SOLVTIO PROBLEMATIS CVIVSDAM A CELEB. DAN. BERNOVLLIO PROPOSITI

A. L. Euler.

§. 1.

In postremis litteris, quas Cel. Daniel Bernoulli ad me dedit Basilea d. 24 Maii huius anni, mentionem fecit alicuius problematis, in quod occasione alicuius Problematis mechanici incidisset. Quaerebat autem inter omnes curuas isoperimetricas iisdem terminis contentas eam in qua $\int r^m ds$ haberet maximum minimumue valorem; denotantibus s arcum curuae, r vero eius radium osculi. Nunciat vero Vir Celeb. simul, se duplicem solutionem esse nactum, ad quarum alteram ponendo elementum arcus ds, ad alteram autem ponendo elementum abscissae dx constans peruenisset: at ambas hasce solutiones ita esse comparatas, vt inter se non conspirare videantur. Casu quidem quo $m = 1$ hanc mihi perscripsit aequationem a se inuentam, $ds = \frac{2rdr}{\sqrt{(g+4nr-4rr)}}$ qua curuae natura exprimatur. Sin autem inter omnes omnino curuas quaereretur ea, in qua esset $\int rds$ minimum, se inuenisse scribit, fore $r = 0$, cum tamen ego iam ante Ipsi scripsissem cycloidem huic quaestioni satisfacere eamque solam. Hanc ob rem me rogauit, vt problema hoc pariter aggrederer, solutionemque quam fiero consecutus, secum communicarem.

§. 2. Ac primo quidem intuitu istud problema in amplissimo problemate isoperimetrico, cuius plures solutiones a Viris acutissimis Bernoulliis, Hermanno ac Tayloro sunt traditae, contineri videtur: Sed qui ipsam huius problematis solutionem aggredietur, ex methodis istis, quas nominati Viri reliquerunt, vix quicquam vtilitatis assequetur; cuius rei ratio est, quod in formula $\int r^m ds$, quae minima esse debet, differentialia secundi gradus insint, ob radium osculi r; memoratae vero methodi ad alias formulas non sint accommodatae, nisi quae ex differentialibus primi gradus respectu coordinatarum orthogonalium consistant; omnem enim formulam, quae maxima minimaue esse debet, ante ad huiusmodi coordinatas orthogonales reduci oportet, quam resolutio suscipiatur. Mihi vero solutio huius problematis statim non difficilis est visa, cum ante biennium circiter nouam atque peculiarem methodum essem adeptus, omnia huius generis problemata resoluendi, quae ad differentialia primi generis non erat adstricta, sed ad cuiuscunque gradus differentialia patebat. Quam methodum meam etiamsi iam protulerim, tamen non incongruum visum est, eam ad problema hoc a Celeb. Bernoullio propositum accommodare, eiusque beneficio solutionem desideratam eruere, cum vt Viri Clarissimi desiderato satisfacerem, tum etiam, vt methodi meae vis et praestantia euidentius perspiciatur.

§. 3. Problema autem propositum in duas partes distribui conueniet, in quarum priore inter omnes omnino curuas iisdem terminis contentas eam inuestigabo, in qua $\int r^m ds$ minimum omnium obtineat valorem: quae quaestio, etiamsi a Celeb. Bernoullio non videatur esse proposita, tamen praecipue hic tractari meretur. Nam quae curua inter omnes prorsus curuas iisdem terminis contentas desiderata maximi minimiue proprietate gaudet, eadem etiam hac praedita erit proprietate inter omnes curuas aequelongas. In altera autem problematis parte infinitas curuas intra eosdem terminos sitas contemplabor, quae omnes inter se longitudine sint aequales, atque exhis solum curuis eam determinabo, in qua $\int r^m ds$ minimum valorem sit habiturum, quae quidem quaestio cum proposita penitus congruit. In priore igitur problemate inter datos terminos absolute ea curua inuestigatur, in qua sit $\int r^m ds$ minmum, in posteriore vero inter eosdem terminos curua datae longitudinis desideratur, quae inter omnes alias eiusdem longitudinis et iisdem terminis contentas hac gaudeat praerogatiua, vt $\int r^m ds$ minimam obtineat quantitatem. Ex quo perspicuum est priori quaestioni vnicam satisfacere posse curuam, posteriori vero innumerabiles, pro infinita longitudinis varietatae, quae curuae quaesitae praescribi potest.

§. 4. Fundamentum, quo vtriusque problematis solutio nititur, ex methodo mea iam exposita huc redit: Si positis abscissa $=x$; applicata $=y$, inter omnes curuas iisdem terminis comprehensas ea requiratur, in qua formula quaecunque integralis maximum minimumue induere debeat valorem; tum, cuiuscunque gradus differentialia in ea formula integrali insint, dummodo integralia non implicantur, ponatur $dy=pdx$; $dp=qdx$; $dq=rdx$; $dr=sdx$; etc. Quo facto formula illa integralis ad eiusmodi formam reducetur $\int Zdx$, in qua Z erit functio quantitatum x; y; p; q; r; s etc. Deinde quantitas Z differentietur; sitque $dZ=Mdx+Ndy+Pdp+Qdq+Rdr+Sds+$ etc. Hinc formetur valor quidam V sumendo $V=N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\frac{d^4S}{dx^4}-$ etc. posito dx constante. Hoc denique pacto pro

formula

formula integrali proposita inuento eiusmodi valore V ponatur $V=0$ haecque aequatio praebebit naturam curuae quaesitae. At si non inter omnes omnino curuas, sed inter eas tantum, in quibus vna pluresue formulae integrales aequalem obtinent valorem ea desideretur, in qua alia quaepiam formula integralis maximum minimumue habitura sit valorem, tum singulae formulae integrales praescripto modo tractentur, atque vniuscuiusque valor respondens V eruatur, hocque facto singuli isti valores V per quantitates constantes quascunque multiplicati coniungantur, nihiloque aequales ponantur: ex qua aequatione natura curuae quaesitae elicietur.

§. 5. His praemissis quaestionem priorem, quam ex problemate proposito formaui aggredior, atque inter omnes curuas iisdem terminis contentas eam definiam, in qua sit $\int r^m ds$ minimum. In hanc finem sumta recta quacunque pro axe, sit abscissa $=x$, et applicata $=y$; erit $ds=\surd(dx^2+dy^2)$, atque posito dx constante habebitur $r=\frac{ds^3}{dxddy}$. Cum autem fieri debeat $dy=pdx$; et $dp=qdx$; erit $ds=dx\surd(1+pp)$ et $ddy=qdx^2$, vnde prodit $r=\frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{q}$, ac formula integralis, quae minima esse debet, fiet $=\int\frac{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}dx}{q^m}$. Habebitur ergo $Z=\frac{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$ hincque porro $dZ=\frac{(3m+1)(1+pp)^{\frac{3m-1}{2}}pdp}{q^m}-\frac{m(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}dq}{q^{m+1}}$, quae expressio cum superiore vniuersali com-

parata

parata dat M$=0$; N$=0$; P$=\frac{(3m+1)(1+pp)^{\frac{3m-1}{2}}p}{q^m}$; Q$=\frac{-m(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^{m+1}}$; R$=0$; S$=0$; etc. Quocirca habebitur V$=\frac{-dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}$; atque pro curua quaesita prodibit ista aequatio: $0=\frac{-dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}$; quae integrata dat A$dx=-Pdx+d$Q.

§. 6. Antequam autem loco P et Q debitos valores substituam, secundam integrationem perficere tentabo, in subsidium vocando aequationes $dp=qdx$ et dZ$=$P$dp+$Qdq. Substituto vero $\frac{dp}{q}$ loco dx, aequatio inuenta transit in hanc. A$dp=-$P$dp+qd$Q, haecque denuo ob P$dp=d$Z$-$Qdq in istam: A$dp=-d$Z$+$Q$dq+qd$Q cuius integralis est A$p+$B$=-$Z$+$Qq. Nunc tandem substitutionibus vtar, obtineboque propter Z$=\frac{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$ et Q$q=\frac{-m(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$ mutatis signis constantium A et B hanc aequationem A$p+$B$=\frac{(m+1)(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$ quae ducta in dx ob $y=\int pdx$ et integrata suppeditabit istam aequationem A$y+$B$x=(m+1)\int\frac{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}dx}{q^m}=(m+1)\int r^m ds$, ex qua perspicitur eam curuam esse habituram $\int r^m ds$ minimum, in qua sit $\int r^m ds=$A$y+$Bx. Quoniam autem axe vtcunque mutato r et s non mutantur, ita axis accipiatur vt A$y+$Bx abeat vel in solam abscissam vel solam applicatam: quod cum fieri liceat sine vlla restrictione vel A vel B

poni

poni poterit $= 0$. Quamobrem pro curua quaesita habebitur vel ista aequatio $Ax = (m+1) \int r^m ds$ vel $Ay = (m+1) \int r^m ds$.

§. 7. Quo homogeneitas quantitatum obseruetur ponam $A = a^m$, atque ista vtar aequatione $a^m x = (m+1) \int r^m ds$, ex qua penitius in curuae naturam inquiram. Optime autem curuae satisfacientis indoles cognoscetur ex aequatione inter duas variabiles tantum, cuiusmodi aequationem duplici modo exhiberi licet, altero inter variabiles r et s, per quam aequationem natura ipsius curuae sine vllo ad quempiam axem respectu habito designatur; altero modo autem inter variabiles x et y aequatio indicabitur quae tum ad curuae constructionem tum ad cognitionem qualis sit, est maxime accommodata. Priore modo aequatio inter r et s reperietur, dum x ex aequatione $a^m x = (m+1) \int r^m ds$ vel ex eius differentiali $a^m dx = (m+1) r^m ds$ eliminabitur; id quod hoc modo praestabitur: cum $\frac{dx}{ds}$ posito sinu toto $= 1$ sit sinus arcus, cuius differentiale est $\frac{ds}{r}$, erit $\frac{dx}{ds} =$ sin. arcus $\int \frac{ds}{r}$, quo valore substituto ista habebitur aequatio a^m sin. arcus $\int \frac{ds}{r} = (m+1) r^m$ ac loco $\frac{a^m}{m+1}$ scripto c^m, erit $\int \frac{ds}{r} =$ arcui cuius sinus est $\frac{r^m}{c^m} = \int \frac{m r^{m-1} dr}{\sqrt{(c^{2m} - r^{2m})}}$. Sumtis ergo differentialibus erit $ds = \frac{m r^m dr}{\sqrt{(c^{2m} - r^{2m})}}$ atque capiendo integralia habebitur pro curua quaesita ista aequatio $s = m \int \frac{r^m dr}{\sqrt{(c^{2m} - r^{2m})}}$ qua arcus ex dato radio osculi determinatur.

 §. 8.

§. 8. Ad aequationem autem inter coordinatas orthogonales x et y eliciendam adhibeo aequationem ſupra inuentam, in qua etiamnum p et q continentur, quae huc redit $A^m q^m = (1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}$. Haec autem porro reducitur ad hanc $Aq = (1+pp)^{\frac{3m+1}{2m}}$, quarum quidem vtraque ad curuam conſtruendam ſufficere poſſet, cum duae tantum inſint variabiles p et q. Quia autem eſt $qdx = dp$, habebitur $Adp = (1+pp)^{\frac{3m+1}{2m}} dx$ ſeu $dx = \frac{adp}{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2m}}}$. Deinde ob $dy = pdx$, erit $dy = \frac{apdp}{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2m}}}$ vnde integrando obtinetur $y = \frac{-ma}{(m+1)(1+pp)^{\frac{m+1}{2m}}} + b$; hincque $\frac{ma}{(m+1)(b-y)} = (1+pp)^{\frac{m+1}{2m}}$. Fiat $\frac{ma}{m+1} = -c$, et ponatur $b = 0$, quia hoc pacto amplitudo aequationis nihil reſtringitur, habebiturque $\frac{c}{y} = (1+pp)^{\frac{m+1}{2m}}$, atque $1+pp = \frac{c^{\frac{2m}{m+1}}}{y^{\frac{2m}{m+1}}}$; ex quo fit $p = \frac{\sqrt{(c^{\frac{2m}{m+1}} - y^{\frac{2m}{m+1}})}}{y^{\frac{m}{m+1}}}$. Cum nunc ſit $dx = \frac{dy}{p}$ orietur aequatio pro curua quaeſita inter coordinatas x et y iſta $x = \int \frac{y^{\frac{m}{m+1}} dy}{\sqrt{(c^{\frac{2m}{m+1}} - y^{\frac{2m}{m+1}})}}$ atque in ea erit $\int r^m ds = \frac{(m+1)^m}{m^m} c^m x$.

Cur-

Curua igitur quaeſita erit algebraica, quoties fuerit vel $m = \frac{1}{2i}$ vel $m = \frac{-1}{2i+1}$, denotante i numerum integrum affirmatiuum quemcunque.

§. 9. Caſus hic nonnulli particulares ſeorſim conſiderari merentur, quorum primus eſto ſi $m = -1$, ſeu quo curua deſideratur, in qua $\int \frac{ds}{r}$ ſit maximum minimumue. Hoc autem caſu ob $m+1=0$ in omnibus aequationibus inuentis accidit incommodum, vt iudicium difficile videatur. At attentius rem conſideranti patebit, hunc caſum ne quidem ad quaeſtionem de maximis et minimis pertinere, cum $\frac{ds}{r}$ integrationem admittat, exiſtente $\int \frac{ds}{r}$ arcu circuli cuius ſinus eſt $\frac{dx}{ds}$; adeo vt $\int \frac{ds}{r}$ non ad totam curuam pertineat, ſed ex poſitione extremi curuae elementi reſpectu axis aſſumti pendeat. Alter caſus eſt quo $m=0$, ſeu quo curua quaeſita minima eſſe debet inter ſuos terminos. Hic facillime cognoſcetur ex aequatione $A^m q^m = (1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}$ quae poſito $m=0$ praebet $p=$ conſt. vnde intelligitur huic caſui lineam rectam ſatisfacere. Denique attendamus ad caſum $m=1$, quo curua quaeritur, quae inter omnes alias habeat $\int r\,ds$ minimum. Pro hac autem curua reperitur iſta aequatio $x = \int \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(c-y)}} = \int \frac{y\,dy}{\sqrt{(cy-yy)}}$, ex qua manifeſtum eſt curuam ſatisfacientem eſſe cycloidem, cuius cuſpis in altero termino dato collocatur; et baſis in ipſum axem incidit. Fiet autem $\int r\,ds = 2cx$; vnde intelligitur quaeſtioni maxime ſatisfieri, ſi eiusmodi cyclois eligatur, cuius binae cuſpides in ambos terminos praeſcriptos incidant.

§. 10. Atque hactenus quidem minimi valoris tantum mentio eſt facta, qui expreſſioni $\int r^m ds$ ſit conciliandus

dus, cum tamen methodus adhibita etiam maximum, si quod habetur, indicet. Si enim m, vti feci, tanquam numerus affirmatiuus consideretur, $\int r^m ds$ maximum habebit valorem, si sit $r = \infty$, lineaque quaesita recta, qui casus maximi cum sponte innotescat illo inueniendo supersedendum censui, etiamsi is quoque ex aequatione inuenta

$$Ap + B = \frac{(m+1)(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$$

fluat, faciendo A et B infinite magna, quo casu fit $p =$ constanti. Contra vero accidit, si m fuerit numerus nihilo minor, huicque quaestioni recta semper ita satisfacit, vt sit $\int r^m ds$ minimum, quippe $= 0$; curuae igitur, quas pro his casibus aequationes inuentae suppeditant ita sunt comparatae, ut in iis sit $\int r^m ds$ maximum. Ita si ponatur $m = -2$ curua reperietur quae inter omnes iisdem terminis contentas sit habitura $\int \frac{ds}{r^2}$ maximum non minimum. Curua autem ista hac continebitur aequatione $x = \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{(c^4 - y^4)}}$, ex qua intelligitur curuam satisfacientem esse elasticam ad axem orthogonalem, seu cuius tangentes in punctis flexus contrarii sint inter se parallelae, atque normales ad axem, in quo abscissae x capiuntur. Erit autem $\int \frac{ds}{r^2} = \frac{4x}{c^2}$.

§. 11. In his autem lineis curuis, quae problemati satisfacere sunt inuentae, parodoxon euenit, quod in aliis huius generis problematis vsu venire non solet. Cum enim axis, in quo abscissae capiuntur, respectu duorum praescriptorum terminorum, per quos curua transire debet, positione aliter non determinetur, nisi quod per alterum terminum transire debeat; infinitis modis parameter curuae accipi poterit, ita vt curua per alterum terminum transeat,

eat, id quod fiet axi debitam positionem tribuendo. Quamobrem solutio inuenta innumerabiles continet curuas problemati satisfacientes, cum tamen vnica satisfacere videatur; namque vel in his omnibus curuis $\int r^m ds$ eundem valorem obtinet, quod tamen non accidit, vel secus, quo casu ea, in qua $\int r^m ds$ erit vel maximum vel minimum problemati sola satisfacere censenda est. Ita casu $m=1$, pro quo cyclois est inuenta, cuius cuspis in altero termino sit positus, parameter cycloidis seu magnitudo circuli generatoris non definitur, quaecunque enim cyclois assumatur, ea ita poterit constitui, vt quoque per alterum terminum transeat. At facile colligire licet, ex quo minore circulo cyclois generetur, eo minorem quoque fore $\int r ds$; ita vt huic quaestioni stricte acceptae ea cyclois maxime satisfaciat, quae a circulo minimo seu infinite paruo sit nata; cuiusmodi curua, etsi a recta differre non videatur tamen maxime discrepat; eo quod longitudine est diuersa, atque vbique radium osculi habet infinite paruum.

§. 12. Cum igitur solutio huius problematis, prout id quidem est propositum, innumeras praebeat curuas, concludendum est, ipsum problema non satis esse determinatum, eique insuper vnam conditionem adiungi posse, qua etiam quantitas parametri seu quantitatis constantis c, quae in aequatione pro curua inuenta $x=\int\frac{y^{\frac{m}{m+1}}dy}{\sqrt{(c^{\frac{2m}{m+1}}-y^{\frac{2m}{m+1}})}}$ inest, determinetur. Eiusmodi autem conditio duplex adiungi poterit, quarum altera ex amplitudine curvae non incongrue desumetur; aestimatur autem amplitudo curuae ex angulo, quem tangentes curuae in terminis praescriptis, per quos cur-

curua transire debet, inuicem constituunt. Ex quo solutio inuenta huic problemati satisfaciet, quo inter omnes curuas eiusdem amplitudinis per data duo puncta transeuntes, ea requiritur, quae habeat $\int r^m ds$ maximum minimumue. Vel loco amplitudinis curuae in problemate proposito tertium quodpiam punctum praescribi potest, per quod curua quaesita simul transeat; hac enim conditione adiecta pariter quantitas indefinita c determinabitur. Problema igitur ita proponatur, vt inter omnes curuas per tria data puncta transeuntes ea definiatur, in qua esset $\int r^m ds$ maximum vel minimum. Vtrouis autem modo problema proponatur, ex solutione vnica curua reperietur quae omnium maxime setisfaciet. Quemadmodum igitur, si in formula integrali, quae maxima minimaue esse debet, differentialia primi tantum gradus insunt, duo tantum puncta praescribere licet, per quae curua quaesita transeat, ita si formula illa integralis differentialia secundi gradus contineat, tria puncta, per quae curua quaesita ducatur, dari oportet. Ex quo colligitur si differentialia tertii ordinis in illam formulam ingrediantur, tum problema non fore determinatum, nisi quatuor puncta sint praescripta, per quae curua quaesita transeat, et ita porro. Quo altiora enim differentialia in aequationem quampiam ingrediuntur, eo latius ea patet, pluresqne restrictiones admittit, propter plures integrationes, quarum singulae nouam constantem indefinitam inducunt. Atque ex his natura huiusmodi problematum quibus curuae maxima minimaue quadam proprietate gaudentes requiruntur, clarius perspicitur, quam ante solutionem actu transactam fieri potuisset.

§. 13.

§. 13. Haec autem attentius considerantibus planum fiet, numerum punctorum, quae ad curuam aequatione contentam determinandam requiruntur, pendere a gradu differentialium, quibus aequatio primitiua $0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} +$ etc. erit affecta, eliminatis quantitatibus in subsidium vocatis, p, q, r, etc. vt tantum x et y cum suis differentialibus insint. Ita si haec aequatio statim fuerit algebraica, tvm dato axe initioque abscissarum, ne vnicum quidem punctum praescribi potest, per quod curua quaesita transeat, sed curua inuenta inter omnes omnino curuas ad eundem axem relatas nulla insuper conditione adiuncta, praescriptam proprietatem maximi minimiue habebit. Sic si $\int (ay - xx) y dx$ maximum mimimumue esse debeat, reperietur curua hac aequatione expressa $2ay = xx$, quae quaesito inter omnes omnino curuas ad eundem axem relatas maxime satisfacit. Aequatio autem generalis $0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} -$ etc. neque differentialis primi gradus vnquam fieri potest; neque tertii gradus differentialis, neque quinti, neque vllius gradus imparis. Quoties autem prodit aequatio differentialis secundi gradus, quod in omnibus fere problematis adhuc tractatis vsu venit, tum duo puncta pro lubitu assignari possunt, per quae curua quaesita transeat. His igitur casibus curua inuenitur, quae inter omnes alias per eadem duo puncta ductas praescripta maximi minimiue proprietate est praedita. Cum autem ad aequationem differentialem quarti ordinis peruenitur, tum curua inuenta quaeque habebit formulam $\int Z dx$ maximam minimamue non inter omnes omnino curuas, sed inter omnes tantum, quae cum inuenta quatuor puncta habent communia. Simili modo aequatio differentialis sexti gradus

dus sex puncta data ad curuam determinandam requiret, et ita porro. Quod autem in nostro casu curuam tribus tantum punctis determinari dixi, cum tamen ea ex aequatione differentiali quarti gradus sit orta, inde venit, quod datum curuae punctum in vno datorum punctorum collocauerim: quae conditio non necessaria si omittatur, tum aequatio inuenta ad definitam curuam restringetur, si quatuor puncta, per quae transeat, praescribantur. Ita cyclois per quatuor data puncta descripta prae omnibus aliis curuis per eadem puncta transeuntibus hanc habebit praerogatiuam, vt in ea $\int r ds$ minimum obtineat valorem.

§. 14. Missis autem his, quae ad generalem problematis Isoperimetrici indolem potius, quam ad meum institutum pertinet, ad alteram quaestionem soluendam progrediar, quae est ipsa a Cel. Bernoullio proposita. Quaeritur autem in ea curua, quae inter omnes alias eiusdem longitudinis habeat $\int r^m ds$ maximum minimumue. Hic igitur habentur duae formulae integrales $\int ds$ et $\int r^m ds$, quarum vtrique valor ipsius V respondens est inuestigandus; quippe quo facto duo isti valores vel eorum multipli quique inuicem additi et $=0$ positi naturam curuae quaesitae exhibebunt. Adhibitis autem substitutionibus $dy=pdx$; $dp=qdx$, formulae illae abibunt in has $\int dx\sqrt{(1+pp)}$ et $\int \frac{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}} dx}{q^m}$; quarum illi respondet iste valor ipsius V; $\frac{-dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}} dx}$ pro altera autem erit vt ante V $=$

$-\frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2}$ existente $P = \frac{(3m+1)(1+pp)^{\frac{3m-1}{2}}}{q^m}$ p et $Q = \frac{-m(1+pp)^{3m+1}}{q^{m+1}}$. Quamobrem pro curua quaesita orietur ista aequatio $\frac{A\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = dP - \frac{ddQ}{dx}$; quae integrata dat $\frac{Ap}{\surd(1+pp)} + B = P - \frac{dQ}{dx}$. Multiplicetur vtrinque per dp seu qdx, et prodibit $\frac{Ap\,dp}{\surd(1+pp)} + B\,dp = P\,dp - q\,dQ = P\,dp + Q\,dq - Q\,dq - q\,dQ$; quae denuo integrata dat $A\surd(1+pp) + Bp + C = Z - Qq$; existente $Z = \frac{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$. Restitutis igitur loco Z et Q suis valoribus, orietur haec aequatio $A\surd(1+pp) + Bp + C = \frac{(m+1)(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$, quae per dx multiplicata, eliminatis p et q abit in hanc $A\,ds + B\,dy + C\,dx = (m+1)r^m ds$; in qua vt supra notaui, sine vlla restrictione vel B vel C nihilo aequale poni potest.

§. 15. Ponam igitur $B = 0$, at primo quaeram aequationem inter r et s, ex hac aequatione $A\,ds + C\,dx = (m+1)r^m ds$. Ex superioribus autem patet esse $\frac{dx}{ds} =$ sinui arcus $\int\frac{ds}{r}$, vnde loco dx suo substituto valore orietur $A + C$. sin. Arcus $\int\frac{ds}{r} = (m+1)r^m$, vnde erit $\int\frac{ds}{r} =$ Arcui, cuius sinus est $\frac{(m+1)r^m - A}{C}$ seu cuius ſinus eſt $\frac{r^m \pm a^m}{c^m}$. Hinc ergo ſumtis differentialibus emerget haec aequatio $\frac{ds}{r} = \frac{mr^{m-1}dr}{\sqrt{(c^{2m}-(r^m \pm a^m)^2)}}$, ex hacque porro iſta $s = m\int \frac{r^m dr}{\sqrt{(c^{2m}-(r^m \pm a^m)^2)}}$. Caſu igitur quo inter omnes curuas eiusdem longitudinis per quatuor data puncta transeuntes quaeritur ea, in qua ſit $\int r\,ds$ minimum maximumue, habebitur pro curua quaeſita iſta aequatio $s = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{(c^2-r^2 \pm 2ar-aa)}}$, quae apprime conuenit cum Bernoulliana mecum communicata iſta $ds = \frac{2r\,dr}{\sqrt{(g+4nr-4rr)}}$, eſt namque $\frac{g}{4} = c^2 - a^2$ et $n = \pm 2a$.

§. 16. Conſtructio autem curuae quaſitae commodiſſime ex aequatione $A\sqrt{(1+pp)} + Bp + C = \frac{(m+1)(1+pp)^{\frac{2m+1}{2}}}{q^m}$ deducetur, quae poſito $B=0$, mutatisque conſtantibus abit in hanc: $q = \frac{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2m}}}{\sqrt[m]{(A\sqrt{(1+pp)}+C)}}$. Multiplicetur per dx, et ob $q\,dx = dp$ habebitur $dx = \frac{dp\sqrt[m]{(A\sqrt{(1+pp)}+C)}}{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2m}}}$ atque $dy = \frac{p\,dp\sqrt[m]{(A\sqrt{(1+pp)}+C)}}{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2m}}}$; quae poſterior aeqnatio

facto

facto $\sqrt{(1+pp)} = u$ transmutatur in iſtam $dy = \frac{du\sqrt[m]{(Au+C)}}{u^{\frac{2m+1}{m}}}$ tractatu faciliorem. Ex his autem aequationibus curua per quadraturas facile conſtruitur. Aequatio vero differentialis primi gradus inter x et y ex iſtis aequationibus generalibus ob m numerum indefinitum formari nequit, at aequatio differentialis ſecundi gradus ob $dp = \frac{ddy}{dx}$; et $\sqrt{(1+pp)} = \frac{ds}{dx}$ obtinebitur iſta $ds^{\frac{3m+1}{m}} = dx\,ddy\sqrt[m]{(Ads+Cdx)}$ ad curuam cognoſcendam parum idonea. Interim tamen caſus eſt notandus, quo etiam fit $C=0$; tum enim aequatio $Ads = (m+1)\,r^m ds$ praebet $r =$ conſt., quae eſt proprietas circuli. Circulus igitur inter omnes alias curuas eiusdem longitudinis, et per eadem quatuor puncta ductas habebit $\int r^m ds$ maximum minimumue.

§. 17. Conſiderabo autem praecipue caſum quo $m = 1$, in quo inter omnes curuas eiusdem longitudinis per quatuor data puncta tranſeuntes ea quaeritur, in qua ſit $\int r\,ds$ maximum minimumue. Iſto autem caſu aequatio ſuperior $dy = \frac{du\sqrt[m]{(Au+C)}}{u^{\frac{2m+1}{m}}}$ abit in hanc $dy = \frac{Adu}{u^2} + \frac{Cdu}{u^3}$ cuius integralis eſt $y = a + \frac{2b}{u} + \frac{c}{uu}$ conſtantibus mutatis; vnde fit $u^2 = \frac{2bu+c}{y-a}$ atque $u = \sqrt{(1+pp)} = \frac{b \pm \sqrt{(bb-ac+cy)}}{y-a}$, ex qua elicitur

$p = \frac{\sqrt{(2bb - ac - aa + 2ay + cy - yy \pm 2b\sqrt{(bb - ac + cy)})}}{y - a} = \frac{dy}{dx}$. Fiat $a = 0$; quia applicatam y augere licet quacunque conſtante, ſine vlla reſtrictione, et habebitur $dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{(2bb + cy - yy \pm 2b\sqrt{(bb + cy)})}}$ pro aequatione qua curuae natura exprimitur. Signorum autem ambiguorum $\pm$ alterum dabit eam curuam, in qua $\int r\,ds$ eſt maximum, alterum in qua minimum. Perſpicuum autem eſt, ſi fiat $b = 0$, tum aequationem exhibituram eſſe cycloidem, quae iam ante eſt inuenta, et ſatisfacit ſola, quando conditio aequalitatis curuarum omittitur.

CLAS-