DE RELAXATIONE MOTUS PLANETARUM.

§. I.

A veræ physicæ principiis nimium abhorret eorum sententia, qui planetas in ſpatio ab omni materia vacuo moveri ſtatuunt. Non attingam hic controverſiam famoſiſſimam de vacuo, utrum in mundo locum inveniat, nec ne? quicquid enim de hac quaeſtione ſentiatur, ſpatium, in quo planetæ & cometæ circa ſolem volvuntur, omnino vacuum eſſe nequit. Cum enim ad hæc corpora in orbibus ſuis continenda vi opus ſit centripeta, hujusmodi vis in vacuo abſoluto concipi non poteſt, niſi cum plerisque philoſophis Anglis, qui ſe magnum Neutonum ſequi profitentur, attractionem mutuam inter ipſas omnium corporum proprietates referre velimus. Interim tamen etiamſi hanc opinionem amplecteremur, tamen univerſi ſpatium ab omni materia vacuum ſervare non poſſemus. Nullum enim eſt dubium, quin radii lucis cum materia quadam ſubtili ſint conjuncti; quoniam in vacuo quidem radios lucis ſtatuere abſurdiſſimum foret. Cum igitur in cœlo nullum quaſi punctum aſſignari queat, ad quod radii lucis tam ſolis & ſtellarum non continuo penetrent, totum cœli ſpatium neceſſario illa materia ſubtili, qua radii conſtant, perpetuo erit Tab. VI.

 reple-

repletum. Sive enim radii tanquam effluvia ex ſole ejaculentur, ſive inſtar ſoni per medium quoddam elaſticum propagentur, utroque caſu totum ſpatium, in quo planetæ moventur, materia quadam plenum habebimus. Quæ cum negari nullo modo queat, ſi eum ætherem appellemus, hujus certe ætheris exiſtentia ſolidiſſimis argumentis evicta eſt cenſenda.

§. II. Cum igitur æther univerſum cœli ſpatium impleat, quæſtio nascitur difficillima, utrum planetæ ab eo reſiſtentiam patiantur nec ne? niſi enim æther cum planetis communem habeat motum, ob inertiam ipſis neceſſario reſiſtere debet; ſin autem æther eadem celeritatę qua planetæ circa ſolem revolvatur, cometæ, qui curſum ſecundum directiones oppoſitas habent directum, eo majorem reſiſtentiam ſentire deberent. De cometis quidem, cum eorum apparentia non ſit perennis, minus certum judicium petitur; neque enim effectus reſiſtentiae percipitur, neque temporis ſpatium ad hoc ſufficit, niſi reſiſtentia eſſet valde magna, quod tamen non probabile videtur. Verumtamen ex pluribus ejusdem cometae reverſionibus, tempora periodica conferendo aliquid concludi poſſet; ſi enim perpetuo eodem tempore elapſo ad perihelium reverteretur, nullum inde reſiſtentiae indicium haberetur; ſin autem ejus tempus periodicum ſenſim decreſcere deprehenderetur, tum in hoc ipſo effectus reſiſtentiae eſſet collocandus. Sic cometa, qui A. 1682. apparuit, idem eſſe cenſetur, qui A. 1607. & A. 1531. eſt obſervaservatus; & secundum calculos Halleii tempus a prima apparentia ad secundam anno circiter excedit tempus a secunda ad ultimam elapsum: hincque ideo indubitatum haberemus testimonium resistentiae ætheris in motu cometarum. Infra enim demonstrabitur, a resistentia tempora periodica continuo decrescere debere. Tum vero etiam ob constantem caudarum cometicarum directionem aether in quiete versari videtur: si enim materia aetheris simul cum planetis circa solem pari motu gyraretur, caudas cometarum secum abripere sicque efficere deberet, ut caudæ perpetuo in eam plagam, in quam motus ætheris dirigitur, deflecterent; quod cum non observetur, non immerito suspicamur ætherem in cœlo quiescere, vel saltem non ejusmodi habere motum constantem & velocem, quo caudarum directio immutari posset.

§. III. Quoniam itaque æther non solum revera adest, sed etiam nullo motu notabili cieri videtur, fieri omnino nequit, ut planetæ ab illo nullam resistentiam sustineant; a qua partim tempora periodica, partim orbitarum excentricitates minui debeant, uti in sequentibus demonstrabitur. Interim tamen nulla fere hujusmodi mutatio ab Astronomis, etiamsi observationes intervallo 4000 annorum factæ inter se conferantur, deprehenditur. Hinc autem plus non sequitur, quam mutationes has tam esse exiguas, ut ad eas percipiendas vel ne hoc quidem tempus sufficiat, vel observationum præsertim antiquissimarum accuratio non suppetat. Quanquam enim tam remotæ observationes præsto sunt, tamen difficile est ex sis eiusdem planetæ tempora periodica, quæ diversis seculis tenuerit, colligere, atque inter se comparare. Verissime enim cuiusque planetæ tempus periodicum inveniri censetur, si eius observationes novissimæ cum antiquissimis conferantur; hoc autem modo neque id tempus periodicum, quod planetæ nunc convenit, reperitur, neque id, quod ipsi in antiquitate obtigerat; sed medium quoddam tempus prodit, quod sine dubio præsenti tanto est majus, quantum ab antiquo deficit. Neque etiam observationes medii ævi tuto in subsidium vocare licet, cum eæ plerumque nimis sint crassæ, quam ut quicquam certi inde concludi posset. Motus tamen solis vel potius terræ hunc resistentiæ effectum non obscure declarare videtur: quo longius enim in antiquitatem regrediamur, anni spatium longius creditum fuisse, quam nunc quidem comperimus. Namque ante nostra tempora annus tropicus nunquam minor est habitus quam 365 d. 5 h. 49', cum tamen is nunc ab astronomis aliquot scrupulis secundis minor statuatur. Quod autem ad excentricitatis decrementum attinet, etsi terræ excentricitas olim major est putata quam nunc, tamen observationes veteres minus sunt exactæ, quam ut vera excentricitas illorum temporum inde concludi possit. Quoniam tamen omnes astronomi antiqui orbitæ terræ unanimiter majorem excentricitatem tribuerunt, quam hodierni, hinc non infirmum argumentum pro resistentia ætheris evincenda, suppeditari videtur.

§. IV.

§. IV. Quidquid autem sit, tantum certe hinc tuto colligitur, resistentiam ætheris esse minimam, quod quidem summa ejus raritas aperte declarat. Nullum enim est dubium, quin æther sit materia aere longe rarior, etiamsi ejus elasticitas aeris elaterem maxime superet. Resistentia autem pendet a densitate medii, quæ si fuerit minima, ipsam resistentiam insensibilem esse oportet. Ex celeritate quidem radiorum solis, si cum celeritate soni conferatur, liquido colligitur, si densitas ætheris ad densitatem aeris naturalis ponatur ut 1 ad m, elasticitas autem ætheris ad elasticitatem aeris ut n ad 1, fore, sicut in dissertatione de luce ostendi, $mn = 387467100000$, pro quo numero utamur isto rotundo $mn = 400000000000$. Si igitur elasticitas ætheris millies major assumatur, quam aeris, ita ut sit $n = 1000$, fiet $m = 400000000$, totiesque densitas ætheris minor foret densitate aeris; in tali autem medio rarissimo corpus admodum densum, cujusmodi sunt planetæ, diutissime moveri potest, antequam portionem sensibilem celeritatis suæ amittat. Si numerus n adhuc foret minor, alter numerus m tanto major prodiret: at quia durities corporum a vi ætheris elastica proficiscitur, siquidem eam a causa mechanica derivare velimus, numerus n millenario vix minor statui poterit; unde alteri numero m majorem valorem quam 400000000 tribuere non licebit. Deductus quidem est valor iste mn ex parallaxi solis horizontali 13″, & tempore 8′, quo radii a sole ad terram pertingere putantur; quorum utrumque, cum nondum certissime sit evictum, fieri omnino potest, ut valor producti mn adhuc multo sit major; hincque ergo resistentia aetheris multo adhuc minor admitti posset.

§. V. Antequam autem hanc resistentiam ad planetarum motus applicemus, videamus quantum detrimentum corpus, quod in aethere libere in directum promovetur, neque ab ullis viribus sollicitetur, ab ejus resistentia perpeti debeat. Sit corpus hoc sphaericum, ejusque radius ponatur $= a$: ejus autem densitas se habeat ad densitatem aeris naturalis ut k ad 1, ita ut istius corporis densitas ad densitatem aetheris, in quo movetur, futura sit ut km ad 1. Habuerit hoc corpus initio celeritatem altitudini b debitam, nunc autem percurso spatio $= x$, sit ejus celeritas debita altitudini v. Hoc ergo statu si resistentia aetheris similis sit resistentiae aeris, motus corporis retardabitur a vi, quae se habet ad ipsius massam ut $\frac{3v}{8kma}$ ad 1, unde obtinebimus hanc aequationem:

$$dv = -\frac{3v\,dx}{8kma}, \text{ seu } \frac{-dv}{v} = \frac{3\,dx}{8kma},$$

cujus integrale est $l\frac{b}{v} = \frac{3x}{8kma}$; ex qua aequatione cognoscitur, quomodo spatio quocunque emenso celeritas corporis se habitura sit ad celeritatem initialem. Si scilicet quaeramus, quantum spatium huic corpori percurrendum sit, donec celeritatis suae partem $\frac{1}{1000}$ amittat, poni debet $\sqrt{v} =$

999

$\frac{999}{1000}\sqrt{b}$, seu $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{v}} = 1 + \frac{1}{999}$, & $\frac{b}{v} = 1 + \frac{2}{999}$, quam proxime. Hinc erit $l\frac{b}{v} = \frac{2}{999}$ seu $\frac{2}{1000}$ proxime, ideoque $\frac{3x}{8kma} = \frac{2}{1000}$ & $x = \frac{16kma}{3000}$; spatium ergo percurret, quod se habebit ad ejus semidiametrum a ut $16km$ ad 3000. Cum igitur sit $m = 400000000$, si corpus sit ferreum, erit $k = 7000$, eaque proportio prodibit ut 14900000000 ad 1; ad quod certe spatium percurrendum longissimum tempus requiretur.

§. VI. Collocemus jam terram in locum hujus globi ita ut a denotet semidiametrum terræ. Quodsi jam tota terra ex aqua constaret, foret $k = 850$, sin autem tota ex auro, quod est corpus ponderosissimum, esset conflata, foret $k = 16000$; unde cum terra universa gravior aqua, levior tamen auro sit putanda, litera k medium quemdam valorum inter 850 & 16000 sortietur; & cum in imis visceribus multo gravior videatur, quam circa superficiem, fortasse non multum a veritate aberrabimus, si literæ k valorem 8000 tribuamus; ita ut ejus resistentia foret, si celeritas ejus altitudini v debita ponatur, $= \frac{2v}{8.\,8000.\,400000000.\,a}$. Hoc autem modo resistentia foret comparata, si terra nullis poris, per quos æther libere transire queat, esset pervia: cum autem æther per corpora etiam densissima satis libere permeet, terra in motu suo in exiguam tantum partem ætheris impinget, dum reliqua pars transitum inveniens nullam resistentiam patit. Hinc ergo resistentia quoque multo minor erit statuenda, quam assumsimus, & cum fortasse vix decima pars motui resistat, resistentia, quam ante assumseramus $= \frac{3v}{8mka}$, vix decimæ ejus parti æquabitur, eritque fere $= \frac{v}{27kma}$. Cum autem hic nihil certi definire liceat, ne nostras speculationes ad casum a natura nimis abhorrentem restringamus, pro numero $27km$ adhibeamus literam μ, cujus loco deinceps quivis valor substitui queat. Foret autem si præcedentes conjecturæ veritati essent consentaneæ circiter $\mu = 10000000000000$; fieri autem potest, ut iste numerus multo major minorve existat, præcipue pro variis planetis seu cometis.

§. VII. Quemcunque igitur hæc litera μ valorem habeat, in hac dissertatione investigare constitui, quantum motus tam planetarum quam cometarum ab ista resistentia perturbari debeat. Manifestum autem est, quando celeritas planetæ ob hanc resistentiam diminuitur, eum a vi centripeta propius ad solem admoveri, hincque vicissim ejus motum accelerari debere. Quocirca ab hac resistentia motus planetarum accelerabitur potius quam diminuetur, & dum eorum distantiæ a sole sensim decrescent, tempora periodica contrahentur, quæ mutatio quanta esse debeat hic perscrutabor. Sequens scilicet problema resolvere constitui, quo quæritur motus

motus corporis ad quoddam centrum fixum in ratione reciproca duplicata distantiarum attracti, dum perpetuo resistentiam patitur quadratis celeritatum proportionalem. Tractavi equidem jam hoc ipsum problema in mechanica, ejusque solutionem ad æquationes perduxi. Verum cum resolutio harum æquationum nimis difficilis videretur, neque etiam institutum operis perfectam evolutionem requireret, ex iis, quæ ibi sunt tradita, parum ad plenam hujus motus cognitionem colligere licet. Inde tamen æquationes principales, quas ibi inveneram, desumam, easque ad præsens institutum accommodabo, ne iis ex primis principiis eliciendis nimium sit immorandum.

§. VIII. Sit igitur S centrum solis, ad quos omnes tam planetæ quam cometæ pellantur viribus quadratis distantiarum reciproce proportionalibus. Sit præterea f ea a sole distantia, in qua corpus ad solem tanta vi urgetur, quanta, si in superficie terræ versaretur, deorsum niteretur, seu sit f ea distantia, in qua vis centripeta æqualis sit vi gravitatis, quam unitate designemus. Quam distantiam, ut inveniamus, sit T tempus periodicum terræ & A ejus axis transversus, erit $T = \frac{\pi A \sqrt{A}}{f}$, ubi si $\sqrt{A}$ in partibus millesimis pedis rhenani exprimatur, atque expressio $\frac{\pi A \sqrt{A}}{f}$ per 250 dividatur, tempus in minutis secundis expressum prodibit. Si ergo tempus periodicum T in minutis secun- *Fig. 1.*

 dis

dis exhibeatur erit $\frac{f}{A} = \frac{\pi V A}{250 T}$. Cum autem semidiameter terræ sit $a = 19615791$ ped. Par. posita solis parallaxi horizontali $13''$ fiet distantia media terræ a sole $= 15866\, a$, ideoque axis tranversus orbitæ $A = 622468600000$ ped. paris. seu in pedibus Rhenanis $A = 644211428198$. Annus autem sidereus est $355^{d}, 6^{h}, 9', 36''$: ita ut in minutis secundis sit $T = 31558176$. Ex his itaque valoribus calculo subducto reperitur $\frac{f}{A} = 0,01010677$, hincque ob $A = 31732\, a$ erit $f = 320,708\, a$, & $ff = 102854\, a^2$. Cognita ergo hac distantia f pro omnibus planetis & cometis eadem, in quavis distantia a sole y vis attractiva solis erit $= \frac{ff}{yy}$, siquidem vis gravitatis unitate exprimatur. Ponamus ergo primum planetam in perihelio suo A esse versatum, ita ut hoc loco ejus directio motus fuerit normalis ad rectam SA. Sit ista distantia perihelii a sole $AS = h$; celeritas vero, quam in A habuerit debita sit altitudini b. Deinde pervenerit planeta in locum P, & ducta recta SP, item perpendiculo ex S in tangentem ST, vocentur: $SP = y$, $ST = p$, & arcus $AP = s$, celeritas autem planetæ hoc loco debita sit altitudini v. Designet nunc α semidiametrum corporis planetæ, ac ponatur brevitatis gratia $\mu\alpha = c$. His ita præmissis in Mech. Tom. I. pag. 433. perveni ad has æquationes

$v =$

$v = \frac{bhh}{pp} e^{-s:c}$ & $\frac{ff}{yy} = \frac{2bhhdp}{p^3 dy} e^{-s:c}$ ubi e denotat numerum cujus logarithmus hyperbolicus $= 1$.

§. IX. Ponamus brevitatis causa $2bhh = ffg$, & posterior æquatio transibit in hanc formam:

$$\frac{e^{s:c} dy}{yy} = \frac{g dp}{p^3},$$

quæ si resistentia evanesceret, quod eveniret si μ ideoque c esset quantitas infinita, abiret in $\frac{dy}{yy} = \frac{g dp}{p^3}$, unde sectio conica, in qua planeta esset progressurus, si nulla adesset resistentia, facile eruitur. Hunc ergo casum, quo resistentia est nulla, prius expediamus, quam resistentiæ rationem habeamus. Æquatio autem $\frac{dy}{yy} = \frac{g dp}{p^3}$ integrata dat $\frac{1}{h} - \frac{1}{y} = \frac{g}{2hh} - \frac{g}{2pp}$ quoniam in A uti fit $y = h$, simul esse debet $p = h$. Hinc erit $\frac{g}{2pp} = \frac{gy - 2hy + 2hh}{2hhy}$ & $pp = \frac{ghhy}{2hh + (g - 2h)y}$. Vocemus nunc angulum ASP $= s$, eritque $ds = \frac{p dy}{y\sqrt{(yy - pp)}}$, quæ si, postquam loco p valor ante inventus fuerit substitutus, recte tractetur, deducetur ad hanc integralem: $y = \frac{gh}{h + (g - h)\cos s}$, ex qua oritur

$p =$

$$y = \frac{gh}{\sqrt{(hh + 2h(g-h)\cos t + (g-h)^2)}}.$$

Quemadmodum illa æquatio, ſi ponatur $t = 0$, ſeu $\cos t = 1$ præbet diſtantiam perihelii a ſole $AS = h$, ita ponendo $t = 180°$ ſeu $\cos t = -1$, invenietur diſtantia aphelii a ſole $= \frac{gh}{2h-g}$: unde axis transverſus erit $= \frac{2hh}{2h-g}$, & focorum diſtantia $= \frac{2h(g-h)}{2h-g}$. Ex quibus excentricitas orbitæ, ſeu focorum diſtantia ad axem transverſum applicata erit $= \frac{g-h}{h}$; ſic ſi ſit $g = h$, erit ubique $y = h$, & corpus ſine excentricitate in circulo moveretur, ſin autem ſit $\frac{g-h}{h} = 1$ ſeu $g = 2h$, erit $y = \frac{2h}{1 + \cos t}$, corpusque movebitur in parabola; quorum duorum caſuum prior ad motum planetarum, poſterior vero ad motum cometarum propius accedit.

§. X. Quoniam vero pro reſiſtentia arcus curvae s in computum ingreditur, quo difficultates hinc naſcendas facilius removeamus, in hypotheſi vacui quantitatem arcus $AP = s$ definiri conveniet. Cum autem ſit $ds = \sqrt{(dy^2 + y^2 dt^2)}$, ob $dy = \frac{gh(g-h)\,dt\,\sin t}{(h + (g-h)\cos t)^2}$ reperietur:

$$ds = \frac{gh\,dt\,\sqrt{(hh + 2h(g-h)\cos t + (g-h)^2)}}{(h + (g-h)\cos t)^2}$$

quae expreſſio, cum generaliter ad formam integralem perduci

duci nequeat, duos casus, quorum alter ad circulum proxime accedat, alter ad parabolam, perpendamus. Sit ergo primo $g-h$ quantitas minima, ac ponatur $g-h=\beta$; fiet proxime:

$$ds = \frac{gh\,dt}{(h+\beta\cos t)^2}\left(h+\beta\cos t+\frac{\beta\beta}{2h}\sin t^2\right) \text{ seu}$$

$$ds = g\,dt\left(1-\frac{\beta}{h}\cos t+\frac{3\beta\beta}{4hh}+\frac{\beta\beta}{4hh}\cos 2t\right)$$

cujus integrale est:

$$s = gt-\frac{\beta g}{h}\sin t+\frac{3\beta\beta gt}{4hh}+\frac{\beta\beta g}{8hh}\sin 2t.$$

§. XI. Pro parabola autem ubi est $g=2h$, erit $ds = \frac{2h\,dt\sqrt{2(1+\cos t)}}{(1+\cos t)^2} = \frac{2h\,dt\sqrt{2}}{(1+\cos t)^{\frac{3}{2}}}$

At est $1+\cos t = 2(\cos\frac{1}{2}t)^2$; ideoque $ds = \frac{h\,dt}{(\cos\frac{1}{2}t)^3}$; hinc fit $s = \frac{h\sin\frac{1}{2}t}{(\cos\frac{1}{2}t)^2}+\frac{h}{2}\int\frac{dt}{\cos\frac{1}{2}t}$, porroque integrando:

$$s = h\left(\frac{\text{tag.}\,\frac{1}{2}t}{\cos\frac{1}{2}t}+l\,\text{tag.}\,(45^\circ+\tfrac{1}{4}t)\right).$$

At si orbita tantum proxime ad parabolam accedat, ponatur $g=2h-\gamma h$; fietque

$$ds = \frac{g\,dt\sqrt{(2(1-\gamma)(1+\cos t)+\gamma\gamma)}}{(1+\cos t-\gamma\cos t)^2}$$

Cum igitur sit $1+\cos t = 2\cos\frac{1}{2}t^2$, erit

$$ds = \frac{g\,dt\sqrt{(4(1-\gamma)\cos\frac{1}{2}t^2+\gamma\gamma)}}{(2\cos\frac{1}{2}t^2-\gamma\cos t)^2}.$$

Hæc æquatio perducitur porro ad hanc formam:

$$ds = \frac{g\,dr\sqrt{((2-\gamma)^2 \cos\tfrac{1}{2}r^2 + \gamma\gamma \sin\tfrac{1}{2}r^2)}}{(2(1-\gamma)\cos\tfrac{1}{2}r^2 + \gamma)^2} \text{ seu}$$

$$ds = \frac{g\,dr\sqrt{((2-\gamma)^2 \cos\tfrac{1}{2}r^2 + \gamma\gamma \sin\tfrac{1}{2}r^2)}}{((2-\gamma)\cos\tfrac{1}{2}r^2 + \gamma \sin\tfrac{1}{2}r^2)^2}$$

Si jam γ tam sit parvum, ut $\gamma\gamma$ præ reliquis terminis negligi queat, erit:

$$ds = \frac{g(2-\gamma)\,dr\cos\tfrac{1}{2}r}{((2-\gamma)\cos\tfrac{1}{2}r^2 + \gamma\sin\tfrac{1}{2}r^2)^2} = \frac{ggh\,dr\cos\tfrac{1}{2}r}{(g\cos\tfrac{1}{2}r^2 + \gamma h\sin\tfrac{1}{2}r^2)^2}$$

quæ reducitur ad hanc formam:

$$s = \frac{gh\sin\tfrac{1}{2}r}{g\cos\tfrac{1}{2}r^2 + \gamma h\sin\tfrac{1}{2}r^2} + \tfrac{1}{2}\int\frac{gh\,dr\cos\tfrac{1}{2}r}{g\cos\tfrac{1}{2}r^2 + \gamma h\sin\tfrac{1}{2}r^2}$$

cujus integrale debito modo sumtum fit:

$$s = \frac{gh\sin\tfrac{1}{2}r}{g\cos\tfrac{1}{2}r^2 + \gamma h\sin\tfrac{1}{2}r^2} + \frac{h\sqrt{g}}{2\sqrt{(g-\gamma h)}}\, l\,\frac{\sqrt{g} + \sin\tfrac{1}{2}r.\sqrt{(g-\gamma h)}}{\sqrt{g} - \sin\tfrac{1}{2}r.\sqrt{(g-\gamma h)}}$$

Hinc si ponatur $r = 180°$, ut sit $\sin\tfrac{1}{2}r = 1$ & $\cos\tfrac{1}{2}r = 0$, prodibit semissis perimetri hujus ellipsis maxime oblongæ $=$

$$\frac{g}{\gamma} + \frac{h\sqrt{g}}{2\sqrt{(g-\gamma h)}}\, l\,\frac{\sqrt{g} + \sqrt{(g-\gamma h)}}{\sqrt{g} - \sqrt{(g-\gamma h)}}$$

axis transversus autem erit $= \frac{2h}{\gamma}$, hincque tempus periodicum $= \frac{2\pi h\sqrt{2h}}{\gamma f\sqrt{\gamma}}$.

§. XII. Introducamus nunc rationem resistentiæ; & cum in vacuo invenissemus $y = \frac{gh}{h + (g-h)\cos r}$ sive $\frac{1}{y} = \frac{1}{g}$
$+ (g$

$+\frac{(g-h)\cos t}{gh}$, assumemus pro aethere hanc aequationem $\frac{1}{y}=\frac{1}{g}+\frac{(g-h)\cos t}{gh}+P$, ubi quidem ob resistentiam minimam P erit quantitas quoque minima, & quia P est functio ipsius t, ponatur $dP=Q\,dt$, & $dQ=R\,dt$. Hinc ergo erit $\frac{dy}{yy}=\frac{(g-h)\,dt\sin t}{gh}-Q\,dt$. At ex aequatione $dt=\frac{p\,dy}{y\sqrt{(yy-pp)}}$, unde obtinetur $\frac{1}{pp}=\frac{1}{yy}+\frac{dy^2}{y^4\,dt^2}$, & loco y valore suo substituto $\frac{1}{pp}=\frac{1}{gg}+\frac{2(g-h)\cos t}{ggh}+\frac{(g-h)^2}{gghh}+\frac{2P}{g}+\frac{2(g-h)P\cos t}{gh}+PP-\frac{2(g-h)Q\sin t}{gh}+QQ$, ubi quidem quadrata terminorum minimorum PP & QQ tuto negliguntur. Hinc autem per differentiationem prodit:

$$\frac{dp}{p^3}=\frac{(g-h)\,dt\sin t}{ggh}-\frac{Q\,dt}{g}+\frac{(g-h)P\,dt\sin t}{gh}+\frac{(g-h)R\,dt\sin t}{gh}$$

Resumamus nunc aequationem principalem $\frac{r}{c}\frac{dy}{yp}=\frac{g\,dp}{p^3}$ & quia c est quantitas maxima; erit $\frac{r}{c}$ fractio valde parva, nisi quidem corpus jam plurimas revolutiones absolverit; Quare si calculum non ad plures revolutiones simul extendere

dere vellemus pro $e^{s:c}$ tuto scribere poterimus $1+\frac{s}{c}$; hincque haec nascetur aequatio

$$\frac{dy}{yy}+\frac{sdy}{cyy}=\frac{gdp}{p^3}$$

ubi si pro $\frac{dy}{yy}$ & $\frac{dp}{p^3}$ valores ante exhibitos substituamus, terminis utrinque aequalibus deletis, remanebit:

$$\frac{(g-h)s\sin t}{cgh}=\frac{(g-h)dt\sin t}{h}(P+R)$$

seu ob $R=\frac{ddP}{dt^2}$, erit $\frac{sdt^2}{cg}=ddP+Pdt^2$ quae si methodo alibi exposita integretur dabit:

$$P=\frac{\sin t}{cg}\int sdt\cos t-\frac{\cos t}{cg}\int sdt\sin t,$$ erit enim

$$Q=\frac{\cos t}{cg}\int sdt\cos t+\frac{\sin t}{cg}\int sdt\sin t$$ &

$$R=-\frac{\sin t}{cg}\int sdt\cos t+\frac{\cos t}{cg}\int sdt\sin t+\frac{s}{cg}$$

ex quibus valoribus veritas aequationis $\frac{s}{cg}=P+R$ comprobatur.

§. XIII. Ut autem constantes, quas haec integralia secum gerunt, determinemus, ad motus initium est spectandum, ubi fit $t=0$, $y=h$, & $dy=0$. Ideoque hoc casu tam P, quam Q evanescere debet, quod eveniet, si integralia $\int sdt\cos t$ & $\int sdt\sin t$ ita sumantur, ut evanescant posito

posito $s = 0$. Loca autem sequentium apheliorum & periheliorum reperientur ponendo $dy = 0$, unde fit $Q = \frac{(g-h)\sin s}{gh}$, qui valor si substituatur, aequatio haec

$$(g-h)\sin s = \cos s \int s\,ds \cos s + \sin s \int s\,ds \sin s$$

definiet omnia aphelia & perihelia, in quae planeta seu cometa successive pertinget. Cognitis autem locis apheliorum & periheliorum seu valoribus angulorum s, hinc quoque distantiae maximae & minimae determinabuntur ope aequationis:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{g} + \frac{(g-h)\cos s}{gh} + P.$$

Superest ergo ut integralia $\int s\,ds \cos s$ & $\int s\,ds \sin s$ investigemus; cum autem valor arcus s per formulam finitam exhiberi nequeat, istae expressiones ita transformentur:

$$\int s\,ds \cos s = s \sin s - \int ds \sin s,$$
$$\int s\,ds \sin s = -s \cos s + \int ds \cos s,$$

qui valores substituti dabunt:

$$P = \frac{s}{cg} - \frac{\sin s}{cg}\int ds \sin s - \frac{\cos s}{cg}\int ds \cos s$$

$$Q = \quad - \frac{\cos s}{cg}\int ds \sin s + \frac{\sin s}{cg}\int ds \cos s$$

ubi haec integralia iterum ita accipi debent, ut evanescant posito angulo $ASP = s = 0$. Cum igitur sit

$$ds = \frac{gh\,dr\sqrt{(hh + 2h(g-h)\cos s + (g-h)^2)}}{(h + (g-h)\cos s)^2}$$

videndum est, utrum hoc differentiale, cum per $\sin s$ tum etiam per $\cos s$ multiplicatum, integrabile existat nec ne?

§. XIV. Formula quidem altera $\int dt \sin t$, ad hanc formam perducitur ut sit posito $g-h=\zeta h$

$$\int dt \sin t = \frac{g\sqrt{(1+2\zeta\cos t+\zeta\zeta)}}{\zeta(1+\zeta\cos t)} + g\int\frac{dt\sin t}{(1+\zeta\cos t)\sqrt{(1+2\zeta\cos t+\zeta\zeta)}}$$

Quin etiam posterioris membrum integrale assignari potest per quadraturam circuli, ita ut debita addita constante sit

$$\int dt \sin t = \frac{g\sqrt{(1+2\zeta\cos t+\zeta\zeta)}}{\zeta(1+\zeta\cos t)} - \frac{2g}{\zeta\sqrt{(1-\zeta\zeta)}}\,\mathrm{A\ tag.}\,\frac{\sqrt{(1+2\zeta\cos t+\zeta\zeta)}}{\sqrt{(1-\zeta\zeta)}} - \frac{g}{\zeta} + \frac{2g}{\zeta\sqrt{(1-\zeta\zeta)}}\,\mathrm{A\ tag.}\,\frac{1+\zeta}{\sqrt{(1-\zeta\zeta)}}$$

Altera autem formula non æque tractari potest; sit enim

$$\int dt \cos t = \int\frac{g\,dt\cos t\sqrt{(1+2\zeta\cos t+\zeta\zeta)}}{(1+\zeta\cos t)^2}$$

quæ ad sequentia integralia simpliciora reducitur,

$$\int dt\cos t = \frac{g\cos t\sqrt{(1+2\zeta\cos t+\zeta\zeta)}}{\zeta\sin t(1+\zeta\cos t)} + g\int\frac{dt\cos t}{(1+\zeta\cos t)\sqrt{(1+2\zeta\cos t+\zeta\zeta)}} + \frac{g}{\zeta}\int\frac{dt\sqrt{(1+2\zeta\cos t+\zeta\zeta)}}{(1+\zeta\cos t)\sin t^2},$$

vel hoc modo:

$$\int dt\cos t = \frac{g\sin t\sqrt{(1+2\zeta\cos t+\zeta\zeta)}}{(1-\zeta\zeta)(1+\zeta\cos t)} - \frac{g}{1-\zeta\zeta}\int\frac{\zeta\,dt(\zeta^2+2\zeta\cos t+\cos t^2)}{(1+\zeta\cos t)\sqrt{(1+2\zeta\cos t+\zeta\zeta)}}$$

Cujus integrale cum etiamnum exhiberi nequeat, si fortasse ab ipso arcu t pendeat, conveniet notasse:

$$t = -\frac{\zeta g\sin t\sqrt{(1+2\zeta\cos t+\zeta\zeta)}}{(1-\zeta\zeta)(1+\zeta\cos t)} + \frac{g}{1-\zeta\zeta}\int\frac{dt(1+2\zeta\cos t+\zeta\zeta\cos t^2)}{(1+\zeta\cos t)\sqrt{(1+2\zeta\cos t+\zeta\zeta)}}$$

Potest

Poteſt etiam formula $dt\cos r$ ad quantitates conſuetas reduci ponendo $\cos r = x$, ut ſit $dr = \frac{-dx}{\sqrt{(1-xx)}}$. Hinc autem fiet $\int dt \cos r = -g\int\frac{x\,dx\sqrt{(1+2\zeta x+\zeta\zeta)}}{(1+\zeta x)^2\sqrt{(1-xx)}}$, eſtque

$$t = -g\int\frac{dx\sqrt{(1+2\zeta x+\zeta\zeta)}}{(1+\zeta x)^2\sqrt{(1-xx)}}.$$

Quomodocunque autem hæ formulæ tractentur, earum integralia in quantitatibus finitis exhiberi nequeunt.

§. XV. Quæ difficultas cum impediat, quominus hoc problema generaliter pertractare queamus, eos ſaltem caſus evolvamus, qui in mundo locum habent, & pro quibus ante valorem arcus t proxime eruimus. Sit igitur excentricitas $\frac{g-h}{h}$ valde parva, maneatque ut ante $g-h = \zeta h$, ita ut litera ſupra adhibita β ſit $= \zeta h$; eritque pro motu planetarum in orbitis parum excentricis:

$$dt = g\,dr\,(1 - \zeta\cos r + \tfrac{1}{2}\zeta\zeta + \tfrac{1}{2}\zeta\zeta\cos 2r)\ \&$$

$$t = gr - \zeta g\sin r + \tfrac{1}{2}\zeta\zeta g r + \tfrac{1}{4}\zeta\zeta g\sin 2r.$$

Hinc erit pro formulis ſuperioribus:

$$\int dt\sin r = g\int dr\,(\sin r - \tfrac{1}{2}\zeta\sin 2r + \tfrac{1}{4}\zeta\zeta\sin r + \tfrac{1}{4}\zeta\zeta\sin 3r)$$

& integrando

$$\int dt\sin r = g\,(1 - \cos r + \tfrac{1}{4}\zeta\cos 2r - \tfrac{1}{4}\zeta\zeta\cos r - \tfrac{1}{12}\zeta\zeta\cos 3r)$$
$$- \tfrac{1}{4}\zeta + \tfrac{1}{3}\zeta\zeta$$

Simili modo erit

$$dt\cos r = g\,dr\,(\cos r - \tfrac{1}{2}\zeta - \tfrac{1}{2}\zeta\cos 2r + \tfrac{3}{4}\zeta\zeta\cos r + \tfrac{1}{4}\zeta\zeta\cos 3r)$$

& in-

& integrando

$$\int dt \cos t = g\left(\sin t - \tfrac{1}{2}\zeta t - \tfrac{1}{4}\zeta \sin 2t + \tfrac{3}{4}\zeta\zeta \sin t + \tfrac{1}{12}\zeta\zeta \sin 3t\right)$$

Ex his nunc conficietur:

$$P = \frac{1}{c}\left(t - \sin t - \tfrac{1}{2}\zeta \sin t + \tfrac{1}{2}\zeta t \cos t + \tfrac{3}{4}\zeta\zeta t - \tfrac{2}{3}\zeta\zeta \sin t - \tfrac{1}{12}\zeta\zeta \sin 2t\right)$$

$$Q = \frac{1}{c}\left(1 - \cos t - \tfrac{1}{2}\zeta t \sin t + \tfrac{3}{4}\zeta\zeta - \tfrac{2}{3}\zeta\zeta \cos t - \tfrac{1}{12}\zeta\zeta \cos 2t\right)$$

§. XVI. Quoniam nunc in periheliis & apheliis eſt $Q = \frac{\zeta \sin t}{g}$, hæc planetæ loca pro pluribus ſequentibus revolutionibus reperientur ex hac æquatione:

$$\frac{\zeta c}{c} \sin t = 1 - \cos t - \tfrac{1}{2}\zeta t \sin t + \tfrac{3}{4}\zeta\zeta - \tfrac{2}{3}\zeta\zeta \cos t - \tfrac{1}{12}\zeta\zeta \cos 2t$$

cui æquationi ſatisfit, quoties $\sin t = 0$ & $\cos t = 1$; quare valores ipſius t erunt ſequentes arcus: 0, 2π, 4π, 6π, 8π, &c. denotante π angulum duobus rectis æqualem, quod indicium eſt omnes has radices præbere omnium periheliorum loca ſucceſſiva. Locus ergo perihelii A manet fixus ita ut quoties planeta per rectam S A tranſit, tum ſimul ſoli ſit proximus. Eſt ergo perihelium perinde atque in vacuo immobile, unde ſi forte abſides orbitarum mobiles deprehendantur, cauſa fruſtra in reſiſtentia ætheris quæritur. Simili autem modo, quia corpus planetæ a reſiſtentia non de ſuo plano deflectitur, linea quoque nodorum cujusque planetæ a reſiſtentia non mutabitur. Atque cum reſiſtentia ætheris aphelia & perihelia non de ſuo loco moveat, idem

quoque

quoque valebit, si resistentia concipiatur negativa, hoc est si planetæ ab æthere in gyrum acto propellantur. Hancobrem prombdio absidum, siquidem ulla datur, per vorticem ætheris planetas deferentem explicari quoque non poterit.

§. XVII. Quia perihelia perpetuo ad idem cœli punctum referuntur, dubitari omnino nequit, quin etiam aphelia quiescant; eo quod aphelia & perihelia inter se commutari possunt. Attamen videmus aphelium perihelio non e diametro opponi; si enim ponamus angulum $r = 180°$, æquationi inventæ non satisfit, nisi & c simul sit infinitum, seu resistentia prorsus evanescat. Quo igitur aphelii locum facilius inveniamus, æquationem superiorem dividamus per $\sin r$, fietque

$$\frac{\zeta c}{g} = \frac{1-\cos r}{\sin r} - \tfrac{1}{2}\zeta r + \frac{\zeta\zeta(9-8\cos r - \cos 2r)}{12 \sin r}.$$

Est vero $\frac{1-\cos r}{\sin r} = \text{tag.}\, \tfrac{1}{2} r$, & ob $\cos 2r = 1 - 2\sin r^2$ erit

$$\frac{9-8\cos r - \cos 2r}{\sin r} = 8\,\text{tag.}\, \tfrac{1}{2} r + 2 \sin r,$$ hincque fiet:

$$\frac{\zeta c}{g} = \text{tag.}\, \tfrac{1}{2} r - \tfrac{1}{2}\zeta r + \tfrac{2}{3}\zeta\zeta\,\text{tag.}\, \tfrac{1}{2} r + \tfrac{1}{6}\zeta\zeta \sin r.$$

Ponatur nunc $r = \pi - z$, denotante π angulum 180°, eritque z angulus valde parvus, & $\tfrac{1}{2} r = 90° - \tfrac{1}{2} z$; unde habebitur

$$\frac{\zeta c}{g} = \cot \tfrac{1}{2} z - \tfrac{1}{2}\zeta\pi + \tfrac{1}{2}\zeta z + \tfrac{2}{3}\zeta\zeta \cot \tfrac{1}{2} z + \tfrac{1}{6}\zeta\zeta \sin z.$$

Hic autem ob parvitatem primo termini z & $\sin z$ evanescunt; deinde quia novimus locum aphelii æque ac perihelii

helii esse fixum, necesse est ut quoque terminus $\frac{1}{2}\zeta\pi$ excedat, quippe quod re ipsa fieret, si supra quantitatem c accuratius expressissemus. Hancobrem relinquetur:

$$\cot \tfrac{1}{2} z = \frac{\zeta c}{g(1 + \frac{3}{4}\zeta\zeta)} : \text{ seu tag. } \tfrac{1}{2} z = \frac{g(1 + \frac{3}{4}\zeta\zeta)}{\zeta c}$$

Verum quia ζ est quantitas valde parva, erit proxime tag. $\frac{1}{2} z = \frac{g}{\zeta c}$ & ob $\frac{g}{\zeta c}$ fractionem minimam erit angulus $z = \frac{2g}{\zeta c}$. Hinc igitur aphelium, quod fit in A perihelio in P non directe opponitur, sed planeta e perihelio P egressus in aphelium A perveniet, antequam locum perihelio oppositum B attingat; hujusque differentiæ seu anguli ASB tangens erit $= \frac{2g}{\zeta c}$ qui quidem angulus nunquam ultro aliquot minuta secunda exsurgit, ideoque sensibilis esse nequit.

Fig. 2.

§. XVIII. Ad reliqua phænomena motus planetarum in medio resistente investiganda, consideremus æquationem

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{g} + \frac{\zeta}{g} \cos t + P, \text{ existente}$$

$$P = \frac{1}{c}\left(t - \sin t - \tfrac{1}{2}\zeta \sin t + \tfrac{1}{2}\zeta t \cos t + \tfrac{3}{4}\zeta\zeta t - \tfrac{2}{3}\zeta\zeta \sin t - \tfrac{1}{12}\zeta\zeta \sin 2t\right).$$

Hinc jam quoties planeta in perihelium revertitur, ejus distantia a sole invenietur, si loco anguli t successive ponantur $0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi$ &c. In apheliis autem distantiæ planetæ

planetæ prodibunt, si θ sumatur pro angulo, cujus tangens vel sinus est $= \frac{2g}{\zeta c}$, loco t successive substituendo $\pi-\theta, 3\pi-\theta$ $5\pi-\theta$, &c. quibus casibus est $\sin t = \frac{2g}{\zeta c}$, $\cos t = -1$; $\sin 2t = \frac{4g}{\zeta c}$ atque $\theta = \frac{2g}{\zeta c}$. Ex his sequentes oriuntur valores:

Si	erit
$t = 0$	$P = 0$
$t = \pi - \theta$	$P = \frac{1}{c}\left(\pi - \frac{1}{2}\zeta\pi - \frac{4g}{\zeta c}\right)$
$t = 2\pi$	$P = \frac{1}{c}(2\pi + \zeta\pi)$
$t = 3\pi - \theta$	$P = \frac{1}{c}\left(3\pi - \frac{1}{2}\zeta\pi - \frac{4g}{\zeta c}\right)$
$t = 4\pi$	$P = \frac{1}{c}(4\pi + 2\zeta\pi)$
$t = 5\pi - \theta$	$P = \frac{1}{c}\left(5\pi - \frac{1}{2}\zeta\pi - \frac{4g}{\zeta c}\right)$

Cum igitur pro perihelio sit $\frac{1}{y} = \frac{1+\zeta}{g} + P$, & pro aphelio $\frac{1}{y} = \frac{1-\zeta}{g} + P$,

$$\begin{array}{l|l}
\text{Si} & \text{erit} \\
t = 0 & \frac{1}{y} = \frac{1+\zeta}{g} + 0 \\
t = \pi - \theta & \frac{1}{y} = \frac{1-\zeta}{g} + \frac{\pi}{c}\,(1-\tfrac{1}{2}\zeta) \\
t = 2\pi & \frac{1}{y} = \frac{1+\zeta}{g} + \frac{2\pi}{c}(1+\tfrac{1}{2}\zeta) \\
t = 3\pi - \theta & \frac{1}{y} = \frac{1-\zeta}{g} + \frac{3\pi}{c}\,(1-\tfrac{1}{2}\zeta) \\
t = 4\pi & \frac{1}{y} = \frac{1+\zeta}{g} + \frac{4\pi}{c}\,(1+\tfrac{1}{2}\zeta) \\
t = 5\pi - \theta & \frac{1}{y} = \frac{1-\zeta}{g} + \frac{5\pi}{c}\,(1-\tfrac{1}{2}\zeta)
\end{array}$$

&c. neglectis scilicet terminis $\frac{4g}{\zeta c}$ præ reliquis incomparabiliter parvis.

§. XIX. Ponamus, postquam planeta primum ex perihelio P est egressus, jam i integras revolutiones esse absolutas, ita ut nunc planeta iterum in perihelio versetur, sitque $t = 2i\pi$, erit ergo $\frac{1}{y} = \frac{1+\zeta}{g} + \frac{2i\pi}{c}\,(1+\tfrac{1}{2}\zeta)$ & cum terminus posterior præ priori sit valde parvus erit:

$$y = \frac{g}{1+\zeta} - \frac{2i\pi\,(1+\tfrac{1}{2}\zeta)\,gg}{c\,(1+\zeta)^2}.$$

Pro sequente autem aphelio, ponendo $t = (2i+1)\,\pi - \theta$ erit $\frac{1}{y} = \frac{1-\zeta}{g} + \frac{(2i+1)\,\pi}{c}(1-\tfrac{1}{2}\zeta)$, hincque

$y =$

$$y = \frac{g}{1-\zeta} - \frac{(2i+1)\pi(1-\frac{1}{2}\zeta)gg}{c(1-\zeta)^2}$$

ſucceſſivæ ergo planetæ diſtantiæ a ſole in perihelio & aphelio ſequenti modo diminuentur.

	Diſtantia planetæ a ſole.
I. Perihelium	$\frac{g}{1+\zeta} - 0$
Aphelium	$\frac{g}{1-\zeta} - \frac{\pi(1-\frac{1}{2}\zeta)gg}{c(1-\zeta)^2}$
II. Perihelium	$\frac{g}{1+\zeta} - \frac{2\pi(1+\frac{1}{2}\zeta)gg}{c(1+\zeta)^2}$
Aphelium	$\frac{g}{1-\zeta} - \frac{3\pi(1-\frac{1}{2}\zeta)gg}{c(1-\zeta)^2}$
III. Perihelium	$\frac{g}{1+\zeta} - \frac{4\pi(1+\frac{1}{2}\zeta)gg}{c(1+\zeta)^2}$
Aphelium	$\frac{g}{1-\zeta} - \frac{5\pi(1-\frac{1}{2}\zeta)gg}{c(1-\zeta)^2}$ &c.

In qualibet ergo revolutione perihelium ad ſolem propius accedit per intervallum $\frac{2\pi(1+\frac{1}{2}\zeta)gg}{c(1+\zeta)^2}$; aphelium vero admovetur intervallo $\frac{2\pi(1-\frac{1}{2}\zeta)gg}{c(1-\zeta)^2}$; media ergo diſtantia decreſcet intervallo circiter $= \frac{2\pi gg}{c}$; & poſt i revolutiones hoc decrementum diſtantiæ mediæ erit $= \frac{2i\pi gg}{c}$.

§. XX. Cum igitur poſt i planetæ revolutiones ſit diſtantia perihelii a ſole:

$$\frac{g}{1+\zeta} - \frac{2i\pi(1+\frac{1}{2}\zeta)gg}{c(1+\zeta)^2},$$

atque ſequens aphelii diſtantia a ſole:

$$\frac{g}{1-\zeta} - \frac{(2i+1)\pi(1-\frac{1}{2}\zeta)gg}{c(1-\zeta)^2}$$

his addendis prodibit poſt i revolutiones orbitæ axis transverſus:

$$\frac{2g}{1-\zeta\zeta} - \frac{4i\pi gg}{c(1-\zeta\zeta)^2} - \frac{\pi(1-\frac{1}{2}\zeta)gg}{c(1-\zeta)^2},$$

ubi quidem, quia de tempore definito eſt quæſtio, tempus a perihelio ad aphelium omitti poteſt, ita ut poſt i revolutiones habeatur orbitæ axis transverſus $= \frac{2g}{1-\zeta\zeta} - \frac{4i\pi gg}{c(1-\zeta\zeta)^2}$, quemadmodum etiam initio axis transverſus aſſumtus eſt $= \frac{2g}{1-\zeta\zeta}$. Deinde ſi diſtantia perihelii a ſole poſt i revolutiones, quæ eſt $= \frac{g}{1+\zeta} - \frac{2i\pi(1+\frac{1}{2}\zeta)gg}{c(1+\zeta)^2}$, a diſtantia aphelii a ſole, quæ eidem tempori conveniret, atque inventa eſt $= \frac{g}{1-\zeta} - \frac{2i\pi(1-\frac{1}{2}\zeta)gg}{c(1-\zeta)^2}$, ſubtrahatur, prodibit diſtantia focorum poſt i revolutiones:

$$\frac{2\zeta g}{1-\zeta\zeta} - \frac{2i\pi\zeta gg(3-\zeta\zeta)}{c(1-\zeta\zeta)^2}$$

quæ ſi per axem transverſum ante inventum dividatur obtinebitur excentricitas orbitæ pro hoc tempore: $= \zeta - \frac{i\pi\zeta g}{c}$,

quæ

quæ initio erat $= \zeta$. A resistentia ergo excentricitas continuo minuitur, orbitæque planetarum propius ad figuram circularem reducuntur.

§. XXI. Ex diminutione axis transversi sequitur diminutio temporis periodici. Sit enim T tempus periodicum planetæ initio, Θ vero sit ejus tempus periodicum, postquam jam i revolutiones absolvit. Quia ergo in una revolutione effectus resistentiæ sensibilis esse nequit, erit T ad Θ in ratione sesquiplicata axis transversi initio, qui erat $= \frac{2g}{1-\zeta\zeta}$, ad axem transversum post i revolutiones, qui inventus est $= \frac{2g}{1-\zeta\zeta} - \frac{4i\pi gg}{c(1-\zeta\zeta)^2}$. Cum igitur horum axium transversorum ratio sit ut 1 ad $1 - \frac{2i\pi g}{c(1-\zeta\zeta)}$, erit:

$$T : \Theta = 1 : \left(1 - \frac{2i\pi g}{c(1-\zeta\zeta)}\right)^{\frac{3}{2}} = 1 : 1 - \frac{3i\pi g}{c(1-\zeta\zeta)}.$$

Hinc ergo fit $\Theta = T\left(1 - \frac{3i\pi g}{c(1-\zeta\zeta)}\right)$.

Post centum ergo revolutiones tempus periodicum cujusque planetæ, quod ante erat $= T$, nunc diminutum erit tempore $= \frac{300\pi g T}{c(1-\zeta\zeta)} = \frac{942,4779\, g T}{c(1-\zeta\zeta)}$. Hoc igitur decrementum temporis periodici primum ipsi tempori periodico erit proportionale. Quocirca decrementa temporum periodicorum, quæ diversi planetæ eodem temporis tractu sunt perpessa, erunt inter se ut valores formulæ $\frac{g}{c(1-\zeta\zeta)}$; unde hæc

decre-

decrementa primo erunt directe ut diſtantiæ mediæ a ſole, tum vero ob $c = \mu a$ reciproce ut diametri planetarum, ſi quidem eorum corpora ſint ſimiliia. Tertio vero decrementa erunt majora, quo excentricitates fuerint majores. Ex quibus concluditur Martem inter omnes planetas maximum temporis periodici ſui detrimentum pati debere.

§. XXII. Applicemus hæc, quantum circumſtantiæ permittunt, ad motum terræ, ac primo quidem ejus excentricitatem ſpectemus, unde æquatio maxima pendet. Quodſi autem omnis temporis Aſtronomos inter ſe conferamus, ingens quidem diſcrimen deprehendemus, ſed ejusmodi tamen, ut æquatio maxima plerumque a veteribus major ſit habita quam a recentioribus. Namque ſequentes

Autores	æquationem maximam ſtatuerunt		
Cl. Ptolemæus	2°	23′	0″
Rex Alphonſus	2	10	0
Joh. Newtonus	2	4	47
Keplerus in Tab.	2	3	46
Tycho Brahe	2	3	15
Joh. Maginus	2	3	12
Bullialdus	2	2	41
T. Street	1	59	6
Horroxius	1	59	0
W. Leyburn	1	57	0
Iſaac Newton	1	56	20
De la Hire	1	55	42
Caſſini	1	55	51
Chev. de Louville	1	54	45
Wurzelbaur	1	57	14

Hic

Hic
præci
æquat
tibus
beri p
Brahei
æquati
ſenda
100 π
c
ſeculo
ſimum
locum
§.
anniqu
fieri p
Aſtron
ratus,
cognoſ
compa
ob err
nihil
ex coll
tervallo
hæc de
veniet,
Hinc c
terra p
Euler.

Hic fere cum decursu temporis æquatio decrescere cernitur, præcipue si cogitemus non omnes hos autores quantitatem istius æquationis ex propriis observationibus, sed sæpe longe anterioribus conclusisse. Parva quidem plerisque his numeris fides haberi potest, præsertim antiquissimis; verumtamen si Tychonis Brahei & Neutoni determinationes reliquis veriores putentur, æquatio terræ intervallo 100 annorum fere 7′ minuta censenda esset. Cum igitur excentricitas ζ sit ut 2°, 5′, 15″, foret $\frac{100\,\pi\,g}{c} = \frac{1}{17}$ fere. Hinc autem tempus periodicum uno seculo sexta sui parte diminueretur, quod cum sit absurdissimum, diminutio ista æquationis maximæ, siquidem tanta locum haberet, alii causæ adscribi deberet.

§. XXIII. Perpendamus ergo tempus periodicum terræ, annique longitudinem præsentem cum præteritis, quantum fieri potest, conferamus. Ac primo quidem modus, quo ab Astronomis tempus anni determinari solet, ita est comparatus, ut inde nunquam præsentis cujusvis anni quantitas cognosci possit: nisi enim duo æquinoctia, quorum momenta comparantur, plurium annorum spatio a se invicem distent, ob errores, quibus hujusmodi observationes exui nequeunt, nihil certi inde concludi potest. Quando igitur Astronomi ex collatione duorum æquinoctiorum aliquot seculorum intervallo a se invicem remotorum quantitatem anni definiunt, hæc determinatio neutri tempestati, sed mediæ cuidam conveniet, siquidem errores observationum non sint notabiles. Hinc ergo difficillimum est nosse, quanto tempore nunc terra periodum absolvat; longe difficilius autem, quanto tem-

tempore terra ante aliquot secula periodum absolverit; quoniam nunc quidem ob sollertiam Astronomorum & summam subsidiorum copiam recentiores observationes veteribus longe sunt anteferendæ. Nunc quidem terra ab æquinoctio ad idem recurrere statuitur tempore $365^d, 5^h, 48', 55''$; sed quia ad hoc observationes vetustiores sunt usurpatæ, verisimile est annum jam aliquanto breviorem esse. Antiquissimos certe Astronomos non constat defectum anni tropici ab anno Juliano $365^d, 6^h$ animadvertisse; hincque satis probabile videtur, tum temporis anni longitudinem propius ad istam mensuram accessisse quam nunc. Seculis autem proxime elapsis duratio anni tropici major quam $365^d, 5^h, 49'$ est credita; unde fortasse a veritate non multum recedemus, si sumamus tempus periodicum terræ singulis seculis quinis minutis secundis minui; neque etiam observationibus repugnaret, si hoc decrementum adhuc majus extaret.

§. XXIV. Ponamus ergo decrementum anni seculare esse $5''$; fietque $\frac{942,4779\, g\, T}{c\,(1-\zeta\zeta)} = 5''$; ubi T denotat annum sidereum seu $31558176''$. Cum igitur excentricitas ζ sit fere $= \frac{1}{60}$, erit:

$$\frac{c}{g} = \frac{31558176.\ 942,4779}{5.\ 0,999722},$$

hincque subducto calculo reperietur:

$$\frac{c}{g} = 5950231000.$$

[illegible] vero, si a denotet semidiametrum terræ, $c = \mu a$, & distan-

distantia terræ media a sole $g = 15866\, a$; unde fit $\frac{c}{g} = \frac{\mu}{15866}$; atque

$$\mu = 94406320000000$$

qui valor satis prope accedit ad illum, quem supra per conjecturam constituimus, nempe

$$\mu = 100000000000000,$$

qui valor adhuc minus decrementum produxisset. Atque adeo hinc patet resistentiam ab æthere oriundam majorem non esse, quam ut cum observationibus conciliari queat. Quare cum ex motu planetarum non sensibiliter imminuto defectus materiæ coelum implentis minime sequatur, hinc gravissimum argumentum, quo Angli attractionem suam tueri conantur, corruit: si enim coelum materia subtili est repletum, nullam causam amplius invenimus, cur gravitatis universæ causam mechanicam negare velimus. Ceterum si terræ tempus periodicum intervallo mille annorum 50'' minuitur, reliquorum planetarum tempora periodica eodem intervallo, quantum ex eorum diametris apparentibus colligi licet, minuentur, ut sequitur: ♄ 33''; ♃ 15''; ♂ 62''; ♀ 25'' & ☿ 33''.

§. XXV. Cum igitur tam pro terra quam pro reliquis planetis numerus $\frac{c}{g}$ sit tantopere magnus, diminutio excentricitatis plurimorum seculorum spatio plane erit imperceptibilis. Namque si ζ ponatur pro æquatione maxima: etiamsi æquatio maxima non sit excentricitati simpliciter proportionalis, tamen in parvis differentiis hæc ratio satis exacte locum habet; ſpatio 100 annorum æquationis maximæ decrementum fit $= 314\zeta. \frac{g}{c} = \frac{\zeta}{19000000}$ quam proxime. Quare cum ſit $\zeta = 1°, 56', 10'' = 6970''$, integro ſeculo elapſo æquatio maxima minuetur $\frac{697}{1900000}'' = \frac{1}{2720}''$, ita ut demum poſt 2720 ſecula hoc decrementum ad unum minutum ſecundum exurgeret. Deinde etiam ob eandem rationem angulus ASB quo aphelium oppoſitionem perihelii anteverrit, omnino erit inſenſibilis. Tangens enim iſtius anguli eſt $= \frac{2g}{\zeta c}$, ideoque pro terra erit: tag. $ASB = \frac{1}{2975115500\zeta}$

Eſt autem excentricitas $\zeta = 0,01692$, unde erit

$$\text{tag. } ASB = \frac{1}{50338900} = 0,000000019865,$$

ideoque ipſe angulus $ASB = \frac{1}{14643}' = \frac{1}{244}'' = \frac{1}{4}''' = 15^{IV}$.

Fig. 2. §. XXVI. His igitur expeditis reſtaret, ut motum cometarum quoque in medio reſiſtente expenderemus: at formula pro arcu s ſupra inventa tam eſt complicata, ut inde ad nullas certas concluſiones pervenire liceat. Quia autem pro planetis vidimus, eorum tempora periodica eo magis ceteris paribus diminui, quo eorum orbitæ magis ſint excentricæ, hinc ſatis tuto colligimus, tempora periodica cometarum ſatis notabiliter in quavis revolutione diminui debere, ita ut mirum non ſit, cometam 1682 primum poſt intervallum 76 annorum, poſtea vero poſt 75 annos ad perihelium rediiſſe: ſimul vero patet ob hanc perturbationem locum perihelii non mutari debuiſſe.

ENO-