - 3\cdot\frac{44}{125} = \frac{38}{125}$$

$$\mathfrak{r} = \frac{3}{5} + 2\cdot\frac{24}{25} + 3\cdot\frac{117}{125} = \frac{666}{125},$$

folglich:

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\mathfrak{R} = \frac{53400}{25\cdot 125} = \frac{2136}{125},$$

also:

$$\mathfrak{A}=\frac{1836}{2136}=\frac{153}{178},\quad \mathfrak{a}=-\frac{540}{2136}=-\frac{45}{178}.$$

Es ist daher der aus dem Factor $1-\frac{8}{5}z+z^2$ entstehende Bruch gleich:

$$\frac{9(17-5z):178}{1-\frac{8}{5}z+z^2}.$$

Sucht man ebenso den dem andern Factor entsprechenden Bruch, so ist:

$$p=1,\ q=-\sqrt{3},\ \cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

folglich:

$$f=-\frac{1}{\sqrt{3}},\ M=1+2z+z^2,\ Z=1-\frac{8}{5}z+z^2.$$

Ferner ist:

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \text{also } \sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 2\varphi=-\frac{1}{3},\quad \text{also } \sin 2\varphi=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos 3\varphi=-\frac{5}{3\sqrt{3}},\quad \text{also } \sin 3\varphi=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}.$$

Demnach:

$$\mathfrak{P}=1-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}$$

$$\mathfrak{p}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=-\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$\mathfrak{Q}=1+\frac{8}{5\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{64}{45}$$

$$\mathfrak{q}=\frac{8}{5\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{34\sqrt{2}}{45}$$

$$\mathfrak{R}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{8}{5\cdot 3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\left(-\frac{5}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{4}{135}$$

$$\mathfrak{r}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{8}{5\cdot 3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3\cdot\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3\cdot\sqrt{3}}=-\frac{98\sqrt{2}}{135}.$$

Hieraus erhält man:

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{r}-\mathfrak{q}\mathfrak{R}=-\frac{712\sqrt{2}}{675},$$

und daher:

$$\mathfrak{A}=\frac{100}{712}=\frac{25}{178},\quad \mathfrak{a}=\frac{540}{712}=\frac{135}{178}.$$

Es lässt sich somit der gegebene Bruch folgendermassen in Partialbrüche zerlegen:

$$\frac{1+2z+z^2}{(1-\frac{8}{5}z+z^2)(1+2z+3z^2)}=\frac{9(17-5z):178}{1-\frac{8}{5}z+z^2}+\frac{5(5+27z):178}{1+2z+3z^2},$$

§ 204.

Man kann aber auch die Werte der Grössen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{r}$ aus den Werten von $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{q}$ finden. Da nämlich:

$$\mathfrak{Q}=\alpha+\beta f\cos\varphi+\gamma f^2\cos 2\varphi+\delta f^3\cos 3\varphi+\ldots$$
$$\mathfrak{q}=\beta f\sin\varphi+\gamma f^2\sin 2\varphi+\delta f^3\sin 3\varphi+\ldots$$

ist, so wird:

$$\mathfrak{Q}\cos\varphi-\mathfrak{q}\sin\varphi=\alpha\cos\varphi+\beta f\cos 2\varphi+\gamma f^2\cos 3\varphi+\ldots,$$

folglich:

$$\mathfrak{R}=f(\mathfrak{Q}\cos\varphi-\mathfrak{q}\sin\varphi).$$

Ferner ist:

$$\mathfrak{Q}\sin\varphi+\mathfrak{q}\cos\varphi=\alpha\sin\varphi+\beta f\sin 2\varphi+\gamma f^2\sin 3\varphi+\ldots,$$

demnach:

$$\mathfrak{r}=f(\mathfrak{Q}\sin\varphi+\mathfrak{q}\cos\varphi).$$

Hieraus ergiebt sich weiter:

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{r}-\mathfrak{q}\mathfrak{R}=(\mathfrak{Q}^2+\mathfrak{q}^2)f\sin\varphi$$
$$\mathfrak{P}\mathfrak{r}-\mathfrak{p}\mathfrak{R}=(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}+\mathfrak{p}\mathfrak{q})f\sin\varphi+(\mathfrak{P}\mathfrak{q}-\mathfrak{p}\mathfrak{Q})f\cos\varphi.$$

Folglich ist:

$$\mathfrak{A}=\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}+\mathfrak{p}\mathfrak{q}}{\mathfrak{Q}^2+\mathfrak{q}^2}+\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{q}-\mathfrak{p}\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}^2+\mathfrak{q}^2}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$
$$\mathfrak{a}=-\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{q}-\mathfrak{p}\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}^2+\mathfrak{q}^2}\cdot\frac{1}{f\sin\varphi}.$$

Es wird mithin der aus dem Factor $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$ des Nenners entstehende Partialbruch gleich

$$\frac{(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q})f\sin\varphi + (\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q})(f\cos\varphi - z)}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)(\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2)f\sin\varphi},$$

oder da $f = \frac{p}{q}$ ist, gleich

$$\frac{(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q})p\sin\varphi + (\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q})(p\cos\varphi - qz)}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)(\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2)p\sin\varphi}.$$

§ 205.

Dieser Partialbruch entspringt also aus dem Factor $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$ des Nenners der gegebenen Function:

$$\frac{M}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)Z},$$

und zwar findet man die Werte von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{q}$ aus den Functionen M und Z auf folgende Weise: Man schreibe die Functionen M und Z in entwickelter Form, wie folgt:

$$\begin{aligned} M &= A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \cdots \\ Z &= \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \cdots, \end{aligned}$$

und setze dann einmal:

$$z^n = \frac{p^n}{q^n}\cos n\varphi; \text{ dadurch wird: } M = \mathfrak{P} \text{ und } Z = \mathfrak{Q},$$

und ferner:

$$z^n = \frac{p^n}{q^n}\sin n\varphi; \text{ dadurch wird: } M = \mathfrak{p},\ Z = \mathfrak{q}.$$

Man erhält folglich:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= A + B\frac{p}{q}\cos\varphi + C\frac{p^2}{q^2}\cos 2\varphi + D\frac{p^3}{q^3}\cos 3\varphi + \cdots \\ \mathfrak{p} &= \quad B\frac{p}{q}\sin\varphi + C\frac{p^2}{q^2}\sin 2\varphi + D\frac{p^3}{q^3}\sin 3\varphi + \cdots \\ \mathfrak{Q} &= \alpha + \beta\frac{p}{q}\cos\varphi + \gamma\frac{p^2}{q^2}\cos 2\varphi + \delta\frac{p^3}{q^3}\cos 3\varphi + \cdots \\ \mathfrak{q} &= \quad \beta\frac{p}{q}\sin\varphi + \gamma\frac{p^2}{q^2}\sin 2\varphi + \delta\frac{p^3}{q^3}\sin 3\varphi + \cdots \end{aligned}$$

§ 206.

Es ist jedoch aus dem Vorhergehenden ersichtlich, dass eine solche Zerlegung **nicht** stattfindet, wenn die Function Z eben denselben Factor $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$ **auch noch in sich enthält**. Denn alsdann würde, wenn man in der Gleichung

$$M = \mathfrak{A}Z + \mathfrak{a}Zz$$

die Substitution

$$z^n = f^n(\cos n\varphi \pm \sqrt{-1}\sin n\varphi)$$

macht, die Grösse Z an und für sich verschwinden, und man könnte daraus nichts weiter folgern.

Wenn daher der **Nenner** der gebrochenen Function $\frac{M}{N}$ den **Factor** $(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)^2$ **oder eine noch höhere Potenz desselben enthält**, so muss man ein **besonderes** Verfahren anwenden, um die Zerlegung zu bewerkstelligen. Es sei also:

$$N = (p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)^2 Z,$$

und die aus dem Factor $(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)^2$ des Nenners entspringenden Partialbrüche seien:

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{a}z}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)^2} + \frac{\mathfrak{B} + \mathfrak{b}z}{p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2},$$

wobei die constanten Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{b}$ noch zu bestimmen sind.

§ 207.

Unter dieser Voraussetzung muss der Ausdruck:

$$\frac{M - (\mathfrak{A} + \mathfrak{a}z)Z - (\mathfrak{B} + \mathfrak{b}z)Z(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)^2}$$

eine ganze Function, und somit der Zähler durch den Nenner teilbar sein. Es muss also zunächst der Ausdruck $M - (\mathfrak{A} + \mathfrak{a}z)Z$ sich durch $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$ teilen lassen, und da dies der vorhergehende Fall ist, so werden auch die Werte von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$ auf dieselbe Weise bestimmt. Setzt man daher:

$$z^n = \frac{p^n}{q^n}\cos n\varphi, \text{ so wird } M = \mathfrak{P} \text{ und } Z = \mathfrak{N};$$

setzt man aber:

$$z^n = \frac{p^n}{q^n}\sin n\varphi, \text{ so wird } M = \mathfrak{p} \text{ und } Z = \mathfrak{n},$$

und hieraus ergiebt sich nach der oben angegebenen Regel:

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{N} + \mathfrak{p}\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} + \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{n} - \mathfrak{p}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\mathfrak{a} = -\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{n} - \mathfrak{p}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2}\cdot\frac{q}{p\sin\varphi}.$$

§ 208.

Sind auf diese Weise $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$ gefunden, so wird ferner

$$\frac{M-(\mathfrak{A}+\mathfrak{a}z)Z}{p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2}$$

eine ganze Function, welche gleich P gesetzt werden möge. Dann muss auch $P-(\mathfrak{B}+\mathfrak{b}z)Z$ durch $p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2$ teilbar sein, und da dieser Ausdruck eine ähnliche Gestalt hat wie der vorhergehende, so wird, wenn für

$$z^n=\frac{p^n}{q^n}\cos n\varphi \qquad P \text{ in } \mathfrak{R}$$

und für

$$z^n=\frac{p^n}{q^n}\sin n\varphi \qquad P \text{ in } \mathfrak{r}$$

übergeht:

$$\mathfrak{B}=\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{N}+\mathfrak{r}\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}+\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{n}-\mathfrak{r}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\mathfrak{b}=-\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{n}-\mathfrak{r}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{q}{p\sin\varphi}.$$

§ 209.

Hieraus kann man schon allgemein folgern, wie die Zerlegung zu geschehen habe, wenn der Nenner der gegebenen Function $\frac{M}{N}$ den Factor

$$(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^k$$

hat. Es sei also

$$N=(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^k Z,$$

und daher die zu zerlegende gebrochene Function die folgende:

$$\frac{M}{(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^k Z}.$$

Ferner liefere der Factor $(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^k$ des Nenners folgende Partialbrüche:

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{a}z}{(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^k}+\frac{\mathfrak{B}+\mathfrak{b}z}{(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^{k-1}}$$

$$+\frac{\mathfrak{C}+\mathfrak{c}z}{(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^{k-2}}+\frac{\mathfrak{D}+\mathfrak{d}z}{(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^{k-3}}+\cdots$$

Nun möge

$$\text{für } z^n=\frac{p^n}{q^n}\cos n\varphi \qquad M \text{ in } \mathfrak{M} \text{ und } Z \text{ in } \mathfrak{N}$$

$$\text{und für } z^n=\frac{p^n}{q^n}\sin n\varphi \qquad M \text{ in } \mathfrak{m} \text{ und } Z \text{ in } \mathfrak{n}$$

übergehen; alsdann wird:

$$\mathfrak{A}=\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{N}+\mathfrak{m}\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}+\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{n}-\mathfrak{m}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\mathfrak{a}=-\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{n}-\mathfrak{m}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{q}{p\sin\varphi}.$$

Setzt man sodann:

$$\frac{M-(\mathfrak{A}+\mathfrak{a}z)Z}{p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2}=P,$$

und ist

$$\text{für } z^n=\frac{p^n}{q^n}\cos n\varphi \qquad P=\mathfrak{P}$$

$$\text{und für } z^n=\frac{p^n}{q^n}\sin n\varphi \qquad P=\mathfrak{p},$$

so wird:

$$\mathfrak{B}=\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{N}+\mathfrak{p}\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}+\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{n}-\mathfrak{p}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\mathfrak{b}=-\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{n}-\mathfrak{p}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{q}{p\sin\varphi}.$$

Weiter setze man:

$$\frac{P-(\mathfrak{B}+\mathfrak{b}z)Z}{p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2}=Q,$$

und es gehe

$$\text{für } z^n=\frac{p^n}{q^n}\cos n\varphi \qquad Q \text{ in } \mathfrak{Q}$$

$$\text{und für } z^n=\frac{p^n}{q^n}\sin n\varphi \qquad Q \text{ in } \mathfrak{q}$$

über, dann ist:

$$\mathfrak{C}=\frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{N}+\mathfrak{q}\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}+\frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{n}-\mathfrak{q}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\mathfrak{c}=-\frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{n}-\mathfrak{q}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{q}{p\sin\varphi}.$$

Ebenso sei:

$$\frac{Q - (\mathfrak{C} + \mathfrak{c}z)}{p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2} = R,$$

und ferner

$$\text{für } z^n = \frac{p^n}{q^n}\cos n\varphi \qquad R = \mathfrak{R}$$

$$\text{und für } z^n = \frac{p^n}{q^n}\sin n\varphi \qquad R = \mathfrak{r};$$

dann ist:

$$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{N} + \mathfrak{r}\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} + \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{n} - \mathfrak{r}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} \cdot \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\mathfrak{d} = -\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{n} - \mathfrak{r}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} \cdot \frac{q}{p\sin\varphi}.$$

In dieser Weise hat man nun fortzugehen, bis man den Zähler des letzten Bruches, dessen Nenner gleich $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$ ist, gefunden hat.

Beispiel.

Es sei der Bruch:

$$\frac{z - z^3}{(1 + z^2)^4\,(1 + z^4)}$$

gegeben, und die Partialbrüche, welche aus dem Factor $(1 + z^2)^4$ entspringen, seien:

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{a}z}{(1 + z^2)^4} + \frac{\mathfrak{B} + \mathfrak{b}z}{(1 + z^2)^3} + \frac{\mathfrak{C} + \mathfrak{c}z}{(1 + z^2)^2} + \frac{\mathfrak{D} + \mathfrak{d}z}{1 + z^2}.$$

Vergleicht man nun diese Form mit der allgemeinen, so wird:

$$p = 1,\ q = 1,\ \cos\varphi = 0,\ \text{d. i. } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

und ferner:

$$M = z - z^3,\ Z = 1 + z^4.$$

Hieraus folgt:

$$\mathfrak{M} = 0,\ \mathfrak{m} = 2,\ \mathfrak{N} = 2,\ \mathfrak{n} = 0,\ \sin\varphi = 1,$$

mithin:

$$\mathfrak{A} = -\frac{4}{4}\cdot 0 = 0,\ \mathfrak{a} = 1.$$

Es ist daher:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{a}z = z,$$

ferner:

$$P = \frac{z - z^3 - z - z^5}{1 + z^2} = -z^3;$$

folglich:

$$\mathfrak{P} = 0,\ \mathfrak{p} = 1$$

und:

$$\mathfrak{B} = 0,\ \mathfrak{b} = \frac{1}{2}.$$

Hieraus ergiebt sich weiter:

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{b}z = \frac{1}{2}z \ \text{ und } \ Q = \frac{-z^3 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^5}{1 + z^2} = -\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^3,$$

folglich:

$$\mathfrak{Q} = 0 \text{ und } \mathfrak{q} = 0,$$

also:

$$\mathfrak{C} = 0,\ \mathfrak{c} = 0.$$

Schliesslich wird:

$$R = -\frac{\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^3}{1 + z^2} = -\frac{1}{2}z,$$

demnach:

$$\mathfrak{R} = 0,\ \mathfrak{r} = -\frac{1}{2}$$

und:

$$\mathfrak{D} = 0,\ \mathfrak{d} = -\frac{1}{4}.$$

Es sind daher die gesuchten Brüche:

$$\frac{z}{(1 + z^2)^4} + \frac{z}{2(1 + z^2)^3} - \frac{z}{4(1 + z^2)}.$$

Der Zähler des noch übrigen Bruches aber ist:

$$S = \frac{R - (\mathfrak{D} + \mathfrak{d}z)}{1 + z^2} = -\frac{1}{4}z + \frac{1}{4}z^3.$$

Der Bruch selbst wird daher gleich

$$\frac{-z + z^3}{4(1 + z^4)}$$

sein.

§ 210.

Auf diese Weise ist daher zugleich der Ergänzungsbruch gefunden, welcher mit den gefundenen Brüchen zusammengenommen die gegebene Function ergiebt. Hat man nämlich für den Bruch:

$$\frac{M}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)^k Z}$$

alle Partialbrüche gefunden, die aus dem Factor $(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)^k$ entspringen, und setzt man die Reihe der zur Bildung derselben erforderlichen Functionen P, Q, R, S, T noch weiter fort, so ist diejenige von diesen Grössen, welche auf die letzte der zur Aufsuchung der Zähler verwendeten Functionen folgt, der Zähler des noch übrigen Bruches mit dem Nenner Z. Für $k=1$ ist nämlich der noch übrige Bruch gleich $\frac{P}{Z}$, für $k=2$ gleich $\frac{Q}{Z}$, für $k=3$ gleich $\frac{R}{Z}$ u. s. w. Hat man aber diesen noch übrigen Bruch mit dem Nenner Z gefunden, so kann man denselben nach den angegebenen Regeln noch weiter zerlegen.

13. Capitel.

Von den rekurrenten Reihen.

§ 211.

Zu dieser Art von Reihen, welche Moivre **rekurrente** zu nennen pflegt, rechne ich alle diejenigen **Reihen, welche** aus der durch wirkliche **Division** ausgeführten Entwicklung einer jeden **gebrochenen Function entstehen.** Wir haben von diesen Reihen schon früher gezeigt, dass sich ein jedes ihrer Glieder aus einer gewissen Anzahl der vorhergehenden nach einem unveränderlichen Gesetze, welches vom Nenner der gebrochenen Function abhängt, bestimmt. Da ich aber soeben dargetan habe, dass sich jede gebrochene Function in andere einfachere zerlegen lässt, so folgt hieraus, dass auch jede rekurrente Reihe in andere einfachere zerlegt werden kann. In diesem Capitel soll daher die **Zerlegung der rekurrenten Reihen** irgend welchen Grades in **andere einfachere** untersucht werden.

§ 212.

Ist die echte gebrochene Function:

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \cdots}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \cdots}$$

gegeben, und entwickelt man dieselbe durch Ausführung der Division in die rekurrente Reihe:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \cdots,$$

so ist das Gesetz, nach welchem die Coefficienten fortschreiten, aus dem Früheren bekannt. Wenn man nun jene gebrochene Function in ihre einfachen Brüche zerlegt und einen jeden derselben in eine rekurrente Reihe entwickelt, so muss offenbar die Summe aller dieser aus den Partialbrüchen entstandenen Reihen gleich der rekurrenten Reihe

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \cdots$$

sein. Es geben also die Partialbrüche, welche wir nach dem Früheren finden können, Partialreihen, deren Beschaffenheit man wegen ihrer Einfachheit leicht erkennt. Da nun die Partialreihen zusammengenommen wieder die gegebene rekurrente Reihe hervorbringen, so wird man auch **durch die Partialreihen eine tiefere Einsicht in die Natur der rekurrenten Reihe** erlangen können.

§ 213.

Die aus den einzelnen Partialbrüchen entstandenen rekurrenten Reihen seien:

$$\begin{array}{l} a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \cdots \\ a' + b'z + c'z^2 + d'z^3 + e'z^4 + \cdots \\ a'' + b''z + c''z^2 + d''z^3 + e''z^4 + \cdots \\ a''' + b'''z + c'''z^2 + d'''z^3 + e'''z^4 + \cdots \end{array}$$

u. s. w.

Da diese zusammengenommen der folgenden Reihe:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \cdots$$

gleich sein sollen, so muss notwendig:

$$\begin{array}{l} A = a + a' + a'' + a''' + \cdots \\ B = b + b' + b'' + b''' + \cdots \\ C = c + c' + c'' + c''' + \cdots \\ D = d + d' + d'' + d''' + \cdots \end{array}$$

u. s. w.

sein. Wenn man daher in den einzelnen Reihen, welche aus den Partialbrüchen entstanden sind, die Coefficienten der Potenz z^n bestimmen kann, so giebt deren Summe den Coefficienten der Potenz z^n in der rekurrenten Reihe $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$.

§ 214.

Es könnte hier jedoch der Zweifel entstehen, ob denn auch aus der **Gleichheit** zweier solchen Reihen:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \cdots$$

mit Notwendigkeit folge, dass die Coefficienten gleicher Potenzen von z in beiden Reihen gleich seien, oder dass $A = \mathfrak{A}$, $B = \mathfrak{B}$, $C = \mathfrak{C}$, $D = \mathfrak{D}$ u. s. w. sei. Dieser Zweifel wird leicht gehoben, wenn man bedenkt, dass jene Gleichheit bestehen soll, was auch z für einen Wert erhalten möge. Ist also $z = 0$, so ist offenbar $A = \mathfrak{A}$. Zieht man diese gleichen

Glieder beiderseits ab und dividirt alsdann die übrige Gleichung durch z, so wird:

$$B + Cz + Dz^2 + \cdots = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}z + \mathfrak{D}z^2 + \cdots,$$

und somit $B = \mathfrak{B}$. Ebenso zeigt man, dass $C = \mathfrak{C}$, $D = \mathfrak{D}$ u. s. w. ist.

§ 215.

Wir betrachten also die Reihen, welche aus den Partialbrüchen, in die ein gegebener Bruch zerlegt werden kann, entstehen.

Nun giebt zunächst der Bruch

$$\frac{\mathfrak{A}}{1 - pz}$$

bekanntlich die **Reihe**:

$$\frac{\mathfrak{A}}{1 - pz} = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}pz + \mathfrak{A}p^2z^2 + \mathfrak{A}p^3z^3 + \cdots,$$

deren allgemeines Glied

$$\mathfrak{A}p^n z^n$$

ist. Man nennt nämlich diesen Ausdruck in der Regel das allgemeine Glied, weil aus ihm dadurch, dass man für n der Reihe nach alle Zahlen setzt, sämtliche Glieder der Reihe hervorgehen.

Ferner entsteht aus dem Bruche

$$\frac{\mathfrak{A}}{(1 - pz)^2}$$

die **Reihe**:

$$\frac{\mathfrak{A}}{(1 - pz)^2} = \mathfrak{A} + 2\mathfrak{A}pz + 3\mathfrak{A}p^2z^2 + 4\mathfrak{A}p^3z^3 + \cdots,$$

deren allgemeines Glied ist:

$$(n + 1)\mathfrak{A}p^n z^n.$$

Ebenso ist der Bruch:

$$\frac{\mathfrak{A}}{(1 - pz)^3} = \mathfrak{A} + 3\mathfrak{A}pz + 6\mathfrak{A}p^2z^2 + 10\mathfrak{A}p^3z^3 + \cdots,$$

und das allgemeine Glied dieser Reihe ist:

$$\frac{(n + 1)(n + 2)}{1 \cdot 2}\mathfrak{A}p^n z^n.$$

Ueberhaupt aber giebt der Bruch

$$\frac{\mathfrak{A}}{(1 - pz)^k}$$

die folgende Reihe:

$$\frac{\mathfrak{A}}{(1-pz)^k} = \mathfrak{A} + k\mathfrak{A}pz + \frac{k(k+1)}{1\cdot 2}\mathfrak{A}p^2z^2 + \frac{k(k+1)(k+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\mathfrak{A}p^3z^3 + \cdots,$$

und das allgemeine Glied dieser Reihe ist:

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+k-1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(k-1)}\mathfrak{A}p^nz^n.$$

Nach dem zu schliessen, wie die Reihe selbst fortschreitet, würde man als allgemeines Glied derselben den Ausdruck:

$$\frac{k(k+1)(k+2)\dots(k+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots n}\mathfrak{A}p^nz^n$$

erhalten; dieser ist jedoch dem vorigen gleich, was man einsieht, wenn man kreuzweis multiplicirt. Denn es ist:

$$1\cdot 2\cdot 3\dots n(n+1)\dots(n+k-1) = 1\cdot 2\cdot 3\dots(k-1)\cdot k\dots(k+n-1),$$

und zwar ist dies eine identische Gleichung.

§ 216.

So oft man also bei der Zerlegung gebrochener Functionen auf Partialbrüche von der Form $\frac{\mathfrak{A}}{(1-pz)^k}$ kommt, kann man das allgemeine Glied der rekurrenten Reihe $A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots$, welche aus jener gebrochenen Function entsteht, angeben. Es ist dasselbe nämlich gleich der Summe der allgemeinen Glieder der Reihen, welche aus den Partialbrüchen hervorgehen.

Erstes Beispiel.

Das allgemeine Glied der rekurrenten Reihe zu finden, welche aus dem Bruche:

$$\frac{1-z}{1-z-2z^2}$$

entsteht.

Die sich hieraus ergebende Reihe ist:

$$1+0z+2z^2+2z^3+6z^4+10z^5+22z^6+42z^7+86z^8+\cdots$$

Um den Coefficienten der Potenz z^n zu finden, zerlege man den Bruch

$$\frac{1-z}{1-z-2z^2}$$

in

$$\frac{\frac{2}{3}}{1+z}+\frac{\frac{1}{3}}{1-2z}.$$

Hieraus ergiebt sich als allgemeines Glied:

$$\left(\frac{2}{3}(-1)^n+\frac{1}{3}2^n\right)z^n = \frac{2^n\pm 2}{3}z^n,$$

wobei das Zeichen + oder − zu nehmen ist, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Zweites Beispiel.

Das allgemeine Glied der rekurrenten Reihe:

$$1+4z+14z^2+46z^3+146z^4+454z^5+\cdots,$$

welche aus dem Bruche:

$$\frac{1-z}{1-5z+6z^2}$$

entspringt, zu finden.

Da der Nenner des gegebenen Bruches gleich $(1-2z)(1-3z)$ ist, so lässt sich der Bruch in die beiden:

$$\frac{-1}{1-2z}+\frac{2}{1-3z}$$

zerlegen; und aus diesen folgt als allgemeines Glied:

$$2\cdot 3^nz^n-2^nz^n=(2\cdot 3^n-2^n)z^n.$$

Drittes Beispiel.

Das allgemeine Glied der Reihe:

$$1+3z+4z^2+7z^3+11z^4+18z^5+29z^6+47z^7+\cdots,$$

welche aus dem Bruche:

$$\frac{1+2z}{1-z-z^2}$$

entspringt, zu finden.

Da der Nenner dieses Bruches die beiden Factoren $1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z$ und $1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z$ besitzt, so erhält man, wenn man den Bruch zerlegt,

$$\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z}+\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z},$$

und hieraus folgt als allgemeines Glied:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}z^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}z^n.$$

Viertes Beispiel.

Das allgemeine Glied der Reihe:

$$a+(\alpha a+b)z+(\alpha^2a+\alpha b+\beta a)z^2+(\alpha^3a+\alpha^2b+2\alpha\beta a+\beta b)z^3+\cdots,$$

welche durch Entwicklung des Bruches:

$$\frac{a+bz}{1-\alpha z-\beta z^2}$$

entsteht, zu finden.

Zerlegt man den gegebenen Bruch, so erhält man folgende Partialbrüche:

$$\frac{\left(a\left(\sqrt{\alpha^2+4\beta}+\alpha\right)+2b\right):2\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{1-\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}z}+\frac{\left(a\left(\sqrt{\alpha^2+4\beta}-\alpha\right)-2b\right):2\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{1-\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}z},$$

und hieraus folgt als allgemeines Glied:

$$\frac{a\left(\sqrt{\alpha^2+4\beta}+\alpha\right)+2b}{2\sqrt{\alpha^2+4\beta}}\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}\right)^n z^n+\frac{a\left(\sqrt{\alpha^2+4\beta}-\alpha\right)-2b}{2\sqrt{\alpha^2+4\beta}}\left(\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}\right)$$

Aus diesem lassen sich die allgemeinen Glieder aller derjenigen rekurrenten Reihen, bei denen jedes Glied durch die beiden vorhergehenden bestimmt wird, leicht finden.

Fünftes Beispiel.

Das allgemeine Glied der Reihe:

$$1+z+2z^2+2z^3+3z^4+3z^5+4z^6+4z^7+\cdots,$$

welche aus dem Bruche:

$$\frac{1}{1-z-z^2+z^3}=\frac{1}{(1-z)^2\,(1+z)}$$

entspringt, zu finden.

Hier ist zwar das Gesetz, nach welchem die Reihe fortschreitet, auf den ersten Blick ersichtlich, so dass keine weitere Auseinandersetzung erforderlich wäre. Da indessen die Partialbrüche:

$$\frac{\frac{1}{2}}{(1-z)^2}+\frac{\frac{1}{4}}{1-z}+\frac{\frac{1}{4}}{1+z}$$

sich ergeben, so erhält man daraus das allgemeine Glied:

$$\frac{1}{2}(n+1)z^n+\frac{1}{4}z^n+\frac{1}{4}(-1)^n z^n=\frac{2n+3\pm1}{4}z^n,$$

wo das Zeichen $+$ oder -1 gilt, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

§ 217.

Auf diese Weise würde man die allgemeinen Glieder aller rekurrenten Reihen finden können, da sich alle Brüche in solche einfachen Partialbrüche zerlegen lassen. Will man aber imaginäre Ausdrücke vermeiden, so kommt man häufig auf Partialbrüche wie:

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2},\quad \frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^2},\quad \frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^k},$$

und wir müssen daher zusehen, welcher Art die Reihen sind, die aus der Entwicklung dieser entspringen. Nun giebt zwar zunächst der Bruch:

$$\frac{\mathfrak{A}}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2},$$

wenn man ihn entwickelt, wegen der Formel:

$$\cos n\varphi=2\cos\varphi\cos(n-1)\varphi-\cos(n-2)\varphi,$$

die Reihe:

$$\begin{array}{l}\mathfrak{A}+2\mathfrak{A}pz\cos\varphi+2\mathfrak{A}p^2z^2\cos2\varphi+2\mathfrak{A}p^3z^3\cos3\varphi+2\mathfrak{A}p^4z^4\cos4\varphi+\cdots\\ \qquad\qquad\quad+\mathfrak{A}p^2z^2\qquad\quad+2\mathfrak{A}p^3z^3\cos\varphi\;\;+2\mathfrak{A}p^4z^4\cos2\varphi+\cdots\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\;+\mathfrak{A}p^4z^4\qquad\quad+\cdots\end{array}$$

u. s. w.;

indessen lässt sich daraus das allgemeine Glied nicht so leicht erkennen.

§ 218.

Wir wollen daher, um unsern Zweck zu erreichen, die beiden Reihen betrachten:

$$Ppz\sin\varphi+Pp^2z^2\sin2\varphi+Pp^3z^3\sin3\varphi+Pp^4z^4\sin4\varphi+\cdots$$
$$Q+Qpz\cos\varphi+Qp^2z^2\cos2\varphi+Qp^3z^3\cos3\varphi+Qp^4z^4\cos4\varphi+\cdots,$$

welche jedenfalls aus der Entwicklung eines Bruches mit dem Nenner $1-2pz\cos\varphi+p^2z^2$ entspringen. Es entsteht nämlich die erstere der beiden Reihen aus dem Bruche:

$$\frac{Ppz\sin\varphi}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2},$$

die letztere dagegen aus dem folgenden:

$$\frac{Q-Qpz\cos\varphi}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2}.$$

Addirt man diese beiden Brüche, so giebt ihre Summe

$$\frac{Q+Ppz\sin\varphi-Qpz\cos\varphi}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2}$$

eine Reihe, deren allgemeines Glied ist:

$$(P\sin n\varphi+Q\cos n\varphi)p^nz^n$$

Dieser Bruch wird aber dem gegebenen Bruche:

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2}$$

gleich, wenn man

$$Q=\mathfrak{A}\ \text{und}\ P=\mathfrak{A}\cot\varphi+\mathfrak{B}\operatorname{cosec}\varphi$$

setzt. Folglich ist das allgemeine Glied der Reihe, welche aus dem Bruche:

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2}$$

entspringt, gleich:

$$\frac{\mathfrak{A}\cos\varphi\sin n\varphi+\mathfrak{B}\sin n\varphi+\mathfrak{A}\sin\varphi\cos n\varphi}{\sin\varphi}p^nz^n=\frac{\mathfrak{A}\sin(n+1)\varphi+\mathfrak{B}\sin n\varphi}{\sin\varphi}p^nz^n.$$

§ 219.

Um das allgemeine Glied in dem Falle zu finden, wenn der Nenner des Bruches eine **Potenz** von der Form

$$(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^k$$

ist, ist es bequemer, diesen Bruch in zwei, wenn auch imaginäre Brüche zu zerlegen, nämlich in:

$$\frac{a}{(1-(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)pz)^k}+\frac{b}{(1-(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi)pz)^k}.$$

Dann ist das allgemeine Glied der Reihe, welche aus diesen beiden Brüchen zusammengenommen entsteht, gleich:

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+k-1)}{1\cdot2\cdot3\ldots(k-1)}(\cos n\varphi+\sqrt{-1}\sin n\varphi)ap^nz^n$$
$$+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+k-1)}{1\cdot2\cdot3\ldots(k-1)}(\cos n\varphi-\sqrt{-1}\sin n\varphi)bp^nz^n.$$

Setzt man daher:

$$a+b=f,\quad a-b=\frac{g}{\sqrt{-1}},$$

so dass

$$a=\frac{f\sqrt{-1}+g}{2\sqrt{-1}}\quad\text{und}\quad b=\frac{f\sqrt{-1}-g}{2\sqrt{-1}}$$

ist, so ist der Ausdruck:

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+k-1)}{1\cdot2\cdot3\ldots(k-1)}(f\cos n\varphi+g\sin n\varphi)p^nz^n$$

das allgemeine Glied der Reihe, welche aus den beiden Brüchen:

$$\frac{\frac{1}{2}f+\frac{1}{2\sqrt{-1}}g}{(1-(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)pz)^k}+\frac{\frac{1}{2}f-\frac{1}{2\sqrt{-1}}g}{(1-(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi)pz)^k},$$

oder aus diesem einzigen Bruche:

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}f-kfpz\cos\varphi+\frac{k(k-1)}{1\cdot2}fp^2z^2\cos2\varphi-\frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot2\cdot3}fp^3z^3\cos3\varphi+\cdots\\ +kgpz\sin\varphi-\frac{k(k-1)}{1\cdot2}fp^2z^2\sin2\varphi+\frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot2\cdot3}fp^3z^3\sin3\varphi-\cdots\end{array}\right\}}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^k}$$

entsteht.

§ 220.

Setzt man also $k=2$, so ist das allgemeine Glied der Reihe, welche aus dem Bruche:

$$\frac{f-2pz(f\cos\varphi-g\sin\varphi)+p^2z^2(f\cos2\varphi-g\sin2\varphi)}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^2}$$

entsteht, gleich:

$$(n+1)(f\cos n\varphi+g\sin n\varphi)p^nz^n.$$

Nun ist aber (nach § 218 für $\mathfrak{B}=0$) das allgemeine Glied der Reihe, welche sich aus dem Bruche:

$$\frac{a}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2}=\frac{a-2apz\cos\varphi+ap^2z^2}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^2}$$

ergiebt, gleich:

$$\frac{a\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}p^nz^n.$$

Addirt man also diese beiden Brüche und setzt darauf:

$$\begin{gathered} a+f=\mathfrak{A} \\ 2a\cos\varphi+2f\cos\varphi-2g\sin\varphi=-\mathfrak{B} \\ a+f\cos 2\varphi-g\sin 2\varphi=0, \end{gathered}$$

wodurch

$$\begin{aligned} g &= \frac{\mathfrak{B}+2\mathfrak{A}\cos\varphi}{2\sin\varphi}=\frac{\mathfrak{B}\sin\varphi+\mathfrak{A}\sin 2\varphi}{2\sin^2\varphi} \\ a &= \frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\cos\varphi}{1-\cos 2\varphi}=\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\cos\varphi}{2\sin^2\varphi} \\ f &= -\frac{\mathfrak{A}\cos 2\varphi+\mathfrak{B}\cos\varphi}{2\sin^2\varphi} \end{aligned}$$

wird, so ist das allgemeine Glied der Reihe, welche aus dem Bruche:

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^2}$$

entspringt, gleich:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\cos\varphi}{2\sin^3\varphi}\sin(n+1)\varphi p^n z^n \\ &+(n+1)\frac{\mathfrak{B}\sin\varphi\sin n\varphi+\mathfrak{A}\sin 2\varphi\sin n\varphi-\mathfrak{B}\cos\varphi\cos n\varphi-\mathfrak{A}\cos 2\varphi\cos n\varphi}{2\sin^2\varphi}p^n z^n \\ &=-\frac{(n+1)\big(\mathfrak{A}\cos(n+2)\varphi+\mathfrak{B}\sin(n+1)\varphi\big)}{2\sin^2\varphi}p^n z^n \\ &\quad+\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\cos\varphi)\sin(n+1)\varphi}{2\sin^3\varphi}p^n z^n \\ &=\frac{\frac{1}{2}(n+3)\sin(n+1)\varphi-\frac{1}{2}(n+1)\sin(n+3)\varphi}{2\sin^3\varphi}\mathfrak{A}p^n z^n \\ &\quad+\frac{\frac{1}{2}(n+2)\sin n\varphi-\frac{1}{2}n\sin(n+2)\varphi}{2\sin^3\varphi}\mathfrak{B}p^n z^n. \end{aligned}$$

Es ist daher schliesslich das gesuchte allgemeine Glied der aus dem Bruche:

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^2}$$

entstehenden Reihe gleich:

$$\frac{(n+3)\sin(n+1)\varphi-(n+1)\sin(n+3)\varphi}{4\sin^3\varphi}\mathfrak{A}p^n z^n$$
$$+\frac{(n+2)\sin n\varphi-n\sin(n+2)\varphi}{4\sin^3\varphi}\mathfrak{B}p^n z^n.$$

§ 221.

Ist $k=3$, so ist das allgemeine Glied der Reihe, welche aus dem Bruche:

$$\frac{f-3pz(f\cos\varphi-g\sin\varphi)+3p^2z^2(f\cos 2\varphi-g\sin 2\varphi)-p^3z^3(f\cos 3\varphi-g\sin 3\varphi)}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^3}$$

entspringt, gleich:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}(f\cos n\varphi+g\sin n\varphi)p^n z^n.$$

Ferner aber ist das allgemeine Glied der aus dem Bruche:

$$\frac{a+bpz}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^2}=\frac{a-pz(2a\cos\varphi-b)+p^2z^2(a-2b\cos\varphi)+bp^3z^3}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^3}$$

entstehenden Reihe gleich:

$$\frac{(n+3)\sin(n+1)\varphi-(n+1)\sin(n+3)\varphi}{4\sin^3\varphi}ap^n z^n$$
$$+\frac{(n+2)\sin n\varphi-n\sin(n+2)\varphi}{4\sin^3\varphi}bp^n z^n.$$

Addirt man jene beiden Brüche und setzt darauf den Zähler gleich $\mathfrak{A}$ so wird:

$$\begin{aligned} a+f&=\mathfrak{A} \\ 3f\cos\varphi-3g\sin\varphi+2a\cos\varphi-b&=0 \\ 3f\cos 2\varphi-3g\sin 2\varphi+a-2b\cos\varphi&=0 \\ f\cos 3\varphi-g\sin 3\varphi-b&=0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} a&=\frac{f\cos 3\varphi-g\sin 3\varphi-3f\cos\varphi+3g\sin\varphi}{2\cos\varphi} \\ &=2g\sin^2\varphi\operatorname{tang}\varphi-f-2f\sin^2\varphi. \end{aligned}$$

Ferner findet man:

$$\frac{f}{g}=\frac{\sin 5\varphi-2\sin 3\varphi+\sin\varphi}{\cos 5\varphi-2\cos 3\varphi+\cos\varphi}, \quad \text{und}$$
$$a+f=\mathfrak{A}=2g\sin^2\varphi\operatorname{tang}\varphi-2f\sin^2\varphi,$$

also:

$$\frac{\mathfrak{A}}{2\sin^2\varphi}=\frac{g\sin\varphi-f\cos\varphi}{\cos\varphi}.$$

Hieraus wird schliesslich:

$$\begin{aligned} f&=\frac{\mathfrak{A}(\sin\varphi-2\sin 3\varphi+\sin 5\varphi)}{16\sin^5\varphi} \\ g&=\frac{\mathfrak{A}(\cos\varphi-2\cos 3\varphi+\cos 5\varphi)}{16\sin^5\varphi}, \end{aligned}$$

und da

$$16\sin^5\varphi = \sin 5\varphi - 5\sin 3\varphi + 10\sin\varphi$$

ist, so wird:

$$a = \frac{\mathfrak{A}\,(\;9\sin\varphi - 3\sin 3\varphi)}{16\sin^5\varphi}$$

$$b = \frac{\mathfrak{A}\,(-\sin 2\varphi + \sin 2\varphi)}{16\sin^5\varphi} = 0.$$

Endlich ist noch:

$$3\sin\varphi - \sin 3\varphi = 4\sin^3\varphi;$$

demnach:

$$a = \frac{3\mathfrak{A}}{4\sin^2\varphi}.$$

Folglich ist das gesuchte allgemeine Glied:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}\mathfrak{A}p^n z^n\,\frac{\sin(n+1)\varphi - 2\sin(n+3)\varphi + \sin(n+5)\varphi}{16\sin^5\varphi}$$
$$+\;3\,\mathfrak{A}p^n z^n\,.\,\frac{(n+3)\sin(n+1)\varphi - (n+1)\sin(n+3)\varphi}{16\sin^5\varphi}$$
$$= \frac{\mathfrak{A}p^n z^n}{16\sin^5\varphi}\left\{\frac{(n+4)(n+5)}{1\cdot 2}\sin(n+1)\varphi - \frac{2(n+1)(n+5)}{1\cdot 2}\sin(n+3)\varphi\right.$$
$$\left. + \frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}\sin(n+5)\varphi\right\}.$$

§ 222.

Es ist daher das allgemeine Glied der Reihe, welche aus dem Bruche:

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}pz}{(1 - 2pz\cos\varphi + p^2z^2)^3}$$

entspringt, gleich:

$$\frac{\mathfrak{A}p^n z^n}{16\sin^5\varphi}\left\{\frac{(n+4)(n+5)}{1\cdot 2}\sin(n+1)\varphi - \frac{2(n+1)(n+5)}{1\cdot 2}\sin(n+3)\varphi\right.$$
$$\left. + \frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}\sin(n+5)\varphi\right\}$$
$$+ \frac{\mathfrak{B}p^n z^n}{16\sin^5\varphi}\left\{\frac{(n+3)(n+4)}{1\cdot 2}\sin n\varphi - \frac{2n(n+4)}{1\cdot 2}\sin(n+2)\varphi\right.$$
$$\left. + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\sin(n+4)\varphi\right\}.$$

Geht man noch weiter vorwärts, so findet man ebenso für die aus dem Bruche:

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}pz}{(1 - 2pz\cos\varphi + p^2z^2)^4}$$

entstehende Reihe das allgemeine Glied:

$$\frac{\mathfrak{A}p^n z^n}{64\sin^7\varphi}\left\{\frac{(n+7)(n+6)(n+5)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin(n+1)\varphi - \frac{3(n+1)(n+7)(n+6)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin(n+3)\varphi\right.$$
$$\left. + \frac{3(n+1)(n+2)(n+7)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin(n+5)\varphi - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin(n+7)\varphi\right\}$$
$$+ \frac{\mathfrak{B}p^n z^n}{64\sin^7\varphi}\left\{\frac{(n+6)(n+5)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin n\varphi - \frac{3n(n+6)(n+5)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin(n+2)\varphi\right.$$
$$\left. + \frac{3n(n+1)(n+6)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin(n+4)\varphi - \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin(n+6)\varphi\right\}.$$

Aus diesen Ausdrücken ist leicht ersichtlich, wie die Formeln für die allgemeinen Glieder der Reihen, welche aus noch höheren Potenzen entspringen, weiter fortgehen. Um aber in die Art und Weise, wie sie entstehen, einen tieferen Einblick zu gewinnen, ist es gut, sich die Gleichungen zu merken:

$$\begin{aligned}
\sin\varphi &= \sin\varphi \\
4\sin^3\varphi &= 3\sin\varphi - \sin 3\varphi \\
16\sin^5\varphi &= 10\sin\varphi - 5\sin 3\varphi + \sin 5\varphi \\
64\sin^7\varphi &= 35\sin\varphi - 21\sin 3\varphi + 7\sin 5\varphi - \sin 7\varphi \\
256\sin^9\varphi &= 126\sin\varphi - 84\sin 3\varphi + 36\sin 5\varphi - 9\sin 7\varphi + \sin 9\varphi
\end{aligned}$$

u. s. w.

§ 223.

Da man also auf diese Weise alle gebrochenen Functionen in reelle Partialbrüche zerlegen kann, so kann man auch die allgemeinen Glieder aller rekurrenten Reihen in reeller Form darstellen. Um dies desto deutlicher zu machen, wollen wir noch einige Beispiele hinzufügen.

Erstes Beispiel.

Aus dem Bruche:

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)} = \frac{1}{1 - z - z^2 + z^4 + z^5 - z^6}$$

entsteht die rekurrente Reihe:

$$1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + 5z^5 + 7z^6 + 8z^7 + 10z^8 + 12z^9 + \cdots,$$

deren allgemeines Glied gesucht wird.

Ordnet man den gegebenen Bruch nach seinen Factoren wie folgt:

$$\frac{1}{(1-z)^3(1+z)(1+z+z^2)},$$

so giebt die Zerlegung in Partialbrüche:

$$\frac{1}{6(1-z)^3}+\frac{1}{4(1-z)^2}+\frac{17}{72(1-z)}+\frac{1}{8(1+z)}+\frac{2+z}{9(1+z+z^2)}.$$

Von diesen giebt

der erste $\frac{1}{6(1-z)^3}$ das allgemeine Glied: $\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}\frac{1}{6}z^n$
$= \frac{n^2+3n+2}{12}z^n,$

der zweite $\frac{1}{4(1-z)^2}$ " " " $\frac{n+1}{4}z^n,$

der dritte $\frac{17}{72(1-z)}$ " " " $\frac{17}{72}z^n,$

der vierte $\frac{1}{8(1+z)}$ " " " $\frac{1}{8}(-1)^n z^n.$

Vergleicht man ferner den fünften Bruch

$$\frac{2+z}{9(1+z+z^2)}$$

mit der allgemeinen Form

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2}\ (\S\ 218),$$

so wird:

$$p=\ 1,\ \varphi=\frac{\pi}{3}=60^\circ,\ \mathfrak{A}=\frac{2}{9},\ \mathfrak{B}=-\frac{1}{9},$$

und es ist daher das allgemeine Glied, welches daraus entsteht, gleich:

$$\frac{2\sin(n+1)\varphi-\sin n\varphi}{9\sin\varphi}(-1)^n z^n=\frac{4\sin(n+1)\varphi-2\sin n\varphi}{9\sqrt{3}}(-1)^n z^n$$

$$=\frac{4\sin(n+1)\frac{\pi}{3}-2\sin n\frac{\pi}{3}}{9\sqrt{3}}(-1)^n z^n.$$

Vereinigt man alle diese Ausdrücke zu einer Summe, so ergiebt sich als allgemeines Glied der gegebenen Reihe:

$$\left(\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+\frac{47}{72}\right)z^n\pm\frac{1}{8}z^n\pm\frac{4\sin(n+1)\frac{\pi}{3}-2\sin n\frac{\pi}{3}}{9\sqrt{3}}z^n,$$

wobei die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Dabei beachte man, dass, wenn n eine Zahl von der Form $3m$ ist: $\frac{4\sin\frac{1}{3}(n+1)\pi-2\sin\frac{1}{3}n\pi}{9\sqrt{3}}=\pm\frac{2}{9}$ ist. Ist dagegen n von der Form $3m+1$, so wird dieser Ausdruck gleich $\pm\frac{1}{9}$, und ist n von der Form $3m+2$, so wird derselbe gleich $\mp\frac{1}{9}$, und zwar ist hier jedesmal das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist. Hiernach können wir die Beschaffenheit der Reihe auch so ausdrücken, dass wir sagen:

Ist	so ist ihr allgemeines Glied:
$n=6m+0$	$\left(\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+\ 1\right)z^n$
$n=6m+1$	$\left(\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+\frac{5}{12}\right)z^n$
$n=6m+2$	$\left(\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+\frac{2}{3}\right)z^n$
$n=6m+3$	$\left(\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+\frac{3}{4}\right)z^n$
$n=6m+4$	$\left(\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+\frac{2}{3}\right)z^n$
$n=6m+5$	$\left(\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+\frac{5}{12}\right)z^n.$

So gilt z. B., wenn $n=50$ ist, die Form: $n=6m+2$, und das betreffende Glied der Reihe ist gleich $234\,z^{50}$.

Zweites Beispiel.

Aus dem Bruche:

$$\frac{1+z+z^2}{1-z-z^4+z^5}$$

entsteht die rekurrente Reihe:

$$1+2z+3z^2+3z^3+4z^4+5z^5+6z^6+6z^7+7z^8+\cdots$$

Man soll das allgemeine Glied derselben finden.

Der gegebene Bruch kann auf die Form:

$$\frac{1+z+z^2}{(1-z)^2(1+z)(1+z^2)}$$

gebracht und daher in die folgenden Partialbrüche zerlegt werden:

$$\frac{3}{4(1-z)^2}+\frac{3}{8(1-z)}+\frac{1}{8(1+z)}+\frac{-1+z}{4(1+z^2)}.$$

Der erste derselben $\frac{3}{4(1-z)^2}$ giebt das allgemeine Glied $\frac{3(n+1)}{4}z^n$,

„ zweite „ $\frac{3}{8(1-z)}$ „ „ „ „ $\frac{3}{8}z^n$,

„ dritte „ $\frac{1}{8(1+z)}$ „ „ „ „ $\frac{1}{8}(-1)^n z^n$.

Ferner erhält man aus der Vergleichung des vierten Bruches

$$\frac{-1+z}{4(1+z^2)}$$

mit der allgemeinen Form $\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2}$:

$$p=1,\ \cos\varphi=0 \text{ oder } \varphi=\frac{\pi}{2},\ \text{ und } \mathfrak{A}=-\frac{1}{4},\ \mathfrak{B}=+\frac{1}{4}.$$

Es wird daher das aus diesem Bruche entstehende allgemeine Glied gleich

$$\left(-\frac{1}{4}\sin\frac{n+1}{2}\pi+\frac{1}{4}\sin\frac{n}{2}\pi\right)z^n,$$

und somit das gesuchte allgemeine Glied der gegebenen Reihe gleich:

$$\left(\frac{3}{4}n+\frac{9}{8}\right)z^n \pm \frac{1}{8}z^n - \frac{1}{4}\left(\sin\frac{n+1}{2}\pi - \sin\frac{n}{2}\pi\right)z^n.$$

Ist daher	so ist das allgemeine Glied:
$n=4m+0$	$\left(\frac{3}{4}n+1\right)z^n$
$n=4m+1$	$\left(\frac{3}{4}n+\frac{5}{4}\right)z^n$
$n=4m+2$	$\left(\frac{3}{4}n+\frac{3}{2}\right)z^n$
$n=4m+3$	$\left(\frac{3}{4}n+\frac{3}{4}\right)z^n$.

Ist also z. B. $n=50$, so ist n von der Form $4m+2$, und das betreffende Glied der Reihe ist gleich $39z^{50}$.

§ 224.

Ist daher eine rekurrente Reihe gegeben, so kann man auch, da sich der Bruch, aus dem sie entsteht, leicht angeben lässt, das allgemeine Glied derselben nach den angeführten Regeln finden.

Man kann aber an dem Gesetz, nach welchem jedes Glied der rekurrenten Reihe aus den vorhergehenden gebildet wird, sogleich den Nenner des Bruches erkennen, dessen Factoren dann die Form des allgemeinen Gliedes geben, während durch den Zähler nur die Coefficienten desselben bestimmt werden. Es sei z. B. die rekurrente Reihe

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+Fz^5+\cdots$$

gegeben, und es sei aus dem Gesetze, nach welchem sich jedes Glied aus einer gewissen Anzahl der vorhergehenden bestimmt, als Nenner des Bruches der folgende gefunden:

$$1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3,$$

so wird:

$$D=\alpha C+\beta B+\gamma A,\ E=\alpha D+\beta C+\gamma B,\ F=\alpha E+\beta D+\gamma C,\ \ldots$$

Nennt man daher nach Moivre die Multiplikatoren $+\alpha, +\beta, +\gamma$ die **Beziehungsskala**, so beruht das Fortschreitungsgesetz der Reihe gerade auf dieser Beziehungsskala, und diese ergiebt zugleich den Nenner des Bruches, durch dessen Entwicklung die rekurrente Reihe entsteht.

§ 225.

Wenn man also das allgemeine Glied oder den Coefficienten irgend einer Potenz z^n finden will, so muss man die einfachen oder doppelten Factoren des Nenners $1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3$ suchen, und zwar letztere in dem Falle, wo man die imaginären Factoren vermeiden will. Sind dann zunächst die einfachen Factoren alle von einander verschieden und reell, der Nenner also gleich:

$$(1-pz)(1-qz)(1-rz),$$

und ergiebt die Zerlegung des die gegebene Reihe erzeugenden Bruches die Partialbrüche:

$$\frac{\mathfrak{A}}{1-pz}+\frac{\mathfrak{B}}{1-qz}+\frac{\mathfrak{C}}{1-rz},$$

so ist das allgemeine Glied der Reihe gleich:

$$(\mathfrak{A}p^n+\mathfrak{B}q^n+\mathfrak{C}r^n)z^n.$$

Sind aber zwei Factoren einander gleich, also etwa $q=p$, so ist dasselbe von der Form:

$$((\mathfrak{A}n+\mathfrak{B})p^n+\mathfrak{C}r^n)z^n;$$

und sind alle drei einander gleich, also $p=q=r$, so ist das allgemeine Glied von der Form:

$$(\mathfrak{A}n^2+\mathfrak{B}n+\mathfrak{C})p^n z^n.$$

Besitzt jedoch der Nenner $1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3$ einen zweifachen Factor, ist derselbe also gleich

$$(1 - pz)(1 - 2qz\cos\varphi + q^2z^2),$$

so ist das allgemeine Glied der Reihe gleich:

$$\left(\mathfrak{A}p^n + \frac{\mathfrak{B}\sin(n+1)\varphi + \mathfrak{C}\sin n\varphi}{\sin\varphi}\, q^n\right) z^n.$$

Da sich nun hieraus, wenn man für n der Reihe nach die Werte 0, 1, 2 setzt, die Glieder A, Bz, Cz^2 ergeben müssen, so lassen sich dadurch die Werte von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ bestimmen.

§ 226.

Ist die Beziehungsskala zweigliedrig, d. h. wird jedes Glied aus den beiden vorhergehenden bestimmt, so dass

$$C = \alpha B - \beta A,\ \ D = \alpha C - \beta B,\ \ E = \alpha D - \beta C, \ldots$$

ist, so entsteht die rekurrente Reihe, welche wir gleich

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \cdots + Pz^n + Qz^{n+1} + \cdots$$

setzen wollen, offenbar aus einem Bruche, dessen Nenner $1 - \alpha z + \beta z^2$ ist. Setzt man nun diesen Nenner gleich $(1 - pz)(1 - qz)$, so ist:

$$p + q = \alpha,\ pq = \beta,$$

und das allgemeine Glied der Reihe ist:

$$(\mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n)\, z^n.$$

Hieraus erhält man für $n = 0$:

$$A = \mathfrak{A} + \mathfrak{B},$$

und für $n = 1$:

$$B = \mathfrak{A}p + \mathfrak{B}q,$$

woraus folgt:

$$Aq - B = \mathfrak{A}(q - p),$$

und somit:

$$\mathfrak{A} = \frac{Aq - B}{q - p},\quad \mathfrak{B} = \frac{Ap - B}{p - q}.$$

Nachdem man so die Werte von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gefunden hat, erhält man

$$P = \mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n,\ \ Q = \mathfrak{A}p^{n+1} + \mathfrak{B}q^{n+1}$$

und ferner:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \frac{B^2 - \alpha AB + \beta A^2}{4\beta - \alpha^2}.$$

§ 227.

Hieraus lässt sich ein Verfahren ableiten, um jedes Glied nur aus einem einzigen vorhergehenden zu bestimmen, während sonst dazu nach dem Fortschreitungsgesetz zwei solche erforderlich sind. Da nämlich

$$P = \mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n \quad\text{und}\quad Q = \mathfrak{A}p\cdot p^n + \mathfrak{B}q\cdot q^n$$

ist, so wird:

$$Pq - Q = \mathfrak{A}(q - p)p^n \quad\text{und}\quad Pp - Q = \mathfrak{B}(p - q)q^n,$$

und wenn man beide Ausdrücke mit einander multiplicirt:

$$P^2pq - (p + q)PQ + Q^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{B}(p - q)^2p^nq^n = 0.$$

Nun ist aber:

$$p + q = \alpha;\ \ pq = \beta;\ \ (p - q)^2 = (p + q)^2 - 4pq = \alpha^2 - 4\beta;\ \ p^nq^n = \beta^n.$$

Substituirt man demnach diese Werte, so erhält man:

$$\beta P^2 - \alpha PQ + Q^2 = (\beta A^2 - \alpha AB + B^2)\,\beta^n$$

oder

$$\frac{\beta P^2 - \alpha PQ + Q^2}{\beta A^2 - \alpha AB + B^2} = \beta^n.$$

Diese Formel drückt eine bemerkenswerte Eigenschaft derjenigen rekurrenten Reihen aus, bei denen sich jedes Glied aus den beiden vorhergehenden bestimmt. Kennt man nun irgend ein Glied P, so ist das folgende:

$$Q = \frac{1}{2}\alpha P + \sqrt{\left(\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta\right)P^2 + (B^2 - \alpha AB + \beta A^2)\beta^n},$$

und dieser Ausdruck ist, obwohl er scheinbar von irrationaler Form ist, dennoch stets rational, da irrationale Glieder in der Reihe nicht vorkommen.

§ 228.

Man kann ferner auch aus je zwei aufeinanderfolgenden Gliedern Pz^n und Qz^{n+1} das viel weiter von ihnen abstehende Glied Xz^{2n} leicht finden. Setzt man nämlich:

$$X = fP^2 + gPQ - h\mathfrak{A}\mathfrak{B}\beta^n,$$

so erhält man, da

$$\begin{aligned} P &= \mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n \\ Q &= \mathfrak{A}p^{n+1} + \mathfrak{B}q^{n+1} \\ X &= \mathfrak{A}p^{2n} + \mathfrak{B}q^{2n} \end{aligned}$$

ist:

$$
\begin{aligned}
fP^2 &= f\mathfrak{A}^2 p^{2n} + f\mathfrak{B}^2 q^{2n} + 2f\mathfrak{A}\mathfrak{B}\beta^n\\
gPQ &= g\mathfrak{A}^2 p\cdot p^{2n} + g\mathfrak{B}^2 q\cdot q^{2n} + g\mathfrak{A}\mathfrak{B}\alpha\beta^n\\
-h\mathfrak{A}\mathfrak{B}\beta^n &= \qquad\qquad\qquad -h\mathfrak{A}\mathfrak{B}\beta^n,
\end{aligned}
$$

und da die Summe dieser drei Gleichungen mit der Gleichung:

$$X = \mathfrak{A}P^{2n} + \mathfrak{B}Q^{2n}$$

übereinstimmen muss, so folgt:

$$
\begin{aligned}
f + gp &= \frac{1}{\mathfrak{A}}\\
f + gq &= \frac{1}{\mathfrak{B}}\\
h &= 2f + g\alpha.
\end{aligned}
$$

Hieraus ergiebt sich:

$$g = \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(p-q)};\quad f = \frac{\mathfrak{A}p - \mathfrak{B}q}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(p-q)}.$$

Nun ist aber:

$$\mathfrak{B} - \mathfrak{A} = \frac{\alpha A - 2B}{p-q},\quad \mathfrak{A}p - \mathfrak{B}q = \frac{\alpha B - 2\beta A}{p-q};$$

folglich:

$$f = \frac{\alpha B - 2\beta A}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\alpha^2 - 4\beta)},\quad g = \frac{\alpha A - 2B}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\alpha^2 - 4\beta)},$$

oder:

$$
\begin{aligned}
f &= \frac{2\beta A - \alpha B}{B^2 - \alpha AB + \beta A^2}\\
g &= \frac{2B - \alpha A}{B^2 - \alpha AB + \beta A^2}\\
h &= \frac{(4\beta - \alpha^2)A}{B^2 - \alpha AB + \beta A^2}.
\end{aligned}
$$

Es wird somit:

$$X = \frac{(2\beta A - \alpha B)P^2 + (2B - \alpha A)PQ}{B^2 - \alpha AB + \beta A^2} - A\beta^n.$$

Auf eine ähnliche Art findet man:

$$X = \frac{\big(\alpha\beta A - (\alpha^2 - 2\beta)B\big)P^2 + (2B - \alpha A)Q^2}{\alpha(B^2 - \alpha AB + \beta A^2)} - \frac{2B\beta^n}{\alpha},$$

und wenn man hieraus β^n eliminirt:

$$X = \frac{(\beta A - \alpha B)P^2 + 2BPQ - AQ^2}{B^2 - \alpha AB + \beta A^2}.$$

§ 229.

Schreibt man auch noch die folgenden Glieder der Reihe hin, also:

$$A + Bz + Cz^2 + \cdots + Pz^n + Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + \cdots + Xz^{2n} + Yz^{2n+1} + Zz^{2n+2} + \cdots,$$

so ist auf dieselbe Weise wie vorher:

$$Z = \frac{(\beta A - \alpha B)Q^2 + 2BQR - AR^2}{B^2 - \alpha AB + \beta A^2},$$

oder, da

$$R = \alpha Q - \beta P$$

ist,

$$Z = \frac{-\beta^2 AP^2 + 2\beta(\alpha A - B)PQ + \big(\alpha B - (\alpha^2 - \beta)A\big)Q^2}{B^2 - \alpha AB + \beta A^2}.$$

Nun ist aber:

$$Z = \alpha Y - \beta X,\ \text{ also }\ Y = \frac{Z + \beta X}{\alpha};$$

folglich:

$$Y = \frac{-\beta BP^2 + 2\beta APQ + (B - \alpha A)Q^2}{B^2 - \alpha AB + \beta A^2}.$$

So kann man ferner aus X und Y auf ähnliche Art die Coefficienten der Potenzen z^{4n} und z^{4n+1}, aus diesen wieder die von z^{8n} und z^{8n+1} u. s. w. bestimmen.

Beispiel.

Ist die rekurrente Reihe:

$$1 + 3z + 4z^2 + 7z^3 + 11z^4 + 18z^5 + \cdots + Pz^n + Qz^{n+1} + \cdots$$

gegeben, in welcher irgend ein Coefficient gleich der Summe der beiden vorhergehenden ist, so ist der Nenner des sie erzeugenden Bruches $1 - z - z^2$. Es ist daher:

$$\alpha = 1,\ \beta = -1\ \text{ und }\ A = 1,\ B = 3,$$

folglich:

$$B^2 - \alpha AB + \beta A^2 = 5.$$

Hieraus wird zunächst:

$$Q = \frac{P + \sqrt{5P^2 + 20(-1)^n}}{2} = \frac{P + \sqrt{5P^2 \pm 20}}{2},$$

wobei das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist. Ist z. B. $n = 4$, also $P = 11$, so ist:

$$Q = \frac{11 + \sqrt{5 \cdot 121 + 20}}{2} = \frac{11 + 25}{2} = 18.$$

Ist ferner X der Coefficient von z^{2n}, so wird:

$$X = \frac{-4P^2 + 6PQ - Q^2}{5},$$

folglich der Coefficient von z^8 gleich:

$$\frac{-4 \cdot 121 + 6 \cdot 198 - 324}{5} = 76.$$

Da aber

$$Q = \frac{P + \sqrt{5P^2 \pm 20}}{2}$$

ist, so wird:

$$Q^2 = \frac{3P^2 \pm 10 + P\sqrt{5P^2 \pm 20}}{2},$$

und daher:

$$X = \frac{-P^2 \mp 2 + P\sqrt{5P^2 \pm 20}}{2}.$$

Man findet demnach aus irgend einem Gliede Pz^n der Reihe die beiden Glieder:

$$\frac{P + \sqrt{5P^2 \pm 20}}{2} z^{n+1} \quad \text{und} \quad \frac{-P^2 \mp 2 + P\sqrt{5P^2 \pm 20}}{2} z^{2n}.$$

§ 230.

In ähnlicher Weise kann bei denjenigen rekurrenten Reihen, bei welchen sich jedes Glied aus den drei vorhergehenden bestimmt, jedes Glied auch bloss aus den beiden vorhergehenden gefunden werden.

Ist nämlich die rekurrente Reihe:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots + Pz^n + Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + \cdots$$

gegeben, deren Beziehungsskala α, $-\beta$, $+\gamma$ sei, und die somit aus einem Bruche mit dem Nenner $1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3$ entspringt, und drückt man P, Q, R in derselben Weise durch die Factoren dieses Nenners, welche $(1 - pz)(1 - qz)(1 - rz)$ seien, aus, so wird:

$$\begin{aligned} P &= \mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n + \mathfrak{C}r^n \\ Q &= \mathfrak{A}pp^n + \mathfrak{B}qq^n + \mathfrak{C}rr^n \\ R &= \mathfrak{A}p^2p^n + \mathfrak{B}q^2q^n + \mathfrak{C}r^2r^n. \end{aligned}$$

Da nun

$$p + q + r = \alpha, \quad pq + pr + qr = \beta \text{ und } pqr = \gamma$$

ist, so erhält man folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} &R^3 - (2\alpha Q - \beta P) R^2 + \big((\alpha^2 + \beta) Q^2 - (\alpha\beta + 3\gamma) PQ + \alpha\gamma P^2\big) R \\ &\qquad - \big((\alpha\beta - \gamma) Q^3 - (\alpha\gamma + \beta^2) Q^2 P + 2\beta\gamma P^2 Q - \gamma^2 P^3\big) \\ &= \Big\{C^3 - (2\alpha B - \beta A) C^2 + \big((\alpha^2 + \beta) B^2 - (\alpha\beta + 3\gamma) AB + \alpha\gamma A^2\big) C \\ &\qquad - \big((\alpha\beta - \gamma) B^3 - (\alpha\gamma + \beta^2) AB^2 + 2\beta\gamma A^2 B - \gamma^2 A^3\big)\Big\} \cdot \gamma^n. \end{aligned}$$

Es wird daher der Coefficient R aus den beiden vorhergehenden P und Q durch Auflösung einer kubischen Gleichung gefunden.

§ 231.

Nachdem wir die allgemeinen Glieder der rekurrenten Reihen betrachtet haben, müssen wir nun noch ein Verfahren aufsuchen, um die Summen solcher Reihen zu bestimmen. Da nun offenbar die Summe einer rekurrenten, ins Unendliche fortschreitenden Reihe gleich dem Bruche ist, aus dem sie entspringt, und da ferner der Nenner dieses Bruches sich unmittelbar aus dem Fortschreitungsgesetze selbst ergiebt, so haben wir nur noch den Zähler desselben zu ermitteln. Ist also die Reihe:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + Gz^6 + \cdots$$

gegeben, und liefert das Fortschreitungsgesetz derselben den Nenner:

$$1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4,$$

so nehme man an, dass der Bruch, welcher der ins Unendliche fortgesetzten Reihe gleich ist, der folgende sei:

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4}.$$

Da durch Entwicklung desselben wiederum die gegebene Reihe hervorgehen muss, so erhält man durch Vergleichung beider:

$$\begin{aligned} a &= A \\ b &= B - \alpha A \\ c &= C - \alpha B + \beta A \\ d &= D - \alpha C + \beta B - \gamma A. \end{aligned}$$

Demnach ist die gesuchte Summe:

$$\frac{A+(B-\alpha A)z+(C-\alpha B+\beta A)z^2+(D-\alpha C+\beta B-\gamma A)z^3}{1-\alpha z+\beta z^2-\gamma z^3+\delta z^4}.$$

§ 232.

Hiernach ist auch leicht ersichtlich, wie man die Summe einer rekurrenten Reihe finden kann, wenn man dieselbe nur bis zu einem bestimmten Gliede fortsetzt. Soll z. B. die Summe der soeben angeführten, aber nur bis zum Gliede Pz^n fortgesetzten Reihe gefunden werden, so setze man:

$$s=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\cdots+Pz^n.$$

Da nun die Summe der sich ins Unendliche erstreckenden Reihe bekannt ist, so braucht man nur die Summe der unendlich vielen auf Pz^n noch folgenden Glieder zu suchen, und da die Reihe derselben durch z^{n+1} dividirt wiederum eine rekurrente Reihe von derselben Beschaffenheit wie die gegebene darstellt, so erhält man, wenn man

$$t=Qz^{n+1}+Rz^{n+2}+Sz^{n+3}+Tz^{n+4}+\cdots$$

setzt:

$$t=\frac{Qz^{n+1}+(R-\alpha Q)z^{n+2}+(S-\alpha R+\beta Q)z^{n+3}+(T-\alpha S+\beta R-\gamma Q)z^{n+4}}{1-\alpha z+\beta z^2-\gamma z^3+\delta z^4}.$$

Es ist somit die gesuchte Summe:

$$s=\frac{A+(B-\alpha A)z+(C-\alpha B+\beta A)z^2+(D-\alpha C+\beta B-\gamma A)z^3}{1-\alpha z+\beta z^2-\gamma z^3+\delta z^4}$$
$$-\frac{Qz^{n+1}+(R-\alpha Q)z^{n+2}+(S-\alpha R+\beta Q)z^{n+3}+(T-\alpha S+\beta R-\gamma Q)z^{n+4}}{1-\alpha z+\beta z^2-\gamma z^3+\delta z^4}.$$

§ 233.

Ist also z. B. die Beziehungsskala zweigliedrig und gleich $(\alpha, -\beta)$, so ist die Summe der Reihe:

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots+Pz^n,$$

welche aus dem Bruche:

$$\frac{A+(B-\alpha A)z}{1-\alpha z+\beta z^2}$$

entspringt, die folgende:

$$\frac{A+(B-\alpha A)z-Qz^{n+1}-(R-\alpha Q)z^{n+2}}{1-\alpha z+\beta z^2},$$

und dieser Ausdruck ist, da nach der Beschaffenheit der Reihe $R=\alpha Q-\beta P$ sein soll, gleich:

$$\frac{A+(B-\alpha A)z-Qz^{n+1}+\beta Pz^{n+2}}{1-\alpha z+\beta z^2}.$$

Beispiel.

Ist die Reihe:

$$1+3z+4z^2+7z^3+\cdots+Pz^n$$

gegeben, so ist:

$$\alpha=1,\ \beta=-1,\ A=1,\ B=3,$$

und demnach ihre Summe gleich:

$$\frac{1+2z-Qz^{n+1}-Pz^{n+2}}{1-z-z^2}.$$

Setzt man aber darin $z=1$, so wird die Summe der Reihe:

$$1+3+4+7+11+\cdots+P=P+Q-3.$$

Es ist daher die Summe des letzten und des darauffolgenden Gliedes um 3 grösser als die Summe der ganzen Reihe. Da aber:

$$Q=\frac{P+\sqrt{5P^2\pm 20}}{2}$$

ist, so ist die Summe der Reihe:

$$1+3+4+7+11+\cdots+P=\frac{3P-6+\sqrt{5P^2\pm 20}}{2},$$

so dass sich dieselbe ganz allein aus dem letzten Gliede bestimmt.