Erster Teil.

Von den Functionen veränderlicher Zahlgrössen, ihrer Zerlegung in Factoren und Entwicklung in unendliche Reihen; ferner die Lehre von den Logarithmen, Kreisbogen und deren Sinus und Tangenten, und viele andere Gegenstände, welche für die Analysis des Unendlichen von Wichtigkeit sind.

1. Capitel.

Von den Functionen überhaupt.

§ 1.

Eine constante Zahlgrösse ist eine bestimmte Zahlgrösse, welche beständig denselben Wert behält.

Dergleichen Zahlgrössen sind die Zahlen jeglicher Art, da ja dieselben den ihnen einmal beigelegten Wert unverändert beibehalten. Zur Bezeichnung constanter Zahlgrössen bedient man sich der Anfangsbuchstaben des Alphabets a, b, c u. s. w. Zwar pflegt man in der niederen Analysis, wo nur bestimmte Zahlgrössen in Betracht gezogen werden, mit den ersten Buchstaben des Alphabets die bekannten, mit den letzten aber die unbekannten Zahlgrössen zu bezeichnen; in der höheren Analysis jedoch wird nicht so sehr auf diese Unterscheidung geachtet, da es hier vorzugsweise auf ein solches Unterscheidungsmerkmal der Zahlgrössen ankommt, durch welches die einen als constant, die andern als veränderlich hingestellt werden.

§ 2.

Eine veränderliche Zahlgrösse ist eine unbestimmte oder eine allgemeine Zahlgrösse, welche alle bestimmten Werte ohne Ausnahme in sich begreift.

Da sich nun jeder bestimmte Wert durch eine Zahl ausdrücken lässt, so begreift eine veränderliche Zahlgrösse die Gesamtheit aller Zahlen in sich. Auf dieselbe Art nämlich, wie man aus den Begriffen der Einzelwesen die Begriffe der Art und des Geschlechts ableitet, ist auch die veränderliche Zahlgrösse ein Geschlecht, unter welchem alle bestimmten Zahlgrössen begriffen sind. **Derartige veränderliche Zahlgrössen bezeichnet man gewöhnlich durch die letzten Buchstaben des Alphabets** z, y, x u. s. w.

§ 3.

Eine veränderliche Zahlgrösse wird zu einer bestimmten, wenn ihr irgend ein bestimmter Wert beigelegt wird.

Es kann daher eine veränderliche Zahlgrösse auf unzählig viele Arten zu einer bestimmten werden, da man für sie jede beliebige Zahl setzen kann. Die Bedeutung einer veränderlichen Zahlgrösse ist noch nicht erschöpft, so lange nicht säintliche bestimmten Werte für sie gesetzt worden sind. Eine veränderliche Zahlgrösse begreift daher alle nur denkbaren Zahlen in sich, die positiven sowohl wie die negativen, die ganzen sowie die gebrochenen, die rationalen sowie die irrationalen und die transcendenten. Ja auch die Null und die imaginären Zahlen sind davon nicht ausgeschlossen.

§ 4.

Eine **Function** einer veränderlichen Zahlgrösse ist ein **analytischer Ausdruck**, der auf irgend eine Weise aus der veränderlichen Zahlgrösse und aus eigentlichen Zahlen oder aus constanten Zahlgrössen zusammengesetzt ist.

Jeder analytische Ausdruck also, welcher ausser der veränderlichen Zahlgrösse z nur noch constante Zahlgrössen enthält, ist eine Function von z. So sind z. B. die Ausdrücke

$$a+3z;\quad az-4z^2;\quad az+b\sqrt{a^2-4z^2};\quad c^z \text{ u. s. w.}$$

Functionen von z.

§ 5.

Eine Function einer veränderlichen Zahlgrösse ist daher selbst wieder eine veränderliche Zahlgrösse.

Da man nämlich für die veränderliche Zahlgrösse jeden bestimmten Wert setzen kann, so wird auch die Function unzählig viele bestimmte Werte annehmen; ja es ist, da die veränderliche Zahlgrösse auch die imaginären Werte einschliesst, kein bestimmter Wert denkbar, den die Function nicht sollte annehmen können. So kann zwar die Function $\sqrt{9-z^2}$, wenn man für z nur reelle Zahlen setzt, niemals einen grösseren Wert als 3 erhalten; legt man aber z auch imaginäre Werte von der Art bei, wie $5\sqrt{-1}$ einer ist, so lässt sich kein bestimmter Wert angeben, den man nicht aus der Formel $\sqrt{9-z^2}$ erhalten könnte. Man kommt jedoch zuweilen auch auf Functionen, die nur scheinbar solche sind, während sie, wie auch die veränderliche Zahlgrösse sich ändern möge, doch stets denselben Wert behalten. So sehen zwar die Ausdrücke z^0, 1^z, $\frac{a^2-az}{a-z}$ scheinbar wie Functionen aus; sie sind jedoch in Wirklichkeit constante Zahlgrössen.

§ 6.

Der **Hauptunterschied der Functionen** beruht auf der Art und Weise, wie dieselben aus der veränderlichen und den constanten Zahlgrössen gebildet sind.

Er hängt also von den Operationen ab, durch welche die Zahlgrössen in irgend welcher Anordnung mit einander verbunden werden können; solche Operationen sind die Addition und Subtraction, die Multiplication und Division, die Erhebung zu Potenzen und Ausziehung der Wurzeln; auch gehört hierher die Auflösung der Gleichungen. Ausser diesen sogenannten algebraischen Operationen giebt es noch mehrere, transcendente genannte Operationen, wie die Bildung von Exponential- und logarithmischen Grössen, und ausserdem noch unzählig viele, auf welche die Integralrechnung führt.

Man kann sich vor der Hand gewisse besondere Arten von Functionen merken, wie z. B. die Vielfachen von z: $2z$, $3z$, $\frac{1}{2}z$, az u. s. w. und die Potenzen von z, wie z^2, z^3, $z^{\frac{1}{2}}$, z^{-1} u. s. w. Ebenso wie diese aus einer einzigen Operation hergeleiteten Ausdrücke, so werden auch alle andern, welche aus irgend welchen Operationen entspringen, mit dem Namen von Functionen belegt.

§ 7.

Die Functionen werden **eingeteilt in algebraische** und **transcendente**. Unter jenen versteht man die, in welchen nur algebraische, unter diesen die, in welchen auch transcendente Operationen vorkommen.

Es sind daher die Vielfachen und die Potenzen von z, sowie überhaupt alle durch die vorher genannten algebraischen Operationen gebildeten Ausdrücke, wie z. B.

$$\frac{a+bz^n-c\sqrt{2z-z^2}}{a^2z-3bz^3}$$

algebraische Functionen. Häufig können sogar die algebraischen Functionen nicht einmal entwickelt dargestellt werden, wie z. B. die Function Z von z, wenn sie definirt wird durch die Gleichung:

$$Z^5 = az^2Z^3 - bz^4Z^2 + cz^3Z - 1.$$

Obgleich man nämlich diese Gleichung nicht auflösen kann, so ist doch sicher Z irgend einem aus der Veränderlichen z und den Constanten zusammengesetzten Ausdrucke gleich und deshalb Z eine gewisse Function von z. Was aber die transcendenten Functionen angeht, so ist zu beachten, dass sie nur dann wirklich transcendent sind, wenn eine transcendente Operation nicht nur darin vorkommt, sondern auch die veränderliche Zahlgrösse selbst betrifft. Erstrecken sich nämlich die transcendenten Operationen nur auf die constanten Zahlgrössen, so ist die Function trotzdem als algebraische zu betrachten. Bedeutet z. B. c den Umfang eines Kreises mit dem Halbmesser 1, so ist c allerdings eine transcendente Zahlgrösse, nichtsdestoweniger sind die Ausdrücke $c+z$, cz^2, $4z^c$ u. s. w. algebraische Functionen von z. Denn der Umstand, dass Einige in Zweifel darüber sind, ob man einen solchen Ausdruck z^c mit Recht den algebraischen Functionen zuzählen dürfe oder nicht, ist von keiner grossen Bedeutung; wollten doch sogar Einige die Potenzen von z mit irrationalen Exponenten wie $z^{\sqrt{2}}$ lieber interscendente als algebraische Functionen nennen.

§ 8.

Die **algebraischen** Functionen teilt man wieder ein in **rationale** und **irrationale**; jenes sind solche, in welchen die Veränderliche unter keinem Wurzelzeichen vorkommt, dieses aber solche, in welchen die Wurzelzeichen sich auch über die veränderliche Zahlgrösse erstrecken.

In den rationalen Functionen kommen also weiter keine Operationen vor als: Addition, Subtraction, Multiplication, Division und Erhebung zu Potenzen, deren Exponenten ganze Zahlen sind. Es sind also z. B.

$$a+z,\ a-z,\ az,\ \frac{a^2+z^2}{a+z},\ az^3-bz^5 \text{ u. s. w.}$$

rationale, hingegen

$$\sqrt{z},\ a+\sqrt{a^2-z^2},\ \sqrt[3]{a-2z+z^2},\ \frac{a^2-z\sqrt{a^2+z^2}}{a+z}$$

irrationale Functionen von z.

Die **irrationalen** Functionen scheidet man wieder passend in **entwickelte** (explicite) und **unentwickelte** (implicite).

Entwickelt heisst eine irrationale Function, wenn sie vermittelst der Wurzelzeichen abgesondert dargestellt ist, wie in den oben angeführten Beispielen. Die unentwickelten irrationalen Functionen aber werden durch algebraische Gleichungen definirt. So ist z. B. Z eine unentwickelte irrationale Function von z, wenn sie durch die Gleichung $Z^7=azZ^2-bz^5$ bestimmt wird; denn es ist selbst unter Zulassung von Wurzelzeichen nicht möglich, einen entwickelten Ausdruck für Z zu finden, da die gemeine Algebra noch nicht bis zu diesem Grade der Vollkommenheit gebracht ist.

§ 9.

Die **rationalen** Functionen zerfallen ihrerseits wieder in **ganze** und **gebrochene**.

In jenen kommen weder Potenzen von z mit negativen Exponenten vor, noch enthalten ihre Ausdrücke Brüche, in deren Nennern die veränderliche

Zahlgrösse z auftritt. Hiernach werden gebrochene Functionen solche sein, in denen z enthaltende Nenner oder Potenzen von z mit negativen Exponenten vorkommen. Die allgemeine Form der ganzen Functionen ist demnach:

$$a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+fz^5+\cdots,$$

denn es lässt sich keine ganze Function von z denken, die nicht in diesem Ausdrucke enthalten wäre. Alle gebrochenen Functionen dagegen sind, da man stets mehrere Brüche in einen zusammenziehen kann, in folgender Form enthalten:

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+fz^5+\cdots}{\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\epsilon z^4+\zeta z^5+\cdots}.$$

Dabei beachte man, dass die constanten Zahlgrössen a, b, c, d u. s. w. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ u. s. w., mögen sie nun positiv oder negativ, ganz oder gebrochen, rational oder irrational, oder auch transcendent sein, die Natur der Function nicht ändern.

§ 10.

Demnächst ist besonders die Einteilung der Functionen in **eindeutige** *(uniformes)* und **mehrdeutige** *(multiformes)* zu merken.

Eine eindeutige Function ist eine solche, welche für jeden bestimmten Wert der veränderlichen Zahlgrösse z ebenfalls nur einen einzigen bestimmten Wert annimmt. Eine mehrdeutige Function dagegen ist eine solche, welche für jeden bestimmten Wert der Veränderlichen z mehrere bestimmte Werte ergiebt. Die rationalen ganzen sowohl wie gebrochenen Functionen sind daher eindeutige Functionen, da sie für jeden beliebigen Wert der Veränderlichen nur einen einzigen bestimmten Wert geben. Die irrationalen Functionen sind dagegen sämtlich mehrdeutig, weil die Wurzelzeichen mehrdeutig sind und mehrere Werte unter sich begreifen. Auch unter den transcendenten Functionen giebt es eindeutige und mehrdeutige, ja sogar unendlichvieldeutige, wie den Kreisbogen, der zum Sinus z gehört; denn es giebt unzählig viele Kreisbogen, die alle denselben Sinus haben. Zur Bezeichnung einzelner eindeutiger Functionen werden wir uns der Buchstaben P, Q, R, S, T u. s. w. bedienen.

§ 11.

Eine **zweideutige** Function von z ist eine solche Function, welche für jeden bestimmten Wert von z zwei Werte giebt.

Derartige Functionen sind die Quadratwurzeln wie $\sqrt{2z+z^2}$; denn für jeden beliebigen Wert von z hat der Ausdruck $\sqrt{2z+z^2}$ zwei Werte, einen positiven und einen negativen. Ueberhaupt aber wird Z eine zweideutige Function von z, wenn sie durch die quadratische Gleichung:

$$Z^2-PZ+Q=0,$$

in welcher P, Q eindeutige Functionen von z sind, bestimmt wird. Es ergiebt sich nämlich daraus:

$$Z = \tfrac{1}{2} P \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} P^2 - Q},$$

so dass also jedem Werte von z zwei bestimmte Werte von Z entsprechen. Diese Werte sind entweder beide reell oder beide imaginär, und ihre Summe ist, wie aus der Lehre von den Gleichungen bekannt ist, gleich P, ihr Product gleich Q.

§ 12.

Eine **dreideutige** Function von z ist eine solche, welche für eden Wert von z drei bestimmte Werte giebt.

Derartige Functionen entspringen aus der Auflösung der kubischen Gleichungen. Denn sind P, Q, R eindeutige Functionen und ist:

$$Z^3 - PZ^2 + QZ - R = 0,$$

so ist Z eine dreideutige Function von z, weil sie für jeden bestimmten Wert von z drei Werte erhält. Diese drei Werte von Z sind entweder sämtlich reell, oder einer von ihnen ist reell, die beiden andern aber imaginär, und es ist bekannt, dass ihre Summe stets gleich P, die Summe der Producte aus je zweien von ihnen gleich Q und das Product aller drei gleich R ist.

§ 13.

Eine **vierdeutige** Function von z ist eine solche, welche für jeden beliebigen Wert von z vier bestimmte Werte giebt.

Derartige Functionen entspringen aus der Auflösung der biquadratischen Gleichungen. Bedeuten nämlich P, Q, R, S eindeutige Functionen von z und ist:

$$Z^4 - PZ^3 + QZ^2 - RZ + S = 0,$$

so wird Z eine vierdeutige Function von z, weil jedem Werte von z vier Werte von Z entsprechen. Diese vier Werte sind entweder sämtlich reell, oder zwei von ihnen sind reell und zwei imaginär, oder es sind alle vier imaginär. Ferner ist ihre Summe stets gleich P, die Summe der Producte aus je zweien gleich Q, die Summe der Producte aus je dreien gleich R und das Product aller gleich S. — In ähnlicher Weise verhält es sich mit den fünfdeutigen und den übrigen mehrdeutigen Functionen.

§ 14.

Es ist somit Z eine **n-deutige** Function von z, wenn sie für jeden beliebigen Wert von z soviel Werte giebt, als die Zahl n Einheiten enthält, wenn sie also bestimmt wird durch die Gleichung:

$$Z^n - PZ^{n-1} + QZ^{n-2} - RZ^{n-3} + SZ^{n-4} - \cdots = 0.$$

Dabei muss aber n eine ganze Zahl und daher die Gleichung für Z auf die rationale Form gebracht sein, wenn man entscheiden will, eine wievieldeutige Function Z von z ist. Der Exponent der höchsten Potenz von Z giebt alsdann die gesuchte Anzahl der Werte von Z an, welche zu einem bestimmten Werte von z gehören. Ferner müssen P, Q, R, S u. s. w. eindeutige Functionen von z sein; denn wäre irgend eine derselben bereits eine mehrdeutige Function, so würde die Function Z weit mehr zu demselben Werte von z gehörige Werte geben, als die Zahl n angiebt. Finden sich unter den verschiedenen Werten von Z einige imaginäre, so ist deren Anzahl stets gerade, so dass also, wenn n eine ungerade Zahl ist, stets mindestens ein Wert von Z reell ist; dagegen kann möglicherweise gar kein Wert von Z reell sein, wenn n eine gerade Zahl ist.

§ 15.

Wenn Z eine solche mehrdeutige Function von z ist, dass sie stets nur einen einzigen reellen Wert ergiebt, dann ist Z gewissermassen eine eindeutige Function und kann auch meistens als eine solche gebraucht werden.

Derartige Functionen sind z. B., wofern P eine eindeutige Function von z ist, $\sqrt[3]{P}$, $\sqrt[5]{P}$, $\sqrt[7]{P}$ u. s. w., weil sie stets nur einen einzigen reellen Wert geben, während die andern alle imaginär sind. Daher kann man den Ausdruck $P^{\frac{m}{n}}$ den eindeutigen Functionen zuzählen, sobald n eine ungerade Zahl ist, mag nun m gerade oder ungerade sein. Ist aber n eine gerade Zahl, so hat $P^{\frac{m}{n}}$ entweder gar keinen oder zwei reelle Werte, und man kann somit den Ausdruck $P^{\frac{m}{n}}$, sobald n eine gerade Zahl und der Bruch $\frac{m}{n}$ durch die kleinsten Zahlen ausgedrückt ist, mit demselben Rechte zu den zweideutigen Functionen rechnen.

§ 16.

Ist y irgend eine Function von z, so ist auch umgekehrt z eine Function von y.

Da nämlich y Function von z ist, so giebt es, mag nun y ein- oder mehrdeutig sein, eine Gleichung, vermittelst welcher y durch z und durch constante Zahlgrössen bestimmt wird. Aus derselben Gleichung kann man aber auch z durch y und die constanten Zahlgrössen ausdrücken; es wird also z, da y eine veränderliche Zahlgrösse ist, gleich einem Ausdruck, welcher y und die constanten Zahlgrössen enthält, demnach eine Function von y ist. Darnach lässt sich auch beurteilen, eine wievieldeutige Function z von y ist; es kann nämlich z eine mehrdeutige Function von y werden, wenn auch y eine eindeutige Function von z war. Besteht z. B. zwischen y und z die Gleichung: $y^3 = ayz - bz^2$, so ist y eine dreideutige Function von z, dagegen z nur eine zweideutige Function von y.

§ 17.

Sind y und x Functionen von z, so ist auch y eine Function von x und umgekehrt x eine Function von y.

Denn da y eine Function von z ist, so ist auch z eine Function von y und ebenso z eine Function von x; folglich ist eine Function von y gleich einer Function von x. Da nun aus dieser Gleichung y durch x, oder umgekehrt x durch y bestimmt werden kann, so ist klar, dass y eine Function von x, oder x eine Function von y ist. Oft ist man freilich wegen der noch unvollkommenen Ausbildung der Algebra nicht im Stande, diese Functionen entwickelt darzustellen; indessen leuchtet doch zur Genüge ein, dass eine solche Umkehrung des Abhängigkeitsverhältnisses stattfindet, gerade wie wenn sämtliche Gleichungen aufgelöst werden könnten. Uebrigens lehrt die Algebra, wie man aus zwei Gleichungen, von denen die eine y und z, die andere x und z enthält, durch Elimination von z eine andere Gleichung zwischen x und y ableiten kann.

§ 18.

Endlich sind noch einige besondere Arten von Functionen zu merken. So heisst eine Function von z **gerade**, wenn sie denselben Wert giebt, mag man für z den bestimmten Wert $+k$ oder $-k$ setzen.

Eine derartige Function ist z^2, denn sie giebt sowohl für $z=+k$ als für $z=-k$ den bestimmten Wert $+k^2$. Ebenso sind die Potenzen z^4, z^6, z^8 u. s. w. und überhaupt alle Potenzen z^m gerade Functionen, wenn m eine gerade, gleichviel ob positive oder negative Zahl ist. Und da $z^{\frac{m}{n}}$ auch zu den eindeutigen Functionen gerechnet werden kann, wenn n eine ungerade Zahl ist, so ist offenbar auch $z^{\frac{m}{n}}$ eine gerade Function von z, wenn m gerade und n ungerade ist. Es werden daher Ausdrücke, die aus jenen Potenzen irgendwie zusammengesetzt sind, gerade Functionen von z darstellen, wie z. B. die Ausdrücke:

$$Z=a+bz^2+cz^4+dz^6+\cdots$$
$$Z=\frac{a+bz^2+cz^4+dz^6+\cdots}{\alpha+\beta z^2+\gamma z^4+\delta z^6+\cdots},$$

oder auch:

$$Z=a+bz^{\frac{2}{3}}+cz^{\frac{4}{5}}+dz^{\frac{6}{7}}+\cdots$$
$$Z=a+bz^{-\frac{2}{3}}+cz^{-\frac{4}{3}}+dz^{-\frac{2}{5}}+\cdots$$
$$Z=\frac{a+bz^{\frac{2}{7}}+cz^{-\frac{4}{5}}+dz^{\frac{8}{3}}}{\alpha+\beta z^{\frac{2}{3}}+\gamma z^{-\frac{2}{5}}+\delta z^{\frac{4}{7}}}.$$

Da diese Ausdrücke sämtlich eindeutige Functionen von z sind, so kann man sie auch gerade eindeutige Functionen von z nennen.

§ 19.

Eine **gerade mehrdeutige** Function von z ist eine solche, welche zwar für jeden Wert von z mehrere bestimmten Werte, aber doch dieselben Werte giebt, mag man $z=+k$ oder $z=-k$ setzen.

Es sei Z eine solche mehrdeutige gerade Function von z. Da eine mehrdeutige Function durch eine Gleichung zwischen Z und z definirt wird, in welcher der Exponent der höchsten Potenz von Z gerade die Zahl ist, welche angiebt, wieviel verschiedene Werte Z unter sich begreift, so ist Z eine zweideutige gerade Function von z, wenn $Z^2=az^4Z+bz^2$, eine dreideutige, wenn $Z^3-az^2Z^2+bz^4Z-cz^8=0$ ist. Bezeichnen überhaupt P, Q, R, S u. s. w. eindeutige gerade Functionen von z, so ist Z eine zweideutige gerade Function, wenn $Z^2-PZ+Q=0$, eine dreideutige, wenn $Z^3-PZ^2+QZ-R=0$ ist u. s. f.

§ 20.

Es ist also jede gerade eindeutige sowohl wie mehrdeutige Function von z ein Ausdruck, welcher aus der Veränderlichen z und constanten Zahlgrössen in der Art zusammengesetzt ist, dass die Exponenten der Potenzen von z gerade Zahlen sind.

Ausser den eindeutigen geraden Functionen, wofür bereits oben Beispiele angeführt sind, gehören also hierher Ausdrücke wie

$$az^2+\sqrt[3]{a^6z^4-bz^2} \text{ oder } az^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{z^2+\sqrt{a^4-z^4}} \text{ u. s. w.}$$

Es können folglich die geraden Functionen auch so definirt werden, dass man sagt, sie seien Functionen von z^2.

Setzt man nämlich in irgend einer Function Z von y an Stelle von yz^2, so wird dieselbe eine solche, in welcher die Exponenten der Potenzen von z sämtlich gerade sind. Jedoch muss man diejenigen Fälle ausnehmen, wo in Z Ausdrücke wie $\sqrt{y}$ oder andere Formen auftreten, die dadurch, dass man $y=z^2$ setzt, die Wurzelzeichen verlieren. Denn obwohl $y+\sqrt{ay}$ eine Function von y ist, so wird dieser Ausdruck doch, nachdem $y=z^2$ gesetzt ist, keine gerade Function von z, weil alsdann $y+\sqrt{ay}=z^2+az$ ist. Nach Ausschluss dieser Fälle ist indessen die zuletzt gegebene Erklärung der geraden Functionen richtig und sehr bequem, wenn man derartige Functionen bilden will.

§ 21.

Eine **ungerade Function** von z ist eine solche, welche den **entgegengesetzten Wert** annimmt, wenn man $-z$ an Stelle von z setzt.

Derartige Functionen von z sind demnach alle Potenzen von z, deren Exponenten ungerade Zahlen sind, wie z^1, z^3, z^5, z^7 u. s. w., ferner

z^{-1}, z^{-3}, z^{-5} u. s. w. Ebenso wird $z^{\frac{m}{n}}$ eine ungerade Function sein, wenn die Zahlen m und n beide ungerade sind. Ueberhaupt ist jeder aus diesen Potenzen gebildete Ausdruck eine ungerade Function, z. B. $az + bz^3$, $az + bz^{-1}$, desgleichen $z^{\frac{1}{3}} + az^{\frac{3}{5}} + bz^{-\frac{1}{5}}$ u. s. w. Die Art und die Bildung solcher Functionen wird man leicht aus dem entnehmen, was über die geraden Functionen gesagt ist.

§ 22.

Multiplicirt man eine gerade Function von z mit z oder irgend einer ungeraden Function von z, so ist das Product eine ungerade Function.

Ist P eine gerade Function von z, so ändert sie ihren Wert nicht, wenn man darin $-z$ an Stelle von z setzt. Tut man also dasselbe in dem Producte Pz, so geht es über in $-Pz$ und ist folglich eine ungerade Function. Ist ferner P eine gerade, Q eine ungerade Function von z, so behält nach der Erklärung der geraden und ungeraden Functionen P denselben Wert bei, wenn man darin $-z$ für z setzt, während Q den entgegengesetzten Wert annimmt, also in $-Q$ übergeht. Es geht demnach auch das Product PQ dadurch, dass man $-z$ für z setzt, in $-PQ$ über und ist folglich eine ungerade Function von z. So ist $a + \sqrt{a^2 + z^2}$ eine gerade, z^3 aber eine ungerade Function, demnach das Product $az^3 + z^3\sqrt{a^2 + z^2}$ ebenfalls eine ungerade Function. Dasselbe gilt von dem Producte $z \cdot \frac{a + bz^2}{\alpha + \beta z^2} = \frac{az + bz^3}{\alpha z + \beta z^2}$. Hieraus erhellt zu gleicher Zeit, dass auch die Quotienten $\frac{P}{Q}$ und $\frac{Q}{P}$ ungerade Functionen von z sein werden, wenn von den beiden Functionen P, Q die eine eine gerade, die andere eine ungerade Function von z ist.

§ 23.

Das Product oder der Quotient zweier ungeraden Functionen ist eine gerade Function.

Sind Q und S ungerade Functionen von z, so gehen dieselben, wenn man $-z$ für z setzt, über in $-Q$ und $-S$; dagegen behält das Product QS sowohl wie der Quotient $\frac{Q}{S}$ denselben Wert bei; sie sind also beide gerade Functionen von z. Hiernach ist offenbar das Quadrat einer ungeraden Function eine gerade, der Kubus eine ungerade, die vierte Potenz wieder eine gerade Function u. s. w.

§ 24.

Ist y eine ungerade Function von z, so ist auch umgekehrt z eine ungerade Function von y.

Denn da y eine ungerade Function von z ist, so geht y dadurch, dass man $-z$ für z setzt, in $-y$ über. Wird also z durch y bestimmt, so muss notwendig, nachdem $-y$ an Stelle von y gesetzt ist, auch z den entgegengesetzten Wert annehmen, also eine ungerade Function von z sein. Ist z. B. $y = z^3$, also y eine ungerade Function von z, so ergiebt sich auch z aus der Gleichung $z^3 = y$ oder $z = y^{\frac{1}{3}}$ als ungerade Function von y; und da $y = az + bz^3$ eine ungerade Function von z ist, so ist umgekehrt der aus der Auflösung der Gleichung $bz^3 + az = y$ für z sich ergebende Wert eine ungerade Function von y.

§ 25.

Wenn die Function y durch eine Gleichung bestimmt wird, in welcher die Exponenten der Potenzen von y und z*) in jedem einzelnen Gliede zusammen entweder überall eine gerade oder überall eine ungerade Zahl als Summe ergeben, so ist y eine ungerade Function von z.

Denn setzt man in einer solchen Gleichung überall zu gleicher Zeit $-y$ und $-z$ an die Stelle von y und z, so bleiben sämtliche Glieder der Gleichung entweder ungeändert, oder sie kehren ihr Vorzeichen um; die Gleichung selbst aber bleibt in beiden Fällen dieselbe. Daraus erhellt, dass $-y$ auf dieselbe Art durch $-z$ wie $+y$ durch $+z$ bestimmt wird. Es muss daher dadurch, dass man $-z$ für z setzt, der Wert von y in den entgegengesetzten übergehen, und somit y eine ungerade Function von z sein. So ergiebt sich z. B. y aus jeder der beiden Gleichungen $y^2 = ayz + bz^2 + c$ und $y^3 + ay^2z = byz^2 + cy + dz$ als eine ungerade Function von z.

§ 26.

Wenn Z eine Function von z und Y eine Function von y ist und wenn Y auf eben die Art durch y und constante Zahlgrössen, wie Z durch z und constante Zahlgrössen bestimmt wird, so nennt man die Functionen Y und Z ähnliche Functionen von y und z.

So sind z. B. Z und Y, wenn $Z = a + bz + cz^2$ und $Y = a + by + cy^2$, oder um auch mehrdeutige Functionen zu berücksichtigen, wenn $Z^3 = az^2Z + b$ und $Y^3 = ay^2Y + b$ ist, ähnliche Functionen von z und y. Wenn demnach Y und Z ähnliche Functionen von y und z sind, so geht die Function Z in die Function Y über, sobald man darin y an Stelle von z schreibt. Gewöhnlich drückt man diese Aehnlichkeit so aus, dass man sagt, Y sei eine eben solche Function von y wie Z von z, und zwar wendet man diese Ausdrucksweise an, gleichviel ob die Veränderlichen y und z

* Euler gebraucht hier das erst im § 83 erklärte Wort „Dimension".
Anm. d. Uebers.

von einander abhängen oder nicht. So ist $a(y+n)+b(y+n)^3$ eben die Function von $y+n$, wie $ay+by^3$ von y, und $\frac{a+bz+cz^2}{\alpha+\beta z+\gamma z^2}$ eben die Function von $\frac{1}{z}$, wie $\frac{az^2+bz+c}{\alpha z^2+\beta z+\gamma}$ von z; im ersten Falle ist $z=y+n$, im zweiten $y=\frac{1}{z}$. Hieraus erhellt deutlich, was es mit der Aehnlichkeit der Functionen, von welcher in der ganzen höheren Analysis ein sehr häufiger Gebrauch gemacht wird, für eine Bewandtnis hat. Uebrigens kann das bisher über die Natur der Functionen einer Veränderlichen Gesagte genügen, da eine ausführlichere Auseinandersetzung bei der folgenden Anwendung gegeben wird.

2. Capitel.

Von der Umformung der Functionen.

§ 27.

Die Functionen können auf andere Formen gebracht werden, und zwar entweder unter Beibehaltung derselben veränderlichen Zahlgrösse oder durch Einführung einer anderen Veränderlichen an Stelle der ersten.

Behält man dieselbe Veränderliche bei, so kann sich die Function eigentlich nicht ändern. Aber wie in der Algebra bekanntlich eine und dieselbe Zahlgrösse in mehreren verschiedenen Formen dargestellt werden kann, so besteht auch hier jede Umformung einer Function darin, dass man sie auf verschiedene Arten ausdrückt. Beispiele solcher Umformungen sind es, wenn man an Stelle der Ausdrücke:

$$2-3z+z^2;\ a^3+3a^2z+3az^2+z^3;\ \frac{2a^2}{a^2-z^2};\ \frac{1}{\sqrt{1+z^2}-z}$$

bezüglich setzt:

$$(1-z)(2-z);\ (a+z)^3;\ \frac{a}{a-z}+\frac{a}{a+z};\ \sqrt{1+z^2}+z;$$

denn obwohl die ersteren Ausdrücke der Form nach von den letzteren verschieden sind, so bedeuten je zwei entsprechende in Wirklichkeit doch ein und dasselbe. Häufig ist jedoch von mehreren gleichbedeutenden Formen die eine für den gerade vorliegenden Zweck geeigneter als die andere, und man muss daher jedesmal die passendste Form auswählen.

Die andere Art der Umformung, bei welcher an Stelle von z eine andere mit dieser in einer gegebenen Beziehung stehende Veränderliche y eingeführt wird, heisst die Umformung durch Substitution. Sie dient dazu, eine gegebene Function kürzer und bequemer darzustellen. So geht die Function $a^4-4a^3z+6a^2z^2-4az^3+z^4$ dadurch, dass man y an die Stelle von $a-z$ setzt, in die viel einfachere Function y^4 von y über, und die irrationale Function $\sqrt{a^2+z^2}$ erhält durch die Substitution $z=\frac{a^2-y^2}{2y}$

die rationale Form $\frac{a^2+y^2}{2y}$. Die genauere Untersuchung dieser Art von Umformung verschieben wir auf das folgende Capitel und behandeln zunächst diejenige Umformung, bei welcher keine Substitution stattfindet.

§ 28.

Eine **ganze Function** von z wird häufig sehr zweckmässig **in ihre Factoren zerlegt,** also auf die Form eines Products gebracht.

Ist eine ganze Function in ihre Factoren zerlegt, so lässt sich ihre wahre Natur viel leichter erkennen, da man sofort weiss, in welchen Fällen sie verschwindet. Wird z. B. die Function $6-7z+z^3$ in das Product $(1-z)(2-z)(3+z)$ verwandelt, so sieht man sofort, dass sie für die drei Werte $z=1$, $z=2$, $z=-3$ gleich 0 wird, was aus der ursprünglichen Form nicht so leicht ersichtlich ist. Solche Factoren, in denen die Veränderliche z nur in der ersten Potenz vorkommt, werden zum Unterschiede von den zusammengesetzten Factoren, welche das Quadrat, den Kubus oder eine höhere Potenz von z enthalten, einfache Factoren genannt. Es ist daher $f+gz$ die allgemeine Form der einfachen, $f+gz+hz^2$ die der zweifachen, $f+gz+hz^2+iz^3$ die der dreifachen Factoren u. s. w., woraus erhellt, dass jeder zweifache Factor zwei einfache, jeder dreifache drei einfache Factoren u. s. w. in sich fasst. Eine ganze Function von z, in welcher der Exponent der höchsten Potenz von z gleich n ist, wird also n einfache Factoren enthalten. Hiernach wird man auch die Anzahl der Factoren in dem Falle ermitteln können, wo die Factoren zum Teil zweifache, dreifache u. s. w. sind.

§ 29.

Die **einfachen** Factoren irgend einer ganzen Function Z von z findet man, indem man die Function Z gleich 0 setzt und die Wurzeln der Gleichung $Z=0$ aufsucht. Aus jedem dieser Wurzelwerte entspringt ein einfacher Factor der Function Z.

Ist nämlich $z=f$ irgend eine Wurzel der Gleichung $Z=0$, so ist $z-f$ ein Teiler und somit ein Factor der Function Z. Hat man also auf diese Weise $z=f$, $z=g$, $z=h$ u. s. w. als die Wurzeln der Gleichung $Z=0$ gefunden, so kann man Z in seine Factoren zerlegen und in das Product

$$Z=(z-f)(z-g)(z-h)\ldots$$

verwandeln. Dabei ist jedoch zu beachten, dass, wenn der Coefficient der höchsten Potenz von z nicht gleich $+1$ ist, das Product $(z-f)(z-g)\ldots$ noch mit diesem Coefficienten multiplicirt werden muss, so dass also, wenn

$$Z=Az^n+Bz^{n-1}+Cz^{n-2}+\ldots$$

ist,

$$Z=A(z-f)(z-g)(z-h)\ldots$$

wird. Ist hingegen

$$Z=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\ldots,$$

und sind f, g, h, i u. s. w. die Wurzeln der Gleichung $Z=0$, so wird:

$$Z=A\left(1-\frac{z}{f}\right)\left(1-\frac{z}{g}\right)\left(1-\frac{z}{h}\right)\ldots.$$

Umgekehrt ist ersichtlich, dass, wenn $z-f$ oder $1-\frac{z}{f}$ ein Factor der Function Z ist, die Function den Wert 0 erhalten muss, wenn man f an Stelle von z setzt. Denn für $z=f$ muss der eine Factor $z-f$ oder $1-\frac{z}{f}$ und somit die Function Z selbst verschwinden.

§ 30.

Die **einfachen** Factoren einer Function sind demnach **teils reell, teils imaginär,** und zwar ist die **Anzahl der letzteren,** falls solche überhaupt vorhanden sind, **stets eine gerade Zahl.**

Denn da die einfachen Factoren aus den Wurzeln der Gleichung $Z=0$ entstehen, so werden reelle Wurzeln reelle Factoren, imaginäre Wurzeln imaginäre Factoren geben, und da in jeder Gleichung die Anzahl der imaginären Wurzeln stets eine gerade Zahl ist, so wird die Function Z entweder gar keine, oder zwei, oder vier, oder sechs u. s. w. imaginäre Factoren haben. Wenn nun die Function Z nur zwei imaginäre Factoren besitzt, so wird deren Product reell sein und somit einen reellen zweifachen Factor darstellen. Denn ist P das Product aus allen einfachen reellen Factoren, so ist das Product der beiden imaginären gleich $\frac{Z}{P}$ und somit reell. Ebenso wird in dem Falle, wo die Function Z vier oder sechs oder acht u. s. w. imaginäre Factoren hat, das Product derselben immer reell, nämlich gleich dem Quotienten sein, welchen man erhält, wenn man die Function Z durch das Product aller reellen Factoren dividirt.

§ 31.

Ist Q ein **reelles** Product aus **vier einfachen imaginären** Factoren, so kann man dasselbe stets in **zwei zweifache reelle** Factoren zerlegen.

Es hat nämlich Q die Form:

$$z^4+Az^3+Bz^2+Cz+D.$$

Wäre es nun nicht möglich, diese Function in zwei zweifache reelle Factoren zu zerlegen, so müsste sie in zwei zweifache imaginäre Factoren von der Form:

$$z^2-2(p+q\sqrt{-1})z+r+s\sqrt{-1}$$

und

$$z^2-2(p-q\sqrt{-1})z+r-s\sqrt{-1}$$

zerlegt werden können; denn es sind keine andern imaginären Formen denkbar, deren Product reell und gleich $z^4 + Az^3 + Bz^2 + Cz + D$ wäre. Aus jenen zweifachen imaginären Factoren entstehen aber die folgenden vier einfachen imaginären Factoren der Function Q selbst:

$$z - (p + q\sqrt{-1}) + \sqrt{p^2 + 2pq\sqrt{-1} - q^2 - r - s\sqrt{-1}}$$

$$z - (p + q\sqrt{-1}) - \sqrt{p^2 + 2pq\sqrt{-1} - q^2 - r - s\sqrt{-1}}$$

$$z - (p - q\sqrt{-1}) + \sqrt{p^2 - 2pq\sqrt{-1} - q^2 - r + s\sqrt{-1}}$$

$$z - (p - q\sqrt{-1}) - \sqrt{p^2 - 2pq\sqrt{-1} - q^2 - r + s\sqrt{-1}}.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$t = p^2 - q^2 - r \text{ und } u = 2pq - s,$$

und multiplicirt man den ersten und dritten dieser vier Factoren, so wird deren Product gleich:

$$z^2 - \left(2p - \sqrt{2t + 2\sqrt{t^2 + u^2}}\right) z + p^2 + q^2 - p\sqrt{2t + 2\sqrt{t^2 + u^2}} \\ + q\sqrt{-2t + 2\sqrt{t^2 + u^2}} + \sqrt{t^2 + u^2}.$$

Dasselbe ist also reell. Ebenso ist das Product aus dem zweiten und vierten Factor reell, nämlich gleich:

$$z^2 - \left(2p + \sqrt{2t + 2\sqrt{t^2 + u^2}}\right) z + p^2 + q^2 + p\sqrt{2t + 2\sqrt{t^2 + u^2}} \\ - q\sqrt{-2t + 2\sqrt{t^2 + u^2}} + \sqrt{t^2 + u^2}.$$

Es ist daher in der Tat das gegebene Product Q entgegen der Annahme in zwei zweifache reelle Factoren zerlegt.

§ 32.

Wenn eine ganze Function Z von z **beliebig viele einfache imaginäre** Factoren hat, so können **immer zwei und zwei so** mit einander verbunden werden, dass ihr **Product reell** ist.

Die Anzahl der imaginären Factoren, welche stets eine gerade Zahl ist, sei mit $2n$ bezeichnet. Alsdann ist (nach § 30) jedenfalls das Product aller imaginären Factoren reell. Sind daher nur zwei imaginäre Factoren vorhanden, so ist deren Product reell. Bei vier imaginären Factoren kann man, wie wir (im vorigen Paragraphen) gesehen haben, das Product derselben ebenfalls in zwei zweifache reelle Factoren von der Form $fz^2 + gz + h$ zerlegen. Obwohl sich nun diese Beweisform nicht auf höhere Potenzen übertragen lässt, so steht doch ausser allem Zweifel, dass dieselbe Eigenschaft auch für beliebig viele imaginäre Factoren gilt, so dass stets an Stelle der $2n$ einfachen imaginären Factoren n zweifache reelle Factoren gesetzt, und daher alle ganzen Functionen von z in reelle teils einfache, teils zweifache Factoren zerlegt werden können. Allerdings ist der Beweis dieses Satzes hierdurch noch nicht mit aller Strenge geführt; jedoch wird die Wahrheit desselben im Folgenden mehr und mehr erhärtet werden, indem wir Functionen wie $a + bz^n$, $a + bz^n + cz^{2n}$, $a + bz^n + cz^{2n} + dz^{3n}$ u. s. w. wirklich in solche zweifachen reellen Factoren zerlegen werden.

§ 33.

Wenn die ganze Function Z für $z = a$ den Wert A, für $z = b$ den Wert B annimmt, so kann sie für Werte von z, die zwischen a und b liegen, jeden beliebigen zwischen A und B gelegenen Wert erhalten.

Da nämlich Z eine eindeutige Function von z ist, so muss sie für jeden reellen Wert von z ebenfalls einen reellen Wert erhalten. Weil nun Z für $z = a$ den Wert A, für $z = b$ den Wert B annimmt, so kann Z nicht anders von dem Werte A zum Werte B übergehen, als dadurch, dass sie alle zwischen beiden gelegenen Werte durchläuft. Wenn daher sowohl die Gleichung $Z - A = 0$ als die Gleichung $Z - B = 0$ eine reelle Wurzel hat, so wird auch der Gleichung $Z - C = 0$ durch einen reellen Wert von z genügt werden können, falls C zwischen A und B liegt. Besitzen also die Ausdrücke $Z - A$ und $Z - B$ einen einfachen reellen Factor, dann hat auch allemal der Ausdruck $Z - C$ einen einfachen reellen Factor, wofern nur C zwischen A und B liegt.

§ 34.

Ist in der ganzen Function Z der **Exponent der höchsten Potenz** von z eine **ungerade Zahl** $2n + 1$, so besitzt die Function **mindestens einen reellen einfachen Factor.**

Hat nämlich Z die Form:

$$z^{2n+1} + \alpha z^{2n} + \beta z^{2n-1} + \gamma z^{2n-2} + \ldots,$$

so wird für $z = \infty$ auch $Z = (\infty)^{2n+1} = \infty$, da die Werte der einzelnen Glieder im Vergleich zu dem des ersten nicht in Betracht kommen. Es hat daher $Z - \infty$ den einfachen reellen Factor $z - \infty$. Für $z = -\infty$ aber wird $Z = (-\infty)^{2n+1} = -\infty$, und es besitzt somit $Z + \infty$ den einfachen reellen Factor $z + \infty$. Da nun sowohl $Z - \infty$ als $Z + \infty$ einen einfachen reellen Factor haben, so muss auch $Z + C$ einen solchen besitzen, vorausgesetzt, dass C zwischen den Grenzen $+\infty$ und $-\infty$ enthalten, also eine beliebige reelle, positive oder negative Zahl ist. Nimmt man also $C = 0$, so wird auch die Function Z selbst einen einfachen reellen Factor $z - c$ besitzen, und die Grösse c wird innerhalb der Grenzen $+\infty$ und $-\infty$ liegen, also entweder eine positive oder negative Grösse oder Null sein.

§ 35.

Eine ganze Function Z, in welcher der **Exponent der höchsten Potenz** von z eine **ungerade** Zahl ist, hat daher entweder **einen oder drei oder fünf oder sieben u. s. w. reelle einfache Factoren.**

Wie bewiesen, hat die Function Z sicher einen einfachen reellen Factor $z - c$. Nehmen wir an, sie besitze ausserdem nur noch einen solchen $z - d$, und dividiren wir die Function Z, in welcher die höchste Potenz von z die $2n + 1$te sein möge, durch $(z - c)(z - d)$, so wird die höchste im Quotienten vorkommende Potenz von z die $2n - 1$te sein, und da diese Zahl eine ungerade ist, so erhellt daraus, dass die Function Z noch einen einfachen reellen Factor besitzen muss. Hat daher die Function Z mehr als einen einfachen reellen Factor, so muss sie deren entweder drei oder (da man dieselbe Schlussfolgerung beliebig fortsetzen kann) fünf oder sieben u. s. w. besitzen. Es wird somit die Anzahl der einfachen reellen Factoren eine ungerade, die der imaginären also eine gerade Zahl sein, da ja die Anzahl aller einfachen Factoren $2n + 1$ ist.

§ 36.

Eine ganze Function Z, in welcher der **Exponent der höchsten Potenz von z** eine **gerade Zahl** $2n$ ist, hat entweder **gar keinen**, oder **zwei oder vier oder sechs u. s. w. einfache reelle Factoren.**

Nehmen wir an, die Function Z habe einfache reelle Factoren in ungerader Zahl, etwa $2m + 1$, und dividiren wir sie durch das Product aller dieser Factoren, so ist die höchste Potenz, welche in dem Quotienten vorkommt, $z^{2n-2m-1}$. Da somit der Exponent dieser Potenz eine ungerade Zahl ist, so besitzt die Function Z sicher noch einen einfachen reellen Factor, und es ist daher die Anzahl aller einfachen reellen Factoren mindestens gleich $2m + 2$, also eine gerade Zahl. Demnach sind auch imaginäre Factoren nur in gerader Anzahl vorhanden, und es besitzt somit jede ganze Function, wie bereits früher gezeigt, stets eine gerade Anzahl einfacher imaginärer Factoren.

§ 37.

Wenn in einer ganzen Function Z der **Exponent der höchsten Potenz** von z eine **gerade** Zahl und das **absolute oder constante Glied negativ** ist, so besitzt dieselbe mindestens **zwei einfache reelle Factoren.**

Da nämlich die in Rede stehende Function Z von der Form:

$$z^{2n} \pm \alpha z^{2n-1} \pm \beta z^{2n-2} \pm \dots \pm \nu z - A$$

ist, so wird, wie in § 34 bemerkt wurde, $Z = \infty$ für $z = \infty$; ferner ist $Z = -A$ für $z = 0$. Es besitzt daher $Z - \infty$ den reellen Factor $z - \infty$ und $Z + A$ den Factor $z - 0$. Da nun 0 zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+A$ enthalten ist, so muss $Z + 0$ einen einfachen reellen Factor $z - c$ besitzen, wo c zwischen den Grenzen 0 und ∞ liegt. Setzt man ferner $z = -\infty$, so wird $Z = \infty$; es besitzt somit $Z - \infty$ den Factor $z + \infty$ und $Z + A$ den Factor $z + 0$. Folglich besitzt $Z + 0$ auch einen einfachen reellen Factor $z + d$, wo d zwischen den Grenzen 0 und ∞ liegt. Damit ist der Satz bewiesen. Hieraus erhellt zugleich, dass die Gleichung $Z = 0$, wenn Z eine Function von der hier vorausgesetzten Beschaffenheit ist, mindestens zwei reelle Wurzeln, und zwar eine positive und eine negative haben muss. Die Gleichung $z^4 + \alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z - a^2 = 0$ besitzt also beispielsweise zwei reelle Wurzeln, eine positive und eine negative.

§ 38.

Wenn in einer **gebrochenen** Function die **höchste Potenz** der veränderlichen Zahlgrösse z **im Zähler** einen **ebenso hohen** oder **höheren Exponenten***) hat als **im Nenner**, so lässt sich die Function **in zwei Teile** zerlegen, von denen der **eine eine ganze Function** und der **andere ein Bruch** ist, dessen Nenner **höhere Potenzen von z** enthält **als der Zähler.**

Ist nämlich der Exponent der höchsten Potenz von z im Nenner kleiner als im Zähler, so dividire man auf die gewöhnliche Weise den Zähler durch den Nenner, bis man im Quotienten auf Potenzen von z mit negativen Exponenten kommt. Bricht man an dieser Stelle die Operation des Dividirens ab, so wird der Quotient aus einer ganzen Function und einem Bruche bestehen, in dessen Zähler der Exponent der höchsten Potenz von z kleiner ist als im Nenner. Dieser Quotient ist aber der gegebenen Function gleich. Ist z. B. die gegebene Function: $\frac{1 + z^4}{1 + z^2}$, so zerlegt man sie durch Division in folgender Weise:

$$\begin{array}{l}
z^2 + 1 \mid z^4 + 1 = z^2 - 1 + \dfrac{2}{1 + z^2} \\
\qquad\quad \underline{z^4 + z^2} \\
\qquad\quad -z^2 + 1 \\
\qquad\quad \underline{-z^2 - 1} \\
\qquad\qquad +2 \;.
\end{array}$$

Es ist demnach:

$$\frac{1 + z^4}{1 + z^2} = z^2 - 1 + \frac{2}{1 + z^2}.$$

*) Vergl. Anmerkung zu § 25. Anm. d. Uebers.

Derartige gebrochene Functionen, in welchen die höchste Potenz der veränderlichen Zahlgrösse z im Zähler denselben oder einen höheren Exponenten hat, als im Nenner, kann man ähnlich wie in der gemeinen Arithmetik unechte Brüche oder unechte gebrochene Functionen nennen, zum Unterschiede von den echten gebrochenen Functionen, bei denen der Nenner die veränderliche Zahlgrösse z in einer höheren Potenz enthält als der Zähler. Es kann somit jede unechte gebrochene Function in eine ganze und in eine echte gebrochene Function zerlegt werden, und zwar geschieht dies vermittelst des gewöhnlichen Divisionsverfahrens.

§ 39.

Wenn der **Nenner** einer gebrochenen Function **zwei Factoren** besitzt, welche prim zu einander sind, d. h. keinen gemeinschaftlichen Teiler haben, so lässt sich die Function selbst **in zwei Brüche** zerlegen, deren Nenner bezüglich jenen Factoren gleich sind.

Obwohl eine solche Zerlegung ebensowohl für unechte wie für echte gebrochene Functionen möglich ist, so werden wir sie doch hauptsächlich auf echte gebrochene Funtionen anwenden. Hat man den Nenner einer solchen gebrochenen Function in zwei zu einander prime Factoren zerlegt, so lässt sich auch die Function in zwei andere echte gebrochene Functionen zerlegen, deren Nenner jenen beiden Factoren bezüglich gleich sind, und zwar ist eine solche Zerlegung bei echten Brüchen nur auf eine einzige Weise möglich. Von der Richtigkeit dieser Tatsache wird man sich leichter durch ein Beispiel als durch allgemeine Schlüsse überzeugen. In der gebrochenen Function:

$$\frac{1 - 2z + 3z^2 - 4z^3}{1 + 4z^4}$$

z. B. ist der Nenner $1 + 4z^4$ gleich dem Producte:

$$(1 + 2z + 2z^2)(1 - 2z + 2z^2);$$

es kann also der gegebene Bruch in zwei solche zerlegt werden, von welchen der eine $1 + 2z + 2z^2$, der andere $1 - 2z + 2z^2$ zum Nenner hat. Da diese Brüche echte Brüche sind, so setzen wir zur Bestimmung derselben ihre Zähler bezüglich gleich $\alpha + \beta z$ und $\gamma + \delta z$. Dann ist der Annahme nach:

$$\frac{1 - 2z + 3z^2 - 4z^3}{1 + 4z^4} = \frac{\alpha + \beta z}{1 + 2z + 2z^2} + \frac{\gamma + \delta z}{1 - 2z + 2z^2}.$$

Vereinigt man rechterhand wiederum die beiden Brüche, so erhält man für die Summe

als Zähler:

$$\begin{array}{rrr} \alpha - 2\alpha z & + 2\alpha z^2 & \\ + \quad \beta z & - 2\beta z^2 & + 2\beta z^3 \\ + \gamma + 2\gamma z & + 2\gamma z^2 & \\ + \delta z & + 2\delta z^2 & + 2\delta z^3 \end{array}$$

als Nenner:

$$1 + 4z^4.$$

Da nun der Nenner gleich ist dem Nenner des gegebenen Bruches, so müssen auch die Zähler einander gleich gemacht werden, und da ebensoviele unbekannte Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vorkommen, als Glieder einander gleich zu setzen sind, so kann dies stets und nur auf eine Weise geschehen. Man erhält nämlich die vier Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} 1) & \alpha + \gamma = 1 \\ 2) & -2\alpha + \beta + 2\gamma + \delta = -2 \\ 3) & 2\alpha - 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 3 \\ 4) & 2\beta + 2\delta = -4. \end{array}$$

Da also $\alpha + \gamma = 1$ und $\beta + \delta = -2$ ist, so geben die Gleichungen 2) und 3) $\alpha - \gamma = 0$ und $\delta - \beta = \frac{1}{2}$. Es wird somit:

$$\alpha = \tfrac{1}{2},\ \gamma = \tfrac{1}{2},\ \beta = -\tfrac{5}{4},\ \delta = -\tfrac{3}{4},$$

und dadurch der gegebene Bruch:

$$\frac{1 - 2z + 3z^2 - 4z^3}{1 + 4z^4}$$

verwandelt in die beiden:

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{5}{4}z}{1 + 2z + 2z^2} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}z}{1 - 2z + 2z^2}.$$

Man sieht leicht ein, dass die Zerlegung stets auf ähnliche Weise ausführbar sein muss, da man ja stets nur so viele Unbekannten einführt, als nötig sind, um den gegebenen Zähler herzustellen. Aus der Lehre von den gemeinen Brüchen aber weiss man, dass eine solche Zerlegung nur dann möglich ist, wenn die Factoren des Nenners prim zu einander sind.

§ 40.

Eine **gebrochene** Function $\frac{M}{N}$ kann also stets in **so viele einfache** Brüche von der Form $\frac{A}{p - qz}$ zerlegt werden, als der Nenner einfache von einander verschiedene Factoren hat.

Der Bruch $\frac{M}{N}$ stellt eine beliebige echte gebrochene Function dar, in welcher M und N ganze Functionen von z sind, und die höchste Potenz von z in M niedriger ist als die in N. Wenn man nun den Nenner N in seine einfachen Factoren zerlegt, und diese sind von einander verschieden, so lässt sich der Ausdruck $\frac{M}{N}$ in so viele Brüche zerlegen, als der Nenner N einfache Factoren enthält, weil ein jeder Factor den Nenner eines Partialbruchs abgiebt. Ist also $p - qz$ ein Factor von N, so wird er auch Nenner eines gewissen Partialbruchs, und da im Zähler dieses Bruches der Exponent der höchsten Potenz von z kleiner sein muss als im Nenner, so muss der Zähler notwendig eine Constante sein. Es entsteht folglich aus einem jeden einfachen Factor $p - qz$ des Nenners ein einfacher Bruch $\frac{A}{p - qz}$, und die Summe aller dieser Brüche ist dem gegebenen Bruche $\frac{M}{N}$ gleich.

Beispiel.

Ist z. B. die gebrochene Function

$$\frac{1 + z^2}{z - z^3}$$

gegeben, so sind die einfachen Factoren des Nenners: z, $1 - z$ und $1 + z$; dieselbe lässt sich also in drei einfache Brüche zerlegen, nämlich in:

$$\frac{A}{z} + \frac{B}{1 - z} + \frac{C}{1 + z} = \frac{1 + z^2}{z - z^3}.$$

Die Aufgabe besteht nun darin, die constanten Zähler A, B, C zu bestimmen. Bringt man dazu diese Brüche auf den gemeinsamen Nenner $z - z^3$, so ergiebt sich, da die Summe der Zähler gleich $1 + z^2$ sein soll, folgende Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} A + Bz - Az^2 \\ + Cz + Bz^2 \\ - Cz^2 \end{aligned}\right\} = 1 + z^2 = 1 + 0 \cdot z + z^2.$$

Durch Gleichsetzung entsprechender Coefficienten erhält man hieraus so viele Gleichungen, als Unbekannte vorhanden sind, nämlich:

$$\begin{aligned} &1) \quad & A &= 1 \\ &2) \quad & B + C &= 0 \\ &3) \quad & -A + B - C &= 1. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $B - C = 2$, und somit:

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = -1.$$

Die gegebene Function

$$\frac{1 + z^2}{z - z^3}$$

lässt sich demnach in

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{1 - z} - \frac{1}{1 + z}$$

zerlegen. Ebenso überzeugt man sich, dass, wie viele von einander verschiedene einfache Factoren der Nenner N auch immer haben möge, der Bruch $\frac{M}{N}$ stets in ebenso viele einfache Brüche zerlegt werden kann. Sobald aber einige der Factoren einander gleich sind, muss man sich eines anderen später zu erörternden Verfahrens für die Zerlegung bedienen.

§ 41.

Da somit ein jeder einfache Factor des Nenners N bei der Zerlegung der gegebenen Function $\frac{M}{N}$ einen einfachen Bruch liefert, so muss man zeigen, wie aus einem bekannten Factor des Nenners N der entsprechende einfache Bruch gefunden werden kann.

Es sei $p - qz$ ein einfacher Factor von N, also:

$$N = (p - qz)S,$$

wo S eine ganze Function von z bedeutet, und es werde der aus dem Factor $p - qz$ entspringende Bruch gleich $\frac{A}{p - qz}$, und ebenso der aus dem Factor S entspringende Bruch gleich $\frac{P}{S}$ gesetzt.

Dann ist nach § 39:

$$\frac{M}{N} = \frac{A}{p - qz} + \frac{P}{S} = \frac{M}{(p - qz)S}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{P}{S} = \frac{M - AS}{(p - qz)S}.$$

Da diese beiden Brüche mit einander übereinstimmen sollen, so muss notwendig $M - AS$ durch $p - qz$ teilbar sein; denn es ist die ganze Function P dem Quotienten $\frac{M - AS}{p - qz}$ gleich. Ist aber $p - qz$ ein Teiler von $M - AS$, so verschwindet dieser Ausdruck, wenn man darin $z = \frac{p}{q}$ setzt. Substituirt man also in M und S überall für z den constanten Wert $\frac{p}{q}$, so wird $M - AS = 0$, also $A = \frac{M}{S}$. Auf diese Weise findet man den Zähler A des gesuchten Bruches $\frac{A}{p - qz}$. Bildet man nun aus den einzelnen einfachen Factoren des Nenners N, vorausgesetzt, dass dieselben von einander verschieden sind, die entsprechenden einfachen Brüche, so ist die Summe aller dieser einfachen Brüche gleich der gegebenen Function $\frac{M}{N}$.

Beispiel.

Betrachtet man in dem vorher behandelten Beispiele:

$$\frac{1+z^2}{z-z^3},$$

wo also $M=1+z^2$ und $N=z-z^3$ ist, zunächst den einfachen Factor z, so ist $S=1-z^2$, und der Zähler des dazu gehörigen einfachen Bruches $\frac{A}{z}$ ergiebt sich aus $A=\frac{1+z^2}{1-z^2}$, wenn man darin $z=0$, nämlich für z denjenigen Wert setzt, welchen man erhält, wenn der einfache Factor selbst der Null gleichgesetzt wird. Es ist also $A=1$. Ebenso entsteht, wenn man den Factor $1-z$ des Nenners nimmt, so dass also $S=z+z^2$ ist, aus $A=\frac{1+z^2}{z+z^2}$ für $1-z=0$ der Wert $A=1$, und somit aus dem Factor $1-z$ der Bruch $\frac{1}{1-z}$. Für den dritten Factor $1+z$ endlich wird $S=z-z^2$ und $A=\frac{1+z^2}{z-z^2}$ für $1+z=0$ oder $z=-1$, d. h. $A=-1$, und der entsprechende Bruch ist $\frac{-1}{1+z}$. Man findet also auf diesem Wege ebenso wie vorher:

$$\frac{1+z^2}{z-z^3}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}-\frac{1}{1+z}.$$

§ 42.

Eine gebrochene Function von der Form $\frac{P}{(p-qz)^n}$, in welcher der **Zähler** nur **niedrigere** Potenzen von z enthält, als die höchste Potenz von z im **Nenner** $(p-qz)^n$ beträgt, lässt sich in eine Summe von Partialbrüchen von **folgender Form**:

$$\frac{A}{(p-qz)^n}+\frac{B}{(p-qz)^{n-1}}+\frac{C}{(p-qz)^{n-2}}+\cdots+\frac{K}{p-qz},$$

in denen die Zähler sämtlich constante Grössen sind, **verwandeln.**

Da die höchste Potenz von z in P niedriger ist, als z^n, so kann sie höchstens z^{n-1} sein, und es wird somit P die Form haben:

$$\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\cdots+\varkappa z^{n-1}.$$

Dieser Ausdruck besteht aus n Gliedern und muss gleich sein dem Zähler der Summe aller Partialbrüche, nachdem man letztere auf den gemeinschaftlichen Nenner $(p-qz)^n$ gebracht hat. Dieser Zähler ist gleich:

$$A+B(p-qz)+C(p-qz)^2+D(p-qz)^3+\cdots+K(p-qz)^{n-1}.$$

Die höchste Potenz von z ist hier ebenso wie in jenem Ausdrucke z^{n-1}, und es sind genau ebenso viele (nämlich n) unbekannte Grössen A, B, C, ... K vorhanden, als Glieder einander gleichzusetzen sind. Es lassen sich daher die constanten Grössen $ABC\ldots$ so bestimmen, dass die echte gebrochene Function:

$$\frac{P}{(p-qz)^n}=\frac{A}{(p-qz)^n}+\frac{B}{(p-qz)^{n-1}}+\frac{C}{(p-qz)^{n-2}}+\frac{D}{(p-qz)^{n-3}}+\cdots+\frac{K}{p-qz}$$

wird. Für die wirkliche Bestimmung dieser Zähler werden wir sogleich ein einfaches Verfahren angeben.

§ 43.

Besitzt der **Nenner** N der gebrochenen Function $\frac{M}{N}$ den **Factor** $(p-qz)^2$, so findet man die aus diesem Factor entspringenden Partialbrüche auf folgende Weise:

Im Vorhergehenden ist gezeigt worden, wie aus den einzelnen einfachen und nur einmal darin enthaltenen Factoren des Nenners die zugehörigen Partialbrüche gefunden werden. Jetzt nehmen wir an, dass zwei der Factoren einander gleich seien, oder dass $(p-qz)^2$ ein Factor des Nenners N sei. Aus diesem Factor entspringen nach dem vorigen Paragraphen zwei Partialbrüche von der Form: $\frac{A}{(p-qz)^2}+\frac{B}{p-qz}$. Setzt man nun:

$$N=(p-qz)^2S,$$

so wird:

$$\frac{M}{N}=\frac{M}{(p-qz)^2S}=\frac{A}{(p-qz)^2}+\frac{B}{p-qz}+\frac{P}{S},$$

wobei $\frac{P}{S}$ alle einfachen Brüche zusammengenommen bezeichnet, welche aus dem Factor S des Nenners entspringen. Hieraus folgt:

$$\frac{P}{S}=\frac{M-AS-B(p-qz)S}{(p-qz)^2S}$$

und:

$$P=\frac{M-AS-B(p-qz)S}{(p-qz)^2}=\text{einer ganzen Function von } z.$$

Es muss daher $M-AS-B(p-qz)S$ durch $(p-qz)^2$ teilbar sein. Ist dieser Ausdruck zunächst durch $p-qz$ teilbar, so verschwindet derselbe, wenn man darin $p - qz = 0$ oder $z = \frac{p}{q}$ setzt. Für $z = \frac{p}{q}$ wird also $M - AS = 0$, und daher:

$$A = \frac{M}{S}.$$

Es giebt daher der Bruch $\frac{M}{S}$, wenn man darin an Stelle von z überall $\frac{p}{q}$ setzt, den Wert der Constanten A. Ist dieser gefunden, so muss, da ja der Ausdruck $M - AS - B(p - qz)S$ durch $(p - qz)^2$ teilbar sein soll, auch noch $\frac{M - AS}{p - qz} - BS$ durch $p - qz$ geteilt werden können. Setzt man daher überall $z = \frac{p}{q}$, so wird:

$$\frac{M - AS}{p - qz} = BS,$$

oder:

$$B = \frac{M - AS}{(p - qz)S} = \frac{1}{p - qz}\left(\frac{M}{S} - A\right),$$

wobei wohl zu beachten ist, dass man, weil $M - AS$ durch $p - qz$ teilbar ist, diese Division erst wirklich auszuführen hat, bevor man $\frac{p}{q}$ für z substituirt. Setzt man:

$$\frac{M - AS}{p - qz} = T,$$

so wird:

$$B = \frac{T}{S} \text{ für } z = \frac{p}{q}.$$

Nachdem so die Zähler A und B gefunden sind, werden die aus dem Factor $(p - qz)^2$ des Nenners N entspringenden Partialbrüche: $\frac{A}{(p - qz)^2} + \frac{B}{p - qz}$ sein.

Erstes Beispiel.

Es sei

$$\frac{1 - z^2}{z^2(1 + z^2)}$$

die gegebene gebrochene Function. Da das Quadrat z^2 ein Factor des Nenners ist, so wird $S = 1 + z^2$, $M = 1 - z^2$. Sind demnach die aus z^2 entspringenden Partialbrüche:

$$\frac{A}{z^2} + \frac{B}{z},$$

so wird:

$$A = \frac{M}{S} = \frac{1 - z^2}{1 + z^2} \text{ für } z = 0, \text{ also } A = 1,$$

und

$$M - AS = -2z^2.$$

Dividirt man nun den letzteren Ausdruck durch den einfachen Factor z, so wird $T = -2z$, und daher:

$$B = \frac{T}{S} = \frac{-2z}{1 + z^2} \text{ für } z = 0, \text{ also } B = 0.$$

Es entspringt somit aus dem Factor z^2 des Nenners nur der eine Partialbruch $\frac{1}{z^2}$.

Zweites Beispiel.

Es sei die gebrochene Function

$$\frac{z^3}{(1 - z)^2(1 + z^4)}$$

gegeben. Weil das Quadrat $(1 - z)^2$ ein Factor des Nenners ist, so werden die Partialbrüche, welche daraus entspringen:

$$\frac{A}{(1 - z)^2} + \frac{B}{1 - z}.$$

Es ist also $M = z^3$ und $S = 1 + z^4$, mithin:

$$A = \frac{M}{S} = \frac{z^3}{1 + z^4} = \frac{1}{2} \text{ für } 1 - z = 0 \text{ oder } z = 1.$$

Folglich ist:

$$M - AS = z^3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^4 = -\frac{1}{2} + z^3 - \frac{1}{2}z^4,$$

und dieses durch $1 - z$ dividirt, giebt:

$$T = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z^3;$$

demnach:

$$B = \frac{T}{S} = \frac{-1 - z - z^2 + z^3}{2 + 2z^4} \text{ für } z = 1, \text{ d. i. } B = \frac{-1}{2}.$$

Die gesuchten Partialbrüche sind daher:

$$\frac{1}{2(1 - z)^2} - \frac{1}{2(1 - z)}.$$

§ 44.

Wenn der Nenner N der gebrochenen Function $\frac{M}{N}$ den Factor $(p - qz)^3$ hat, so findet man die aus diesem Factor entspringenden Partialbrüche $\frac{A}{(p - qz)^3} + \frac{B}{(p - qz)^2} + \frac{C}{p - qz}$ auf folgende Weise:

Setzt man:

$$N = (p - qz)^3 S,$$

und bezeichnet man den Bruch, welcher aus dem Factor S hervorgeht, mit $\frac{P}{S}$, so wird:

$$P = \frac{M - AS - B(p-qz)S - C(p-qz)^2 S}{(p-qz)^3} = \text{einer ganzen Function von } z.$$

Es muss also der Zähler $M - AS - B(p-qz)S - C(p-qz)^2 S$ vor allen Dingen durch $p - qz$ teilbar sein, d. h. er muss für $p - qz = 0$ oder $z = \frac{p}{q}$ verschwinden. Es ist daher $M - AS = 0$, oder

$$A = \frac{M}{S} \text{ für } z = \frac{p}{q}.$$

Hat man so A gefunden, so ist $M - AS$ teilbar durch $p - qz$. Setzt man also:

$$\frac{M - AS}{p - qz} = T,$$

so muss der Ausdruck $T - BS - C(p - qz)S$ noch durch $(p - qz)^2$ teilbar sein; er wird daher gleich 0, wenn man darin $z = \frac{p}{q}$ setzt, oder es ist:

$$B = \frac{T}{S} \text{ für } z = \frac{p}{q}.$$

Ist auf diese Weise B bestimmt, so lässt sich $T - BS$ durch $p - qz$ teilen. Setzt man also den Quotienten:

$$\frac{T - BS}{p - qz} = V,$$

so ist schliesslich noch $V - CS$ durch $p - qz$ teilbar, oder es ist $V - CS = 0$ für $p - qz = 0$. Es wird daher:

$$C = \frac{V}{S} \text{ für } z = \frac{p}{q}.$$

Auf diese Weise sind die Zähler A, B, C gefunden, und die aus dem Factor $(p - qz)^3$ des Nenners N entspringenden Partialbrüche werden:

$$\frac{A}{(p-qz)^3} + \frac{B}{(p-qz)^2} + \frac{C}{p-qz}.$$

Beispiel.

Ist etwa

$$\frac{z^2}{(1-z)^3(1+z^2)}$$

die gegebene gebrochene Function, so entstehen aus dem kubischen Factor $(1 - z)^3$ des Nenners folgende Partialbrüche:

$$\frac{A}{(1-z)^3} + \frac{B}{(1-z)^2} + \frac{C}{1-z}.$$

Es ist also $M = z^2$, $S = 1 + z^2$, und daher zunächst:

$$A = \frac{z^2}{1+z^2} \text{ für } 1 - z = 0 \text{ oder } z = 1, \text{ d. i. } A = \frac{1}{2}.$$

Setzt man jetzt:

$$T = \frac{M - AS}{1 - z} = \frac{\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}}{1 - z} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z,$$

so wird:

$$B = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z}{1 + z^2} \text{ für } z = 1, \text{ also } B = -\frac{1}{2}.$$

Setzt man endlich:

$$V = \frac{T - BS}{1 - z} = \frac{T + \frac{1}{2}S}{1 - z},$$

so wird:

$$V = \frac{-\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2}{1 - z} = -\frac{1}{2}z;$$

es ist somit:

$$C = \frac{V}{S} = \frac{-\frac{1}{2}z}{1 + z^2} \text{ für } z = 1, \text{ oder } C = -\frac{1}{4},$$

und die aus dem Factor $(1 - z)^3$ des Nenners hervorgehenden Partialbrüche werden:

$$\frac{1}{2(1-z)^3} - \frac{1}{2(1-z)^2} - \frac{1}{4(1-z)}.$$

§ 45.

Wenn der **Nenner** N der gebrochenen Function $\frac{M}{N}$ **den Factor** $(p - qz)^n$ hat, so findet man die daraus entstehenden Partialbrüche:

$$\frac{A}{(p-qz)^n} + \frac{B}{(p-qz)^{n-1}} + \frac{C}{(p-qz)^{n-2}} + \cdots + \frac{K}{p-qz}$$

auf folgende Weise:

Setzt man den Nenner

$$N = (p - qz)^n Z,$$

so findet man durch dieselben Schlüsse wie vorher:

1) $A = \frac{M}{Z}$ für $z = \frac{p}{q}$. Setzt man dann: $P = \frac{M - AZ}{p - qz}$, so wird:

2) $B = \frac{P}{Z}$ für $z = \frac{p}{q}$. Setzt man dann: $Q = \frac{P - BZ}{p - qz}$, so wird:

3) $C = \frac{Q}{Z}$ für $z = \frac{p}{q}$. Setzt man dann: $R = \frac{Q - CZ}{p - qz}$, so wird:

4) $D = \frac{R}{Z}$ für $z = \frac{p}{q}$. Setzt man dann: $S = \frac{R - DZ}{p - qz}$, so wird:

5) $E = \frac{S}{Z}$ für $z = \frac{p}{q}$ u. s. w.

Hat man auf diese Weise die einzelnen constanten Zähler A, B, C, D u. s. w. bestimmt, so sind damit sämtliche Partialbrüche, welche aus dem Factor $(p - qz)^n$ des Nenners N entspringen, gefunden.

Beispiel.

Ist die gebrochene Function

$$\frac{1 + z^2}{z^5(1 + z^3)}$$

gegeben, so entspringen aus dem Factor z^5 des Nenners folgende Partialbrüche:

$$\frac{A}{z^5} + \frac{B}{z^4} + \frac{C}{z^3} + \frac{D}{z^2} + \frac{E}{z}.$$

Um die constanten Zähler derselben zu finden, setze man $M = 1 + z^2$, $Z = 1 + z^3$ und $\frac{p}{q} = 0$, und rechne dann folgendermassen:

Zuerst ist $A = \frac{M}{Z} = \frac{1 + z^2}{1 + z^3}$ für $z = 0$, also $A = 1$.

Setzt man nun $P = \frac{M - AZ}{z} = \frac{z^2 - z^3}{z} = z - z^2$, so wird zweitens: $B = \frac{P}{Z} = \frac{z - z^2}{1 + z^3}$ für $z = 0$, also $B = 0$.

Setzt man dann $Q = \frac{P - BZ}{z} = \frac{z - z^2}{z} = 1 - z$, so wird drittens: $C = \frac{Q}{Z} = \frac{1 - z}{1 + z^3}$ für $z = 0$, also $C = 1$.

Setzt man ferner $R = \frac{Q - CZ}{z} = \frac{-z - z^3}{z} = -1 - z^2$, so wird viertens: $D = \frac{R}{Z} = \frac{-1 - z^2}{1 + z^3}$ für $z = 0$, also $D = -1$.

Setzt man endlich $S = \frac{R - DZ}{z} = \frac{-z^2 + z^3}{z} = -z + z^2$, so wird fünftens: $E = \frac{S}{Z} = \frac{-z + z^2}{1 + z^3}$ für $z = 0$, also $E = 0$.

Es sind daher:

$$\frac{1}{z^5} + \frac{0}{z^4} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} + \frac{0}{z}$$

die gesuchten Partialbrüche.

§ 45a*).

Jede beliebige gegebene rationale gebrochene Function $\frac{M}{N}$ kann somit in folgender Weise in Teile zerlegt und auf die einfachste Form gebracht werden.

Man suche zunächst alle einfachen reellen oder imaginären Factoren des Nenners N. Diejenigen, welche nur einmal vorkommen, betrachte man für sich und suche zu jedem derselben nach § 41 den ihm entsprechenden Partialbruch. Kommt jedoch ein und derselbe einfache Factor zwei oder mehrere Mal vor, so vereinige man diese und suche zu dem Product, welches eine Potenz von der Form $(p - qz)^n$ ist, nach § 45 die zugehörigen Partialbrüche. Hat man auf diese Weise aus den einzelnen einfachen Factoren des Nenners die Partialbrüche abgeleitet, so ist das Aggregat derselben gleich der gegebenen Function, wofern diese nicht etwa eine unecht gebrochene ist. In letzterem Falle muss man überdies den ganzen Teil absondern und zu den gefundenen Partialbrüchen hinzufügen, wodurch man den Wert der Function $\frac{M}{N}$ in der einfachsten Form erhält. Dabei ist es gleichgültig, ob man die Partialbrüche vor der Absonderung des ganzen Teiles oder erst nach derselben aufsucht. Denn man erhält aus den einzelnen Factoren des Nenners N dieselben Partialbrüche, mag man nun den Zähler M selbst, oder diesen um irgend ein Vielfaches des Nenners N vermehrt oder vermindert nehmen, eine Tatsache, deren Richtigkeit sofort einleuchtet, wenn man die gegebenen Regeln genau betrachtet.

Beispiel.

Es wird verlangt, den Wert der Function:

$$\frac{1}{z^3(1 - z)^2(1 + z)}$$

in der einfachsten Form auszudrücken.

Nimmt man zuerst den nur einmal vorkommenden Factor $1 + z$ des Nenners, welcher $\frac{p}{q} = -1$ ergiebt, so wird hierfür $M = 1$ und $Z = z^3 - 2z^4 + z^5$.

*) Im Originale finden sich zwei mit der Zahl 46 bezeichnete Paragraphen, von denen der zweite bereits zum folgenden Capitel gehört. Um daher im Folgenden bezüglich der Bezeichnung der Paragraphen mit dem Original in Uebereinstimmung zu bleiben, habe ich diesen Paragraphen, der sich unmittelbar an den vorhergehenden anschliesst, mit § 45a bezeichnet. Anm. d. Uebers.

Zur Bestimmung des Bruches $\frac{A}{1+z}$ hat man also:

$$A = \frac{1}{z^3 - 2z^4 + z^5} \text{ für } z = -1, \text{ also } A = -\frac{1}{4}.$$

Es entsteht somit aus dem Factor $1+z$ der Partialbruch:

$$\frac{-1}{4(1+z)}.$$

Jetzt nehme man den quadratischen Factor $(1-z)^2$, welcher $\frac{p}{q} = 1$, $M = 1$ und $Z = z^3 + z^4$ liefert. Setzt man die daraus entspringenden Partialbrüche gleich

$$\frac{A}{(1-z)^2} + \frac{B}{1-z},$$

so wird:

$$A = \frac{1}{z^3 + z^4} \text{ für } z = 1, \text{ d. i. } A = \frac{1}{2};$$

ferner:

$$P = \frac{M - \frac{1}{2}Z}{1-z} = \frac{1 - \frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{2}z^4}{1-z} = 1 + z + z^2 + \frac{1}{2}z^3,$$

mithin:

$$B = \frac{P}{Z} = \frac{1 + z + z^2 + \frac{1}{2}z^3}{z^3 + z^4} \text{ für } z = 1, \text{ oder } B = \frac{7}{4}.$$

Die gesuchten Partialbrüche sind also:

$$\frac{1}{2(1-z)^2} + \frac{7}{4(1-z)}.$$

Endlich giebt der dritte kubische Factor z^3:

$$\frac{p}{q} = 0, \quad M = 1 \text{ und } Z = 1 - z - z^2 + z^3.$$

Sind demnach

$$\frac{A}{z^3} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z}$$

die zugehörigen Partialbrüche, so wird zunächst:

$$A = \frac{M}{Z} = \frac{1}{1 - z - z^2 + z^3} \text{ für } z = 0, \text{ also } A = 1;$$

ferner:

$$P = \frac{M - Z}{z} = 1 + z - z^2,$$

und daher:

$$B = \frac{P}{Z} = \frac{1 + z - z^2}{1 - z - z^2 + z^3} \text{ für } z = 0, \text{ oder } B = 1;$$

endlich:

$$Q = \frac{P - Z}{z} = 2 - z^2,$$

folglich:

$$C = \frac{Q}{Z} \text{ für } z = 0, \text{ oder } C = 2.$$

Es lässt sich daher die gegebene Function

$$\frac{1}{z^3(1-z)^2(1+z)}$$

auf die Form:

$$\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + \frac{1}{2(1-z)^2} + \frac{7}{4(1-z)} - \frac{1}{4(1+z)}$$

bringen. Ein ganzer Teil tritt hier nicht hinzu, weil die gegebene Function keine unecht gebrochene ist.