Sectio III.

De motu corporum in tubis libere mobilibus.

§. LXXIII.

Pervenimus nunc ad problematis, quod tractare suscepimus, casum præcipuum eumque difficillimum, quem nemo adhuc, quantum scio, est aggressus, nisi quando tubus in circulum incurvatus ejusque centrum gravitatis in ipso circuli centro positum assumitur. Perspicuum autem statim est, hoc casu motum tubi fore mixtum ex progressivo & gyratorio, & gyratorium quidem, quoniam tubus libere mobilis statuitur, circa ejusmodi axem peragi debere, qui nullas vires sustineat. Quamobrem præcepta in superiori sectione tradita huc quoque transferri poterunt, dummodo ii casus investigentur, quibus axis, quem ante posuimus fixum, nullas sollicitationes patitur; tum enim axis, etiamsi a nulla vi externa retineatur, nihilominus situm suum conservare poterit. Supra autem (41) vires definivimus, quibus singula axis puncta a motu gyratorio urgentur, quæ ergo si vel nullæ fuerint, vel se mutuo destruant, corpus circa eundem axem libere gyrari poterit. Quos casus quo facilius investigemus, primo totum tubi corpus, quasi in eodem plano ad axem gyrationis normali positum esset, considerabimus, ita ut universa materia, quæ gyratur in eodem plano ad axem normali

normali existere censeatur. Deinde vero corpora secundum axis longitudinem extensa perpendemus, indagaturi cujusmodi situm axis habere debeat, ut inter gyrandum nullas vires sentiat. Postquam autem explicuerimus, cujusmodi motus in corpora libere mobilia cadere, in iisque persevere posse, in effectus virium sollicitantium inquiremus, ut motus immutatio inde oriunda definiri possit.

§ LXXIV. Repræsentet ergo planum ABCD corpus tubi, quod circa axem per hoc planum in O normaliter transeuntem gyretur. Sit in data ab axe distantia $OF = f$, celeritas puncti F, qua circa O secundum plagam Ff gyratur debita altitudini $= u$; atque ponatur massa totius corporis $=$ M, ejusque centrum gravitatis in G, quod ergo circa O gyrabitur secundum Gg celeritate altitudini $= \frac{OG^2 . u}{ff}$ debita. Hoc igitur motu gyratorio, uti supra (41) docuimus, axis secundum directionem OG trahetur vi $= \frac{2M.OG.u}{ff}$; eandem scilicet vim sustinebit, ac si totum corpus M in puncto G esset collectum, & celeritate altitudini $\frac{OG^2 . u}{ff}$ debita gyraretur: hoc enim modo vis centrifuga foret $= 2M.\frac{OG^2.u}{ff}: OG = \frac{2M.OG.u}{ff}$. Tanta ergo vi opus erit ad axem O retinendum, ne isti vi cedat; quare si corpus libere fuerit mobile, id circa ejusmodi axem gyrari non poterit, quia

Tab. III. Fig. 20.

quia nulla vis axem continens adeſt. Cum autem hæc vis non evaneſcat, niſi diſtantia O G in nihilum abeat, corpus A B C D circa alium axem ad hoc planum normalem gyrari non poterit, niſi qui per ipſum centrum gravitatis G tranſeat. Quare ſi corpus hoc A B C D nactum fuerit motum circa axem per ejus centrum gravitatis G tranſeuntem & ad planum A B C D normalem, tum iſtum motum conſervabit, axisque, etiamſi a nulla vi retineatur, tamen quaſi fixus eſſet, immotus manebit, niſi motus a viribus externis perturbetur. Si ergo tota tubi maſſa in ſuperficie plana A B C D fuerit diſtributa, ea vel nullum habebit motum gyratorium, vel gyrabitur circa axem per ejus centrum gravitatis G tranſeuntem.

§. LXXV. Si corpus non in ſuperficie plana ad axem normali comprehendi queat, ſed ſecundum axis longitudinem ſit extenſum, tum concipiatur id in innumeras tenuiſſimas lamellas ad axem normales diſſectum, & quæ modo diximus ad quamlibet lamellam referri poterunt. Hinc ergo patet ſi axis per ſingularum lamellarum centra gravitatis tranſeat, tum ſingula quoque ejus puncta a motu gyratorio nullam vim ſuſtinere, ideoque corpus circum hunc axem libere gyrari poſſe. Globus ergo ex materia uniformi conſectus circa quemvis axem per ejus centrum gravitatis tranſeuntem libere gyrari poterit: ſingulæ enim rectæ per ejus centrum ductæ ita ſunt comparatæ, ut ſimul per omnium ſectionum ad ſe normalium centra gravitatis tranſeant; hoc-

que

que itaque casu singula axis puncta nullam omnino vim sustinent. Præterea vero fieri potest, ut, etiamsi axis non per singularum sectionum centra gravitatis transeat, tamen cunctæ vires se mutuo destruant, sicque motus gyratorius circa ejusmodi axem æque subsistere possit. Ad hos casus evolvendos sit AB axis corpus quodcunque trajiciens, & concipiatur corpus in infinitas lamellas ad istum axem normales dissectum, quarum singularum centra gravitatis notentur. Hæc igitur centra gravitatis lineam quandam continuam constituent, vel in eodem plano sitam, vel duplici curvatura præditam. Sit primo hæc linea centrorum gravitatis EGF in eodem plano sita, ita ut ducta quacunque applicata QP ad AB normali, punctum Q sit centrum gravitatis sectionis corporis ad axem in puncto P normaliter factæ, atque punctum axis P sollicitabitur secundum directionem PQ, vi quadam, quam in §. præc. definivimus, quæ cum a celeritate motus gyratorii, tum a massa sectionis, tum etiam præcipue a quantitate intervalli PQ pendebit. *Tab. III. Fig. 21.*

§. LXXVI. Sit A extremum axis punctum, & vocetur $AP = x$, $PQ = y$, sitque massa sectionis in P ad axem normaliter factæ $=$, erit X functio quadam ipsius x ex indole corporis cognoscenda. Motus porro gyratorius ita determinetur, ut particula ab axe intervallo $= f$ distans moveatur celeritate debita altitudini u, quo posito erit vis, qua axis punctum P in directione PQ sollicitatur $= \frac{2Xyu}{ff}$, pro qua

qua cum $\frac{2u}{ff}$ sit quantitas constans, considerasse sufficiet expressionem Xy, quæ si sectioni seu lamellæ crassities infinite parva $= dx$ tribuatur, abit in $Xydx$, ita ut axis particula $Pp = dx$ in directione PQ sollicitetur vi, quæ est ut $Xydx$. Quo igitur hæ vires, quibus singula axis elementa urgentur, se mutuo destruant, necesse est ut primo summa omnium istarum virium nempe $\int Xydx$ evanescat. Hinc intelligitur axis AB transire debere per omnium lamellarum, hoc est totius corporis, commune centrum gravitatis. Nisi enim hoc esset, distantia communis centri gravitatis a linea AB foret $= \frac{\int Xydx}{\int Xdx}$, quare cum sit $\int Xydx = o$, manifestum est axem AB, circa quem corpus libere gyrari queat, per corporis centrum gravitatis, quod sit in G, transire debere. Hoc autem solum nondum sufficit, sed præterea requiritur, ut omnium harum virium momenta se invicem destruant. Est autem vis $Xydx$ momentum respectu puncti fixi $A = Xxydx$, unde quoque necesse est ut $\int Xxydx = o$, seu cum sit $\int Xyxdx = x\int Xydx - \int dx \int Xydx$ & $\int Xydx = o$; oportet ut $\int dx \int Xydx$ per totam axis longitudinem evanescat. Axis igitur AB ad liberam gyrationem idoneum situm non habebit, nisi fuerit & $\int Xydx = o$ & $\int dx \int Xydx = o$.

§. LXXVII. Sin autem linea centrorum gravitatis non sit in eodem plano sita, consideretur ejus projectio orthogonalis in plano pro lubitu assumto & per axem AB transeunte.

eunte. Sit E G F ista projectio, & M centrum gravitatis sectionis ad axem normalis per P factæ, ita ut recta M Q sit perpendicularis in planum A G E. Ponatur $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$, ac, si linea centrorum fuerit cognita, dabuntur duæ æquationes, quibus relatio inter tres coordinatus x, y & z continebitur. Sit porro massa sectionis istius per P factæ $= X$, & juncta P M erit vis qua axis punctum P in directione P M trahetur $= \frac{2Xu}{ff}$. P M seu ut X. P M, & axis elementum $Pp = dx$ sollicitabitur vi ut $X dx$. P M. Resolvatur hæc vis secundum directiones constantes P Q & P R existente P R normali in planum A P Q, erit vis P Q ut $X y dx$ & vis P R ut $X z dx$. Cum jam harum virium effectus debeat esse nullus, primo oportebit esse tam $\int X y dx$ quam $\int X z dx = 0$, quod evenit si axis A B per totius corporis commune centrum gravitatis G transeat. Præterea vero quoque harum virium momenta se mutuo destruere debent, ut axis etiam non inclinetur, hincque fiet:

$$\int X y x dx = 0 \text{ \& } \int X z x dx = 0.$$

Nisi ergo præter transitum axis per corporis centrum gravitatis G hæ duæ æquationes locum inveniant, corpus circa ejusmodi axem libere gyrari non poterit. In sequentibus ergo perpetuo assumemus axem, circa quem tubus gyretur, non solum per ejus centrum gravitatis transire, sed etiam prædictas proprietates locum habere, ita ut axis, circa quem motus gyratorius absolvitur, nullam vim sentiat.

§. LXXVIII.

§. LXXVIII. Si igitur corpus circa hujusmodi axem a quacunque causa semel acceperit motum gyratorium, eundem hunc motum perpetuo uniformiter conservabit, nisi a viribus externis perturbetur. Supra enim ostendimus corpus circa quemcunque axem motu uniformi gyrari posse, dummodo iste axis firmiter retineatur, ne a viribus sollicitantibus mutetur; præsenti autem casu axis a motu gyratorio nullam vim suffert, ideoque circa eum corpus libere gyrari poterit; quia axis hic etiamsi a nulla vi retineatur, sponte quiescit. Neque vera solum corpus circa hujusmodi axem quiescentem uniformiter gyrabitur, sed etiam idem eveniet, si interea axis cum toto corpore uniformiter in directum promoveatur. Ex primis enim principiis motus constat, in systemate quorumcunque corporum eundem motum subsistere posse, sive totum systema quiescat, sive uniformiter in directum progrediatur. Si ergo corpori præter motum progressivum impressus fuerit motus gyratorius circa hujusmodi axem, qui per ejus centrum gravitatis transeat, & ante memoratis proprietatibus gaudeat, tum istud corpus vi propria inertiæ utrumque motum constanter tenebit: hoc est, uniformiter in directum promovebitur, simulque interea motu uniformi circa eundem axem gyrari perget. Hoc igitur casu in corpore duplex inerit motus, quorum uterque secundum præcepta ante tradita seorsim cognoscetur & definietur: motus scilicet progressivus ex motu axis, seu ex motu centri gravitatis, quod motus gyratorii non est particeps,

ceps, cognoſcetur, ex ejusque tam celeritate quam directione æſtimabitur. Motus gyratorius autem ad axem, qui etſi motu ſibi parallelo progreditur, tamen tanquam quieſceret, conſiderari poteſt, referri, & ex celeritate, quam datum corporis punctum ab axe dato intervallo remotum habet, definiri debebit. Mente igitur motum rotatorium tollere licebit, ut axis tanquam quieſcens ſpectetur, & motus gyratorius hinc reſultans inſuper cum motu progreſſivo, quem cogitatione ſuſtuleramus, iterum conjungatur.

§. LXXIX. Expoſito igitur modo hunc duplicem cujusque corporis libere mobilis motum contemplandi & ad calculum revocandi, videamus quomodo uterque motus a viribus ſollicitantibus immutetur. Ac primo quidem inveſtigemus qualis vis requiratur ad ſolum motum progreſſivum perturbandum. Habeat ergo corpus A B C D hujusmodi duplicem motum, quorum altero progreſſivo centrum gravitatis G uniformiter promoveatur ſecundum directionem G E celeritate debita altitudini v; ſimul vero circa axem idoneum per centrum gravitatis G ductum gyretur, ſitque puncti ab hoc axe intervallo $= f$ diſtantis celeritas debita altitudini $= u$, quæ ad hunc axem, quaſi quieſceret referatur. Maſſa autem totius corporis ſit $=$ M. Jam ut ſolus motus progreſſivus acceleretur, gyratorio non mutato, neceſſe eſt ut ſingulæ corporis particulæ ſecundum directionem G E æqualibus viribus acceleratricibus urgeantur. Scilicet ſi altitudo v, dum centrum gravitatis G per ſpatiolum dx progre- *Tab. IV. Fig. 22.*

 ditur,

ditur, incrementum capiat $= dv$; particula corporis M quæ fit $= dM$ in directione Mm ipsi GE parallela urgeri debet vi $= \frac{dM.dv}{dx}$. Quodsi jam omnes istæ vires in unam colligantur, quia omnium eadem est directio, erit vis æquivalens $= \frac{Mdv}{dx}$, ejusque directio per centrum gravitatis G transibit eritque GE. Quare vicissim si corpus ABCD sollicitetur secundum ipsius directionem motus progressivi GE, hæcque directio vis per centrum gravitatis G transeat, solus motus corporis progressivus afficietur, motusque gyratorius nullam mutationem patietur. Motus autem progressivi acceleratio ita se habebit, ut si vis sollicitans GE fuerit $=$ P, fiat $dv = \frac{Pdx}{M}$; quod si ergo hæc vis P in plagam oppositam tendat, seu in sui negativam abeat, tum erit $dv = \frac{-Pdx}{M}$.

§. LXXX. Sin autem directio motus progressivi sola inflecti debeat, ita ut neque celeritas centri gravitatis neque motus gyratorius immutetur, singulæ corporis particulas æqualibus viribus secundum directionem GH ad motus directionem GE normalem sollicitari oportet: si enim omnes æqualibus viribus acceleratricibus secundum eandem directionem pellantur, tum earum motus relativus inter se non perturbabitur, ideoque motus gyratorius immutatus manebit. Ponamus ergo motum progressivum ita inflecti debere, ut

viæ

viæ curvilineæ GF, quam prosequatur, radius osculi GH sit $= r$, atque quælibet particula dM in directione GH urgeri debebit vi $= \frac{2vdM}{r}$. Harum ergo omnium virium, quibus singulæ corporis particulæ pelluntur, media directio per centrum gravitatis G transibit, & in ipsam rectam GH incidet, totaque vis omnibus æquivalens erit $= \frac{2Mv}{r}$. Quare vicissim si corpus ABCD in directione GH per centrum gravitatis G transeunte & ad motus directionem GE normali sollicitetur vi $= Q$, tum neque motus gyratorius neque celeritas progressiva afficietur, sed sola motus progressivi directio GE ita in circulum GF incurvabitur, ut ejus radius GH sit $= \frac{2Mv}{Q}$. Hinc ergo omnium virium, quarum directiones per centrum gravitatis G transeunt, effectus assignari poterunt: cum enim quæque secundum directiones GE & GH resolvi queat, a priori celeritas motus progressivi vel augebitur vel diminuetur, a posteriore autem directio ejus inflectetur, neutra autem in motu gyratorio ullam mutationem producet. Mutatio autem motus progressivi perinde erit comparata, ac si tota corporis massa in ejus centro gravitatis esset collecta, nullusque motus gyratorius adesset. Hinc ergo patet motum gyratorium nullam mutationem perpeti posse nisi a viribus, quarum directiones non per centrum gravitatis transeant.

§. LXXXI.

Tab. IV. Fig. 23. § LXXXI. Investigemus nunc, a cujusmodi viribus corpus sollicitari debeat, ut ejus motus progressivus non afficiatur, sed solus motus gyratorius vel acceleretur, vel retardetur. Sit igitur G corporis cujuspiam centrum gravitatis, corpusque præter motum progressivum gyretur circa axem per centrum gravitatis G transeuntem & ad planum tabulæ normalem, quem si toti corpori motum æqualem & contrarium progressivum impressum concipiamus, tamquam quiescentem spectare poterimus. Sit puncti F, quod ab axe intervallo $FG = f$ distat, celeritas secundum directionem Ff ad GF normalem debita altitudini u, quæ, dum punctum F motu angulari per arculum $Ff = ds$ progreditur, augmentum capiat $= du$. Jam consideretur particula corporis quæcunque in M, cujus massula sit $= dM$, & distantia $GM = z$; hujusque particulæ celeritas secundum directionem MN ad GM normalem debita erit altitudini $= \frac{zzu}{ff}$. Dum autem punctum F elementum $Ff = ds$ percurrit, particula M motu suo absolvet spatiolum $\frac{zds}{f}$. Hinc ad istam motus rotatorii accelerationem requiritur, ut particula M sollicitetur secundum directionem MN ad GM normali vi $= dM.\frac{zzdu}{ff}:\frac{zds}{f} = \frac{zzdudM}{fds} = zdM.\frac{du}{fds}$; quæ ergo vis erit ut zdM quia $\frac{du}{fds}$ pro omnibus particulis est idem. Momentum ergo vis ad hanc accelerationem producendam est $=$

du.

$\frac{du}{fds}$. $zz\,dM$. Si igitur ſingulæ particulæ corporis per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe G multiplicentur & ſumma omnium productorum ponatur $= Mkk$, ita ut Mkk ſit momentum inertiæ reſpectu hujus axis gyrationis, erit $Mkk = \int zz\,dM$, ideoque ſumma omnium momentorum ad motum rotatorium accelerandum requiſitorum erit $= \frac{Mkkdu}{fds}$. Seu ſi angulus tempuſculo infinite parvo ds motu angulari confectus ponatur $= d\omega$ ob $Vu = \frac{fd\omega}{dt}$ & $ds = fd\omega$, erit id momentum totale $= \frac{2Mkkdd\omega}{dt^2}$, quæ expreſſio convenit cum ea, quam ſupra pro motu circa axem fixum invenimus.

§. LXXXII. Sola autem momentorum conſideratio non ſufficit ad indolem virium inventarum, quæ ad motum gyratorium accelerandum requiruntur, exprimendam: poſſunt enim diverſiſſimarum virium æqualia eſſe momenta reſpectu cujuspiam axis. Et quanquam in motu gyratorio nonniſi virium ſollicitantium momenta conſiderari ſolent, tamen hoc loco eas tantum vires perpendimus, quæ corpori nullum motum progreſſivum inducant, vel eum, quem jam forte habet, non mutent. Hinc inter infinitas illas vires, quarum omnium idem eſt momentum $\frac{2Mkkdd\omega}{dt^2}$, ea tantum ad præſens negotium eſt accommodata, quæ nullum motum progreſſi-

greſſivum generat. Ad hanc affectionem cognoſcendam, vires ſingulis corporis particulis applicatas ad directiones conſtantes reduci conveniet. In hunc finem aſſumatur recta GF, in eamque ex puncto M demittatur perpendiculum MP, ſitque $GP = x$ & $PM = y$, ita ut ſit $GM = z = \sqrt{(xx+yy)}$. Jam vis $MN = \frac{du}{fds} \cdot zdM$ reſolvatur ſecundum directiones Mp & Mq, quarum illa ipſi GP eſt parallela, hæc vero cum PM congruit. Cum igitur ſit ang. $NMq = MGP$ & $NMp = GMP$, atque ſin $PGM = \frac{y}{z}$ & coſ $PGM = \frac{x}{z}$ erit vis in directione $Mp = \frac{du}{fds} \cdot ydM$, & vis in directione $Mq = \frac{du}{fds} \cdot xdM$. Quocirca omnium virium quarum directiones ſunt rectæ GF parallelæ, ſumma erit $= \frac{du}{fds} \int ydM$; at vero cum G ſit centrum gravitatis erit $\int ydM = o$, unde ſumma iſtarum virium erit $= o$. Simili modo ſumma omnium virium, quarum directiones ſunt ad rectam GF normales, erit $= \frac{du}{fds} \cdot \int xdM$; verum ob rationem modo allegatam eſt quoque $\int xdM = o$, unde & hæc virium ſumma evaneſcet. Conſequenter ad accelerationem motus rotatorium ita efficiendum, ut motus progreſſivus non muretur, ejusmodi viribus eſt opus, quæ ad conſtantes directiones reductæ ſe mutuo deſtruant, quarum tamen hoc non obſtante momentum ſit $= \frac{2Mkkddw}{ds^2}$.

§. LXXXIII.

§. LXXXIII. Fieri ergo nequit, ut unica vis corpori applicata ejus motum gyratorium solum afficiat motu progressivo intacto, unica enim vis simul evanescere atque momentum reale habere non potest, nisi forte vis infinite parva in distantia infinita per vectem agens huc censeatur. Ad hunc igitur effectum producendum duæ ad minimum vires, ut F H & P M requiruntur, quæ sint æquales & in directionibus parallelis contrariæ, diversisque intervallis ab axe remotæ: summa enim harum duarum virium, quia altera est affirmativa, altera negativa, fit $= o$, momentum tamen FH. GF − PM. GP valorem obtinet realem. Scilicet si utraque vis FH & PM ponatur $=$ P, erit earum momentum ad motum gyratorium retardandum $=$ P. FP; unde fit $\frac{2Mkkddw}{dt^2} = P.FP$ & $\frac{2ddw}{dt^2} = \frac{dn}{fds} = \frac{P.FP}{Mkk}$. Hinc igitur cujusvis potentiæ corpori applicatæ effectus tam in motu progressivo quam gyratorio perturbando definiri poterit. Gyretur scilicet corpus libere circa axem per ejus centrum gravitatis G transeuntem & ad planum tabulæ normalem, sollicitetur que a vi MN $=$ P, cujus directio in plano axem normaliter secante sit sita, in quam ex axe perpendicularis ducatur GM $= g$. Concipiatur corpori in G applicata vis Gn $=$ P in directione contraria & ipsi MN parallela Gn, atque ab his duabus viribus solus motus gyratorius ita afficietur, ut sit $Pg = \pm \frac{2Mkkddw}{dt^2}$, prout ea ad motum gyratorium

Tab. IV. Fig. 24.

ratorium vel accelerandum vel retardandum tendit. Accedat nunc tertia vis $Gv = P$, ipsi Gn contraria, hæcque quia per axem transit, solum motum progressivum afficiet, gyratorium vero immutatum relinquet. Cognoscitur ergo effectus trium virium MN, Gn & Gv simul agentium, quarum cum binæ Gn & Gv se invicem tollant, effectus unius vis MN idem erit, in eoque consistet, ut primum motus progressivus perinde perturbetur, ac si eadem vis in directione sibi parallela Gv per axem transeunte esset applicata: motus gyratorius autem ab istius vis momento Pg vel accelerabitur vel retardabitur.

§. XXXIV. Ex his igitur omnium ejusmodi virium effectus assignari poterunt, quarum directiones sint in plano quopiam ad axem gyrationis normali positæ, seu quæ sint ita comparatæ, ut, si in centro gravitatis in directionibus sibi parallelis concipiantur applicatæ, hæ ad axem gyrationis futuræ sint normales. Quodsi autem directio vis cujusdam MN postquam in centrum gravitatis fuerit translata, sit ad axem obliqua, tum ipse quoque axis gyrationis inclinabitur corpusque tam complicatum nanciscetur motum, cujusmodi a nemine adhuc fuit definitus. Quamobrem hinc istiusmodi vires ad axem gyrationis obliquas prorsus excludimus, nisi earum directio per ipsum axem transeat, quia hoc casu solus motus progressivus afficitur, ejusque mutatio inde oriunda ante est definita. His igitur viribus exclusis, quotcunque vires corpus sollicitent sequentem habebimus regulam,

lam, cujus ope tam motus progressivi, quam gyratorii mutatio cognoscetur. Primum scilicet omnes vires in directionibus sibi parallelis in centrum gravitatis transferantur, ex iisque perturbatio motus progressivi methodo ante exposita dijudicetur: eundem nempe hæ vires translatæ effectum præstabunt, ac si tota corporis massa in centro gravitatis esset collecta. Deinde singularum virium sollicitantium colligantur momenta respectu axis gyrationis, eaque prout motui gyratorio vel conveniunt vel renituntur in unam summam aggregentur, ut habeatur totum virium sollicitantium momentum motum gyratorium vel accelerans vel retardans, ex hocque momento per regulam ante datam ipsa acceleratio vel retardatio motus gyratorii determinabitur. En ergo præcepta, quæ ad motum corporum libere mobilium definiendum, sequi oportet, siquidem corpus circa axem consistantem, cujus proprietates ante descripsimus, gyretur, nullæque vires adsint, quæ hunc axem inclinare conentur.

§. LXXXV. His igitur traditis principiis ad opus, cui hæc sectio est destinata, pertractandum progrediamur. Sit ergo primo propositus tubus rectus EF, qui super plano horizontali, quod tabula repræsentet, libere sit mobilis, ut super eo tum motu progressivo tum etiam rotatorio circa axem verticalem per ejus centrum gravitatis G transeuntem moveri possit. Ponatur hujus tubi massa $= M$, ejusque momentum inertiæ ad axem gyrationis relatum $= Mkk$. In hoc *Tab. IV. Fig. 25.*

hoc autem tubo inclusum sit corpus, cujus massa $= A$, atque tam ad motum tubi, quam corporis in eo inclusi definiendum referantur omnia ad lineam fixam A B in plano horizontali assumtam, quæ simul positionem tubi, quam initio motus tenuerit exhibeat, in eaque sit A punctum, in quo tubi centrum gravitatis G initio fuerit versatum. Tempore autem elapso t tubus pervenerit in situm E F, & demisso ex G in rectam A B perpendiculo G R ponatur $AR = p$ & $GR = q$, tum ex G ipsi A B parallela ducatur G L, eritque E G L angulus, quem tubus motu gyratorio jam descripsit, sit iste angulus $EGL = \omega$. Tum versetur nunc quidem corpus tubo inclusum in P, existente $GP = z$, & ex P in A B pariter perpendiculum P Q demittatur, vocenturque $AQ = x$ & $PQ = y$. Cum igitur sit angulus $PGS = \omega$, erit $PS = z \sin \omega$, & $GS = z \cos \omega$, unde fiet $AQ = x = p - z \cos \omega$ & $QP = y = q + z \sin \omega$. His præmissis primo ad motum gyratorium tubi accelerandum requiritur virium momentum $= \frac{2Mkkdd\omega}{dt^2}$ posito dt constante; motum autem gyratorium tubi in plagam P l fieri assumimus, ut per eum angulus E G L continuo fiat major. Quare hinc de quavis potentia sollicitante judicium facile feretur, utrum ejus momentum ad motum gyratorium accelerandum an retardandum tendat.

§. LXXXVI. Motus porro tubi progressivus ex motu ipsius centri gravitatis G, in quo totam tubi massam collectam

ſtam concipere licet, æſtimari debet, qui ſecundum directiones Gr & Gg reſolvatur eum coordinatis AR & RG conſentientes. Erit ergo celeritas centri gravitatis in directione $Gr = \frac{dp}{dt}$ & in directione $Gg = \frac{dq}{dt}$, hincque ad priorem motum accelerandum requiritur vis ſollicitans in directione $Gr = \frac{2Mddp}{dt^2}$, & ad poſteriorem vis ſollicitans in directione $Gg = \frac{2Mddq}{dt^2}$. Simili modo ſi motus corporis in P ſecundum pares directiones Pq & Pp reſolvatur, erit celeritas in directione $Pq = \frac{dx}{dt} = \frac{dp - dz \cos\omega + zd\omega \sin\omega}{dt}$, hincque neceſſe eſt ut corpus in directione Pq ſollicitetur vi $= \frac{2Addx}{dt^2} = \frac{2A}{dt^2}(ddp - ddz \cos\omega + 2dzd\omega \sin\omega + zdd\omega \sin\omega + zd\omega^2 \cos\omega)$ Celeritas autem corporis in P ſecundum directionem Pp eſt $= \frac{dy}{dt} = \frac{dq + dz \sin\omega + zd\omega \cos\omega}{dt^2}$, ideoque in hac directione corpus urgeatur neceſſe eſt vi:

$$\frac{2Addy}{dt^2} = \frac{2A}{dt^2}(ddq + ddz \sin\omega + 2dzd\omega \cos\omega + zdd\omega \cos\omega - zd\omega^2 \sin\omega)$$

Si hæ vires ad directiones cum tubi tum ad eum normales reducantur, ipſe primum tubus in directione GF ſollicitabitur vi $= \frac{2M}{dt^2}(ddp \cos\omega - ddq \sin\omega)$, & in directione ad eam normali Gs vi $= \frac{2M}{dt^2}(ddp \sin\omega + ddq \cos\omega)$.

 Dein-

Deinde corpus in P sollicitabitur secundum directionem tubi PF vi $= \frac{2A}{dt^2}(ddx \cos\omega - ddy \sin\omega)$ quæ abit in:

$$\frac{2A}{dt^2}(ddp \cos\omega - ddq \sin\omega - ddz + z d\omega^2)$$

secundum directionem normalem P l vero vi $= \frac{2A}{dt^2}$ $(ddx \sin\omega + ddy \cos\omega)$, quæ abit in:

$$\frac{2A}{dt^2}(ddp \sin\omega + ddq \cos\omega + 2dz d\omega + z dd\omega).$$

§. LXXXVII. Ponamus neque tubum neque corpus in eo ab ullis viribus externis sollicitari; ita ut omnis motus mutatio a sola pressione corporis in tubum oriatur. Premat ergo corpus P tubum secundum directionem PL ad tubum normalem vi $= P$; ac primo quidem ab hac vi, cujus momentum est $= Pz$ motus gyratorius retardabitur, unde oritur ista æquatio: $\frac{2Mkk\,dd\omega}{dt^2} = -Pz$. Deinde concipiatur hæc vis in sua directione in centrum gravitatis G transferri, quæ solum motum secundum directionem G s minuet, altero secundum GF immutato; hincque binæ sequentes nascentur æquationes:

$$\frac{2M}{dt^2}(ddp \cos\omega - ddq \sin\omega) = 0$$

$$\frac{2M}{dt^2}(ddp \sin\omega + ddq \cos\omega) = -P.$$

Postea vero corpus a tubo reprimetur in directione contraria

P l vi

Pl vi $= P$; ab hac ergo solus corporis motus secundum directionem Pl augebitur, alter autem motus in directione PF prorsus non afficietur; ex quo binæ hæ æquationes resultabunt:

$$\frac{2A}{dt^2}(ddp \cos\omega - ddq \sin\omega - ddz - z\,d\omega^2) = 0$$

$$\frac{2A}{dt^2}(ddp \sin\omega + ddq \cos\omega + 2dz\,d\omega + z\,dd\omega) = P.$$

Quodsi ex æquatione primum inventa valor $P = \frac{-2Mkk\,dd\omega}{z\,dt^2}$ in reliquis substituatur, totum negotium ad sequentes quatuor æquationes perducetur:

I. $ddp \cos\omega - ddq \sin\omega = 0.$

II. $z\,ddp \sin\omega + z\,ddq \cos\omega - kk\,dd\omega = 0.$

III. $ddp \cos\omega - ddq \sin\omega - ddz + z\,d\omega^2 = 0.$

IV. $Az\,ddp \sin\omega + Az\,ddq \cos\omega + 2Az\,dz\,d\omega + Azz\,dd\omega + Mkk\,dd\omega = 0.$

Hinc ex prima & tertia oritur V. $ddz - z\,d\omega^2 = 0$ & ex II. & IV. nascitur hæc VI. $2Az\,dz\,d\omega + (Akk + Azz + Mkk)\,dd\omega = 0.$

§. LXXXVIII. Si porro æquatio I per $z \cos\omega$ & II per $\sin\omega$ multiplicetur, earum summa erit:

VII. $z\,ddp - kk\,dd\omega \sin\omega = 0.$

Sin autem prima per $z \sin\omega$ multiplicata, a secunda per $\cos\omega$ multiplicata subtrahatur, remanebit:

VIII. $z\,ddq - kk\,dd\omega \cos\omega = 0.$

Ex sexta autem est $kk\,dd\omega = \frac{-2Az\,dz\,d\omega - Azz\,dd\omega}{A + M}$ quo valore substituto æquatio VII transit in

IX. $(A +$

IX. $(A+M)\,ddp + 2A\,dz\,d\omega \sin\omega + Az\,dd\omega \sin\omega = 0$

et æquatio VIII in:

X. $(A+M)\,ddq + 2A\,dz\,d\omega \cos\omega + Az\,dd\omega \cos\omega = 0.$

Jam æquatio VI integrata dat:

XI. $Azz\,d\omega + (A+M)\,kk\,d\omega = E\,dt.$

Quodsi autem ab IX subtrahatur V per $A \cos\omega$ multiplicata integrale erit:

XII. $(A+M)\,dp - A\,dz \cos\omega + Az\,d\omega \sin\omega = F\,dt,$

sin autem ad X addatur V per $A \sin\omega$ multiplicata, summæ integrale erit:

XIII. $(A+M)\,dq + A\,dz \sin\omega + Az\,d\omega \cos\omega = G\,dt.$

Hæ postremæ æquationes denuo integratæ dabunt.

XIV. $(A+M)\,p - Az \cos\omega = Ft + \mathfrak{F}.$

XV. $(A+M)\,q + Az \sin\omega = Gt + \mathfrak{G}.$

Ex XI vero est $d\omega = \frac{E\,dt}{(A+M)kk + Azz}$ qui in V substitutus dat:

$\frac{ddz}{z} = \frac{E^2\,dt^2}{((A+M)\,kk + Azz)^2}$. seu

$\frac{dz\,ddz}{dt^2} = \frac{E^2\,z\,dz}{((A+M)\,kk + Azz)^2}$ cujus integrale est

XVI. $\frac{dz^2}{dt^2} = H - \frac{E^2 : A}{(A+M)\,kk + Azz}$ unde fit

$$dt = dz \sqrt{\frac{A(A+M)\,kk + AAzz}{AH(A+M)\,kk - EE + AAHzz}}.$$

§. LXXXIX. Ut istas constantes per integrationes ingressas debito modo definiamus, ad statum initialem est spectandum

ſtandum, in quo tubum EF rectæ AB ita incubuiſſe aſſumimus, ut centrum gravitatis G in punctum A incidiſſet. Poſito ergo $t = o$ fiet tam $p = o$, & $q = o$, quam $\omega = o$, tum autem ſumamus celeritatem tubi angularem fuiſſe $= \theta$, ita ut facto $t = o$ fiat $\frac{d\omega}{dt} = \theta$, progreſſivum autem ita fuiſſe comparatum ut eſſent celeritates $\frac{dp}{dt} = m$ & $\frac{dq}{dt} = n$. Porro initio fuerit diſtantia corporis in tubo a centro gravitatis $= a$, & celeritas inde recedens $= \alpha$; ita ut poſito $t = o$ fiat $z = a$ & $\frac{dz}{dt} = \alpha$. Hinc ex æquatione XI ad initium applicata erit $Aa\alpha\theta + (A+M)kk\theta = E$; ex XII erit $(A+M)m - A\alpha = F$, & ex XIII. $(A+M)n + Aa\theta = G$. Tum ex æquatione XIV fiet: $-Aa = \mathfrak{F}$; & ex XV. $o = \mathfrak{G}$. Denique ex æquatione XVI. habebitur:

$$\alpha^2 = H - \frac{E^2 : A}{(A+M)kk + Aaa} \text{ ſeu } H = \alpha^2 + \frac{E^2 : A}{(A+M)k^2 + Aaa}$$

hincque ſingulæ conſtantes ſequentes valores habebunt:

$$E = \theta(Aaa + Akk + Mkk)$$
$$F = (A+M)m - A\alpha;\ \mathfrak{F} = -Aa$$
$$G = (A+M)n + Aa\theta;\ \mathfrak{G} = o\ \&$$
$$H = \alpha^2 + (aa + kk)\theta\theta + \frac{Mkk\theta\theta}{A}$$

ex quibus denique oritur

$$dt = dz\sqrt{\frac{(A+M)kk + Azz}{((A+M)kk + Azz)\alpha\alpha + ((A+M)kk + Aaa)(zz - aa)\theta\theta}}$$

unde

unde z ad datum tempus t definitur. Porro erit:

$$d\omega = \frac{((A+M)kk + Aaa)\theta dt}{(A+M)kk + Azz}.$$

hincque ad datum tempus angulus ω cognoscitur: Denique est

$$p = \frac{Az \cos\omega + ((A+M)m - Aa)t - Aa}{A+M} \text{ \&}$$

$$q = \frac{-Az \sin\omega + ((A+M)n + Aa\theta)t}{A+M}.$$

§. XC. Quo naturam hujus solutionis clarius inspiciamus, quia est $dx = dp - dz \cos\omega + z d\omega \sin\omega$, æquatio duodecima abibit in hanc $Mdp + Adx = Fdt$, quæ si tota tubi massa in ejus centro gravitatis G concipiatur collecta, indicat commune centrum gravitatis tubi & corporis uniformiter secundum directionem ipsi AB parallelam progredi. Deinde quia est $dy = dq + dz \sin\omega + z d\omega \cos\omega$ æquatio XIII transit in hanc $Mdq + Ady = Gdt$, quæ indicat commune centrum gravitatis tubi & corporis secundum directionem ad AB normalem uniformiter progredi. Hinc conficitur communis centri gravitatis tubi & corporis motum esse uniformem & in directum progredientem, quod cum ex principiis mechanicis necessario evenire debeat, hinc duæ æquationes sine ulteriori calculo statim colligi potuissent. Ex his quoque æquationibus patebit summam virium vivarum tubi & corporis quæ est $= Mdp^2 + Mdq^2 + Mkkd\omega^2 + Adx^2 + Ady^2$ perpetuo esse constantem, ex hocque ergo principio tertia æquatio confici posset. Verum solutio

hujus

hujus quæstionis quatuor æquationes postulat, neque principium adhuc constat, unde quarta æquatio formari posset. Æquatio quidem undecima videtur ad constans quoddam principium deducere, quod analogum sit momento motus rotatorii supra explicato. Cum enim $\frac{zd\omega}{dt}$ sit celeritas corporis gyratoria, erit $\frac{Azzd\omega}{dt}$ ejus momentum motus rotatorii, & $\frac{Mkkd\omega}{dt}$ est momentum motus rotatorii ipsius tubi; cum igitur sit $\frac{Azzd\omega}{dt} + \frac{Mkkd\omega}{dt} + \frac{Akkd\omega}{dt} = E$ summa momentorum motus rotatorii, una cum quantitate $\frac{Akkd\omega}{dt}$ (quæ indicaret momentum motus rotatorii, si corpus A in distantia k ab axe versaretur) erit quantitas constans. Hoc autem principium commode verbis exprimi nequit.

§. XCI. Consideremus nunc tubum curvilineum quemcunque E P F super plano horizontali, quod plano tabulæ indicetur, libere mobilem. Sit ejus centrum gravitatis in G, per quod pro lubitu recta ducatur G E, quæ cum tubo moveatur, & ad quam tubi curvedo referatur. Ponatur massa tubi $= M$, ejusque momentum inertiæ ad axem gyrationis verticaliter per G transeuntem relatum $= Mkk$. Initio quidem motus recta E G inciderit in A B & centrum gravitatis G in punctum A, unde hanc rectam AB immobilem pro directrice principali assumemus. Corpus autem *Tab. IV. Fig. 26.*

autem huic tubo inclusum initio versatum sit in E, cujus massa $= A$. Jam elapso tempore t teneat tubus EPF cum recta GE situm, quem figura repræsentat, corpus autem in eo versetur in P. Ex G ad rectam AB perpendicularis demittatur Gr, voceturque $AR = p$ & $RG = q$, eritque centri gravitatis G celeritas secundum directionem $Gr = \frac{dp}{dt}$, & secundum directionem $Gg = \frac{dq}{dt}$, unde ad corpus tubi ratione motus progressivi in directione Gr accelerandum requiritur vis $= \frac{2Mddp}{dt^2}$, & in directione Gg vis $= \frac{2Mddq}{dt^2}$. Porro ducatur recta GS rectæ AB parallela, sitque angulus $EGS = \omega$, erit ω angulus, quem tubus ab initio motu gyratorio confecit, qui angulus tempusculo dt augebitur elemento $= d\omega$, quare ad accelerationem motus gyratorii requiritur momentum virium $= \frac{2Mkkdd\omega}{dt^2}$. Deinde sit corporis P a centro gravitatis G distantia $GP = z$, & angulus $EGP = \Phi$, erit ducta ad GE normali PM, hæc $PM = z \sin\Phi$ & $GM = z \cos\Phi$, unde erit elementum curvæ $EP = \sqrt{(zz + zzd\Phi^2)}$. Quare si arcus EP, seu spatium a corpore ab initio in tubo percursum ponatur $= s$, erit $ds = \sqrt{(dz^2 + zzd\Phi^2)}$. Quodsi jam ad curvaturam tubi ducatur normalis PL, erit anguli ELP sinus $= \frac{-dz\cos\Phi + zd\Phi\sin\Phi}{ds}$ & cosinus $= \frac{dz\sin\Phi + zd\Phi\cos\Phi}{ds}$. Hinc erit anguli GPL

sinus

finus $= \frac{dz}{ds}$ & cofinus $= \frac{z\,d\Phi}{ds}$; hancobrem ex G in PL demiffum perpendiculum $GT = \frac{z\,dz}{ds}$ & $PT = \frac{z\,z\,d\Phi}{ds}$. Sit $PT = v$ & $GT = u$ erit $zz = vv + uu$ & $u = \frac{z\,dz}{ds}$ atque $v = \frac{zz\,d\Phi}{ds}$; ideoque $ds = \frac{z\,dz}{u}$ & $d\Phi = \frac{v\,dz}{uz}$.

§. XCII. Demittatur nunc quoque ex P ad AB perpendiculum PQ & vocentur $AQ = x$ & $QP = y$, erit celeritas corporis fecundum directionem $Pq = \frac{dx}{dt}$ & fecundum directionem $Pp = \frac{dy}{dt}$. Unde ad accelerationem corporis requiritur in directione Pq vis $= \frac{2A\,ddx}{dt^2}$, & in directione Pp vis $= \frac{2A\,ddy}{dt^2}$. At cum fit angulus $PGS = \omega + \Phi$ erit $PS = z \sin(\omega + \Phi)$ & $GS = z \cos(\omega + \Phi)$, hincque erit $x = p - z\cos(\omega + \Phi)$ & $y = q + z \sin(\omega + \Phi)$, ideoque

$$dx = dp - dz \cos(\omega + \Phi) + z(d\omega + d\Phi) \sin(\omega + \Phi)$$
$$dy = dq + dz \sin(\omega + \Phi) + z(d\omega + d\Phi) \cos(\omega + \Phi) \;\&$$
$$ddx = ddp - ddz \cos(\omega + \Phi) + 2dz(d\omega + d\Phi) \sin(\omega + \Phi)$$
$$+ z(d\omega + d\Phi)^2 \cos(\omega + \Phi) + z(dd\omega + dd\Phi) \sin(\omega + \Phi)$$
$$ddy = ddq + ddz \sin(\omega + \Phi) + 2dz(d\omega + d\Phi) \cos(\omega + \Phi)$$
$$- z(d\omega + d\Phi)^2 \sin(\omega + \Phi) + z(dd\omega + dd\Phi) \cos(\omega + \Phi)$$

quos valores in formulis ante pro viribus inventis non fubftituamus, fed compendii caufa retineamus literas x & y donec com-

commodum fuerit eas per ſubſtitutionem exterminare. Ab his autem duabus viribus corpus a centro gravitatis G directe repellerur vi $= \frac{2A}{dt^2}(ddy \sin(\omega+\varphi) - ddx \cos(\omega+\varphi))$, quæ abit in $\frac{2A}{dt^2}(ddq \sin(\omega+\varphi) - ddp \cos(\omega+\varphi) + ddz - z(d\omega+d\varphi)^2)$. Deinde corpus ad directionem GP normaliter ad angulum EGP augendum ſollicitabitur vi $= \frac{2A}{dt^2}(ddy \cos(\omega+\varphi) + ddx \sin(\omega+\varphi))$ quæ abit in ſequentem expreſſionem:

$$\frac{2A}{dt^2}(ddq \cos(\omega+\varphi) + ddp \sin(\omega+\varphi) + 2dz(d\omega+d\varphi) + z(dd\omega+dd\varphi))$$

Hinc quoque vires determinari poſſent cum ſecundum directionem tubi tum ſecundum directionem ad illam normalem agentes, ſed præſtabit vires actu ſollicitantes ad directiones ante uſurpatas revocare, cum iſtæ expreſſiones multo fiant ſimpliciores, quam illæ ſi ad alias directiones transferrentur.

§. XCIII. Ponamus nullas vires ſollicitantes externas adeſſe, omnemque motus mutationem a ſola preſſione corporis in tubum proficiſci, ſit iſta preſſio $= P$, & quia ejus directio eſt ad tubum normalis, ſit ea PL; ejusque momentum ad motum gyratorium accelerandum erit $= Pz \sin GPL = \frac{Pzdz}{ds} = Pu$. Ut jam appareat quantum hæc vis motum tubi progreſſivum ſit perturbatura, concipiatur eadem in directione Gs ipſi PL parallela applicata. Eſt vero ang. LGr

$LGr = EGS = \omega$, & $LGs = GLP$, cujus ſinus eſt $= \frac{-dz \cos\Phi + z\,d\Phi \sin\Phi}{ds}$ & coſinus $= \frac{dz \sin\Phi + z\,d\Phi \cos\Phi}{ds}$, hinc erit anguli sGr ſinus $= \frac{-dz \cos(\omega+\Phi) + z\,d\Phi \sin(\omega+\Phi)}{ds}$ & coſinus $= \frac{dz \sin(\omega+\Phi) + z\,d\Phi \cos(\omega+\Phi)}{ds}$: Quare ex vi $Gs = P$ naſcitur vis in directione $Gr = \frac{P(dz \sin(\omega+\Phi) + z\,d\Phi \cos(\omega+\Phi))}{ds}$ & in directione $Gg = \frac{P(dz \cos(\omega+\Phi) - z\,d\Phi \sin(\omega+\Phi))}{ds}$ unde naſcentur ſequentes æquationes:

$$\frac{2M\,ddp}{dt^2} = \frac{P(dz \sin(\omega+\Phi) + z\,d\Phi \cos(\omega+\Phi)}{ds}$$

$$\frac{2M\,ddq}{dt^2} = \frac{P(dz \cos(\omega+\Phi) - z\,d\Phi \sin(\omega+\Phi)}{ds}$$

quæ præbent ſequentes formas:

$$\frac{2M}{dt^2}(ddp \cos(\omega+\Phi) - ddq \sin(\omega+\Phi)) = \frac{Pz\,d\Phi}{ds}$$

$$\frac{2M}{dt^2}(ddp \sin(\omega+\Phi) + ddq \cos(\omega+\Phi)) = \frac{P\,dz}{ds}.$$

Cum igitur ex prima æquatione ſit $P = \frac{2Mkk\,dd\omega}{u\,dt^2}$ ſi hic valor ſubſtituatur prodibunt hæc æquationes:

$$ddp \cos(\omega+\Phi) - ddq \sin(\omega+\Phi) = \frac{kkz\,d\Phi\,dd\omega}{u\,ds} = \frac{k^2\,d\Phi\,dd\omega}{dz}$$

$$ddp \sin(\omega+\Phi) + ddq \cos(\omega+\Phi) = \frac{kk\,dz\,dd\omega}{u\,ds} = \frac{kk\,dd\omega}{z}.$$

Eſt

Eſt enim $udz = zdz$. Ad has igitur duas æquationes reducitur motus tubi cum progreſſivus tum gyratorius; cum quibus, ſi æquationes ex motu corporis oriundæ conjungantur, problema reſolvetur.

§. XCIV. A preſſionis autem reactione corpus tubo incluſum in P urgebitur in directione Pl vi $= -$P, quæ pariter ſecundum directiones Pq & Pp reſoluta dabit pro directione Pq vim $= \frac{-P(dz \sin(\omega+\Phi) + zd\Phi \cos(\omega+\Phi))}{ds}$ & pro directione Pp vim $= \frac{-(dz \cos(\omega+\Phi) - zd\Phi \sin(\omega+\Phi))}{ds}$.

Hinc habebuntur iſtæ æquationes:

$$\frac{2Addx}{dt^2} = \frac{-P(dz \sin(\omega+\Phi) + zd\Phi \cos(\omega+\Phi))}{ds}$$

$$\frac{2Addy}{dt^2} = \frac{-P(dz \cos(\omega+\Phi) - zd\Phi \sin(\omega+\Phi))}{ds}.$$

E: his autem porro efficitur:

$$\frac{2A}{dt^2}(ddx \cos(\omega+\Phi) - ddy \sin(\omega+\Phi)) = \frac{-Pzd\Phi}{ds}$$

$$\frac{2A}{dt^2}(ddx \sin(\omega+\Phi) + ddy \cos(\omega+\Phi)) = \frac{-Pdz}{ds}$$

quæ uti ſupra (92) oſtendimus abibunt in:

$$\frac{2A}{dt^2}(ddp \cos(\omega+\Phi) - ddq \sin(\omega+\Phi) - ddz + z(d\omega+d\Phi)^2) = \frac{-Pzd\Phi}{ds}$$

$$\frac{2A}{dt^2}(ddp \sin(\omega+\Phi) + ddq \cos(\omega+\Phi) + 2dz(d\omega+d\Phi) + z(dd\omega+dd\Phi))$$

$$= -\frac{Pdz}{ds}.$$

Hæ

Hæ æquationes cum binis ante inventis comparatæ dabunt:

$$(A+M)\,ddp\cos(\omega+\Phi)-(A+M)\,ddq\sin(\omega+\Phi)-A\,ddz$$
$$+Az(d\omega+d\Phi)^2=0$$

$$(A+M)\,ddp\sin(\omega+\Phi)+(A+M)\,ddq\cos(\omega+\Phi)+2A\,dz(d\omega+d\Phi)$$
$$+Az(dd\omega+dd\Phi)=0$$

si harum æquationum prior per $\cos(\omega+\Phi)$ & posterior per $\sin(\omega+\Phi)$ multiplicetur, summæ integrale erit:

$$(A+M)\,dp-A\,dz\cos(\omega+\Phi)+Az(d\omega+d\Phi)\sin(\omega+\Phi)=F\,dt$$

porroque integrando erit:

$$(A+M)\,p-Az\cos(\omega+\Phi)=Ft+\mathfrak{F}$$

simili modo eruetur hæc æquatio integralis e

$$(A+M)\,dq+A\,dz\sin(\omega+\Phi)+Az(d\omega+d\Phi)\cos(\omega+\Phi)=G\,dt$$

quæ denuo integrata dat:

$$(A+M)\,q+Az\sin(\omega+\Phi)=Gt+\mathfrak{G},$$

quas æquationes principium motus æquabilis in directum communis centri gravitatis quoque suppeditat.

§. XCV. Cum autem ex §. 93. sit:

$$ddp\cos(\omega+\Phi)-ddq\sin(\omega+\Phi)=\frac{k^2\,d\Phi\,dd\omega}{dz}\ \&$$

$$ddp\sin(\omega+\Phi)+ddq\cos(\omega+\Phi)=\frac{k^2\,dd\omega}{z}$$

erit his valoribus in æquationibus differentio-differentialibus præcedentibus substituendis.

$$\frac{(A+M)\,k^2\,d\Phi\,dd\omega}{dz}=A\,ddz-Az(d\omega+d\Phi)^2$$

$$\frac{(A+M)\,k^2\,d\Phi\,dd\omega}{z}=-A\,dz(d\omega+d\Phi)-Az(dd\omega+dd\Phi)$$

si hæc æquatio multiplicetur per z erit

$$(A+M)k^2\,ddw + Azz(ddw + ddP) + 2Azdz(dw + dP) = 0$$

cujus integrale est:

$$(A+M)kk\,dw + Azz(dw + dP) = E\,dt.$$

unde fit $dw = \frac{E\,dt - Azz\,dP}{(A+M)k^2 + Azz}$, & $dw + dP = \frac{E\,dt + (A+M)k^2\,dP}{(A+M)kk + Azz}$

$$ddw = \frac{-A(A+M)k^2zz\,ddP - AAz^4\,ddP - 2A(A+M)k^2z\,dz\,dP - 2AEz\,dz\,dt}{((A+M)k^2 + Azz)^2}$$

qui valores in illa æquatione substituti præbent

$$E^2z\,dz\,dt^2 = (A+M)^2k^4zz\,dP\,ddP + A(A+M)k^2z^4\,dP\,ddP$$
$$+ (A+M)^2k^4z\,dz\,dP^2 + (A+M)^2k^4\,dz\,ddz$$
$$+ 2A(A+M)k^2z^2\,dz\,ddz + A^2z^4\,dz\,ddz$$

quæ posito $dP = r\,dz$ & $dt = \frac{dz}{\sqrt{R}}$ abibit in hanc:

$$E^2z\,dz = ((A+M)k^2 + Azz)(A+M)k^2Rzz\,dr + (A+M)^2k^4Rzr\,dz$$
$$\tfrac{1}{2}((A+M)k^2 + Azz)(A+M)k^2z^2r^2\,dR + \tfrac{1}{2}((A+M)k^2 + Az^2)^2\,dR.$$

Ex qua æquatione, cum P ideoque r per z detur, definiri poterit valor quantitatis R ex sola variabili z, hincque porro tempus t per z, tumque angulus w & quantitates p & q per z determinabuntur.

§. XCVI. Quodsi autem æquatio differentialis secundi gradus ante inventa dividatur per $((A+M)kk + Azz)^2$ orietur:

$$\frac{E^2z\,dz\,dt^2 - (A+M)kkzz\,dP\,ddP((A+M)kk + Azz) - (A+M)^2k^4z\,dz\,dP^2}{((A+M)kk + Azz)^2}$$

$= dz\,ddz$ cujus integrale est:

dz^2

$$dz^2 = H dt^2 - \frac{E^2 dt^2 : A - (A+M) k^2 z^2 d\Phi^2}{(A+M) kk + Azz} \text{ seu}$$

$$(A+M) kk dz^2 + Azz dz^2 + (A+M) k^2 zz d\Phi^2 =$$
$$dt^2 (H(A+M) k^2 + HAzz - E^2 : A)$$

unde fit:

$$dt = \sqrt{\frac{((A+M) kk + Azz) dz^2 + (A+M) k^2 zz d\Phi^2}{H(A+M) k^2 + HAzz - E^2 : A}}$$

quia igitur Φ per z dari ponitur, ex hac æquatione ad datum tempus t, tam distantia z quam angulus Φ, hoc est locus corporis in tubo assignari poterit: Qua relatione inter t & z inventa, erit:

$$d\omega = \frac{E dt - Azz d\Phi}{(A+M) k^2 + Azz}.$$

Invento autem angulo ω, ideoque tubi motu gyratorio reperietur quoque motus progressivus tubi ex his æquationibus:

$$p = \frac{Ft + \mathfrak{F} + Az \cos(\omega + \Phi)}{A+M}$$

$$q = \frac{Gt + \mathfrak{G} - Az \sin(\omega + \Phi)}{A+M}$$

ubi constantes quantitates E, F, G, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ & H, ex situ & motu initiali cum tubi tum corporis in ipso definiri debent, eo scilicet modo, quo pro tubo recto sumus usi. Atque adeo hoc problema difficillimum, quod in ista sectione resolvere suscepimus, perfecte solutum dedimus.

§. XCVII. Consideremus autem statum initialem, quem superiores formulæ exhibere debent, si ponatur $t = 0$. Quia ergo

ergo hoc casu angulus EGS evanescit erit $\omega = 0$; celeritas autem gyratoria tubi tum fiat $\frac{d\omega}{dt} = \theta$. Deinde quia hoc tempore corpus in E hæsisse posuimus, sit $GE = a$, hocque loco $dz = \zeta d\Phi$ seu $d\Phi = \frac{dz}{\zeta}$. Quia porro celeritas corporis in tubo secundum tubi ductum est $= \frac{\sqrt{(dz^2 + zz d\Phi^2)}}{dt}$, erit ea initio motus $= \frac{d\Phi \sqrt{(\zeta\zeta + aa)}}{dt}$. Ponatur ista celeritas $= \alpha$, erit $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\alpha}{\sqrt{(aa + \zeta\zeta)}}$ & $\frac{dz}{dt} = \frac{\alpha\zeta}{\sqrt{(aa + \zeta\zeta)}}$, si ponatur $t = 0$. Statuatur brevitatis gratia $A + M = N$, atque ex superioribus æquationibus constantes E & H ita determinabuntur, ut sit

$$E = (Nkk + Aaa)\theta + \frac{Aaa\alpha}{\sqrt{(aa + \zeta\zeta)}} \text{ \&}$$

$$H = \alpha\alpha + \frac{2aa\alpha\theta}{\sqrt{(aa + \zeta\zeta)}} + \frac{(Nkk + Aaa)\theta\theta}{A}.$$

Sit porro $N = A + M = nA$, atque ultima æquatio integrata inter t & z abibit in hanc formam $\alpha^2 dt^2 (nkk + zz)$

$$+ (zz - aa) dt^2 \left((nkk + aa)\theta^2 + \frac{2aa\alpha\theta}{\sqrt{(aa + \zeta\zeta)}}\right) =$$

$$(nkk + zz) dz^2 + nkkzz d\Phi^2$$

unde oritur:

$$dt = \sqrt{\frac{(nkk + zz) dz^2 + nkkzz d\Phi^2}{\alpha^2 (nkk + zz) + \theta(zz - aa)\left((nkk + aa)\theta + \frac{2aa\alpha}{\sqrt{(aa + \zeta\zeta)}}\right)}}$$

Tum

Tum vero erit:

$$dw = \frac{(nkk+aa)\theta dt + aa\alpha dt : \sqrt{(aa+\zeta\zeta)} - zzd\Phi}{nkk+zz}.$$

§. XCVIII. Ponatur porro anguli GEP, quem tubus in E cum recta GE constituit sinus $= \gamma$, erit $\gamma = \frac{a d\Phi}{\sqrt{(dz^2 + a^2 d\Phi^2)}}$ $= \frac{\alpha}{\sqrt{(aa+\zeta\zeta)}}$ & $\sqrt{(aa+\zeta\zeta)} = \frac{\alpha}{\gamma}$, quo valore substituto erit:

$$E = A\theta(nkk+aa) + Aa\alpha\gamma$$

$$H = \alpha\alpha + 2a\alpha\gamma\theta + (nkk+aa)\theta\theta$$

hincque porro:

$$dt = \sqrt{\frac{(nkk+zz)dz^2 + nkkzzd\Phi^2}{\alpha^2(nkk+zz) + \theta(zz-aa)(2a\alpha\gamma + (nkk+aa)\theta)}}$$

Introducantur insuper lineæ supra adhibitæ $PT = v$ & $GT = u$, quarum illa est normalis ad curvam, hoc vero tangenti in P parallela, seu $PT = v$ æquatur perpendiculo ex G in tangentem demisso, & $GT = u$ portioni tangentis reflectæ; eritque $zd\Phi = \frac{vdz}{u}$, & $(nkk+zz)dz^2 + nkkzzd\Phi^2 = \frac{(nkk+uu)zzdz^2}{uu}$ ob $vv + uu = zz$, hinc ergo erit:

$$dt = \frac{zdz\sqrt{(nkk+uu)}}{u\sqrt{(\alpha^2(nkk+zz) + \theta(2a\alpha\gamma + (nkk+aa)\theta)(zz-aa))}}$$

$$\& \; dw = \frac{dt(a\alpha\gamma + (nkk+aa)\theta)}{nkk+zz} - \frac{vzdz}{u(nkk+zz)}.$$

Cum denique commune centrum gravitatis tubi & corporis vel quiescat vel uniformiter in directum progrediatur, ponamus

namus id in puncto A perpetuo quiescere fietque $F = 0$, $\mathfrak{F} = 0$, $G = 0$ & $\mathfrak{G} = 0$, & ob $A + M = nA$ erit:

$$p = \frac{z \cos(\omega + \Phi)}{n}$$

$$\& \; q = \frac{-z \sin(\omega + \Phi)}{n}$$

ideoque $pp + qq = \frac{zz}{nn}$, quæ proprietas ex communis centri gravitatis quiete sponte sequitur. Recta autem GP semper transibit per punctum A seu α eritque $G\alpha = \frac{Az}{A + M}$, ut ex natura centri gravitatis notum est.

§. XCIX. Si motus corporis in tubo initio ita temperetur ut sit: $nk^2\alpha^2 = a^2\theta(2a\alpha\gamma + (nkk + aa)\theta)$ seu

$$\alpha = \frac{a^3\gamma\theta \pm a\theta\sqrt{(a^4\gamma\gamma + nkkaa + n^2k^4)}}{nkk}$$

æquatio ante inventa multo fit simplicior abibitque in

$$dt = \frac{dz\sqrt{(nkk + uu)}}{u\sqrt{(\alpha^2 + 2a\alpha\gamma\theta + (nk^2 + aa)\theta\theta)}}.$$

Si igitur detur æquatio inter u & z, hinc relatio apparet inter binas variabiles t & z. Est vero $\sqrt{(\alpha^2 + 2a\alpha\gamma\theta + (nk^2 + aa)\theta\theta)} = \frac{\alpha\sqrt{(nkk + aa)}}{a}$ ideoque $dt = \frac{a\,dz\sqrt{(nkk + uu)}}{\alpha u\sqrt{(nkk + aa)}}$ ad quod requiritur ut sit:

$$\alpha : \theta = a^3\gamma \pm a\sqrt{(a^4\gamma\gamma + nk^2\gamma^2 + n^2k^4)} : nkk$$

si ergo ponamus curvam EPF ita esse comparatam ut in ea sit u constans, erit hujus curvæ evoluta circulus centro G descri-

descriptus, atque si in E hujus curvæ cuspis, ubi e circulo egreditur, statuatur, erit ubique $u = a$, & in initio $E\gamma = o$. Pro tali ergo tubo erit in genere

$$dt = \frac{zdz\sqrt{(nkk+aa)}}{a\sqrt{(a^2(nkk+zz)+(nkk+aa)\theta\theta(zz-aa))}}$$

sin autem sit $\alpha : \theta = a\sqrt{(nkk+aa)} : \sqrt{nkk}$, erit:

$dt = \frac{dz}{\alpha}$, & $t = \frac{z-a}{\alpha}$; tum vero fiet:

$$d\omega = \frac{dz\sqrt{nkk(nkk+aa)}}{a(nkk+zz)} - \frac{zdz\sqrt{(zz-aa)}}{a(nkk+zz)}$$ cujus integrale est

$$\omega = -\frac{\sqrt{(zz-aa)}}{a} + \frac{\sqrt{(nkk+aa)}}{a} \text{A tang.} \frac{\sqrt{(zz-aa)}}{\sqrt{(nkk+aa)}}$$

& ob $d\Phi = \frac{dz\sqrt{(zz-aa)}}{az}$, erit $\Phi = \frac{\sqrt{(zz-aa)}}{a} + \text{A sin} \frac{a}{z}$.

unde $\omega + \Phi = A \sin \frac{a}{z} + \frac{\sqrt{(nkk+aa)}}{a} A \cos \sqrt{\frac{nkk+aa}{nkk+zz}}$.

sicque iste motus in hujusmodi tubo definiri poterit.

§. C. Præcipue autem hic casus attendi meretur quo curvatura tubi E P B F est circulus centrum in G habens positum. Erit ergo ubique ejus radius $GP = z = n$ & $\gamma = 1$, atque $u = o$. Cum igitur sit $dz = o$ fiet *Tab. IV. Fig. 27.*

$$dt = \frac{kadP\sqrt{n}}{a\sqrt{(nkk+aa)}}$$ & integrando

$$t = \frac{ka\Phi\sqrt{n}}{a\sqrt{(nkk+aa)}}$$

Deinde ob $\zeta = o$ erit:

$d\omega =$

$$d\omega = \theta\, dt + \frac{aa\,dt}{nkk+aa} - \frac{aa\,d\Phi}{nkk+aa} \text{ ergo}$$

$$\omega = \theta t + \frac{aat}{nkk+aa} - \frac{aa\Phi}{nkk+aa}, \text{ \& ob } \Phi = \frac{at\sqrt{(nkk+aa)}}{ka\sqrt{n}}$$

$$\text{erit } \omega + \Phi = \theta t + \frac{aat}{nkk+aa} + \frac{akt\sqrt{n}}{a\sqrt{(nkk+aa)}}.$$

Denique est

$$p = \frac{a \cos(\omega+\Phi)}{n}$$

$$q = -\frac{a \sin(\omega+\Phi)}{n}.$$

siquidem commune centrum gravitatis in puncto A quiescere assumatur. Erit ergo $pp + qq = \frac{aa}{nn}$, ideoque centrum circuli mobilis G circa punctum A circulum describet, cujus radius $AG = \frac{a}{n} = \frac{Aa}{A+M}$, semper enim recta GP per commune centrum gravitatis A transire debet. Et quia hujus circuli elementum est $\frac{a}{n}(d\omega + d\Phi)$, punctum G in hoc circulo motu uniformi progredietur. Tum vero etiam tam ipse tubus circa suum centrum G motu uniformi gyrabitur, quam corpus in ipso uniformiter procedet. Hæc autem phænomena ex ipsa motus consideratione facile colligi possunt, cum pressio, quæ semper secundum GP est directa, neque motum tubi gyratorium neque motum corporis afficiat; quamobrem mirum non est, hunc casum præ cæteris esse solutu facillimum.

TABU-