THEOREMATVM QVORVMDAM ARITHMETICORVM DEMONSTRATIONES.

AVCTORE
L. Eulero.

Theoremata arithmetica, cuiusmodi Fermatius aliique plurima detexerunt, eo maiore attentione sunt digna, quo magis eorum veritas est abscondita, et demonstratu difficilis. Fermatius quidem satis magnam talium theorematum copiam reliquit, nusquam autem demonstrationes exposuit, etiamsi firmiter asserat, sibi de eorum veritate certissime constare. Maxime igitur dolendum est eius scripta adeo periisse, vt etiamnum omnes demonstrationes ignorentur. Similis quoque est ratio propositionum in vulgus notarum, quibus neque summam neque differentiam duorum biquadratorum quadratum constituere posse asseritur; quamuis enim de earum veritate nemo dubitet, tamen nusquam extat demonstratio, quantum mihi quidem constat, rigida, praeter libellum quemdam a Freniclio olim editum, cuius Titulus est *Traité des triangles rectangles en nombres.* Demonstrat autem hic Autor inter alia in nullo triangulo rectangulo, cuius latera rationalibus exprimuntur numeris, aream posse esse quadratum, vnde facile veritas memoratarum propositionum de summa et differentia duorum biquadratorum deducitur. Sed ista demonstratio tantopere proprietatibus triangulorum est inuoluta, vt vt nisi summa attentio adhibeatur, vix perspicue intelligi possit. Hanc ob rem operae pretium fore arbitror, si harum propositionum demonstrationes a triangulis rectangulis abstraxero, easque analytice et clare proposuero. Eo maiorem autem hoc meum institutum afferet vtilitatem, quo plura alia theoremata multo difficiliora ex iis elici possunt. Huc scilicet pertinet Theorema illud celebre Fermatii, quo statuit, nullum numerum trigonalem esse posse biquadratum praeter vnitatem, cuius demonstrationem ex illis formare mihi contigit. Eo difficilior autem ista demonstratio videtur, cum propositio exceptioni sit obnoxia, atque tantum ad numeros integros pertineat; numeris enim fractis infinitis modis effici potest, vt $\frac{x(x+1)}{2}$ fiat biquadratum. Ad hoc igitur aliaque nonnulla theoremata demonstranda necesse erit lemmata quaedam praemittere, quibus sequentes demonstrationes innituntur. ante autem monuisse oportet, perpetuo omnes litteras mihi numeros integros designare.

Lemma 1.

Factum ex duobus pluribusue numeris inter se primis nec quadratum nec cubus nec vlla alia potestas esse potest, nisi singuli factores sint quadrata vel cubi vel eiusmodi aliae potestates.

Demonstratio huius Lemmatis facilis est atque ab Euclide iam est tradita, ita vt superfluum foret eam hic exponere.

Lemma 2.

Si a^2+b^2 fuerit quadratum, atque a et b sint numeri inter se primi, erit $a=pp-qq$; et $b=2pq$, existentibus p et q numeris inter se primis altero pari altero impari.

De-

Demonſtratio.

Quia eſt a^2+b^2 quadratum, ponatur eius radix $= a + \frac{bq}{p}$, vbi fractionem $\frac{q}{p}$ in minimis terminis pono expreſſam ita vt p et q ſint numeri inter ſe primi. Facta autem aequatione erit $a^2+b^2 = a^2 + \frac{2abq}{p} + \frac{bbqq}{pp}$. Vnde fit $a:b = pp-qq:2pq$. Numeri autem $pp-qq$ et $2pq$ inter ſe vel primi ſunt, vel communem habent diuiſorem 2. Illo igitur caſu, quo $pp-qq$ et $2pq$ ſunt numeri inter ſe primi, quod accidit, ſi numerorum p et q alter fuerit par alter impar, neceſſe eſt vt ſit $a = pp-qq$ et $b = 2pq$: quia a et b numeri ponuntur inter ſe primi. Caſu autem quo numeri $pp-qq$ et $2pq$ communem diuiſorem habent 2; quod erit, ſi numerorum p et q vterque fuerit impar; (vterque enim par eſſe nequit, quia inter ſe ponuntur primi), erit $a = \frac{pp-qq}{2}$ et $b = qq$. Ponatur autem $p+q = 2r$ et $p-q = 2s$, erunt r et s numeri inter ſe primi, eorumque alter par alter impar. vnde fit $a = 2rs$ et $b = rr-ss$; quae expreſſio, quia cum priore congruit, indicat ſi $aa+bb$ fuerit quadratum, et numeri a et b ſint inter ſe primi, alterum eorum eſſe differentiam duorum quadratorum inter ſe primorum, quorum alter par eſt alter impar, alterum vero numerum aequari duplici facto ex radicibus iſtorum quadratorum. Hoc eſt eſſe $a = pp - qq$ et $a = 2pq$, exiſtentibus p et q numeris inter ſe primis altero pari altero impari. Q. E. D.

Coroll. 1. Si ergo ſumma duorum quadratorum inter ſe primorum fuerit quadratum, alterum quadratum par ſit neceſſe eſt, alterum vero impar: ex quo ſequitur ſummam duorum quadratorum imparium non poſſe eſſe quadratum.

Co-

Coroll. 2. Si ergo $aa+bb$ eſt quadratum numerorum a et b, alter puta a erit impar alter b vero par. Impar vero a erit $= pp-qq$, et par $b=2pq$.

Coroll. 3. Quia porro numerorum p et q alter eſt par alter impar, erit b numerus pariter par ſeu per 4 diuiſibilis. Deinde ſi nec p nec q fuerit per 3 diuiſibilis, neceſſe eſt vt vel $p-q$ vel $p+q$ diuiſionem per 3 admittat. Vnde ſequitur alterum numerorum a et b, quorum quadratorum ſumma facit quadratum, eſſe per 3 diuiſibilem.

Coroll. 4. Cum ſit $a=pp-qq$ et $b=2pq$ ſi $aa+bb$ conſtituat quadratum, facile intelligitur numeros p et q minores eſſe quam a et b. Quoniam enim eſt $a=(p+q)(p-q)$ erit $a>p+q$ niſi $p-q$ ſit $=1$; atque ob $b=2pq$ erit b maior, quam p vel q. Potiore ergo ratione numeri a et b maiores erunt quam numeri p et q. Fieret quidem $a=0$ ſi foret $p=q$, ſed hic caſus locum non habet, quia p et q ponuntur numeri inter ſe primi, eorumque alter par alter impar.

Scholion.

In demonſtratione huius lemmatis ex analogia $a:b = pp-qq:2pq$ ideo ſequitur eſſe $a=pp-qq$ et $b=2pq$, quia a et b ſunt numeri inter ſe primi, pariter que numeri $pp-qq$ et $2pq$. Si enim fuerit $a:b=c:d$, atque tam numeri a et b quam numeri c et d ſint primi inter ſe, neceſſe eſt vt ſit $a=c$ et $b=d$; prout facile ex natura proportionum conſtat.

Lem-

Lemma 3.

Si fuerit $aa-bb$ quadratum, exiſtentibus a et b numeris inter ſe primis; erit $a=pp+qq$ et vel $b=pp-qq$ vel $b=2pq$, vbi numeri p et q ſunt inter ſe primi, eorumque alter par alter impar.

Demonſtratio.

Quia $aa-bb$ eſt quadratum, ponatur $a^2-b^2=c^2$, eritque $a^2=b^2+c^2$, atque b et c numeri inter ſe primi. Cum igitur per coroll. 1 lemmatis praecedentis numerorum b et c alter par ſit alter impar, neceſſe eſt vt a ſit numerus impar; b vero vel par erit vel impar.

Sit primo b impar et c par; erit per lemma praecedens $b=pp-qq$ et $c=2pq$, exiſtentibus p et q numeris inter ſe primis altero pari altero impari. Hinc autem fit $a=pp+qq$. At ſi b fuerit par et c impar; erit $b=2pq$ et $c=pp-qq$, vnde denuo fit $a=pp+qq$. Quocirca ſi $aa-bb$ fuerit quadratum, erit $a=pp+qq$, atque vel $b=pp-qq$ vel $b=2pq$ Q. E. D.

Coroll. 1. Si ergo differentia duorum quadratorum eſt numerus quadratus, maius quadratum debet eſſe numerus impar, ſi quidem illa quadrata inter ſe fuerint numeri primi.

Coroll. 2. ſimili porro modo intelligitur numeros p et q minores eſſe quam numeros a et b, cum ſit $a=pp+qq$ atque b vel $=pp-qq$ vel $=2pq$.

Coroll. 3. ſi fuerit $aa-bb=cc$, vnus numerorum a, b, c ſemper per 5 diuiſibilis exiſtit. Nam cum ſit $a=pp+qq$; $b=pp-qq$ et $c=2pq$; vel alter numerorum p et q per 5 diuiſibilis eſt vel neuter; illo autem caſu fit

c diuiſibile per 5. Hoc vero caſu erunt pp et qq numeri eiusmodi formae $5n \pm 1$, ergo vel $pp-qq$ vel $pp+qq$ per 5 diuiſibile erit.

Theorema I.

Summa duorum biquadratorum vt a^4+b^4 non poteſt eſſe quadratum, niſi alterum biquadratum euaneſcat.

Demonſtratio.

In theoremate hoc demonſtrando ita verſabor, vt oſtendam ſi vno caſu fuerit a^4+b^4 quadratum, quantumuis etiam magni fuerint numeri a et b, tum continuo minores numeros loco a et b aſſignari poſſe, atque tandem ad minimos numeros integros perueniri oportere. Cum autem in minimis numeris tales non dentur, quorum biquadratorum ſumma quadratum conſtitueret, concludendum erit nec inter maximos numeros tales extare. Ponamus ergo a^4+b^4 eſſe quadratum, atque a et b inter ſe eſſe numeros primos; niſi enim primi forent, per diuiſionem ad primos reduci poſſent. Sit a numers impar, b vero par, quia neceſſario alter par alter impar eſſe debet. Erit ergo $aa = pp-qq$ et $bb = 2pq$, numerique p et q inter ſe erunt primi, eorumque alter par alter impar. Cum autem ſit $aa = pp-qq$, neceſſe eſt vt p ſit numerus impar, quia alias $pp-qq$ quadratum eſſe non poſſet. Erit ergo p numerus impar et q numerus par. Quia porro $2pq$ quadratum eſſe debet, neceſſe eſt, vt tam p quam $2q$ ſit quadratum; quia p et $2q$ ſunt numeri inter ſe primi. Vt vero $pp-qq$ ſit quadratum, neceſſe eſt, vt ſit $p = mm+nn$ et $q = 2mn$; exiſtentibus iterum m et n numeris inter ſe primis eorumque altero pari altero impari. Sed quoniam

2q

$2q$ quadratum est, erit $4mn$ seu mn quadratum; vnde tam m quam n quadrata erunt. Posito ergo $m=xx$ et $n=yy$, erit $p=m^2+n^2=x^4+y^4$. quod quadratum pariter esse deberet. Hinc ergo sequitur si a^4+b^4 foret quadratum, tum quoque x^4+y^4 fore quadratum, manifestum autem est numeros x et y longe minores fore quam a et b. Pari igitur via ex biquadratis x^4+y^4 denuo minora orientur, quorum summa esset quadratum, atque pergendo ad minima tandem biquadrata in integris perueniretur. Cum ergo non dentur minima biquadrata, quorum summa efficeret quadratum, palam est nec in maximis numeris talia dari. Si autem in vno biquadratorum pari alterum sit $=0$, in omnibus reliquis paribus alterum euanescet, ita vt hinc nulli noui casus oriantur. Q. E. D.

Coroll. 1. Cum igitur summa duorum biquadratorum non possit esse quadratum, multo minus duo biquadrata coniuncta biquadratum efficere poterunt.

Coroll. 2. Quamquam demonstratio haec tantum ad numeros integros pertinet, tamen etiam per eam conficitur, ne in fractis quidem duo biquadrata exhiberi posse, quorum summa esset quadratum. Nam si $\frac{a^4}{m^4}+\frac{b^4}{n^4}$ foret quadratum, tum quoque in integris esset $a^4n^4+b^4m^4$ quadratum, quod fieri nequit, per ipsam demonstrationem.

Coroll. 3. Ex eadem demonstratione colligere licet, non dari eiusmodi numeros p et q, vt p, $2q$ et $pp-qq$ sint quadrata, si enim tales existerent, tum haberentur valores pro a et b, qui redderent a^4+b^4 quadratum, foret namque $a=\sqrt{(pp-qq)}$ et $b=\sqrt{2pq}$.

Coroll. 4. Positis ergo $p=xx$ et $2q=4yy$ erit $pp-qq=x^4-4y^4$. Fieri ergo omnino nequit, vt x^4-4y^4 sit

 quadra-

quadratum. Neque igitur $4x^4-y^4$ quadratum esse poterit, foret enim quadratum $16x^4-4y^4$, qui casus ob $16x^4$ biquadratum ad priorem recidit.

Coroll. 5. Sequitur hinc etiam $ab(a^2+b^2)$ quadratum nunquam esse posse. Ob factores enim a, b, a^2+b^2 inter se primos, singulos quadrata esse oporteret, quod fieri nequit.

Coroll. 6. Similiter tales etiam numeri inter se primi a et b non dabuntur, qui producerent $2ab(aa-bb)$ quadratum. Sequitur hoc ex coroll. 3. vbi monstratum est non dari numeros p, et q, vt essent p, $2q$, $pp-qq$ quadrata. Haec omnia autem quoque valent pro numeris inter se non primis atque adeo fractis, per coroll. 2.

Theorema 2.

Differentia duorum biquadratorum vt a^4-b^4 non potest esse quadratum, nisi sit vel $b=0$ vel $b=a$.

Demonstratio.

Theorema hoc pari modo demonstrabo quo praecedens. Sint igitur biquadrata iam ad minimos terminos reducta, atque ponamus a^4-b^4 esse quadratum: erit a numerus impar, b vero vel par erit vel impar.

Casus I. Sit primo b numerus par, erit $a^2=pp+qq$ et $b^2=2pq$, existentibus p et q inter se primis, eorumque altero p pari altero q impari. Ob $b^2=2pq$ debebunt ergo $2p$ et q esse quadrata. Quia porro $pp+qq$ ipsi a^2 aequatur, erit $q=mm-nn$ et $p=2mn$, existentibus m et n numeris inter se primis. Cum autem $2p$ sit quadratum, erit $4mn$ hoc est mn quadratum; adeoque m

et

et n ſigillatim quadrata. Factis ergo $m=x^2$ et $n=y^2$ fiet $q=x^4-y^4$, vbi cum numerorum m et n alter ſit par alter impar, erit quoque numerorum x et y alter par alter impar. At ob q quadratum, quadratum erit x^4-y^4, vbi x erit numerus impar, y vero par. Quo circa ſi fuerit a^4-b^4 quadratum, quadratum quoque erit x^4-y^4, exiſtentibus x et y longe minoribus quam a et b. Cum ergo in minimis numeris non dentur duo biquadrata, differentiam quadratam habentia, nec in maximis dabuntur, ſaltem caſu quo minus biquadratum eſt numerus par Q. E. Vnum.

Caſus II. ſit nunc b numerus impar, eritque $a^2=pp+qq$ et $bb=pp-qq$; exiſtentibus p et q numeris inter ſe primis, eorumque altero pari altero impari. Quia vero $pp-qq$ eſt quadratum, erit p numerus impar, et propterea q par. Ductis autem a^2 et b^2 in ſe inuicem, prodibit $a^2b^2=p^4-q^4$, quae expreſſio per caſum primum quadratum eſſe ideoque ipſi a^2b^2 aequari non poteſt. Differentia ergo duorum biquadratorum nullo modo eſſe poteſt quadratum, niſi vel ambo ſint aequalia, vel minus $=0$. Q. E. Alterum Dem.

Coroll. 1. Cum ſit $a^2=pp+qq$ et $b^2=2pq$ itemque $q=mm-nn$ et $p=2mn$; atque porro $m=x^2$ et $n=y^2$; erit $a^2=(x^4+y^4)^2$ et $b^2=4x^2y^2(x^4-y^4)$. Ex quo habebitur $a=x^4+y^4$ et $b=2xy\sqrt{(x^4-y^4.)}$

Coroll. 2. Si ergo in numeris exiguis x et y darentur tales, quorum biquadratorum differentia conſtitueret quadratum; tum ex iis ſtatim multo maiores numeri eadem proprietate gaudentes a et b inueniri poſſent.

Coroll. 3. Hinc clarius perſpicitur ex caſu quo biquadrata vel ſunt aequalia, vel alterum $=0$, nouos caſus non praebere, facto enim vel $x=y$ vel $y=0$, fit ſimul $b=0$, vnde vis demonſtrationis eo magis percipitur.

Coroll. 4. Ex demonſtratione porro ſequitur non dari numeros p et q eius indolis, vt eſſent $2p$, q et $pp+qq$ quadrata. Poſito ergo $2p=4xx$ et $q=yy$, non poterit eſſe quadratum iſta forma $4x^4+y^4$.

Coroll. 5. Ex his formulis quoque ſequitur, nec $ab(aa-bb)$ nec $2ab(aa+bb)$ vnquam fieri poſſe quadrata, id quod non ſolum valet, ſi a et b ſint numeri inter ſe primi, ſed etiam ſi compoſiti atque adeo fracti. Fractiones enim eiusmodi facile ad integros, atque integri ad numeros inter ſe primos reducuntur.

Coroll. 6. In his igitur duabus propoſitionibus euictum eſt, ſequentes nouem expreſſiones nunquam fieri poſſe quadrata

I.	$a^4 + b^4$	VI.	$a^4 - b^4$
II.	$a^4 - 4b^4$	VII.	$4a^4 + b^4$
III.	$4a^4 - b^4$	VIII.	$ab(aa-bb)$
IV.	$ab(aa+bb)$	IX.	$2ab(aa+bb)$
V.	$2ab(aa-bb)$	X.	$2a^4 \pm 2b^4$

decimam expreſſionem ideo adieci, quia eius veritas mox demonſtrabitur.

Theorema 3.

Summa duorum biquadratorum bis ſumta, vt $2a^4+2b^4$ quadratum eſſe nequit, niſi ſit $a=b$.

De-

Demonſtratio.

Pono primo a et b numeros eſſe inter ſe primos, nam niſi tales eſſent, formula per diuiſionem eo reduci poſſet. Facile autem perſpicitur, vtrumque numerum a et b eſſe debere imparem, ſi enim alter par eſſet, tum fieret $2a^4+2b^4$ numerus impariter par, qui quadratum eſſe nequit. Porro haec forma congruit cum iſta $(aa+bb)^2+(aa-bb)^2$, quam ideo demonſtrari oportet quadratum eſſe non poſſe, niſi ſit $a=b$. At ob a et b numeros impares, erunt a^2+b^2 et a^2-b^2 numeri pares, ille quidem impariter, hic vero pariter par. Peruentum ergo eſt ad hanc formam $\left(\frac{aa+bb}{2}\right)^2+\left(\frac{aa-bb}{2}\right)^2$, in qua $\frac{aa+bb}{2}$ et $\frac{aa-bb}{2}$ ſint numeri inter ſe primi, ille impar, iſte vero par; quamobrem ſi forma propoſita eſſet quadratum, foret $\frac{aa+bb}{2}=pp-qq$ et $\frac{aa-bb}{2}=2pq$, vnde reperitur $a^2=pp+2pq-qq$ et $b^2=p^2-2pq-qq$. quarum expreſſionum differentia eſt $4pq=aa-bb$; ideoque erit $a+b=\frac{2mp}{n}$ et $a-b=\frac{2nq}{m}$; vnde $a=\frac{mp}{n}+\frac{nq}{m}$ et $b=\frac{mp}{n}-\frac{nq}{m}$. Facta autem hac ſubſtitutione erit $\frac{mm}{nn}pp+\frac{nn}{mm}qq=pp-qq$ atque $\frac{pp}{qq}=\frac{nn(mm+nn)}{mm(nn-mm)}=\frac{mn(n^4-m^4)}{mm(nn-mm)^2}$. Oporteret ergo eſſe quadratum n^4-m^4, quod per praecedens theorema fieri nequit Q. E. D.

Coroll. 1. Si ergo a et b fuerint numeri impares, etiam $2ab(aa+bb)$ nequit eſſe quadratum; deberent enim a, b et $2aa+2bb$ eſſe quadrata; quod per hoc theorema fieri nequit.

Coroll. 2. Demonſtratio ergo etiam formari potuiſſet ex formula nona $2ab(aa+bb)$, ſed ibi numerorum a et b alter

alter positus erat par, alter impar, quod etiam si nihil impediret, tamen praestabat peculiarem dare demonstratio-nem.

Coroll. 3. Hac igitur demonstratione ipsa formulae nonae veritas magis confirmatur, cum hinc iam constet $2ab(aa+bb)$ quadratum esse non posse, etiam si numeri a et b ambo sint impares.

Coroll. 4. Breuius vero etiam veritas huius theorematis ostendi potest, ex forma $(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^2$; quae ideo quadratum esse nequit, quia $(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2$ est quadratum. Fieri autem nequit, vt summa duorum quadratorum sit quadratum, si eorundem quadratorum differentia fuerit quadratum. Si enim tam $pp+qq$, quam $pp-qq$ foret quadratum, quadratum esset p^4-q^4, quod fieri nequit.

Coroll. 5. Simili modo $a^4-6aabb+b^4$ quadratum esse nequit. Est enim $a^4-6aabb+b^4=(aa-bb)^2-4aabb$, quae est differentia eiusmodi quadratorum, quorum summa facit quadratum.

Coroll. 6. Atque pari modo $a^4+6a^2b^2+b^4$ quadratum esse nequit, quia est $=(a^2+b^2)^2+4aabb$, quorum quadratorum summa quadratum esse nequit, quia eorundem differentia $(a^2+b^2)^2-4aabb$ est quadratum.

Theorema 4.

Duplum differentiae duorum biquadratorum, vt $2a^4-2b^4$ quadratum esse nequit, nisi sit $a=b$.

De-

Demonſtratio.

Ponamus a et b numeros inter ſe primos et $2a^4-2b^4$ eſſe quadratum, erunt a et b numeri impares. Foret ergo $2(a-b)(a+b)(aa+bb)$ quadratum, ideoque etiam eius pars decima ſexta, ſeu $\left(\frac{a-b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{aa+bb}{2}\right)$; qui factores cum ſint inter ſe primi, ſinguli eſſe deberent quadrata. Sit ergo $\frac{a-b}{2}=pp$ et $\frac{a+b}{2}=qq$, erit $a=pp+qq$ et $b=qq-pp$. vnde fit $\frac{aa+bb}{2}=p^4+q^4$. cum igitur q^4+q^4 quadratum eſſe nequeant, etiam $\frac{aa+bb}{2}$, ideoque $2a^2-2b^4$ quadratum eſſe nequit. Q. E. D.

Theorema 5.

Neque $ma^4-m^3b^4$ neque $2ma^4-2m^3b^4$ poteſt eſſe quadratum.

Demonſtratio.

Ponamus a et b eſſe numeros inter ſe primos, atque m numerum eſſe nec quadratum nec per quadratum diuiſibilem: ſi enim m eſſet diuiſibilis per quadratum, tum factor quadratus per diuiſionem tolli poſſet. Ponatur porro m eſſe numerum tam ad a quam b primum, erunt ob $ma^4-m^3b^4=m\,(aa-mbb)\,(aa+mbb)$ toti factores inter ſe primi, ideoque ſinguli eſſe deberent quadrata. Facto ergo $m=pp$, deberet $(aa-ppbb)(aa+ppbb)$ eſſe quadratum, quod fieri nequit. Simili modo ob $2ma^4-2m^3b^4=2m\,(aa-mbb)\,(aa+mbb)$, atque factores inter ſe vel primos vel binarium pro communi menſura habentes, erit vel $2m$ vel m quadratum: priori vero caſu facto $2m=4pp$, oporteret eſſe $a^4-4p^4b^4$ quadratum, quod

 pariter

pariter fieri nequit. Sin autem $m = pp$, tum foret $2a^4 - 2p^4b^4$ quadratum, quod per theorema praecedens fieri nequit. At si m non fuerit primus respectu ipsius a; ponamus $m = rs$ atque $a = rc$, vbi notandum est r et s numeros esse inter se primos, quia m nullum factorem quadratum habere ponitur. Quadrata ergo esse deberent istae formae $r^5sc^4 - r^3s^3b^4$ et $2r^5sc^4 - 2r^3s^3b^4$ seu $r^3sc^4 - rs^3b^4$ et $2r^3sc^4 - 2rs^3b^4$.

Ob factores autem harum formularum inter se primos vel rs vel $2rs$ deberent esse quadrata, adeoque r et s vel $2s$ singulatim, vnde formulae orirentur, quas quadrata esse non posse iam est ostensum. Q. E. D.

Coroll. 1. Huiusmodi igitur formae $mn(m^2a^4 - n^2b^4)$ et $2mn(m^2a^4 - n^2b^4)$ quadrata esse non possunt, quicunque etiam numeri loco m, n, a et b accipiantur.

Coroll. 2. Si igitur $maa + nbb$ fuerit quadratum, nec $m^2naa - mn^2bb$ nec $2m^2naa - 2mn^2bb$ quadrata esse poterunt. Atque si $maa - nbb$ fuerit quadratum, nec $m^2naa + mn^2bb$ nec $2m^2naa - 2mn^2bb$ quadrata esse poterunt.

Coroll. 3. Ponamus $maa + nbb = cc$; erit $m = \frac{cc - nbb}{aa}$, quadratum ergo esse neque $n(cc - nbb)(cc - 2nbb)$ neque $2n(cc - nbb)(cc - 2nbb)$ poterit. Atque si fuerit $m = \frac{cc + nbb}{aa}$; tum neutra istarum formularum $n(cc + nbb)(cc + 2nbb)$ et $2n(cc + nbb)(cc + 2nbb)$ poterit esse quadratum.

Coroll. 4. Si ponatur $c = \pm pp + nqq$ et $b = 2pq$, sequentes obtinebuntur formulae $n(p^6 \pm 6nppqq + n^2q^4)$ et $2n(p^6 \pm 6nppqq + n^2q^4)$, quae nullo modo quadrata effici poterunt.

Theo-

Theorema 6.

Neque $ma^4 + m^3b^4$ neque $2ma^4 + 2m^3b^4$ poteſt eſſe quadratum.

Demonſtratio.

Dico primo, ſi fuerit $mp^2 \mp mq^2$ quadratum, tum nec $mp^2 + mq^2$ nec $2mp^2 + 2mqq$ quadratum vllo modo eſſe poſſe; fieret enim vel $m^2(p^4 - q^4)$ vel $2m^2(p^4 - q^4)$ quadratum contra iam demonſtrata. Faciamus autem $mp^2 - mq^2$ quadratum ponendo radicem eius $= \frac{(p-q)a}{b}$, erit $mp + mq = \frac{a^2p - a^2q}{bb}$, vnde reperitur $q = \frac{p(aa - mbb)}{a^2 + mbb}$. Sit igitur $p = a^2 + mb^2$, erit $q = aa - mb^2$, adeoque $p^2 + q^2 = 2a^4 + 2m^2b4$. Quadratum ergo eſſe non poterit primo $mp^2 + mq^2 = 2ma^4 + 2m^3b^4$; deinde $2mp^2 + 2mq^2 = 4ma^4 + 4m^3b^4$. Ex his colligitur neque $ma^4 + m^3b^4$ neque $2ma^4 + 2m^3b^4$ quadratum eſſe poſſe. Q. E. D.

Coroll. In his igitur duobus theorematis euictum eſt, nullos numeros in iſtis formis $ma^4 \pm m^3b^4$ et $2ma^4 \pm 2m^3b^4$ poſſe eſſe quadratos. In his autem formulis praecedentes omnes continentur.

Theorema 7.

FERMATIANUM.

Nullus numerus trigonalis in integris poteſt eſſe biquadratum praeter vnitatem.

Demonſtratio.

Omnis numerus trigonalis hac forma $\frac{x(x+1)}{2}$ continetur. Demonſtrandum ergo hanc formulam $\frac{x(x+1)}{2}$ nunquam eſſe poſſe biquadratum: ſiquidem loco x numeri integri ſubſtituantur, excepto caſu $x = 1$. Notandum autem

tem eſt vel x eſſe numerum parem vel imparem; priori igitur caſu $\frac{x}{2}(x+1)$, poſteriori vero $x\frac{(x+1)}{2}$ eſſe debere biquadratum; in quorum factorum vtroque bini factores ſunt inter ſe primi, ideoque vterque eſſe deberet biquadratum. Sit igitur priori caſu $\frac{x}{2}=m^4$ ſeu $x=2m^4$, debebitque $x+1=2m^4+1$ eſſe biquadratum. Poſteriori vero caſu ſit $\frac{x+1}{2}=m^4$, vt ſit $x=2m^4-1$, quod itidem oportet, eſt biquadratum. Hanc ob rem biquadratum eſſe deberet $2m^4\pm 1$. Ponatur $2m^4\pm 1=n^4$, erit $4m^4=2n^4\mp 2$, deberet ergo $2n^4\mp 2$ eſſe $4m^4$ hoc eſt quadratum. Supra autem demonſtratum eſt $2a^4\pm 2b^4$, adeoque etiam $2n^4\pm 2$ nunquam quadratum eſſe poſſe praeter caſum $n=1$. Poſito autem $n=1$ fit m vel $=0$ vel $=1$; atque x vel $=0$ vel $=1$. Nullus igitur numerus integer datur, qui loco x ſubſtitutus redderet $\frac{x(x+1)}{2}$ biquadratum, praeter caſus $x=0$ et $x=1$. Quamobrem in integris nullus extat numerus trigonalis, qui eſſet biquadratus praeter vnitatem et cyphram Q. E. D.

Coroll. 1. Si ponatur $\frac{xx+x}{2}=y^4$, erit $4xx+4x+1=8y^4+1=(2x+1)^2$. Ex quo ſequitur numeris integris loco y ſubſtituendis hanc formam $8y^4+1$ nunquam eſſe poſſe quadratum, praeter caſus $y=0$ et $y=1$.

Coroll. 2. Si ponatur $8y^4+1=z^2$, fiet $16y^4=2z^2-2$. Quocirca $2z^2-2$ nunquam eſſe poteſt biquadratum; quicunque numerus integer loco z ſubſtituatur, praeter caſus $z=1$ et $z=3$.

Theorema 8.

Summa trium biquadratorum, quorum duo ſunt aequalia inter ſe, ſeu iſtiusmodi forma a^4+2b^4 quadratum eſſe nequit, niſi ſit $b=0$.

Demon-

Demonſtratio.

Ponamus a^4+2b^4 eſſe quadratum, eiusque radicem $a^2+\frac{m}{n}b^2$; vbi tam a et b quam m et n numeri erunt inter ſe primi. Facta autem aequatione erit $2n^2b^2 = 2mna^2+m^2b^2$, atque $\frac{b^2}{a^2}=\frac{2mn}{2n^2m^2}$; quae fractio vel ſimpliciſſimam iam habet, vel diuiſione per 2 ad ſimpliciſſimam erit reducibilis. Ponamus primo $2mn$ et $2n^2-m^2$ numeros eſſe inter ſe primos, quod euenit, ſi m ſit numerus impar; eritque $b^2=2mn$ et $a^2=2n^2-m^2$; hic duo euoluendi ſunt caſus, quorum alter eſt ſi n eſt numerus impar, alter ſi n eſt par; illo caſu, quo n eſt impar, manifeſtum eſt ob m etiam imparem $2mn$ fieri non poſſe quadratum: hoc vero caſu, quo n eſt numerus par, fieri nequit $a^2=2n^2-m^2$ ſeu $a^2+m^2=2n^2$, ob a et m numeros imparer, et $2n^2$ numerum pariter parem. Habeant igitur $2mn$ et $2n^2-m^2$ communem diuiſorem 2, quod accidit ſi m ſit numerus par, puta $m=2k$, eritque n numerus impar; habebitur ergo $\frac{b^2}{a^2}=\frac{4kn}{2nn-4kk}=\frac{2kn}{nn-2kk}$, vbi $2kn$ et $nn-2kk$ numeri erunt inter ſe primi. Hinc igitur ob b^2 et a^2 pariter inter ſe primos erit $b^2=2kn$ et $a^2=n^2-2kk$. At hic $2kn$ fieri nequit quadratum, niſi ſit k numerus par. Sit ergo k numerus par, atque tam n quam $2k$ debebunt eſſe quadrata; Fiat igitur $n=cc$ et $2k=4dd$, vbi erit c numerus impar, hocque facto habebitur $a^2=c^4-8d^4$. Quo igitur inueſtigemus an c^4-8d^4 poſſit eſſe quadratum, ponamus eius radicem eſſe $c^2-\frac{2p}{q}dd$. eritque $2q^2d^2=pqc^2-ppd^2$; ſeu $\frac{dd}{cc}=\frac{pq}{pp+2qq}$; vbi iterum tam c et d quam p et q ſunt numeri inter ſe primi. Hic denuo duo caſus ſunt notandi, ſiue p ſit numerus impar fiue par. Sit ergo primo p numerus impar; habebitur ob pq et $pp+2qq$ numeros inter fe primos, $dd=pq$ et $cc=pp+2qq$; Neceffe ergo eft vt tam p quam q fit quadratum. quamobrem pono $p=x^2$ et $q=y^2$, prodibitque $cc=x^4+2y^4$; quare fi a^4+2b^4 effet quadratum, tum quoque foret x^4+2y^4 quadratum, numerique x et y vehementer erunt minores, quam a et b; ex iisque denuo minores inueniri poffent, quod in integris fieri nequit. Pro fecundo cafu, quo p eft numerus par, ponamus $p=2r$, eritque $\frac{dd}{cc}=\frac{2qr}{2rr+2qq}=\frac{qr}{2rr+qq}$; et ob q imparem erunt qr et $2rr+qq$ numeri inter fe primi. Erit ergo $dd=qr$ et $cc=2rr+qq$, quare numerorum q et r vterque debet effe quadratus; pofitis itaque $q=xx$ et $r=yy$, fiet $cc=2y^4+x^4$; vnde patet, fi a^4+2b^4 effet quadratum, tum quoque in numeris longe minoribus fore fimilem formam x^4+2y^4 quadratum. Quo circa a^4+2b^4 quadratum effe nequit, nifi fit $b=0$. Q. E. D.

Coroll. 1. Quoniam inuenimus $\frac{b^2}{a^2}=\frac{2mn}{2n^2-m^2}$ pofito a^4+2b^4 quadrato; fequitur $2mn(2n^2-m^2)$ quadratum effe non poffe; quicunque etiam numeri loco m et n fubftituantur.

Coroll. 2. Factis ergo $m=x^2$ et $n=y^2$, quadratum non erit haec forma $4y^4-2x^4$. Simili modo pofito $2m=4x^2$ et $n=yy$, quadratum non erit haec forma $2y^4-4x^4$. Atque facto $m=x^2$ et $2n=4y^4$, haec formula $8y^4-x^4$ quadratum effe nequit.

Coroll. 3. Si generaliter fiat $m=\alpha x^2$, et $n=\beta y^2$, prodibit haec formula $2\alpha\beta(2\beta^2y^4-\alpha^2x^4)$ feu $4\alpha\beta^3y^4-2\alpha^3\beta x^4$, quae nullo modo quadratum effe poterit.

The-

Theorema 9.

Si haec forma a^4+kb^4 quadratum eſſe non poteſt, tum etiam haec forma $2k\alpha\beta^3 4^4-2\alpha^3\beta x^4$ nullo pacto quadratum effici poterit.

Demonſtratio.

Ponamus formam propoſitam a^4+kb^4 eſſe quadratum, eiusque radicem $=a^2+\frac{m}{n}b^2$ erit $kn^2b^2=2mna^2+m^2b^2$ atque $\frac{b^2}{a^2}=\frac{2mn}{kn^2-m^2}$. Quia ergo a^4+kb^4 quadratum eſſe nequit, tum etiam $\frac{2mn}{kn^2-m^2}$ ſeu $2mn(kn^2-m^2)$ quadratum eſſe non poterit. Fiat $m=\alpha x^2$ et $n=\beta y^2$, prodibit $2\alpha\beta(k\beta^2y^4-\alpha^2x^4)$ ſeu $2k\alpha\beta^3y^4-2\alpha^3\beta x^4$. quae formula propterea quadratum eſſe non poteſt; quicunque numeri ſiue affirmatiui ſiue negatiui loco α et β ſubſtituantur. Q. E. D.

Coroll. 1. Fiat ſiue α ſiue β negatiuum vt, prodeat haec forma $2\alpha^3\beta x^4-2k\alpha\beta^3y^4$, atque ponatur $2\alpha^3\beta=p^2$, erit $\beta=\frac{p^2}{2\alpha^3}$, vnde illa forma tranſit in hanc $p^2x^4-\frac{kp^6}{4\alpha^8}y^4$. Quadratum ergo eſſe nequit haec formula x^4-4ky^4 poſito $4y^4$ pro $\frac{p^4}{4\alpha^8}y^4$. Ex hac ergo formula vlterius ſequitur hanc expreſſionem $2\alpha^3\beta x^4+8K\alpha\beta^3y^4$ quadratum fieri non poſſe.

Coroll. 2. Ponatur in formula inuenta $2k\alpha\beta^3y^4-2\alpha^3\beta x^4$, $2k\alpha\beta^3=pp$, vt ſit $\alpha=\frac{pp}{2k\beta^3}$: tranſibit illa in hanc $p^2y^4-\frac{p^6}{4k^3\beta^8}x^4$, ex qua ſequitur a^4-4kb^4 quadratum eſſe non poſſe; vnde vt ante $2\alpha^3\beta x^4+8k\alpha\beta^3y^4$ quadratum eſſe non poterit.

Coroll. 3.

Coroll. 3. Si ergo a^4+kb^4 quadratum esse nequit, tum nec haec formula $2k\alpha\beta^3y^4-2\alpha^3\beta x^4$ nec haec $\alpha^3\beta x^4+k\alpha\beta^3y^4$ quadratum esse poterit.: quae posterior ex corollariis praecedentibus sequitur scribendo 2α loco α.

Coroll. 4. Cum igitur a^4+b^4 non possit esse quadratum, sequentes binae formulae $\alpha^3\beta x^4+\alpha\beta^3y^4$ et $2\alpha\beta^3y^4-2\alpha^3\beta x^4$ quadrata esse omnino non poterunt.

Coroll. 5. Atque quia a^4-b^4 quadratum esse non potest, orientur hae duae nouae formulae $\alpha^3\beta x^4-\alpha\beta^3y^4$ et $2\alpha^3\beta x^4+2\alpha\beta^3y^4$, quae nullo modo quadrata reddi possunt.

Coroll. 6. Quoniam denique a^4+2b^4 quadratum esse nequit, istae quoque formulae $\alpha^3\beta x^4+2ab^3y^4$ et $4\alpha\beta^3y^4-2\alpha^3\beta x^4$ non poterunt effici quadrata.

Scholion.

Ex iis igitur, quae hactenus demonstraui, prodierunt sex sequentes formulae generaliores, quae nullo modo in quadrata transmutari possunt.

I.	$\alpha^3\beta x^4+\alpha\beta^3y^4$	IV.	$2\alpha^3\beta x^4-2\alpha\beta^3y^4$
II.	$\alpha^3\beta x^4-\alpha\beta^3y^4$	V.	$2\alpha^3\beta x^4+2\alpha\beta^3y^4$
III.	$\alpha^3\beta x^4+2\alpha\beta^3y^4$	VI.	$2\alpha^3\beta x^4-4\alpha\beta^3y^4$

Atque in his sex formulis omnes continentur, quas in praecendentibus formulis tractauimus. Ex his autem formulis possent, vt iam ante feci, formulae trinomiales elici, quas aeque certum esset, quadrata neutiquam reddi posse; sed iis exhibendis supersedeo, ad alia nonnulla theoremata progressurus, quae circa cubos versantur, atque ex istis formulis expediri nequeunt.

Theo-

Theorema 10.

Nullus Cubus, ne quidem numeris fractis exceptis, vnitate auctus quadratum efficere potest, praeter vnicum casum, quo cubus est 8.

Demonstratio.

Propositio ergo huc redit, vt $\frac{a^3}{b^3}+1$ nunquam esse possit quadratum, praeter casum quo $\frac{a}{b}=2$. Quocirca demonstrandum erit, hanc formulam a^3b+b^4 nunquam fieri posse quadratum, nisi sit $a=2b$.

Haec autem expressio resoluitur in istos tres factores $b(a+b)(aa-ab+bb)$ qui primo quadratum constituere possunt si esse posset $b(a+b)=a^2-ab+bb$, vnde prodit $a=2b$, qui erit casus, quem excepimus. Pono autem, vt vlterius pergam, $a+b=c$, seu $a=c-b$, qua facta substitutione habebitur $bc(cc-3bc+3bb)$, quam demonstrandum est quadratum esse non posse, nisi sit $c=3b$; sunt autem b et c numeri inter se primi. Hic autem duo occurrunt casus considerandi prout c vel multiplum est ternarii vel secus: illo enim casu factores c et $cc-3bc+3bb$ communem diuisorem habebunt 3, hoc vero omnes tres inter se erunt primi. Sit primo c non diuisibile per 3, necesse erit, vt singuli illi tres factores sint quadrata, scilicet, b, et c, et $cc-3bc+3bb$ seorsim. Fiat ergo $cc-3bc+3bb=(\frac{m}{n}b-c)^2$, erit $\frac{b}{c}=\frac{3nn-2mn}{3nn-mm}$ vel $\frac{b}{c}=\frac{2mn-3nn}{mm-3nn}$; cuius fractionis termini erunt primi inter se, nisi m sit multiplum ternarii; sit ergo m per 3 non diuisibile, erit vel $c=3nn-mm$ vel $c=mm-3nn$; et vel $b=3nn-2mn$, vel $b=2mn-3nn$. At cum $3nn-mm$ quadratum esse nequeat, ponatur $c=mm-3nn$, quod quadratum fiat radicis

m-

$m-\frac{p}{q}n$. hincque oritur $\frac{m}{n}=\frac{3qq+pp}{2pq}$, atque $\frac{b}{nn}=\frac{2m}{n}-3=\frac{3qq-3pq+pp}{pq}$. Quadratum ergo eſſet haec formula $pq(3qq-3pq+pp)$, quae omnino ſimilis eſt propoſitae $bc(3bb-3bc+cc)$ et ex multo minoribus numeris conſtat. At ſit m multiplum ternarii, puta $m=3k$, erit $\frac{b}{c}=\frac{nn-2kn}{nn-3kk}$; vnde erit vel $c=nn-3kk$ vel $c=3kk-nn$; quia autem $3kk-nn$ quadratum eſſe nequit, ponatur $c=nn-3kk$, eiusque radix $n-\frac{p}{q}k$, vnde fiet $\frac{n}{k}=\frac{3qq+pp}{2pq}$; ſeu $\frac{k}{n}=\frac{2pq}{2qq+pp}$; atque $\frac{b}{nn}=1-\frac{2k}{n}=\frac{pp+3qq-4pq}{3qq+pp}$. Quadratum ergo eſſe deberet $(pp+3qq)(p-q)(p-3q)$. ponatur $p-q=t$ et $p-3q=u$, erit $q=\frac{t-u}{2}$ et $p=\frac{3t-u}{2}$, illaque formula abit in hanc $tu(3tt-3tu+uu)$ quae iterum ſimilis eſt priori $bc(3bb-3bc+cc)$. Reſtat ergo poſterior caſus, quo eſt c multiplum ternarii, puta $c=3d$; atque quadratum eſſe debet $bd(bb-3bd+3dd)$, quae cum iterum ſimilis ſit priori, manifeſtum eſt vtroque caſu euenire non poſſe, vt formula propoſita ſit quadratum. Quamobrem praeter cubum 8, alius ne in fractis quidem datur, qui cum vnitate faciat quadratum. Q. E. D.

Coll. 1. Simili modo demonſtrari poteſt nullum cubum vnitate minutum eſſe poſſe quadratum; hocque ne quidem in fractis.

Coroll. 2. Hinc ſequitur nec x^6+y^6 nec x^6-y^6 eſſe poſſe quadrata: atque nullum numerum trigonalem eſſe cubum praeter vnitatem.

COM-