

DE MOTV CYMBARVM

DE
MOTV CYMBARVM

REMIS PROPVLSARVM IN FLVVIIS

AVCTORE

L. Eulero.

Tabula III.
et IV.

Duplici modo cymbarum motus sub calculum mathematicum cadit, altero mechanico, altero geometrico, qui duo modi ratione tractandi profus inter se differunt. Qui enim hanc materiam mechanice tractare suscipiet, is primo ex principiis hydrostaticis in aptissimam cymbarum figuram inquiret; tum vero ex vi remorum cymbae accelerationem atque integrum motum tam in aqua quiescente quam in fluuio determinabit. Idem vero argumentum qui geometricè pertractare voluerit, is primo viam, quam cymba vtcunque directà et remis propulsa describet, definire tenetur; deinde autem varia problemata, quibus commodissimus et citissimus traiectus per fluuios postulatur, resoluet. Equidem in hac dissertatione constitui hanc rem, quatenus in geometriam incurrit, euoluere, praetermissa altera parte, quae a principiis mechanicis pendet. Antequam vero hoc opus aggrediar, necesse est, vt aliquot hypotheses praemittam atque stabiliam, quibus haec tractatio ad forum mere geometricum reducatur.

Hypothesis i.

Cymba, quae in aqua quiescente remis propellitur, motu aequabili progreditur in directione spinæ seu rectæ proram et puppæ iungentis.

In

nibus
obseru
te aequ
in ip
quidem
incipi
cymb
vim
que
quabil
tus in
atque
do in
hypo
berna
rectio
culi e
motu
secun

fluuio
fluuii

tum
fuerit
pari

In hac hypothefi nihil pono nifi quod actu in omnibus cymbis, quae in aqua quiefcente remis propelluntur, obferuatur. Primo enim remiges ex vtraque cymbae parte aequalibus viribus remigare folent, vnde fit vt cymba in ipfa fpinae directione promoueatur. Deinde ab initio quidem cymbae motus eft tardior, cum motus a quiete incipiat; at ftatim fit aequabilis. Quam primum enim cymba tantam naeta eft celeritatem, vt refiftentia aquae vim propellentem adaequet, tum neque accelerationem neque retardationem adipifcetur; atque idcirco motu aequabili feretur. Inaequalitatem autem, quae in ipfo motu initio adefit, hic tuto negligere licet, cum ftatim ceflet, atque initium computi tum demum conftitui queat, quando motus revera aequabilis eft factus. Haec eadem autem hypothefis locum habet, quando directio fpinae vi gubernaculi immutatur; tum enim fimul ipfius cymbae directio variatur, celeritate manente eadem. Ope gubernaculi ergo effici poteft, vt cymba in quacunq; curua data, motu aequabili promoueatur; dummodo fpina perpetuo fecundum curuae datae tangentem dirigatur.

Hypothefis 2.

Cymba in fluuio conftituta et remis non propulfa, a fluuio abripitur, et in ipfa fluuui directione eademque, quam fluuius habet, celeritate promouebitur.

Si cymba minore quam fluuius celeritate mouetur, tum a vi fluuii acceleratur, donec aequalem celeritatem fuerit confequta, quod cum euenerit, cymba cum fluuio pari celeritate, atque in eadem directione abripietur.

Tem-

M

im mathe-
o geome-
rorfus in-
mechanice
ofitaticis. in
ero ex vi
n. motum
bit. Idem
voluerit,
et remis
item varia
is traiectus
a hac dis-
etriam in-
te a prin-
opus ag-
raemittam
mere ge-

propellitur,
feu rectae

La

Tempus autem, quo cymba adhuc tardius mouetur, quam fluius, hic negligimus, cum sit exiguum, atque in mechanicam tractationem pertineat; quam hic non attingo. Deinde vero etiam si summo rigore hunc cymbae motum examinare vellemus, is vtique semper minor foret motu fluiui, propter aeris resistentiam, qua cymbae pars ex aqua eminens impeditur. Sed cum haec differentia satis sit parua, contentus ero, si istae hypotheses ad veritatem saltem prope accedant, atque in praxi tuto negligi queant. Meum enim propositum non est hanc materiam accuratissime secundum leges motus investigare, sed tantum per hypotheses a veritate non multum discrepantes ad geometriam puram reuocare, ad quod hae duae hypotheses sunt accommodatae.

Cum igitur per has hypotheses constet, quemadmodum tum cymba remis propulsa in aqua quiescente tum etiam remis destituta in fluiuo moueatur; colligere hinc licebit, quomodo cymba remis propulsa in fluiuo progredi debeat. Hoc enim casu cymba motu composito mouebitur, qui oritur ex duobus lateralibus, altero scilicet, quo moueretur, si aqua quiesceret, altero quo moueretur, si remi abessent. Compositione motus igitur in subsidium vocata, tota tractatio nostra per solam geometriam absolui poterit; quamobrem ad sequentia problemata huc spectantia soluenda progrediar.

Problema I.

Data fluiui in singulis locis celeritate atque directione, quam spina cymbae vbiq̄ue tenet, inuenire curuam, quam cymba in fluiuo describet.

So-

que A
centru
catae
rectio
hocqu
directi
sinus
ita vt
qua. i
tur se
ritater
sua M
tem
tatis
ritur.
et vi
p m,
Si nu
geretu
ritate
ueniat
cymb
M ir
puscu
turum
vi, re
cesse
Te

Solutio.

Trāiciat recta AB cursum fluminis normaliter, sit-
 que AMC curua quaesita, in qua cymba seu potius eius
 centrum grauitatis M moueatur; erunt huius curuae appli-
 catae MP ad rectam AB tanquam ad axem ductae in di-
 rectione fluii sitae. Ponamus cymbam in M peruenisse,
 hocque in loco directionem spinae esse aMb, quae cum
 directione fluminis PM angulum PMb constituat, cuius
 sinus sit =m, et cosinus =n, posito sinu toto =r,
 ita vt sit $m^2 + n^2 = r^2$. Exponat c celeritatem cymbae,
 qua in aqua quiescente remis propulsa vniformiter mouere-
 tur secundum directionem spinae; u vero exprimat cele-
 ritatem qua fluius in loco M progreditur, in directione
 sua Mq; quae celeritas vtcunque sit variabilis. Vera au-
 tem celeritas, qua cymba seu potius eius centrum graui-
 tatis M actū in curua AMC mouetur, sit =v; quae quae-
 ritur. Iam ponatur abscissa AP=x; applicata PM=y,
 et via emensa AM=s. atque ducatur applicata proxima
 pm, vt sit Pp=Mn=dx; mn=dy atque Mm=ds.
 Si nunc evanescente fluii celeritate cymba solis remis vr-
 geretur, tum progredetur in directione spinae ab, cele-
 ritate c, qua puncto temporis centrum grauitatis M per-
 ueniat in b. (per hyp. 1.) At si cessante vi remorum
 cymba a solo fluminis cursu agigaretur, tum propelleretur
 M in directione PM, celeritate =u, qua eodem tem-
 pusculo pertingat ex M in q, (per hyp. 2.) ita vt fi-
 turum sit Mb: Mq=c:u. Si ergo cymba ab vtraque
 vi, remorum scilicet et fluii coniunctim, vrgeatur, tum ne-
 cesse est, vt in diagonali Mm, parallelogrammi Mbmq

Tabula III.
 Fig. x.

Tom. X.

D

in-

ietur, quam
 ue in me-
 on attingo:
 ymbae mo-
 minor foret
 ymbae pars
 : differentia
 ses ad veri-
 tuto negligi
 c materiam
 , sed tan-
 n discrepan-
 i. hae duae

, quemad-
 iescente tum
 gere hinc li-
 uio progredi
 sito moue-
 scilicet, quo
 oueretur, si
 n subsidium
 triam absolui
 huc spectan-

ue directio-
 ire curuam,

So-

incedat, celeritate huic ipsi diagonali proportionali, adeo
 ut fit $Mm:Mb = v:c$ seu $Mm:Mq = v:u$. Quia au-
 tem est sin. $Pmb = \cos. bMn = m$; et cos. $Pmb = \sin.$
 $bMn = n$; erit tang. $bMn = \frac{n}{m} = \frac{bn}{Mn}$; unde prodit
 $bn = \frac{ndx}{m}$ et $bm = Mq = dy + \frac{ndx}{m}$. At cum sit $\frac{Mn}{Mb}$
 $= m$; erit $Mb = \frac{dx}{m}$. Quoniam vero est $Mb:Mq = c:u$
 erit $dx:mdy + ndx = c:u$, unde pro curua quaesita ista
 emergit aequatio $u dx = cm dy + cndx$; seu $dy =$
 $\frac{dx(u-cn)}{cm}$. Vera autem cymbae celeritas v , qua in hac
 curua mouetur, cognoscetur ex analogia $ds:\frac{dx}{m} = v:c$,
 unde erit $v = \frac{cmds}{dx}$. Q. E. I.

Corollarium 1. Cum fit $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, erit
 loco dy , valorem inventum $\frac{dx(u-cn)}{cm}$ substituendo, ds
 $= \frac{dx}{cm} \sqrt{c^2 - 2cnu + uu}$

Corollarium 2. Ex data in singulis locis celeritate
 cymbae vera innotescet tempus, quod cymba ad arcum
 curuae AM absoluendum impendit: erit scilicet hoc tem-
 pus $= \int \frac{ds}{v} = \int \frac{dx}{cm}$

Corollarium 3. Si ergo directio cymbae seu angulus Pmb
 per solam abscissam AP determinetur, tum etiam tempus,
 quo arcus datae abscissae respondens absolvitur, per solam
 abscissam definietur, neque a fluii celeritate huiusque mu-
 tabilitate pendebit.

Corollarium 4. Ex aequatione curuae AMC naturam
 exprimente $dy = \frac{dx(u-cn)}{cm}$ intelligitur, vbi fuerit $u > cn$
 ibi cymbam in fluiio descendere, vbi vero fit $u < cn$
 ibi ascendere; quo denique in loco fit $u = cn$ ibi cymbam
 a recta AB maxime distare, eoque in loco curuae de-
 scriptae tangentem parallelam fore rectae AB.

Corol-

I
C
compo
la est
directio
flumini
motus
C
ciet,
perpetu
autem
= x e
C
rection
= r,
cendet
quam
C
rigatur
det cel
et ipse
S
bae b sin
cum cui
tio aeq
obtusus
que aec
terum
nitioner
quod se

Corollarium 5. Si motus cymbae verus per Mm decomponatur in motum traicientem, cuius directio parallela est rectae AB , et motum ascensus vel descensus, cuius directio ad priorem est normalis et cum directione cursus fluminis congruit, erit motus traicientis celeritas $= cm$; motus descendens vero celeritas $= \frac{cm dy}{dx} = u - cn$.

Corollarium 6. Celerrime igitur cymba fluvium traiciet, si fuerit $m = 1$, hoc ergo fit, si spina cymbae perpetuo ad cursum fluvii normaliter dirigatur. Tempus autem, quo cymba hoc casu a ripa per intervallum $AP = x$ elongatur, erit $= \frac{x}{c}$.

Corollarium 7. Si cymba secundum ipsam fluvii directionem at contra cursum dirigatur, fiet $m = 0$, et $n = 1$, unde motus traiciens evanescet, cymbaque vel ascendet vel descendet, prout u vel minor vel maior fuerit quam c , erit scilicet celeritas, qua ascendit, $= c - u$.

Corollarium 8. Sin autem prora cymbae deorsum dirigatur fiet $n = -1$, atque cymba in fluvio recta descendet celeritate $c + u$, hoc est aggregato celeritatum fluvii et ipsius cymbae, qua in aqua quiescente moveretur.

Scholion. In solutione huius problematis posui proram cymbae b sursum directam, ita ut angulus PMb , quem directio spinae cum cursu fluminis allabentis constituit, sit acutus; sed eadem solutio aequae patet ad angulos obtusos. Nam si angulus PMb foret obtusus, tum eius cosinus n accipi debet negativus, eademque aequatio, quam inveni, pro hoc casu valebit. Ceterum cum ista solutio latissime pateat, ad clariorem cognitionem expediet nonnullos casus particulares evoluisse, ad quod sequentia problemata adiicere visum est.

Problema II.

Fig. 1.

Si Cymba *ab* cum directione fluminis *PM* perpetuo eundem conferuet angulum *PMb*, invenire curvam *AMC*, in qua cymba movebitur.

Solutio.

Sit *A E F B* alveus fluminis, et *AB* recta fluvium normaliter traiciens, quae ducta sit ex puncto *A*, e quo cymba egressa. Sit cymbae celeritas, qua in aqua quiescente progredetur $=c$, quam exprimat recta *AD* $=c$; curva vero *AQB* exponat fluvii celeritatem in singulis latitudinibus, ita ut eius applicatae *PQ* denotent celeritatem, qua portio fluvii *PMmp* labitur; posita ergo *AP* $=x$ erit *PQ* $=u$. Sit porro *AMC* curva quaesita, in qua cymbae *ab* centrum gravitatis *M* mouetur, atque eius applicata *PM* $=y$; vera vero celeritas, qua cymba elementum *Mm* percurrit $=v$; anguli denique *PMb* sinus sit $=m$ et cosinus $=n$, posito sinu toto $=r$, qui per hypothesein sunt constantes. His positis erit $dy = \frac{dx(u-cn)}{cm}$ atque $y = \int \frac{u dx}{cm} - \frac{nx}{m}$; unde erit *PM* $= \frac{\text{areae. APQ}}{m \cdot AD} - \frac{n}{m} AP$; ex qua aequatione facilis constructio sequitur curvae quaesitae *AMC* per quadraturam curvae *AQB*. Tempus vero quo cymba arcum *AM* absolvit erit $= \int \frac{dx}{cm} = \frac{x}{cm} = \frac{AP}{m \cdot AD}$.

Corollarium 1. Cum sit $dy = \frac{dx(u-cn)}{cm}$ erit $ddy = \frac{dx du}{cm}$ posito dx constante. Curva ergo *AMC* habebit punctum flexus contrarii, ubi est $du = 0$, hoc est, ubi celeritas fluvii est maxima.

Corol-

F
C
a cymb
 $= \frac{dx}{dy}$
spinae
C
uii ripa
 $= \frac{n}{m} A$
tum cy
C
 $= ab$,
tione ei
 $= 2na$
atquem
C
punctu
cum d
 $ax^2 +$
hoc ef
ba ad
C
nequit
deret;
poterit
C
seu $b >$
tingere
uum.
m proc

Corollarium 2. Tangens anguli AMP, quem curua a cymba descripta cum cursu fluminis PM constituit est $\frac{dx}{dy} = \frac{cm}{u-cn}$. Vbi ergo celeritas fluvii u evanescit, ibi spinæ directio curuam tangit.

Corollarium 3. Si C fuerit punctum in opposita fluvii ripa, in quo cymba appellit, erit $BC = \frac{\text{areae } \triangle QBA}{m \cdot AD} = \frac{n}{m} AB$. Quare si fuerit area $AQBA = n AB \cdot AD$, tum cymba in ipso puncto B appellet.

Corollarium 4. Si ponatur $AB = a$; area $AQBA = ab$, atque $BC = f$, erit $f = \frac{ab}{mc} - \frac{na}{m}$. Ex qua aequatione erit $mc f = ab - nac$. atque $m^2 c^2 f^2 = c^2 f^2 - n^2 c^2 f^2 = a^2 b^2 - 2na^2 bc + n^2 a^2 c^2$, vnde oritur $n = \frac{a^2 b^2 + f^2 \sqrt{(a^2 c^2 + c^2 f^2 - a^2 b^2)}}{(a^2 + f^2)c}$ atque $m = \frac{abf + a\sqrt{(a^2 c^2 + c^2 f^2 - a^2 b^2)}}{(a^2 + f^2)c}$, at $\frac{m}{n} = \frac{ac^2 f + ab\sqrt{(a^2 c^2 + c^2 f^2 - a^2 b^2)}}{a^2 b^2 - c^2 f^2}$

Corollarium 5. Si ergo cymba debeat appellere ad punctum datum C; tangens anguli PMB, quem cymba cum directione cursus fluvii constanter tenere debet, erit $\frac{ac^2 f + ab\sqrt{(a^2 c^2 + c^2 f^2 - a^2 b^2)}}{a^2 b^2 - c^2 f^2}$. Nisi ergo sit $c\sqrt{(a^2 + f^2)} > ab$ hoc est nisi fuerit $AD > \frac{\text{area } \triangle QBA}{AC}$, fieri nequit vt cymba ad punctum C appellet.

Corollarium 6. Quia m negatiuum valorem habere nequit, alias enim cymba non ad ripam oppositam accederet; vnica directione cymbae ad punctum C perueniri poterit, si fuerit $bf < \sqrt{(a^2 c^2 + c^2 f^2 - a^2 b^2)}$ seu $b < c$.

Corollarium 7. At si fuerit $bf > \sqrt{(a^2 c^2 + c^2 f^2 - a^2 b^2)}$ seu $b > c$. tum duplici modo cymba ad punctum C pertingere poterit, ob duplicem valorem ipsius m affirmatiuum. Oportet autem praetera esse $f > \frac{c}{a} \sqrt{(bb - cc)}$; ne m prodeat imaginarium.

erpetuo e-
m AMC,

uium nor-
quo cym-
quiescente
= c; cur-
ngulis lati-
celeritatem,
AP = x e-
l, in qua
ie eius ap-
a elemen-
sinus fit
ii per hy-
 $\frac{dx(u-cn)}{cm}$
 $\frac{Q}{m} = \frac{n}{m} AP$;
nae quaesi-
mpus vero
 $= \frac{x}{am} =$

rit $ddy =$
C habebit
t, vbi cele-

Corollarium 8. His autem casibus, quibus duplici angulo directionis cymba ad C pertingit, semisumma duorum horum angulorum aequalis est angulo BAC ducta chorda AC. Semidifferentiae vero horum angulorum sinus est $\frac{ab}{c\sqrt{aa+ff}}$ atque cosinus $= \frac{2ab\sqrt{aacc+caff-aabb}}{cc(aa+ff)}$. Vnde ex semisumma et semidifferentia facile uterque angulus satis faciens reperitur.

Corollarium 9. Quando ergo fit, ut angulus, qui est semidifferentia, minor sit angulo BAC, tum duplici angulo punctum C attingi poterit. Citius autem cymba ad C appellet, angulum sequendo maiorem, seu potius eum cuius sinus est maior; tempus enim, quo cymba fluvium traicit est $= \frac{AB}{m \cdot AD}$, vbi m est sinus anguli, quem directio cymbae cum cursu fluminis tenet.

Scholion Ex aequatione $PM = \frac{areae APQ}{m \cdot AD} - \frac{n}{m} AP$, quam pro curua a cymba descripta inveni, sequens satis facilis deducitur constructio huius curuae. Data enim curua ALQB, cuius applicatae celeritatem fluvii exprimunt, per A ducatur recta GAH parallela directioni, quam cymba perpetuo tenet, et ex D in eam demittatur perpendicularis DG erit $DG = m \cdot AD$, et $PR = \frac{n}{m} AP$. Hanc obrem curuae descriptae quoduis punctum M reperitur sumendo $PM = \frac{areae APQ}{DG} - PR$. Tempus vero, quo cymba ex A in M pervenit exprimitur per $\frac{AP}{DG}$. Ceterum notandum est, si curua ALB per puncta A et B transeat, quod fere in omnibus fluvii locum habet, quippe qui in medio celerrime ad ripas vero tardissime labuntur, tum non solum AH esse tangentem curuae in A, sed etiam tangentem in C esse ipsi AH parallelam. Praeterea si fluvius

Tabula IV.
Figura I.

R.
fluvius i
beat cel
medium
scripta
et trans
contrarii

Sit
punctum
ex A e

Sit
et AD
moueret
= m, c
BG = g
recta ne
KM =
H tendi
proptere
igitur su
dy =
uaxv(y-

ba ex A
Q. E. I
Cor
biles y
mixtae,

fluvius in aequalibus ab utraque ripa distantis aequales habeat celeritates, ita ut curva ALB diametro gaudeat LIK medium tenente inter ripas AE et BF; tum curva descripta AKC duas habeat partes similes AK et KC cis et trans punctum K; in K vero habeat punctum flexus contrarii; prout ex superioribus facile liquet.

Problema III.

Si cymba fluvium traiciens perpetuo dirigatur versus punctum fixum H, definire curvam AMC, quam cymba ex A egressa in fluvio describet. Tabula III.
Figura 3.

Solutio.

Sit ut ante curva AQB scala celeritatum fluminis, et AD celeritas c , qua cymba in aqua quiescente promoueretur; atque $AP = x$ $PM = y$; $PQ = u$, sin. $PMb = m$, cos. $PMb = n$. Fluvii autem latitudo AB sit $= a$, $BG = g$ et $GH = b$; ducta ex puncto fixo H in PM recta normali HGK. Erit ergo $HK = a + b - x$; et $KM = y - g$. Quia autem directio cymbae ab ad punctum H tendit, erit $\frac{a+b-x}{y-g}$ tangens anguli directionis PMb et propterea $= \frac{m}{n}$, unde fit $m = \frac{a+b-x}{\sqrt{(y-g)^2 + (a+b-x)^2}}$. Cum igitur supra pro curva quaesita ista inuenta sit aequatio $dy = \frac{u dx}{c m} - \frac{n dx}{m}$, erit pro nostro casu $dy = \frac{u dx \sqrt{(y-g)^2 + (a+b-x)^2} - c(y-g) dx}{c(a+b-x)}$. Tempus vero, quo cymba ex A in M pertingit, erit $= \int \frac{dx \sqrt{(y-g)^2 + (a+b-x)^2}}{c(a+b-x)}$
Q. E. I.

Corollarium I, Quamvis in aequatione inuenta variables y et x et u , quae ab x pendet, sint inter se permixtae, tamen si ponatur $y-g = (a+b-x)z$ a se invicem

is duplici anima duorum ducta chorda m finis est b). Vnde ex gulus satis fa-

gulus, qui est duplici anima cymba ad potius eum mba fluvium quem directio

$\frac{PQ}{m} = \frac{n}{m} AP$, sequens satis a enim curva primunt, per quam cymba perpendiculara. Hanc obrem ur sumendo o cymba ex erum notan- B transeat, ippe qui in intur, tum, sed etiam Praeterea si fluvius

vicem separabuntur, prodibit enim haec aequatio $\frac{c dx}{\sqrt{(1+zx)}} = \frac{u dx}{a+b-x}$

Corollarium 2. Quia u ab x pendet, ponatur $\int \frac{u dx}{a+b-x} = IX$, quod integrale ita sit acceptum, vt evanescat posito $x=0$. Hinc ergo erit $c \int \frac{dx}{\sqrt{(1+zx)}} = IX + \text{Const.}$ ad quam constantem determinandam ponatur $x=0$, fietque $z = \frac{-g}{a+b}$; prodibit ergo $\text{Const.} = c \int \frac{dx}{-g + \sqrt{(g^2 + (a+b)^2)}}$.

Corollarium 3. Posito ergo $\int \frac{u dx}{a+b-x} = X$ seu $X = \int \frac{u dx}{a+b-x}$ habebitur sequens aequatio integralis pro curva

$$\text{quaesita } X^{\frac{1}{2}} = \frac{(a+b)z + (a+b)\sqrt{(1+zx)}}{-g + \sqrt{(g^2 + (a+b)^2)}} \text{ seu } \frac{X^{\frac{1}{2}}(a+b-x)}{a+b} = \frac{y-g + \sqrt{((y-g)^2 + (a+b-x)^2)}}{-g + \sqrt{(g^2 + (a+b)^2)}}$$

Corollarium 4. Inuento autem ex his aequationibus y seu z per x , erit tempus, quo cymba ex A in M pergit $= \int \frac{dx \sqrt{(1+zx)}}{c}$, quod propterea concessis quadraturis assignari poterit.

Corollarium 5. Si punctum H in punctum G seu ipsam ripam cadat, vt sit $b=0$, habebitur $\frac{X^{\frac{1}{2}}(a-x)}{a} = \frac{y-g + \sqrt{((y-g)^2 + (a-x)^2)}}{-g + \sqrt{(g^2 + a^2)}}$. Si nunc ponatur $x=a$, quo inueniatur $y=BC=f$, seu punctum C cognoscitur, vbi cymba in ripa BF appellet, reperietur $\frac{2f-g}{-g + \sqrt{(a^2 + g^2)}} = 0$, nisi forte hoc casu $X^{\frac{1}{2}}$ fiat quantitas infinite magna, quae in $a-x=0$ ducta producat quantitatem finitam.

Corol-

evanesca
sibus cy
rigebatu
C
tur, si
= 0,
minori
cymban
si quide
pelleret
ret, do

Qu
tur, ex
tus euo
celeritat
axi AB
in ripa
titas co

$IX = a$

ergo val

$= \frac{y-g}{-g + \sqrt{(a^2 + g^2)}}$

tum cy

tem fue

To

Corollarium 6. Si ergo facto $x = a$ quantitas $\frac{X^{\alpha}(a-x)}{a}$

evanescat, prodibit $f = g$, seu $BC = BG$. His ergo casibus cymba ad ipsum punctum G, ad quod perpetuo dirigebatur, appellet.

Corollarium 7. Ex ipsa autem rei natura intelligitur, si extrema curvae AB applicata in B fuerit vel $= 0$, vel minor quam c , hoc est, si fluuius ad ripam BF minori celeritate feratur, quam cymba propellitur, tum cymbam semper ad ipsum punctum G appellere debere, si quidem H in G cadit. Si enim in alio puncto appelleret, tum motum versus G dirigendo moueri pergeret, donec ad G peruenerit.

Scholion.

Quo autem eiusmodi cymbae motus clarius cognoscatur, exemplum afferam, quo aequationem inuentam penitus euoluere licet. Habeat nimirum fluuius vbique eandem celeritatem, quo scala celeritatum fiat recta ab parallela axi AB, et dirigatur cymba perpetuo ad punctum fixum G in ripa opposita situm, vt sit $BG = g$. Fiet ergo u quantitas constans, quae sit $= ac$. Hoc ergo casu habebitur

$$IX = ac \int \frac{dx}{a-x} = ac \int \frac{a}{a-x} \text{ seu } X = \frac{a^{\alpha x}}{(a-x)^{\alpha c}} \text{ Hoc}$$

ergo valore in aequatione inuenta substituto prodibit $\frac{a^{\alpha-1}}{(a-x)^{\alpha-1}}$

$= \frac{y-g + \sqrt{(y-g)^2 + (a-x)^2}}{-g + \sqrt{g^2 + a^2}}$. Hinc patet, si fuerit $\alpha < 1$, tum cymbam in ipso puncto G esse appulsuram; sin autem fuerit $\alpha > 1$, tum cymbam omnino non ripam BF

Tom. X.

E

attin-

Tabula IV.
Fig. 2.

attingere posse. Casus autem quo fit $\alpha = 1$, seu $u = c$ habebitur $\sqrt{(g^2 a^2) - y} + \sqrt{(y - g)^2 + (a - x)^2} - \text{sex } x^2 - 2ax = 2gy - 2y\sqrt{(a^2 + g^2)}$ quae est aequatio pro parabola axem habente BF et verticem in F, ubi est $BF = \frac{a^2}{2\sqrt{(a^2 + g^2)} - 2g}$ eiusque parameter erit $2\sqrt{(a^2 + g^2)} - 2g$; ita vt ergo huius parabolae focus cadat in ipsum punctum G. Ex dato ergo foco G, positione axis FB et puncto A, per quod parabola transire debet, parabola describetur.

Problema 4.

Tab. IV.
Figura 3.

Data scala celeritatum fluvii AQB, inuenire cymbae directionem in singulis locis, qua fiat, vt cymba datam curuam AMC describat.

Solutio.

Quemadmodum applicatae PQ curuae AQB celeritatem fluvii in singulis locis P designant, ita fit AD celeritas qua cymba in directione spinæ in aqua quiescente progredieretur. Sit igitur $AD = c$; $AP = x$; $PQ = u$; in curua vero a cymba describenda ponatur applicata $PM = y$; et arcus $AM = s$. vt ideo fit $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Sit iam ab directio cymbae quaesita, quam in singulis punctis M habere debet, vt in data curua AMC moueatur; atque anguli PMb finus ponatur $= m$ eiusdemque cosinus $= n$ posito sinu toto $= 1$. Dantur ergo tum aequatio inter x et u tum etiam aequatio inter x et y , ex quibus vel m vel n definiri oportet. Inuenimus autem in problemate primo hanc aequationem $u dx - c m dy = n dx = c dx \sqrt{(1 - m^2)}$ ob $n = \sqrt{(1 - m^2)}$. Sumendis

men-
dis
 $+ c^2 m^2$
 $= cmudx$
reperitu
 $cn = \frac{u}{c}$
guli PM
Cymba
incedet.
C
commo
est $\frac{dy}{dx}$ a
obrem
 $\sqrt{(c^2 dx^2}$
C
lum P
grediati
 $\frac{d^2 s^2}{dx^2}$
tum ob
describa
C
tibilis,
est vt
C
intelligi
AD,
quia he
C
directio

mendis igitur quadratis prodibit $u^2 dx^2 - 2cmu dx dy + c^2 m^2 dy^2 = c^2 dx^2 - c^2 m^2 dx^2$, quae abit in hanc $c^2 m^2 = \frac{cmu dx dy + c^2 dx^2 - u^2 dx^2}{dx^2 + dy^2}$, ex qua per radicis extractionem reperitur $cm = \frac{udx dy + dx \sqrt{c^2 dx^2 + c^2 dy^2 - u^2 dx^2}}{dx^2 + dy^2}$ atque $cn = \frac{udx^2 + dy \sqrt{c^2 dx^2 + c^2 dy^2 - u^2 dx^2}}{dx^2 + dy^2}$. Ex his sequitur anguli PMb tangens, quae est $\frac{m}{n} = \frac{c^2 dy dx + u dx \sqrt{c^2 dx^2 + c^2 dy^2 - u^2 dx^2}}{u dx^2 - c^2 dy^2}$

Cymba ergo angulum hunc tenens in curua data AMC incedet. Q. E. I.

Corollarium 1. Angulus PMb cuius tangens est $\frac{m}{n}$ commode in duos angulos resolui potest quorum alterius tangens est $\frac{dy}{dx}$ alterius vero tangens $\frac{+ \sqrt{c^2 dx^2 + c^2 dy^2 - u^2 dx^2}}{u dx}$. Quamobrem erit ang. $PMb = \text{Ang. tang. } \frac{dy}{dx} \pm \text{Ang. tang. } \frac{\sqrt{c^2 dx^2 + c^2 dy^2 - u^2 dx^2}}{u dx}$

Corollarium 2. Vbique ergo cymba duplicem angulum PMb tenere poterit, quo in data curua AMC ingrediatur; dummodo fuerit $c^2 dx^2 + c^2 dy^2 > u^2 dx^2$ feu $c^2 ds^2 > u^2 dx^2$. Nam si alicubi saltem fuerit $c^2 ds^2 < u^2 dx^2$, tum omnino fieri nequit, vt curua proposita a cymba describatur.

Corollarium 3. Quo igitur curua proposita sit descriptibilis, ita esse debet comparata, vt sit vbique $\frac{c}{u} > \frac{dx}{ds}$ hoc est vt sit vbique $\frac{AD}{PQ} > \frac{Mn}{Mm}$.

Corollarium 4. Cum nusquam esse possit $Mn > Mm$, intelligitur, si nulla applicata curuae AQB maior sit quam AD , tum omnem curuam AMC a cymba absolui posse; quia hoc casu fieri nequit, vt vsquam sit $\frac{AD}{PQ} < \frac{Mn}{Mm}$.

Corollarium 5. Quod autem ad duplicem angulum directionis attinet, quibus curua data describi posse inuenta

E 2 est,

r, feu $u = c - x$) sex x^2 equatio pro pa, vbi est BF $z^2 + g^2 - 2g$; in punctum G et puncto A , describetur.

inuenire cymba da-

AQB celerit fit AD cequa quiescente x ; $PQ = u$; applicata PM $(dx^2 + dy^2)$. im in singulis AMC mouem eiusdemque ergo tum ae- x et y , ex- imus autem in $-cm dy = -mm$). Su- mendis

est, notandum est, tum tantum vtrumque locum inuenire, quando vterque fit affirmatiuus, si quidem motus initium in A collocetur. Duplex igitur angulus locum habebit, si fuerit Ang. tang. $\frac{dy}{dx} > \text{Ang. tang. } \frac{\sqrt{(c^2 dx^2 + c^2 dy^2 - u^2 dx^2)}}{u dx}$ hoc est, si fuerit $u dy > \sqrt{(c^2 dx^2 + c^2 dy^2 - u^2 dx^2)}$ seu si fuerit $u > c$.

Corollarium 6. Cum vera cymbae celeritas in M, qua elementum Mm absoluit, fit $= \frac{cm ds}{dx}$; erit nostro casu celeritas cymbae vera $= \frac{u dy \pm \sqrt{(c^2 ds^2 - u^2 dx^2)}}{ds}$ ob $dx^2 + dy^2 = ds^2$.

Corollarium 7. Tempus autem, quo arcus curuae AM absoluitur erit $= \int \frac{ds^2}{u dy \pm \sqrt{(c^2 ds^2 - u^2 dx^2)}}$ idem vero tempus transformando formulam prodit $= \int \frac{u dy \pm \sqrt{(c^2 ds^2 - u^2 dx^2)}}{u^2 - c^2}$; si scilicet numerator et denominator per $u dy \pm \sqrt{(c^2 ds^2 - u^2 dx^2)}$ multiplicetur.

Scholion.

Cum celerior cymbae motus tardiori praefereendus sit, ex duobus directionis angulis quibus cymba datam curuam describit, eum eligere conuenit, cuius sinus m est maior, hoc enim casu tempus, quod est $\int \frac{dx}{cm}$, minus euadet. Hanc ob rem ex signis ambiguus utemur superiore, eritque $cm = \frac{u dx dy + dx \sqrt{(c^2 ds^2 - u^2 dx^2)}}{ds^2}$; $cn = \frac{u dx^2 - dy \sqrt{(c^2 ds^2 - u^2 dx^2)}}{ds^2}$; atque angulus $P Mb$ aequabitur summae angulorum, quorum tangentes sunt $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{\sqrt{(c^2 ds^2 - u^2 dx^2)}}{u dx}$, vel quorum sinus sunt $\frac{dy}{ds}$ et $\frac{\sqrt{(c^2 ds^2 - u^2 dx^2)}}{cds}$. Aequabitur ergo angulus $P Mb$ summae angulorum, quorum cosinus sunt $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{u dx}{cds}$, vnde iste quaesitus angulus facile reperitur. Tempus autem, quo cymba curuae praescriptae portionem AM absoluit, erit $= \int \frac{u dy - \sqrt{(c^2 ds^2 - u^2 dx^2)}}{u^2 - c^2}$

Quam-

Quam
erit
igitur

neam
A in
A et

curua
minim
hibetu
munic

quaest
in qu
= F d
= p d
sita ist
 $\frac{dx}{dx^2}$ et
sira ac

dum n
dx, s
riabiliu
prout
sui.

reliquis

Quamobrem, si linea AM fuerit recta, ita vt sit $y = Kx$, erit tempus per AM $= \int \frac{kudx - dx\sqrt{(cc + cckk - uu)}}{uu - cc}$. Apparet igitur hoc casu esse debere $u < c\sqrt{(1 + kk)}$.

Problema 5.

Cognita fluvii in singulis locis celeritate inuenire lineam citissimi traiectus AMC, in qua cymba citius ex A in C pertingit, quam per ullam aliam lineam puncta A et C iungentem.

Solutio.

Manentibus omnibus, vt in praecedente problemate, curua AMC eius indolis est inuestiganda, vt $\int \frac{udy - \sqrt{(c^2 ds^2 - u^2 dx^2)}}{uu - cc}$ minimum obtineat valorem; hac enim formula tempus exhibetur, qua cymba curuae arcum AM absoluit. Communicauit autem praeterito anno vniuersalem methodum quaestiones huiusmodi soluendi, quae, si curua quaeratur, in qua $\int Zdx$ maximum minimumue euadat, sitque $dZ = Fdy + Gdx + Hdp + Idq + Kdr$ etc. existente $dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx$ etc. tum pro curua quaesita isthauc praebuit aequationem $0 = Fdx - dH + \frac{d dI}{dx} - \frac{d^2 K}{dx^2}$ etc. existente dx constante. Quo ergo formula nostra ad speciem $\int Zdx$ reducatur pono $dy = pdx$ secundum methodum datam; eritque $\int Zdx = \int \frac{pu - \sqrt{(cc + ccp - u^2)}}{u^2 - c^2} dx$, seu $Z = \frac{pu - \sqrt{(c^2 + c^2 p^2 - u^2)}}{u^2 - c^2}$. Prodit igitur Z functio variabilium u et p seu x et p , siquidem u ab x pendet, prout in problemate, vbi curua AQB ponitur data, posui. Habebitur ergo $dZ = Gdx + Hdp$ euanescentibus reliquis terminis, indeque pro curua quaesita resultabit dH

E 3

= 0,

Quam-

$= 0$, atque $H = \text{const.}$ Sufficit itaque quantitatem H invenisse ex Z , quae obtinebitur differentiando Z , posito tantum p variabili. Hanc ob rem reperietur $H = \frac{u}{uu - cc} - \frac{ccp}{(u^2 - c^2)\sqrt{(cc + ccp - uu)}} = \text{Const.} = \frac{1}{g}$, unde pro curva quaesita sequens emergit aequatio $gu\sqrt{(cc + ccp - uu)} - ccgp = (uu - cc)\sqrt{(cc + ccp - uu)}$, quae sumendis quadratis reducta abit in hanc $p = \frac{cc + gu - uu}{c\sqrt{(g - u)^2 - cc}}$. Cum autem fit $dy = p dx$, natura curvae quaesitae ista exprimitur aequatione $dy = \frac{(cc + gu - uu) dx}{c\sqrt{(g - u)^2 - cc}}$, ex qua, quia variables sunt a se inuicem separatae, curva construi poterit, erit enim $y = \int \frac{(cc + gu - uu) dx}{c\sqrt{(g - u)^2 - cc}}$ integrale ita capiendo, ut evanescente x fiat $y = 0$. Q. E. I.

Corollarium 1. Quo ergo curva AMC inueniatur, per quam cymba tempore brevissimo ex A ad datum punctum C pertingat, constans arbitraria g ita est definienda, ut posito $x = AB = a$, fiat $y = BC = b$.

Corollarium 2. Quia ergo curva AMC est inuenta, innotescet angulus directionis PMb , quem cymba in quouis loco M tenere debet, quo in curva inuenta moueatur. Cum enim fit $\sqrt{(cc + ccp - uu)} = \frac{ccgp}{cc + gu - uu} = \frac{cg}{\sqrt{(g - u)^2 - cc}}$ erit $\sqrt{(c^2 ds^2 - u^2 dx^2)} = \frac{cg dx}{\sqrt{(g - u)^2 - cc}}$; indeque tangens anguli $PMb = \frac{\sqrt{(g - u)^2 - cc}}{c} = \frac{(cc + gu - uu) dx}{cc dy}$.

Corollarium 3. Secans ergo anguli PMb est $\frac{g + u}{c}$ eiusque adeo cofinis $= \frac{g - u}{c}$, quia anguli bMn finis. Cymba ergo semper in hoc angulo directa brevissimo tempore ex loco A in locum C pertingit.

Co-

Corollarium 4. Si fluvius vbique eadem celeritate feratur; seu u fuerit constans, tum linea citissimi traiectus fiet recta: hoc ergo casu cymba in recta linea progrediendo celerrime ex A ad M pertinet.

Corollarium 5. Si ponatur $g = \infty$, fiet angulus PMb rectus; cymba ergo perpetuo ad cursum fluvii normaliter directa tempore brevissimo fluvium traiciet; curua autem, quam describet, hanc habebit aequationem $y = \int \frac{u dx}{c}$. Appellet ergo cymba in C, vt fit $BC = \frac{\text{area } A Q B A}{AD}$.

Corollarium 6. Quod autem ad constantem g attinet, intelligitur eam ita debere accipi, vt $(g-u)^2$ sit maius quam cc . Nisi enim hoc obseruetur, curua inuenta fit imaginaria.

Corollarium 7. Cum fit m seu sinus anguli $PMb = \frac{\sqrt{(g-u)^2 - cc}}{g-u}$, erit tempus quo cymba ex A in M peruenit $= \int \frac{dx}{cm} = \int \frac{(g-u) dx}{c\sqrt{(g-u)^2 - cc}}$. Hocque tempus est brevissimum quo cymba ex A in M peruenire potest.

DE

Co