Erit ergo $dz^2 = \frac{du^2((M+A)c - Au)}{Mu}$ & $dv^2 = \frac{(M+A)du^2(c-u)}{Mu}$, ideoque $dv = du\sqrt{\frac{(M+A)(c-u)}{Mu}}$; quam curvam patet esse cycloidem elongatam, quæ ex cycloide ordinaria, seu tautochrona immobili construitur, si hujus applicatæ augeantur in ratione 1 ad $\sqrt{\frac{M+A}{M}}$. Perspicuum enim est, si massa M ponatur infinita, cycloidem communem prodire.

Sectio II.

De motu corporum in tubis circa axem fixum mobilibus.

§. XXXIX.

Cum ea, quæ spectant ad motum corporum tubis inclusorum, in præcedente sectione jam sint tradita, huic sectioni tantum erunt præmittenda præcepta de motu corporum circa axem fixum mobilium, ex quibus pateat, quomodo iste motus a quibusvis viribus sollicitantibus alteretur. Corpora autem hic contemplamur inflexibilia, quorum singulæ partes cum inter se, tum ab axe fixo perpetuo easdem teneant distantias. Sit igitur axis iste fixus, circa quem corpus quodpiam est mobile, normalis ad planum tabulæ, idque trajiciat in puncto O, sintque A, B, C particulæ quæcunque corporis in hoc plano sitæ, quarum distan- *Tab. II. Fig. 11.*

Unde si celeritas particulæ A debita sit altitudini u, seu $= \sqrt{u}$, ex ea omnium reliquarum particularum celeritates cognoscentur. Particulæ scilicet B celeritas erit $= \frac{OB}{OA}\sqrt{u}$, & particulæ C celeritas $= \frac{OC}{OA}\sqrt{u}$. Cujusque ergo particulæ celeritas per ejus distantiam ab axe divisa dabit quotum constantem, qui cum per eum totus motus rotatorius definiatur, celeritas angularis vocari solet. Hinc si puncti ab axe O intervallo $= f$ remoti celeritas vera sit $= \sqrt{u}$, erit totius corporis celeritas angularis $= \frac{\sqrt{u}}{f}$; ex eaque omnium corporis punctorum celeritates cognoscentur, erit namque puncti B celeritas in directione Bb ad OB normali $= \frac{OP}{f}\sqrt{u}$, & altitudo huic celeritati debita $= \frac{OB^2 u}{ff}$. Atque si corporis particula proponatur extra planum OABC sita, per eam ductum concipiatur planum ad axem normale, in hocque plano a particula ad axem ducatur recta, quæ ad eum erit normalis. Quo facto hujus particulæ motus in eodem plano fiet, secundum eam plagam, in quam totus motus dirigitur, atque si istius particulæ ab axe distantia sit $= x$, erit ejus celeritas $= \frac{x\sqrt{u}}{f}$. Unde intelligitur si corporis, quod circa axem fixum est mobile, unius puncti motus sit cognitus, ex eo omnium particularum, atque ideo totius corporis motum determinari.

§. XLI. Si unicum corpusculum A circa axem fixum gyraretur, neque id in motu suo ullam resistentiam inveniret, neque ab ulla vi externa sollicitaretur, tum id motu uniformi perpetuo gyrari esset perrecturum, neque ob axem ullam motus perturbationem esset perpessurum. Quod idem cum de singulis particulis B, C, sit intelligendum manifestum est omne corpus, cui motus gyratorius circa axem fixum semel sit impressus eundem motum perpetuo esse conservaturum, nisi a viribus externis sollicitetur. Quare & hoc casu primum principium motus, quo omne corpus vi quadam insita, quæ inertia vocatur, in eodem motus statu perseverare affirmatur, locum tenet. Cum autem singulæ particulæ non in directum sed motu circulari ferantur, vi centrifuga gaudebunt, dum ab axe O recedere conabuntur: at quia axis fixus assumitur, hæ vires nullum effectum exerere poterunt. Interim tamen operæ pretium erit investigare, quantam vim singula axis puncta ab his conatibus centrifugis sustineant. Sit igitur particulæ ab axe intervallo $= f$ distantis celeritas $= \sqrt{u}$, erit particulæ A celeritas $= \frac{OA\sqrt{u}}{f}$ & altitudo debita huic celeritati $= \frac{OA^2 . u}{ff}$. Cum jam particula A, cujus massa sit $= A$, hac celeritate circulum describat, cujus radius $= OA$, ad particulam in hoc motu curvilineo continendam vis requiritur $= 2A . \frac{OA^2 u}{ff}$: $OA =$

2A.

$\frac{2A.OA.u}{ff}$ (16), qua particula A in directione AO urgeatur. Vicissim ergo axis punctum O secundum directionem OA trahetur vi $= \frac{2A.OA.u}{ff}$, similique modo, si particularum in B & C massæ sint B & C, axis punctum O in directionibus OB, OC trahetur viribus $\frac{2B.OB.u}{ff}$; $\frac{2C.OC.u}{ff}$. Hinc si omnium particularum ad planum OABC pertinentium centrum gravitatis sit in G, omniumque simul sumtarum massa $= M$, ab earum viribus centrifugis conjunctim axis punctum O sollicitabitur secundum directionem OG vi $= \frac{2M.OG.u}{ff}$, hoc est perinde, ac si omnes particulæ plani OABC in earum centro gravitatis G essent collectæ. Similique modo vires, quibus singula reliqua axis puncta urgentur, definiri poterunt; ex quibus simul consideratis patebit, quanta vi opus sit ad axem in situ immobili continendum.

§. XLII. Quo nunc facilius definire queamus, quantum quælibet vis externa motum hunc gyratorium sit perturbatura, primum investigemus, cujusmodi vires requirantur ad datam accelerationem motui rotatorio inducendam. Sit igitur puncti ab axe intervallo $= f$ distantis celeritas debita altitudini u, quæ dum id punctum per angulum infinite parvum $d\omega$ promovetur, augmentum capiat $= du$. Nunc, cum particulæ A celeritas sit debita altitudini $\frac{OA^2.u}{ff}$, dum ea

pariter per angulum $d\omega$ circa O procedit, percurret ſpatiolum $Aa = OA.d\omega$, & quia interea altitudo ejus celeritati debita $\frac{OA^2.u}{ff}$, incrementum capit $= \frac{OA^2.du}{ff}$ ad hoc incrementum generandum oportet, ut particula A in directione Aa ſollicitetur vi $= A.\frac{OA^2.du}{ff} : OA.d\omega = \frac{A.OA.du}{ff\,d\omega}$. Similique modo particula B in directione Bb ſollicitetur neceſſe eſt vi $= \frac{B.OB.du}{ff\,d\omega}$, & particula C in directione Cc vi $= \frac{C.OC.du}{ff\,d\omega}$. Jam omnium harum virium ſumma momentorum ad axem O relatorum eſt $= \frac{du}{ff\,d\omega}(A.OA^2 + B.OB^2 + C.OC^2 + \&c.)$; quoniam enim corpus circa axem O eſt mobile, virium ſollicitantium momenta ad eundem axem referri oportet. Si ergo + vis ſollicitantis momentum ad axem O relatum ſit $= \frac{ff\,du}{d\omega}(A.OA^2 + B.OB^2 + C.OC^2 + \&c.)$ ab ea vi ſollicitante motus corporis rotatorius ita accelerabitur, ut cum puncti ab axe intervallo $= f$ diſtantis celeritas ſit debita altitudini u, dum corpus motu gyratorio circa axem O per angulum infinite parvum $d\omega$ progreditur, altitudo u incrementum capiat $= du$. Hinc ſi momentum vis ſollicitantis ſit $= Pg$, acceleratio motus rotatorii inde oriunda hac æquatione exprimetur:

$$du = \frac{Pg.ff\,d\omega}{A.OA^2 + B.OB^2 + C.OC^2 + \&c.}$$

§. XLIII.

§. XLIII. Ad accelerationem ergo a quavis vi sollicitante ortam inveniendam primum istius vis momentum respectu axis O est definiendum, quod fit, si planum ad axem normale per directionem istius vis ducatur, ipsaque vis per resolutionem ad hoc planum reducatur, altera, quæ ad hoc planum est normalis, omissa & ex puncto axis, quo ab hoc plano secatur, in directionem vis perpendiculum demittatur, atque ipsa vis per hoc perpendiculum multiplicetur. Sic si ipsa vis fuerit $= P$ atque hoc perpendiculum $= g$, erit momentum vis respectu axis $= Pg$, quod in formulam inventam ingreditur. Deinde singulæ corporis particulæ per quadrata distantiarum suarum ab axe multiplicari & in unam summam colligi debent, ut obtineatur valor denominatoris $A.OA^2 + B.OB^2 + C.OC^2 +$ &c. Hæc ergo summa erit productum ex massa in quadratum cuiuspiam lineæ, ideoque si massa totius corporis ponatur $= M$, hujusmodi habebit formam Mkk; semper scilicet valor lineæ k assignari potest, ut expressio Mkk æqualis fiat summæ productorum $A.OA^2 + B.OB^2 + C.OC^2 +$ &c. Quantitatem hanc Mkk vocabimus momentum inertiæ corporis ad axem rotationis O relatum: unde si cognitum fuerit & momentum vis sollicitantis Pg, & momentum inertiæ corporis Mkk utrumque ad axem rotationis relatum, hinc acceleratio motus rotatorii facile definietur, erit enim $du = \frac{Pg.ffdu}{Mkk}$, quæ accelerato punctum corporis ab axe intervallo $= f$

 distan-

distantis respicit, cujus celeritas debita est altitudini u, hancque accelerationem accipit, dum corpus motu gyratorio per angulum infinite parvum $d\omega$ progreditur. Hoc autem tenendum est, si momentum vis sollicitantis in eandem plagam vergat, in quam fit motus; si enim in plagam oppositam tenderet, motus tantumdem retardaretur, foretque $du = \frac{-Pg.ffd\omega}{Mkk}$.

§. XLIV. Momentum hoc inertiæ, a quo acceleratio seu retardatio motus rotatorii pendet, ingreditur quoque in calculum centri oscillationis, ita ut si centrum oscillationis fuerit inventum, inde simul momentum inertiæ respectu axis gyrationis innotescat. Quæ convenientia quo clarius appareat, ex his ipsis principiis centrum oscillationis, quod vulgo ex principiis alienis derivari solet, tanquam ex proprio fonte investigemus. Sit igitur O axis fixus ad planum tabulæ normalis, & horizontalis, ita ut planum tabulæ tanquam verticale sit spectandum; circa hunc axem oscilletur corpus ABCF, cujus massa & pondus sit $= M$, & centrum gravitatis in G. Ducatur recta O G, quæ a verticali O g distet angulo G O $g = \Phi$, quo angulo elongatio corporis a situ quietis mensurarur, si enim centrum gravitatis G in lineam Og perveniat, corpus quiesceret, nisi haberet motum insitum. Sumatur distantia O F $= f$, sitque puncti F celeritas debita altitudini u, qua versus rectam verticalem Of accedat, & puncto temporis per angulum $d\omega = -d\Phi$ progrediatur. Sit momentum inertiæ hujus corporis $= Mkk$, & cum corpus

Tab. II. Fig. 12.

pus urgeatur a gravitate naturali, quæ erit $= M$, hujus vis directio G P erit verticalis & per corporis centrum gravitatis transibit, ejus ergo momentum respectu axis O erit $= M.$ O G. sin Φ, motumque accelerabit, unde habebitur $du = \frac{M.\,OG.\,\sin\Phi.\,ff\,d\omega}{Mkk} = \frac{OG.\,\sin\Phi.\,ff\,d\omega}{kk}$. Concipiatur + nunc loco corporis particula infinite parva in H, cujus massula sit $= m$, pondusque H Q $= m$, unde ejus momentum $= m.$ OH sin Φ; momentum autem inertiæ $= m.\,OH^2$. Quare si hæc particula sola adesset, foret $du = \frac{m.\,OH.\,\sin\Phi.\,ff\,d\omega}{m.\,OH^2} = \frac{\sin\Phi.\,ff\,d\omega}{OH}$. Si jam hujus particulæ H motus fuerit conformis motui totius corporis, erit $\frac{OG}{kk} = \frac{1}{OH}$ seu $OG.\,OH = kk$. Punctum autem H hujus naturæ, ut particula infinite parva loco totius corporis ibi constituta eundem habitura sit motum oscillatorium, atque totum corpus, vocatur in mechanicis centrum oscillationis, eritque ergo distantia centri oscillationis ab axe $OH = \frac{kk}{OG} = \frac{Mkk}{M.OG}$; unde vulgaris regula inveniendi centri oscillationis obtinetur. Cognito autem vicissim centro oscillationis H, nostram quantitatem kk inde cognoscemus cum sit $kk = OG.\,OH$.

§. XLV. Quæ ante de momento cujusque potentiæ respectu, axis circa quem fit motus, sunt tradita, fient planiora, si perpendamus nullius vis, cujus + momentum respectu hujus

axis sit nullum, ullum effectum esse posse. Si enim directio vis in ipsum axem incidat, vel eidem sit parallela, manifestum est motum corporis ab ea affici non posse; propterea quod hæc vis sit normalis ad directionem motus, quem habet, axisque firmitas omni effectui hujus vis reluctetur. Deinde si directio vis per ipsum axem transeat, ea considerari poterit, quasi eidem axis puncto, per quod transit, esset applicata, ideoque cum axis sit immobilis, frustra ullum effectum exercere conabitur. Casus isti, quibus vim sollicitantem nullus sequitur effectus, huc redeunt, quando axis & directio vis sollicitantis in eodem plano versantur. Sin autem axis & directio vis non in eodem plano fuerit constitutæ, tum semper vis valebit motum rotatorium immutare. Ad cujus momentum investigandum, per quodpiam directionis A E punctum A ducatur recta A C axi parallela, ad eamque in plano C A E normalis A D, atque vis A E secundum directiones A C & A D resolvatur, quarum sola posterior huc spectat, per quam ad axem planum normale ducatur, & ex axis puncto, ubi secatur, in eam perpendiculum demittatur, in quod vis AD ducta prabebit momentum quæsitum. Ad calculum autem expeditius absolvendum hoc modo invenietur. Ad axem ducatur planum quodcunque normale, directionem vis propositæ A E secans in A; sitque O punctum axis in hoc plano: A E ex alio directionis puncto E in hoc planum demittatur perpendiculum E D, junctaque A D, erit, posita vi A E = P, vis in directione A D urgens = P cos E A D, hujusque momentum

Tab. II. Fig. 13.

Fig. 14.

mentum respectu axis erit $=$ P. A O cos E A D. sin O A D. Vel in plano OAD ad OA ducatur normalis AF eritque momentum quæsitum $= P.AO.$ cos EAF, unde si vel $AO = 0$ vel angulus EAF rectus, momentum evanescit, hucque redeunt casus ante memorati.

§. XLVI. His expositis motus principiis motum corporis in tubo circa axem fixum mobili contemplemur. Ac primo quidem sit tubus non solum rectus, sed etiam productus per ipsum axem transeat, ad eumque sit normalis. Sit ergo O punctum axis, per quod tubus transit, & OE tubus, qui in plano tabulæ concipiatur mobilis, siquidem axis ad hoc planum in O normaliter insistat. Ponatur massa hujus tubi $=$ M, ejusque momentum inertiæ respectu axis $= Mkk$, tum vero sit massa corporis in tubo inclusi $=$ A. Elapso jam tempore t pervenerit tubus in situm OE, corpusque in eo versetur in P, initio autem tenuerit tubus situm OC, ita ut nunc angulum $COE = \omega$ confecerit. Vocetur longitudo $OC = OE = f$, intervallum $OP = x$, & arcus $CE = s$, erit $s = f\omega$. Jam celeritas puncti tubi E erit $= \frac{ds}{dt} = \frac{f\,d\omega}{dt}$, quam ante vocavimus $= V\,u$, unde altitudo huic celeritati debita erit $u = \frac{ff\,d\omega^2}{dt^2}$ & $du = \frac{2ff\,d\omega\,dd\omega}{dt^2}$ posito dt constante. Momentum ergo virium ad hanc accelerationem requisitum est $\frac{Mkk\,du}{ff\,d\omega} = \frac{2Mkk\,dd\omega}{dt^2}$. Quoniam celeritas puncti E est $= \frac{ds}{dt}$, erit

Tab. II. Fig. 15.

erit celeritas puncti tubi $P = \frac{x\,ds}{f\,dt} = \frac{x\,d\omega}{dt}$, quam corpus in P cum tubo habet communem, secundum directionem PL ad tubum normalem, altitudo ergo huic celeritati debita erit $= \frac{xx\,d\omega^2}{dt^2}$. Celeritas vero corporis secundum directionem tubi est $= \frac{dx}{dt}$. Quoniam vero hæ celeritates non secundum constantes directiones diriguntur, sed ipsæ directiones continuo cum situ tubi mutantur; accelerationes modo hactenus adhibito definiri nequeunt. Reduci ergo prius motus corporis in P debet ad directiones constantes, quam vires ad accelerationem requisitæ definiri queant.

§. XLVII. Sumta ergo OC pro hac directione constante, in eam ex P ducatur perpendicularis PQ, & vocetur $OQ = p$, & $QP = q$. Jam motus corporis P verus secundum has directiones Pr & Pq resolutus dabit pro directione Pr celeritatem $= \frac{dp}{dt}$ & pro directione Pq celeritatem $= \frac{dq}{dt}$. Cum igitur massa corporis sit $= A$, necesse est ut corpus secundum directionem Pr sollicitetur vi $= \frac{2A\,ddp}{dt^2}$ & secundum directionem Pq vi $= \frac{2A\,ddq}{dt^2}$. Hæ vires nunc iterum ad directiones ante consideratas PE & PL, etiamsi non sint constantes revocari possunt, scilicet ob ang: $EPr = LPq$

$LPq = EOC = \omega$, ex vi $Pr = \frac{2Addp}{dt^2}$ nascitur vis in directione $Pl = \frac{2Addp \sin\omega}{dt^2}$ & in directione PE vis $= \frac{2Addp \cos\omega}{dt^2}$. At ex vi $Pq = \frac{2Addq}{dt^2}$ oritur vis in directione $PL = \frac{2Addq \cos\omega}{dt^2}$, & in directione PE vis $= \frac{2Addq \sin\omega}{dt^2}$. Ob utramque ergo conjunctim corpus in directione PE sollicitabitur vi $= \frac{2A}{dt^2}(ddp \cos\omega + ddq \sin\omega)$ & in directione PL vi $= \frac{2A}{dt^2}(ddq \cos\omega - ddp \sin\omega)$. Cum autem sit $OP = x$, & ang $COE = \omega$, erit $p = x \cos\omega$ & $q = x \sin\omega$, unde fit $dp = dx \cos\omega - x\,d\omega \sin\omega$; & $ddp = ddx \cos\omega - 2dx\,d\omega \sin\omega - x\,dd\omega \sin\omega - x\,d\omega^2 \cos\omega$; $dq = dx \sin\omega + x\,d\omega \cos\omega$; & $ddq = ddx \sin\omega + 2dx\,d\omega \cos\omega + x\,dd\omega \cos\omega - x\,d\omega^2 \sin\omega$. Hinc porro sequitur fore

$$ddp \cos\omega + ddq \sin\omega = ddx - x\,d\omega^2$$

$$ddq \cos\omega - ddp \sin\omega = 2dx\,d\omega + x\,dd\omega.$$

Quamobrem corpus in P ab his duabus viribus sollicitetur necesse est, secundum directionem PE vi $= \frac{2Addx - 2Ax\,d\omega^2}{dt^2}$ & secundum directionem PL vi $= \frac{4Adx\,d\omega + 2Ax\,dd\omega}{dt^2}$. Sicque habemus vires, quæ ad motum, quem adesse fingimus, conservandum requiruntur, quæ si viribus actu sollicitantibus

tantibus æquales ponantur, prodibit motus verus tam tubi quam corporis in tubo.

§. XLVIII. Ponamus primo neque tubum neque corpus in tubo ab ulla vi externa sollicitari, qui casus locum habet, si axis rotationis fuerit verticalis tubusque in plano horizontali in gyrum agatur. Postquam enim tam tubo quam corpori ipsi incluso motus quicunque fuerit semel impressus, motum secuturum calculus indicabit. Quoniam enim nulla vis externa adest, omnis motus mutatio a sola pressione corporis in tubum proficiscetur; sit igitur pressio, qua corpus tubum secundum directionem ad eam normalem P L urget $= P$, ita ut vicissim corpus a tubo in directione opposita P l æquali vi P repellatur, quia nulla adest vis in directione PE ex motu corporis sequentes nascentur æquationes:

$$\text{I. } \frac{2Addx - 2Axd\omega^2}{dt^2} = 0 \text{ seu } ddx = xd\omega^2$$

$$\text{\& II. } \frac{4Adxd\omega + 2Axdd\omega}{dt^2} = -P.$$

Deinde vis $PL = P$, qua tubus sollicitatur, momentum respectu axis O est $= Px$, unde oritur hæc æquatio

$$\text{III. } \frac{2Mkkdd\omega}{dt^2} = Px, \text{ seu } \frac{2dd\omega}{dt^2} = \frac{Px}{Mkk}.$$

qui valor in æquatione secunda substitutus dabit:

$$\frac{4Adxd\omega}{dt^2} + \frac{APxx}{Mkk} = -P, \text{ ideoque } P = \frac{-4AMkkdxd\omega}{(Mkk + Axx)dt^2},$$

unde pressio P innotescit. Eliminando autem P, ex æquationibus

tionibus II & tertia resultat hæc:

IV. $4Axdxd\omega + 2Axxdd\omega + 2Mkkdd\omega = 0$

cujus integrale est $Axxd\omega + Mkkd\omega = \text{Const.} = Eadt\sqrt{a}$

unde fit $d\omega = \frac{Eadt\sqrt{a}}{Axx + Mkk}$, qui valor in prima substitutus dat $ddx = \frac{E^2a^3xdt^2}{(Axx + Mkk)^2}$. Multiplicetur hæc æquatio per $2dx$ eritque integrale $dx^2 = \frac{E^2a^3dt^2}{A(Axx + Mkk)} + bdt^2$, unde oritur $dt = \frac{dx\sqrt{A(Axx + Mkk)}}{\sqrt{(bA(Mkk + Axx) - E^2a^3)}}$; hincque porro $d\omega = \frac{Eadx\sqrt{A}}{\sqrt{(Mkk + Axx)(Ab(Mkk + Axx) - E^2a^3)}}$

§. XLIX. Quanquam hoc modo uterque motus facillime definitur, tamen, quia ista æquationum resolutio non commode ad casum pluriuum corporum tubo inclusorum accommodatur, alio modo variabilis x ex calculo excludi potest, quo feliciſſime usus est Celeberrimus Clairaut, qui ad hoc negotium adhibuit principium conservationis virium vivarum. In hunc finem multiplicetur æquatio IV per $d\omega$

$$4Axdxd\omega^2 + 2Axxd\omega dd\omega + 2Mkkd\omega dd\omega = 0.$$

Deinde æquatio prima $ddx - xd\omega^2 = 0$ multiplicetur per $2Adx$ ut prodeat $2Addxddx - 2Axdxd\omega^2 = 0$. Tum hæc ad illam addatur, & proveniet:

$2Addxddx + 2Axdxd\omega^2 + 2Axxd\omega dd\omega + 2Mkkd\omega dd\omega = 0$ quæ integrata dat:

$$Addx^2 + Axxd\omega^2 + Mkkd\omega^2 = Fbdt^2.$$

 hæcque

hæcque complectitur principium conſervationis virium vivarum, nam $A\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{xxd\omega^2}{dt^2}\right)$ dat vim vivam corporis A & $\frac{Mkkd\omega^2}{dt^2}$ vim vivam tubi, quarum ſumma eſt conſtans $=Fb$. Cum jam ex prima æquatione ſit $xd\omega^2=ddx$, erit $Axxd\omega^2=Axddx$, quo valore in illa æquatione ſubſtituto habebitur:

$$A(dx^2+xddx)+Mkkd\omega^2=Fbdt^2.$$

At eſt $dx^2+xddx=d.xdx=\frac{1}{2}dd.xx$, unde erit:

$$\frac{1}{2}dd.Axx+Mkkd\omega^2=Fbdt^2.$$

Æquationis autem quartæ integrale dat $Axx=\frac{Eadt\sqrt{a}}{d\omega}-Mkk$. Sit $d\omega=\frac{dt\sqrt{a}}{v}$, erit $Axx=Eav$, & $\frac{1}{2}dd.Axx=\frac{1}{2}Eaddv$, unde obtinebitur iſta æquatio $\frac{1}{2}Eaddv+\frac{Mkkadt^2}{vv}=Fbdt^2$, quæ ob dt conſtans per dv multiplicata & integrata dat:

$$\frac{1}{2}Eadv^2-\frac{Mkkadt^2}{v}=Fbvdt^2+Gc^2dt^2;$$ ideoque $dt=\frac{dv\sqrt{Eav}}{2\sqrt{(Mkka+Fbvv+Gccv)}}$; $d\omega=\frac{adv\sqrt{E}}{2\sqrt{v(Mkka+Fbvv+Gccv)}}$, & $x=\sqrt{\frac{Eav}{A}}$ unde motus pariter cognoſcitur.

§. L. Sit nunc axis tubi O horizontalis, circa quem tubus cum corpore in plano verticali deſcendat. Sit recta OC horizontalis atque elapſo tempore t tubus pervenerit in ſitum

ſitum OE angulo jam deſcripto $COE = \omega$; corpus autem nunc verſetur in P. Manentibus omnibus denominationibus hactenus adhibitis, ſcilicet maſſa tubi $= M$, ejus momento inertiæ $= Mkk$, & intervallo $OP = x$, ad preſſionem P nunc accedet gravitas tam tubi $= M$ quam corporis $= A$. Cum igitur corpus in directione verticali Pp urgeatur vi $= A$, ob angulum $pPL = \omega$, hinc orietur vis in directione $PE = A \sin\omega$ & in directione $PL = A \cos\omega$. Deinde ſi tubi centrum gravitatis ſtatuatur in G, & intervallum $OG = g$, quia tubus in directione verticali Gg ſollicitatur vi $= M$, hujus vis momentum erit $= Mg \cos\omega$ quod ad motum accelerandum impenditur. Ex his ergo viribus ſequentes obtinebimus æquationes:

$$\text{I.}\quad \frac{2Addx - 2Axd\omega^2}{dt^2} = A \sin\omega$$

$$\text{II.}\quad \frac{4Adxd\omega + 2Axdd\omega}{dt^2} = A \cos\omega - P$$

$$\text{III.}\quad \frac{2Mkkdd\omega}{dt^2} = Mg \cos\omega + Px.$$

Quodſi ex II & III preſſio P eliminetur, habebitur:

$$\text{IV.}\quad \frac{4Axdxd\omega + 2(Axx + Mkk)dd\omega}{dt^2} = Ax\cos\omega + Mg\cos\omega.$$

Multiplicetur hæc æquatio per $d\omega$, prima vero per dx invicemque addantur; & orietur hæc æquatio:

$$\frac{2Addxddx + 2Axdxd\omega^2 + 2Axxd\omega dd\omega + 2Mkkd\omega dd\omega}{dt^2} =$$

Adx

$Adx \sin\omega + Axd\omega \cos\omega + Mg\,d\omega \cos\omega.$

Cujus integrale est:

$$\frac{Adx^2 + Ax^2 d\omega^2 + Mk^2 d\omega^2}{dt^2} = Ax \sin\omega + Mg \sin\omega + Ea$$

quam eandem principium conservationis virium vivarum præbet.

§. LI. Quanquam hæ æquationes non difficilius inveniuntur quam præcedentes, tamen modus ante adhibitus, quo ad motus determinationem pervenimus, hic non succedit, neque etiam patet an ullo alio modo æquatio, quæ non nisi duas variabiles contineat, inde derivari possit. Ad hoc certe insigne analyseos artificium requiretur, quoniam casus alias facillimus sine satis prolixe calculo inde expediri nequit. Casus hic est, si tubus tam inertia quam pondere carere sumatur, tum enim, quia corpus in motu suo nullum obstaculum offendit, æque movebitur, ac si esset prorsus liberum, ideoque parabolam describet, quod quidem nostræ quoque æquationes, si recte tractentur, sequenti modo facillime indicant. Sit enim $M = o$, atque æquationes præcedentes transibunt in has:

I. $2ddx - 2xd\omega^2 = dt^2 \sin\omega$, & ob $P = o$.

II. $4dxd\omega + 2xdd\omega = dt^2 \cos\omega$,

& ultima dat: $dx^2 + xxd\omega^2 = xdt^2 \sin\omega + adt^2$.

Si jam ex prima & secunda eliminetur dt^2 proveniet:

$ddx \cos\omega - xd\omega^2 \cos\omega - 4dxd\omega \sin\omega - xdd\omega \sin\omega = o,$

cujus integrale est:

$dx \cos\omega$

$dx \cos\omega - x d\omega \sin\omega = dt\sqrt{b}$, quæ denuo integrata dat $x \cos\omega = t\sqrt{b} + c$. Nunc multiplicetur prima per $\sin\omega$ & secunda per $\cos\omega$, atque ambæ æquationes addantur; prodibitque:

$$ddx \sin\omega = x d\omega^2 \sin\omega + 2 dx d\omega \cos\omega + x dd\omega \cos\omega = \tfrac{1}{2} dt^2$$

cujus integrale est:

$$dx \sin\omega + x d\omega \cos\omega = \tfrac{1}{2} t dt + dt\sqrt{f}:$$

quæ denuo integrata dat:

$$x \sin\omega = \tfrac{1}{4} tt + t\sqrt{f} + g.$$

At est $x \cos\omega = OQ = p$; & $x \sin\omega = PQ = q$, unde cum sit $p = t\sqrt{b} + c$ & $q = \tfrac{1}{4} tt + t\sqrt{f} + g$, si eliminetur t æquatio inter coordinatas orthogonales reperietur pro parabola, uti rei natura postulat. Hunc casum per se cognitum præcipue ad methodum confirmandam, hic evolvere visum est.

§. LII. Sint nunc in tubo recto, qui adhuc per axem transeat, ad eumque sit normalis plura corpora inclusa, quæ in eo sint mobilia. Habuerit initio tubus situm OE, in quo tria corpora inclusa fuerint in punctis A, B, C quorum massæ iisdem litteris A, B, C exponantur, massa vero tubi sit $= M$, ejusque momentum inertiæ respectu axis O ponatur $= Mkk$. Postquam igitur tam tubo quam corporibus A, B, C motus quicunque fuerit impressus elapso tempore t pervenerit tubus in situm OS, & corpora in P, Q, R. Ponatur angulus $COS = \omega$, & distantiæ $OP = x$, $OQ = y$, & $OR = z$. Posito jam elemento temporis dt constante, eodem ratiocinio,

Tab. II. Fig. 17.

nio, quo §. 46. ſumus uſi, patebit ad accelerationem tubi requiri momentum virium $= \frac{2Mkkdd\omega}{dt^2}$. Ad acceleraciones autem ſingulorum corporum inveniendas ratiocinium §. 47. adhibitum totum negotium conficiet; ex quo apparebit corpus in P ſollicitari debere ſecundum directionem tubi PS vi $= \frac{2Addx - 2Axd\omega^2}{dt^2}$, at ſecundum directionem ad tubum normalem PL vi $= \frac{4Adxd\omega + 2Axdd\omega}{dt^2}$. Simili modo corpus in Q ſollicitabitur ſecundum directionem QS vi $= \frac{2Bddy - 2Byd\omega^2}{dt^2}$, & ſecundum directionem QM vi $= \frac{4Bdyd\omega + 2Bydd\omega}{dt^2}$. Atque tertium corpus in R ſecundum directionem RS ſollicitari debebit vi $= \frac{2Cddz - 2Czd\omega^2}{dt^2}$ & ſecundum directionem RN vi $= \frac{4Cdzd\omega + 2Czdd\omega}{dt^2}$. His autem inventis viribus problema quaſi ſolutum eſt exiſtimandum, cum quæcunque vires tam tubum quam corpora in eo urgeant, eæ his viribus æquivalentes ſint ſtatuendæ; quo facto æquationes reſultantes determinabunt relationes inter variabiles α, x, y, z & t, quibus univerſus motus definietur.

§. LIII. Cum viribus autem externis, quibus forte tubus cum corporibus incluſis ſollicitetur, conjungendæ ſunt preſſio-

pressiones, quas singula corpora in tubum exerunt. Sit igitur pressio corporis P in tubum secundum directionem ad tubum normalem $PL = P$, pressio corporis Q secundum directionem $QM = Q$, & pressio corporis R secundum directionem $RN = R$. Harum igitur virium, cum ad motum tubi accelerandum tendant, momentum erit $= Px + Qy + Rz$. Deinde quia reactio actioni est æqualis, ipsa corpora P, Q, R, secundum directiones oppositas Pl, Qm, Rn urgebuntur viribus P, Q, & R. Quare si nullæ vires externæ præterea adsint, quod evenit si axis fuerit verticalis, tubusque in plano horizontali gyretur, quo casu gravitatis effectus tollitur, prodibunt sequentes æquationes:

I. $\frac{2Addx - 2Axd\omega^2}{dt^2} = 0$; II. $\frac{4Adxd\omega + 2Axddx}{dt^2} = -P$

III. $\frac{2Bddy - 2Byd\omega^2}{dt^2} = 0$; IV. $\frac{4Bdyd\omega + 2Byddx}{dt^2} = -Q$

V. $\frac{2Cddz - 2Czd\omega^2}{dt^2} = 0$; VI. $\frac{4Cdzd\omega + 2Czddx}{dt^2} = -R$

& VII. $\frac{2Mkkdd\omega}{dt^2} = Px + Qy + Rz$.

Hinc ex æquationibus II, IV, VI & VII. pressiones P & Q & R facile excluduntur, prodibit enim hæc æquatio:

VIII. $2Axdxd\omega + 2Bydyd\omega + 2Czdzd\omega + (Mk^2 + Axx + Byy + Czz)$ $dd\omega = 0$, cujus integrale est:

IX. $(Mk^2 + Ax^2 + By^2 + Cz^2)\,d\omega = E\alpha\,dt\sqrt{\alpha}$,

quæ cum æquationibus I, III, & V conjuncta determinationem

nem motus continet. Hæc ultima æquatio complectitur principium quodpiam, quod conservationem motus gyratorii appellare soleo, est enim $\frac{xd\omega}{dt}$ celeritas corporis in P gyratoria, & $\frac{Axd\omega}{dt}$ ejusdem motus gyratorius: unde expressio $\frac{Axxd\omega}{dt}$ commode appellatur momentum motus gyratorii: Quare hæc æquatio indicat perpetuo eandem momentorum motus gyratorii summam conservari.

§. LIV. Multiplicetur æquatio VIII. per $2d\omega$, & prima per $dxdt^2$, III per $dydt^2$, atque subscribantur: $Ad\omega^2(Axdx + Bydy + Czdz) + d\omega ddw(Mk^2 + Ax^2 + By^2 + Cz^2) = 0$

$$2Adxddx - 2Axdxd\omega^2 = 0$$
$$2Bdyddy - 2Bydyd\omega^2 = 0$$
$$2Cdzddz - 2Czdzd\omega^2 = 0$$

Quod si jam hæ æquationes invicem addantur, erit summa:

$$\left.\begin{array}{l} 2Adxddx + 2Bdyddy + 2Cdzddk \\ + 2Axdxd\omega^2 + 2Bydyd\omega^2 + 2Czdzd\omega^2 \\ + 2Axxd\omega dd\omega + 2By^2d\omega dd\omega + 2Czzd\omega dd\omega + 2Mk^2d\omega dd\omega \end{array}\right\} = 0$$

cujus æquationis integrale est:

$$\text{X.}\quad \begin{array}{l} + Adx^2 + Bdy^2 + Cdz^2 \\ + Ax^2d\omega^2 + By^2d\omega^2 + Cz^2d\omega^2 + Mk^2d\omega^2 = Fbdt^2 \end{array}$$

quæ æquatio continet principium conservationis virium vivarum. Est enim $\frac{dx}{dt}$ celeritas corporis A secundum directionem

ctionem PS & $\frac{xd\omega}{dt}$ celeritas corporis ejusdem secundum directionem PL ad PS normalem, unde ejus vera celeritas erit $= \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{xxd\omega^2}{dt^2}\right)}$, ideoque aliunde huic celeritati debita $= \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{xxd\omega^2}{dt^2}$, & vis viva istius corporis $=$ $\frac{Adx^2}{dt^2} + \frac{Axxd\omega^2}{dt^2}$. Simili modo vis viva corporis B erit $=$ $\frac{Bdy^2}{dt^2} + \frac{Byyd\omega^2}{dt^2}$, & corporis C $= \frac{Cdz^2}{dt^2} + \frac{Czzd\omega^2}{dt^2}$. Porro cum cujusvis tubi particulæ ab axe O intervallo $= r$ remotæ celeritas sit $= \frac{rd\omega}{dt}$, ejusdem particulæ, cujus massa sit $= dM$ vis viva erit $= rrdM.\frac{d\omega^2}{dt^2}$; unde totius tubi vis viva $= \frac{d\omega^2}{dt^2}\int rrdM$. At $\int rrdM$, quod complectitur omnes tubi particulas per quadrata distantiarum suarum ab axe multiplicatas, per Mkk expressimus, quamobrem vis viva tubi erit $= \frac{Mkkd\omega^2}{dt^2}$.

§. LV. Istæ autem duæ æquationes differentiales primi gradus, quas elicuimus parum adhuc conferunt ad motum cognoscendum, quoniam plures variabiles continent. Quo igitur æquationem, in qua duæ tantum insint variabiles, obtineamus, methodum primo Celeb. Clairaut secuti resumamus æquationem X:

 Adx

$$\left.\begin{array}{l} Adx^2 + Bdy^2 + Cdz^2 \\ + Ax^2 d\omega^2 + By^2 d\omega^2 + Cz^2 d\omega^2 + Mk^2 d\omega^2 \end{array}\right\} = Fbdt^2$$

Cum jam ex prima æquatione fit $Axd\omega^2 = Addx$, erit $Ax^2 d\omega^2 = Axddx$; similique modo ex æquationibus III & V erit $By^2 d\omega^2 = Byddy$ & $Cz^2 d\omega^2 = Czddz$, qui valores si in æquatione X substituantur, proveniet:

$$\left.\begin{array}{l} Adx^2 + Bdy^2 + Cdz^2 \\ Axddx + Byddy + Czddz \end{array}\right\} = Fbdt^2 - Mk^2 d\omega^2$$

At est $A(dx^2 + xddx) + B(dy^2 + yddy) + C(dz^2 + zddz)$ $= d(Axdx + Bydy + Czdz) = \frac{1}{2} dd(Ax^2 + By^2 + Cz^2)$ ideoque $\frac{1}{2} dd.(Ax^2 + By^2 + Cz^2) = Fbdt^2 - Mk^2 d\omega^2$.

Æquatio vero IX dat:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = \frac{Eadt\sqrt{a}}{d\omega} - Mkk.$$

Ponatur brevitatis gratia $d\omega = \frac{dt\sqrt{a}}{v}$ eritque, $dd.(Ax^2 + By^2 + Cz^2) = Eaddv$; unde fiet $\frac{1}{2} Eaddv = Fbdt^2 - \frac{Mkkadt^2}{v^2}$.

Multiplicetur per dv & ob dt constans integretur, erit:

$$\frac{1}{2} Eadv^2 = Fbvdt^2 + \frac{Mkkadt^2}{v} + Gccdt^2$$

ideoque $dt = \frac{dv\sqrt{Eav}}{2\sqrt{(Mkka + Gccv + Fbvv)}}$; atque

$$d\omega = \frac{adv\sqrt{E}}{2\sqrt{v(Mkka + Gccv + Fbvv)}}.$$

Ad quodvis ergo tempus hinc situs & celeritas tubi definiri potest.

§. LVI.

§. LVI Hinc autem nondum finus & motus corporum ad quodvis tempus constat. Ad hoc in subsidium vocari debent æquationes I, III, & V, quæ valores interim x, y & z, definient. Cum enim ex æquatione prima sit $ddu = udu^2$; ponatur $u = e^{\int u dt}$, erit $ddu = e^{\int u dt}(du + uudt^2)dt$, quibus valoribus substitutis habebitur, $du + uudt = \frac{ddu}{dt} = \frac{udt}{v}$, ubi si loco dt valor modo inventus substituatur fiet

$$du = \left(\frac{u}{vv} - uu\right)\frac{dv\sqrt{P.uv}}{2\sqrt{(Ddu + (Ccv + Bbv)v)}}$$

A resolutione ergo hujus æquationis pendet determinatio tam loci quam celeritatis corporis A in P; similes vero æquationes pro definiendis y & z reperiuntur, earumque ergo valores tantum ratione constantium, quæ per integrationem istius æquationis ingrediuntur, different. Manifestum autem est hanc æquationem esse casum æquationis quondam a Comite Riccato propositæ, quæ in hac forma continetur, $dy + yydx = Xdx$ denotante X functionem quamcunque ipsius x. Etsi autem hæc æquatio pluribus casibus separationem variabilium atque adeo integrationem admittit, tamen difficulter hæc æquatio dijudicatur, utrum ad eiusmodi casum reduci queat nec ne? Interim tamen observari hanc æquationem $dy + yydx = Xdx$ generatim ope motus tractorii construi posse, unde etiam per motum tractorium loca corporum A, B, C ad quodvis tempus assignari poterunt. Ceterum quoniam ista methodus hoc laborat incommodo, ut ad totidem

hujusmodi æquationes resolutu difficiles, quot sunt corpora tubo inclusa, perducat, alia methodo, qua antequam illa a Celeb. Clairaut mecum erat communicata, usus eram, resolutionem tentabo.

§. LVII. Considero nimirum primum æquationes I, III & V, quæ ad formam simplicissimam reductæ sunt,

$$ddx = xd\omega^2;\ ddy = yd\omega^2;\ ddz = zd\omega^2,$$

quæ cum inter se sint perfecte similes, manifestum est, si una earum esset resoluta, reliquas omnes quotquot fuerint simul resolutionem esse nactas. Assumo igitur æquationem similem $dds = sd\omega^2$, ex qua pono valorem ipsius s jam esse cognitum: nunc pono $x = Vs$, erit $ddx = Vdds + 2dVds + sddV = Vsd\omega^2$. At æquatio $dds = sd\omega^2$ per V multiplicata dat $Vdds = Vsd\omega^2$, quæ a priori subtracta relinquit $2dVds + sddV = 0$, cujus per s multiplicatæ integrale est $ssdV = Kds$ & $V = L + K\int\frac{dt}{ss}$, unde fit $x = Ls + Ks\int\frac{dt}{ss}$. Simili modo quantitates y & z per s exprimentur, eorumque valores tantum ratione constantium discrepabunt. Erit ergo:

$$x = is + \lambda s\int\frac{dt}{ss}$$

$$y = ms + \mu s\int\frac{dt}{ss}$$

$$z = ns + \nu s\int\frac{dt}{ss}.$$

ubi

ubi constantes tam ex situ corporum initiali, quam ex eorum celeritatibus primum impressis definiri debent. Ponamus enim initio fuisse $OA = a$; $OB = b$; & $OC = c$; itemque horum corporum celeritates fuisse secundum directionem tubi OC, primi $A = \alpha$, secundi $B = \beta$, & tertii $C = \gamma$; tum si integrale $\int \frac{dt}{ss}$ ita capiatur, ut evanescat posito $s = o$, atque casu $s = o$ fiat $s = 1$ & $\frac{ds}{dt} = o$, erit $a = i$, $b = m$; $c = n$; & $\alpha = \lambda$, $\beta = \mu$, & $\gamma = \nu$, ideoque hinc constantibus definitis erit

$$x = as + \alpha s \int \frac{dt}{ss}.$$

$$y = bs + \beta s \int \frac{dt}{ss}$$

$$z = cs + \gamma s \int \frac{dt}{ss}.$$

Ex æquatione ergo $dds = sd\omega^2$ per duplicem integrationem s ita debet definiri, ut posito $s = o$ & $\omega = o$ fiat $s = 1$ & $\frac{ds}{dt} = o$.

§. LVIII. Ponamus signorum integralium exterminandorum gratia $\int \frac{dt}{ss} = u$, fietque $dt = ssdu$; &

$$x = as + \alpha su$$
$$y = bs + \beta su$$
$$z = cs + \gamma su$$

& cum in æquatione $dds = sd\omega^2$ differentiale dt sit sumtum constans, erit hanc hypothesin exuendo:

$d.\frac{ds}{dt} = \frac{s\,d\omega^2}{dt}$ seu $d.\frac{ds}{s\,s\,du} = \frac{d\omega^2}{s\,d\,u}$; & posito $s = \frac{1}{r}$, ut sit

$dt = \frac{du}{s\,r}$, &

$x = \frac{a + \alpha u}{r}$; $y = \frac{b + \beta u}{r}$; $z = \frac{c + \gamma u}{r}$, fiet

$d.\frac{dr}{du} + \frac{r\,d\omega^2}{du} = 0$; quæ æquatio posito elemento du constante transit in $ddr + r\,d\omega^2 = 0$.

Cum jam sit ex æquatione IX, si loco constantis a ibi adhibitæ scribatur f.

$$(Mk^2 + Ax^2 + By^2 + Cz^2)\frac{d\omega}{dt} = Ef\sqrt{f}.$$

ita ut si initio motus celeritas tubi angularis $\frac{d\omega}{dt}$ ponatur $= \theta$, fit:

$$Ef\sqrt{f} = (Mk^2 + Aa^2 + Bb^2 + Cc^2)\,\theta,$$

erit $(Mk^2 + Ax^2 + By^2 + Cz^2)\frac{r\,r\,d\omega}{du} = E\,f\sqrt{f}.$

substituantur nunc pro x, y, z valores ante inventi, eritque

$$\frac{Ef\,du\sqrt{f}}{d\omega} - Mk^2r^2 = \begin{array}{l} +Aa^2 + 2Aa\alpha u + A\alpha^2 u^2 \\ +Bb^2 + 2Bb\beta u + B\beta^2 u^2 \\ +Cc^2 + 2Cc\gamma u + C\gamma^2 u^2 \end{array}$$

Ponatur $Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 = F$

$Aa\alpha + Bb\beta + Cc\gamma = G$

$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = H$

ut sit $Ef\sqrt{f} = (F + Mkk)\,\theta$ eritque

$$\frac{(F + Mkk)\,\theta\,du}{d\omega} = Mk^2r^2 + F + 2Gu + Huu,$$

quæ

quæ æquatio cum hac $ddr + rd\omega^2 = 0$ conjuncta totam ſolutionem complectitur. Eliminato autem $d\omega$, totum negotium ad reſolutionem ſequentis æquationis perducitur

$$\frac{ddr}{r} + \frac{(F+Mkk)^2\theta^2 du^2}{(Mk^2r^2+F+2Gu+Huu)^2} = 0.$$

§. LIX. Æquatio hæc differentialis ſecundi gradus nullo artificio adhuc uſitato ad differentialem primi gradus reduci ideoque multo minus integrari poſſe videtur. Quodſi autem æquatio ſuperior decima, quæ principium conſervationis virium vivarum complectitur in ſubſidium vocetur, æquatio differentialis primi gradus, quæ illius ſit integralis ſponte reſultat. Determinata autem conſtante Fb ibi adhibita ſecundum ſtatum motus initialis hic aſſumti erit:

$$\left.\begin{array}{l} Adx^2 + Bdy^2 + Cdz^2 \\ +(Ax^2+By^2+Cz^2)d\omega^2 + Mk^2 d\omega^2 \end{array}\right\} = (H+F\theta\theta+Mk^2\theta^2)dt^2$$

Quæ ob $dt^2 = \frac{du^2}{r^4}$ &

$$dx = \frac{-udr}{rr} + \frac{\alpha du}{r} - \frac{\alpha udr}{rr}$$

$$dy = \frac{-bdr}{rr} + \frac{\beta du}{r} - \frac{\beta udr}{rr}$$

$$dz = \frac{-cdr}{rr} + \frac{\gamma du}{r} - \frac{\gamma udr}{rr}$$

transmutabitur in ſequentem:

$$\frac{Fdr^2}{r^4} - \frac{2Gdudr}{r^3} + \frac{2Gudr^2}{r^4} + \frac{Hdu^2}{r^2} - \frac{2Hududr}{r^3} + \frac{Hu^2dr^2}{r^4}$$

 +(F

$$+(F+2Gu+Huu)\frac{d\omega^2}{rr}+Mk^2d\omega^2=\frac{Hdu^2}{r^4}+\frac{(F+Mk^2)\theta\theta du^2}{r^4}$$

Multiplicetur hæc æquatio per rr & cum sit:

$$d\omega^2=\frac{(F+Mkk)^2\theta\theta du^2}{(Mk^2r^2+F+2Gu+Huu)^2}$$ erit

$$\frac{(F+Mk^2)^2\theta^2du^2}{Mk^2r^2+F+2Gu+Hu^2}+\frac{dr^2}{r^2}(F+2Gu+Hu^2)-\frac{2dudr}{r}(G+Hu)$$

$$+Hdu^2=\frac{Hdu^2}{rr}+\frac{(F+Mk^2)\theta^2du^2}{rr},$$

quæ est propterea æquatio integralis illius, quam ante invenimus:

$$\frac{ddr}{r}+\frac{(F+Mkk)^2\theta^2du^2}{(Mk^2r^2+F+2Gu+Huu)^2}=0.$$

Si enim illa differentietur posito du constante, & loco ddr valor ex hac æquatione substituatur, tum ipsa æquatio prior per $\frac{-2dr}{r}$ multiplicata resultat.

§. LX. Ex hoc ergo casu intelligitur, quanta adhuc incrementa in methodo integrali desiderentur, cum nullum etiamnum artificium inventum sit, quo ista æquatio integralis elici potuisset: &, cum tractatio problematis mechanici ad hanc observationem perduxerit, perspicuum est, hujusmodi speculationes, etiamsi per se nullius usus essent, tamen ipsi analysi promovendæ & amplificandæ mirifice inservire. Quanquam autem resolutionem problematis ad duplicem æquationem differentialem primi gradus revocavimus, tamen

neutra

neutra ita est comparata, ut ipsum motum inde definiri liceret, nisi amplitudo problematis restringatur. Quodsi enim inertia tubi evanescere ponatur, tum posteriori modo ex æquatione differentiali secunda motus cognosci poterit, dum ejus integralis æquatio, quam invenimus, nihil omnino prodest: prior autem methodus, etsi motum tubi facile ostendit, tamen ad motum corporum determinandum non æque videtur apta, atque altera. Qui casus, cum ad insignia analysis mysteria aditum parare queat, dignus videtur ut ejus solutionem hic fusius exponamus. Quaritur igitur motus plurium corporum tubo recto, qui ad axem gyrationis sit perpendicularis, inclusorum, dum nullæ potentiæ externæ urgent, atque simul ipsa tubi massa evanescit. Hoc tamen non obstante tubus rigiditatem servare censendus est, qua efficitur, ut corpora perpetuo in linea recta contineantur. Hancque ob causam, etsi unicum corpus, si hujusmodi tubo est inclusum, nullam inde alterationem patitur, neque ullam pressionem exerit, tamen pro pluribus corporibus longe alia est ratio, qua fit ut determinatio motus satis molestum calculum, variaque singularia artificia requirat, quæ pluribus aliis indagandis ansam præbere queant.

§. XXI. Sit igitur massa tubi $M = 0$, atque æquatio differentio-differentialis abibit in hanc:

$$\frac{ddr}{r} + \frac{F^2 \theta^2 du^2}{(F + 2Gu + Hu^2)^2} = 0.$$

 Pona-

Ponatur nunc $r = e^{\int v du}$, erit $\frac{ddr}{r} = dv du + vv du^2$; quo valore substituto emerget æquatio primi gradus:

$$dv + vv du + \frac{F^2 \theta^2 du}{(F + 2Gu + Hu^2)^2} = 0.$$

quæ si integrale algebraicum habeat, erit hujusmodi

$$v = \frac{\lambda + \mu u}{F + 2Gu + Huu}$$

unde fit $dv = \frac{\mu F du - \mu Huu du - 2\lambda G du - 2\lambda Hu du}{(F + 2Gu + Huu)^2}$

His valoribus substitutis erit:

$$\begin{aligned} &+ \mu F - 2\lambda Hu - \mu Huu \\ &- 2\lambda G + 2\lambda \mu u + \mu^2 uu = 0 \\ &+ \lambda\lambda \\ &+ F^2 \theta^2. \end{aligned}$$

Duabus hic conditionibus satisfit ponendo $\mu = H$; tumque porro reperietur: $\lambda = G \pm \sqrt{(G^2 - FH - F^2\theta^2)}$. At ex formulis supra datis patet esse $G^2 < FH$, ideoque hic ipsius λ valor erit imaginarius. Cum ergo sit

$$v = \frac{\lambda + Hu}{F + 2Gu + Huu} \text{ erit}$$

$$\int v du = l\sqrt{(F + 2Gu + Huu)} \pm \int \frac{du\sqrt{(G^2 - FH - F^2\theta^2)}}{F + 2Gu + Huu}$$

Porro autem habemus $d\omega = \frac{F\theta du}{F + 2Gu + Huu}$, unde fit

$$\int v du = l\sqrt{(F + 2Gu + Huu)} \pm \frac{\omega\sqrt{(G^2 - FH - F^2\theta^2)}}{F\theta}.$$

At

At integratio dat $\omega = \frac{F\theta}{\sqrt{(FH-GG)}} A \text{ tag. } \frac{t\sqrt{(FH-GG)}}{F+Gu}$.

Hinc fit $\frac{u\sqrt{(FH-GG)}}{F+Gu} = \text{tag. } \frac{\omega\sqrt{(FH-GG)}}{F\theta}$, quæ æquatio, cum sit $FH > GG$ est realis.

§. LXII. Cum igitur ex variabili ω commode definitur variabilis u, loco ipsius u in calculum introducamus ω, quippe quæ ad motum quæsitum immediate refertur. Ponatur ergo brevitatis causa $\frac{\sqrt{(FH-GG)}}{F\theta} = m$, ut fit $\sqrt{(FH-GG)} = mF\theta$, eritque

$$\frac{mF\theta u}{F+Gu} = \text{tag. } m\omega \;\&\; u = \frac{F \text{ tag. } m\omega}{mF\theta - G \text{ tag. } m\omega}$$

atque $\sqrt{(F+2Gu+Huu)} = \frac{mF\theta \text{ sec. } m\omega \cdot \sqrt{F}}{mF - G \text{ tag. } m\omega}$

sive $u = \frac{F \text{ sin } m\omega}{mF\theta \text{ cos } m\omega - G \text{ sin } m\omega}$ &

$$\sqrt{(F+2Gu+Huu)} = \frac{mF\theta\sqrt{F}}{mF\theta \text{ cos } m\omega - G \text{ sin } m\omega}$$

Hinc ergo erit ob $\sqrt{(G^2-FH-F^2\theta^2)} = F\theta\sqrt{(-m^2-1)}$

$$\int v\,du = l\frac{mF\theta\sqrt{F}}{mF\theta \text{ cos } m\omega - G \text{ sin } m\omega} + \omega\sqrt{(-m^2-1)}$$

$$\& \; r = e^{\pm\omega\sqrt{(-m^2-1)}} \frac{mF\theta\sqrt{F}}{mF\theta \text{ cos } m\omega - G \text{ sin } m\omega}.$$

Cum igitur duplicem habeamus valorem pro r, ex iis obtinebimus valorem completum æquationi differentio-differentiali satisfacientem:

$r =$

$$r = \frac{m F \theta \sqrt{F}}{m F \theta \cos m\omega - G \sin m\omega}\left(\frac{(\mu+\nu\sqrt{-1})e^{\omega\sqrt{(-m^2-1)}}}{2} + \frac{(\mu-\nu\sqrt{-1})e^{-\omega\sqrt{(-m^2-1)}}}{2}\right)$$

ubi si exponentialia hæc imaginaria ad quadraturam circuli reducantur fiet:

$$r = \frac{m F \theta \sqrt{F}}{m F \theta \cos m\omega - G \sin m\omega}\left(\mu \cos\omega\sqrt{(m^2+1)} - \nu \sin\omega\sqrt{(m^2+1)}\right)$$

& $s = \frac{m F \theta \cos m\omega - G \sin m\omega}{(\mu \cos\omega\sqrt{(m^2+1)} - \nu \sin\omega\sqrt{(m^2+1)})\, m F \theta \sqrt{F}}$, ubi cum posito $\omega = 0$ debeat esse $s = r = 1$, fiet $\mu = \frac{1}{\sqrt{F}}$, & quia eodem casu esse oportet $ds = 0$, erit $\nu = \frac{G}{F\theta\sqrt{F(m^2+1)}}$; ideoque

$$s = \frac{(m F \theta \cos m\omega - G \sin m\omega)\sqrt{(mm+1)}}{m F \theta \sqrt{(m^2+1)}.\ \cos\omega\sqrt{(mm+1)} - m G \sin\omega\sqrt{(mm+1)}}.$$

§. LXIII. Ponamus brevitatis gratia $\sqrt{(mm+1)} = n$ eriqueque

$$s = \frac{n(m F \theta \cos m\omega - G \sin m\omega)}{m(n F \theta \cos n\omega - G \sin n\omega)}.$$

Jam cum $\alpha = \frac{F \sin m\omega}{m F \theta \cos m\omega - G \sin m\omega}$ erit

$$\alpha + \alpha\, n = \frac{m F \theta\, \alpha \cos m\omega + (F\alpha - G\alpha) \sin m\omega}{m F \theta \cos m\omega - G \sin m\omega}.$$

Quare cum sit $x = \alpha s + \alpha s n = s(\alpha + \alpha n)$ habebitur

$$x = \frac{n(m F \theta\, \alpha \cos m\omega + (F\alpha - G\alpha) \sin m\omega)}{m(F \theta \cos n\omega - G \sin n\omega)}$$ similiterque

$$y = \frac{n(m F \theta\, \beta \cos m\omega + (F\beta - G\beta) \sin m\omega)}{m(n F \theta \cos n\omega - G \sin n\omega)}.$$

$z =$

$$z = \frac{n(mF\,s\,c\,\mathrm{cos}\,m\omega + (F\gamma - G\,c)\,\mathrm{sin}\,m\omega)}{m(n\,F\,s\,\mathrm{cos}\,n\omega - G\,\mathrm{sin}\,n\omega)}$$

Denique cum fit $du = \frac{m^2 F^2\,s\,d\omega}{(mF\,s\,\mathrm{cos}\,m\omega - G\,\mathrm{sin}\,m\omega)^2}$ ob $ds = s\,s\,du$ erit

$$ds = \frac{m\,m\,F^3\,s\,d\omega}{(mF\,s\,\mathrm{cos}\,m\omega - G\,\mathrm{sin}\,m\omega^2)} \text{ \& integrando}$$

$$s = \frac{F\,\mathrm{sin}\,m\,\omega}{m\,F\,s\,\mathrm{cos}\,m\omega - G\,\mathrm{sin}\,m\,\omega}.$$

Cognito ergo motu initiali dum rubus firum tenet AP, existentibus $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, & celeritatibus corporum secundum rubi longitudinem α, β, γ, iremque celeritate rubi angulari $= s$, dum ipsa rubi massa evanescens assumitur; denotant:

$$F = Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 \qquad m = \frac{\sqrt{(FH - GG)}}{F\,s}$$

$$G = Aa\alpha + Bb\beta + Cc\gamma \quad \& \quad n = \sqrt{(mm + 1)}$$
$$H = A\alpha\alpha + B\beta\beta + C\gamma\gamma$$

Hincque ergo ad quodvis tempus t tam firus rubi seu angulus $EOS = \omega$, & distantiae corporum ab axe $AP = x$, $AQ = y$, $AR = z$ definiri poterunt. Hoc iaque modo iste casus alias difficillimus per solos sinus & cosinus duorum angulorum $m\omega$ & $n\omega$ resolvitur.

§. LXIV. Quodsi autem inertia rubi non evanescat, casus quoque datur, quo ex superioribus aequationibus motum definire licet. Hic casus est, si corpora A, B, C initio vel nullum habuerint motum secundum rubi longitudinem, vel si

eorum

eorum celeritates α, β, γ ipsis distantiis a, b, c sint proportionales; tum enim uti ex §. 58. patet distantiæ x, y & z eandem perpetuo proportionem tenebunt, eritque $y = \frac{b}{a} x$ & $z = \frac{c}{a} x$; atque ob $\beta = \frac{b}{a} \alpha$ & $\gamma = \frac{c}{a} \alpha$, habebitur:

$F = Aa^2 + Bb^2 + Cc^2$; $G = \frac{\alpha}{a}(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2)$ & $H = \frac{\alpha^2}{a^2}(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2)$. Hincque æquatio IX transibit in hanc:

$$\frac{(F + Mkk)\,\theta\, dt}{d\omega} = Mk^2 + \frac{Fx^2}{a^2}.$$

æquatio vero decima abibit in hanc:

$$(H + F\theta\theta + Mk^2\theta^2)\, dt^2 = \frac{F dx^2}{a^2} + \frac{Fx^2 d\omega^2}{a^2} + Mk^2 d\omega^2 = \left(\frac{F\alpha^2}{a^2} + F\theta^2 + Mk^2\theta^2\right) dt^2 \text{ ob } H = \frac{F\alpha^2}{a^2}.$$

Ex priore autem est $d\omega^2 = \frac{a^4 (F + Mkk)^2 \theta \cdot dt^2}{(Fx^2 + Mk^2 a^2)^2}$, quo valore in posteriori substituto erit:

$$(F\alpha^2 + Fa^2\theta^2 + Mk^2 a^2 \theta^2)\, dt^2 = F dx^2 + \frac{a^4 (F + Mk^2)^2 \theta^2 dt^2}{Fx^2 + Mk^2 a^2}$$

ex qua obtinetur:

$$dt = \frac{dx \sqrt{F(Fx^2 + Mk^2 a^2)}}{\sqrt{(F^2\alpha^2 x^2 + F^2 a^2 \theta^2 x^2 + FMk^2 a^2 \theta^2 x^2 + FMk^2 a^2 \alpha^2 - F^2 a^4 \theta^2 - FMk^2 a^4 \theta^2)}},$$

seu

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{(\alpha^2 + a^2\theta^2 (xx - aa)(F - Mk^2) : (Fxx + Mk^2 a^2))}}$$

Sic igitur relatio inter t & x innotescit, qua inventa ad datum

datum tempus t simul distantiæ y & z cognoscuntur. Denique situs tubi reperietur ex hac æquatione

$$d\omega = \frac{aa(F+Mkk)\theta\, dt}{Fxx + Mk^2a^2}.$$

§. LXV. Sit jam circa axem ad planum tabulæ in O normalem tubus rectus DS mobilis, qui in plano ad axem normali sit situs, in eoque inclusum sit corpus P, cujus massa $= A$, massa vero tubi sit $= M$, ejusque momentum inertiæ ad axem O relatum $= Mkk$. Quoniam tubus non per axem transit, in eum ex O ducatur perpendicularis OD, voceturque $OD = a$. Initio autem tubus tenuerit situm rectæ OE parallelum; nunc autem elapso tempore t habeat situm DS, ita ut, ducta DR ipsi OE parallela jam angulum RDS motu angulari descripserit. Sit iste angulus RDS $= \omega$; & hoc tempore corpus versetur in P, unde ad OE demittatur perpendiculum PQ, voceturque $OQ = p$, $PQ = q$, ita ut p & q sint coordinatæ ad lineam, quam corpus P motu suo vero describit; atque producta QP in q, ductaque Pp rectæ OE parallela ad motum corporis conservandum necesse erit, ut id sollicitetur secundum directionem Pp vi $= \frac{2A\,ddp}{dt^2}$, & secundum directionem Pq vi $= \frac{2A\,ddy}{dt^2}$ sumto dt constante. Vocetur jam variabilis $DP = x$, & ducta OP sit $OP = \sqrt{(aa+xx)} = z$, erit ob $PDR = \omega$, $PR = x \sin\omega$ & $DR = x \cos\omega$. Tum ducta OF in DR normali, ob DOF $= \omega$

Tab. III. Fig. 18.

$= \omega$ erit $DF = a \sin \omega$ & $OF = a \cos \omega$; ex quibus efficitur $OQ = p = x \cos \omega - a \sin \omega$ & $PQ = x \sin \omega + a \cos \omega = q$, eritque propterea:

$$dp = dx \cos \omega - x d\omega \sin \omega - a d\omega \cos \omega$$

$$dq = dx \sin \omega + x d\omega \cos \omega - a d\omega \sin \omega$$

$$ddp = ddx \cos \omega - 2 dx d\omega \sin \omega - x ddw \sin \omega - x d\omega^2 \cos \omega - a ddw \cos \omega + a d\omega^2 \sin \omega$$

$$ddq = ddx \sin \omega + 2 dx d\omega \cos \omega + x ddw \cos \omega - x d\omega^2 \sin \omega - a ddw \sin \omega - a d\omega^2 \cos \omega$$

Hinc erit: $p \cos \omega + q \sin \omega = x$; & $q \cos \omega - p \sin \omega = a$ atque

$$dp \cos \omega + dq \sin \omega = dx = a d\omega \qquad ddp \cos \omega + ddq \sin \omega = ddx - x d\omega^2 - a ddw$$

$$dq \cos \omega - dp \sin \omega = x d\omega \qquad ddq \cos \omega - ddp \sin \omega = 2 dx d\omega + x ddw - a d\omega^2.$$

§. LXVI. Si jam istæ vires ad directionem tum ipsius tubi DS tum rectæ Mm ad eum normalis reducantur, ob ang: $SPp = MPq = \omega$, ex vi $Pp = \frac{2A ddp}{dt^2}$ oritur vis in directione $PS = \frac{2A ddp \cos \omega}{dt^2}$, & in directione Pm vis $= \frac{2A ddp \sin \omega}{dt^2}$. Simili modo ex vi $Pq = \frac{2A ddq}{dt^2}$ resultat in directione PS vis $= \frac{2A ddq \sin \omega}{dt^2}$ & in directione PM vis $= \frac{2A ddq \cos \omega}{dt^2}$; unde necesse est ut corpus in P sollicitetur secundum directionem tubi PS vi $= \frac{2A}{dt^2}(ddp \cos \omega + ddq \sin \omega) =$

$2A(ddx$

$\frac{2A(ddx - xd\omega^2 - a\,dd\omega)}{dt^2}$ & in directione PM vi $= \frac{2A}{dt^2}$ $(ddq \cos\omega - ddp \sin\omega) = \frac{2A(2dxd\omega + xdd\omega - ad\omega^2)}{dt^2}$.

Poterunt etiam, si ad rectam OP normalis ducatur Ll, vires istæ sollicitantes revocari ad directiones Pπ & PL: cum enim sit sin SPπ = sin MPL $= \frac{a}{z}$ & cos SPπ = cos MPL $= \frac{x}{z}$, ex vi PS oritur vis in directione P$\pi = \frac{2Ax}{2dt^2}(ddx - xd\omega^2 - add\omega)$ & in directione P$l = \frac{2Aa}{2dt^2}(ddx - xd\omega^2 - add\omega)$. Deinde autem ex vi PM orietur vis in directione P$\pi = \frac{2Aa}{2dt^2}(2dxd\omega + xdd\omega - ad\omega^2)$ & in directione PL $= \frac{2Ax}{2dt^2}(2dxd\omega + xdd\omega - ad\omega^2)$. Hinc colligendo vis requiretur corpus directe ab axe O secundum Pπ avellens $= \frac{2A}{2dt^2}(xddx + 2adxd\omega - (aa + xx)d\omega^2)$; tum vero altera quæ corpus in directione PL ad illam normali urgeat $= \frac{2A}{2dt^2}(2xdxd\omega - addx + (aa + xx)dd\omega)$. His igitur viribus cognitis, quæ ad motum conservandum requiruntur, facile est pro quovis casu, quando vires sollicitantes dantur, motum definire.

§. LXVII. Ponamus neque in tubum neque in corpus ullas vires externas agere, atque adeo motum utriusque a

 sola

ſola preſſione mutua affici. Quæ quoniam ad tubum eſt normalis, ponamus vim, qua tubus a corpore in directione ad tubum D S normali P M ſollicitatur eſſe $= P$, atque ipſum corpus a tubo reprimetur ſecundum directionem P m vi $= P$. Vis igitur tubum accelerantis momentum erit $= P$. $DP = Px$, ſupra autem jam invenimus ad hunc motum accelerandum requiri momentum virium $= \frac{2Mkkddw}{dt^2}$; unde obtinemus hanc æquationem: $\frac{2Mkkddw}{dt^2} = Px$. Deinde ſi vim, qua corpus urgetur, comparemus cum viribus, quas ante invenimus ſecundum directiones P S & P M, nanciſcemur has æquationes:

$$\frac{2Addx - 2Axdw^2 - 2Addw}{dt^2} = 0$$

$$\frac{4Adxdw + 2Axddw - 2Adw^2}{dt^2} = -P.$$

Quodſi ex hac poſtrema & prima preſſio P eliminetur prodibit:

$$2Axdxdw + A\ddot{x}xddw - Aaxdw^2 + Mkkddw = 0$$

ſecunda autem æquatio tranſit in hanc:

$$Addx - Axdw^2 - Addw = 0,$$

quæ per a multiplicata & ab illa ſubtracta relinquit:

$$2Axdxdw + A(aa + xx)ddw - Addx + Mkkddw = 0,$$

cujus integrale eſt: $A(aa + xx)dw - Adx + Mkkdw = EfdtVf$.

Deinde ſi hæc per dw & prior per dx multiplicetur ambæque addantur, habebitur:

Adx

$$A\,l x\,ddx + A\,x\,dx\,d\omega^2 + A(aa + xx)\,d\omega\,ddd\omega - A\,a\,d\omega\,ddx$$
$$- A\,a\,dx\,ddd\omega + M k^2\,d\omega\,ddd\omega = 0.$$

Cujus integrale est:

$$A\,dx^2 + A(aa + xx)\,d\omega^2 - 2A\,a\,d\omega\,dx + M k^2\,d\omega^2 = F g\,dt^2.$$

Ab hac æquatione subtrahatur prior integralis per $d\omega$ multiplicata, eritque $A\,dx^2 - A\,a\,dx\,d\omega = F g\,dt^2 - E f\,d\omega\,dt\,V f$. Eliminato ergo $d\omega$ orietur æquatio inter x & dt, quæ facile resolvitur.

§. LXVIII. Consideremus nunc tubum curvilineum O P S, qui quidem in plano ad axem O normali gyretur, cujus massa sit $= M$ & momentum inertiæ $= M k k$, in eoque inclusum sit corpus P, cujus massa $= A$. Quo igitur hujus corporis motum dijudicare queamus, eum ad directiones fixas reduci oportet, quoniam leges motus hujusmodi directiones respiciunt. Referatur ergo curvedo tubi O P S ad rectam O V, quæ cum ipso tubo circa axem gyretur, & initio quidem temporis t hæc recta O V situm tenuerit O Q, ita ut interea motu angulari cum tubo descripserit angulum $QOV = \omega$, unde virium momentum ad accelerationem tubi requisitum erit $= \frac{2Mkk\,d\omega}{dt^2}$ sumto dt constante. Ad hanc igitur rectam O Q locus corporis referatur, sitque demisso P Q in O Q perpendiculo $OQ = p$ & $QP = q$. Quare ductis Pp & Pq ipsis O Q & Q P parallelis corpus P sollicitari debet in directione Pp vi $= \frac{2A\,ddp}{dt^2}$, & in directione Pq vi $=$

Tab. III. Fig. 19.

$2A\,ddq$

$\frac{2Addq}{dt^2}$. Jam natura curvæ OPS exprimatur æquatione inter coordinatas $OV = u$ & $VP = v$, hujusmodi enim æquatio, quia recta OV cum tubo æqualiter promoveri ponitur, modo consueto naturam curvæ exhibebit. At ob angulum $QOV = \omega$ erit $OQ = p = u \cos\omega + v \sin\omega$ & $PQ = q = u \sin\omega - v \cos\omega$, hinc erit

$$dp = du \cos\omega - u d\omega \sin\omega + dv \sin\omega + v d\omega \cos\omega$$

$$dq = du \sin\omega + u d\omega \cos\omega - dv \cos\omega + v d\omega \sin\omega$$

$$ddp = ddu \cos\omega - 2du d\omega \sin\omega - u d\omega^2 \cos\omega - u ddu \sin\omega$$
$$+ ddv \sin\omega + 2dv d\omega \cos\omega - v d\omega^2 \sin\omega + v ddu \cos\omega$$

$$ddq = ddu \sin\omega + 2du d\omega \cos\omega - u d\omega^2 \sin\omega + u ddu \cos\omega$$
$$- ddv \cos\omega + 2dv d\omega \sin\omega + v d\omega^2 \cos\omega + v ddu \sin\omega.$$

§. LXIX. Si jam vires ante inventæ ad directiones Pv & Pu his ordinatis OV & PV parallelas referantur, invenietur vis in directione Pv sollicitans $= \frac{2A}{dt^2}(ddp \cos\omega + ddq \sin\omega)$

$$= \frac{2A}{dt^2}(ddu - u d\omega^2 + 2dv d\omega + v ddu)$$

& vis in directione $Pu = \frac{2A}{dt^2}(ddp \sin\omega - ddq \cos\omega) =$

$$\frac{2A}{dt^2}(-2du d\omega - u ddu + ddv - v d\omega^2).$$

Ducatur jam ad curvam normalis MPm, atque hæ vires referantur ad directiones PM & PS, reperieturque si elementum curvæ $\sqrt{(du^2 + dv^2)} = ds$ ponatur, ob $\sin SPv = \frac{dv}{ds}$

& cos

& cof SPv $= \frac{du}{ds}$, vis in directione PS $= \frac{2A}{dt^2 ds}(dudu + dvddv + ddu(vdu - udv) - du^2(vdv + udu))$ & vis in directione

PM $= \frac{2A}{dt^2 ds}(dvddu - duddv + 2du(dv^2 + du^2) + ddu(vdv + vdu) + du^2(vdu - udv))$. Si jam ducatur ad curvam in P tangens PT in eamque ex O perpendicularis OT vocetur PT $= x$; OT $= y$, & recta OP $= \sqrt{(xx + yy)} = z$; erit $\frac{2dz}{x} = ds = \sqrt{(dv^2 + du^2)}$, iemque $zz = uu + v^2$, unde fit $vdv + udu = zdz$, & $dvddv + duddu = dzddz$. Deinde si tangent PT rectam OV in X secet erit VX $= \frac{vdu}{dv}$, PX $= \frac{vds}{dv}$, porroque OX $= \frac{udv - vdu}{dv}$ & hinc OT $= y = \frac{udv - vdu}{ds}$ & TX $= \frac{udvdu - vdu^2}{dvds}$. Ex quibus colligitur PT $= x = \frac{vdv + udu}{ds}$; atque si radius curvaturæ PR statuatur $= r$ erit $\frac{ds^3}{dudv - dvddu} = r = \frac{2dz}{dy}$, & $dudv - dvddu = \frac{ds^3}{r} = \frac{dyds^3}{2dz} = \frac{dyds^2}{x}$. His valoribus substitutis, sicque u & v exclusis erit vis PS $= \frac{2A}{dt^2}(dds - yddw - \frac{2dzdw^2}{ds}) = \frac{2A}{dt^2}(dds - yddw - xdw^2)$; vis PM $= \frac{2A}{dt^2}(\frac{-dydt}{x}$

$+ 2ds$

$+2dsd\omega+\frac{2dzddw}{ds}-ydw^2)=\frac{2A}{ds^2}(\frac{-dydz}{x}+2dsd\omega+$ $xddw-ydw^2)$ existente $ds=\frac{zdz}{x}=dx+\frac{ydy}{dx}$.

§. LXX. Si neque tubus neque corpus in eo ab ullis viribus externis sollicitetur, omnis motus perturbatio a sola pressione mutua corporis in tubum orietur; sit igitur vis qua corpus in P premit secundum directionem normalem $PM=P$, ab eodem corpus vicissim premetur in directione Pm vi $=P$, nullam vero vim in directione PS patietur. Quo circa motus tubi sequentes binas suppeditabit aequationes:

I. $\frac{2A}{ds^2}(dds-xdw^2-ydw)=0$ seu $dds-xdw^2-ydw=0$.

II. $\frac{2A}{ds^2}\left(2dsdw-ydw^2+xddw-\frac{dydz}{x}\right)=-P$.

Deinde cum huius pressionis $PM=P$ momentum ad motum tubi accelerandum sit $=Px$, habebitur quoque haec aequatio

III. $\frac{2MkkddW}{ds^2}=Px$.

Eliminetur ex aequat. II & III pressio P prodibitque

$2Adsdw-Aydw^2+Axddw-\frac{Adydz}{x}+\frac{MkkddW}{x}=0$

seu multiplicando per x haec:

IV. $2Axdsdw-Axydw^2+(Axx+MkK)ddw-Adydz=0$.

Ex prima autem aequatione est $xdw^2=dds-yddw$, quo valore hic introducto fiet:

2Ax

$2Axdtdw - Aydt + (Azz + Mkk)ddw - Adydt = 0$

quæ ob $xdt = zdz$ transit in hanc:

V. $2Azdzdw + (Azz + Mkk)ddw - Aydt - Adydt = 0$

cujus integrale est

VI. $(Azz + Mkk)dw - Aydt = F.fdtV f.$

quæ æquatio continet conservationem momenti motus rotatorii: voco autem momentum motus rotatorii productum ex motu rotatorio in distantiam ab axe. Sic corporis A celeritas secundum tubum est $= \frac{dz}{dt}$, quæ per z multiplicata dat ejus celeritatem gyratoriam in plagam contrariam directam, hinc $\frac{Aydt}{zdt}$ erit ejus motus rotatorius & $= \frac{Aydt}{dt}$ momentum motus rotatorii, quatenus in tubo procedit. Quatenus autem cum tubo gyratur, erit ejus celeritas rotatoria $= \frac{zdw}{dt}$ motus rotatorius $= \frac{Azdw}{dt}$ & momentum motus rotatorii $= \frac{Azzdw}{dt}$; similique modo ejus cubi momentum motus rotatorii erit $= \frac{Mkkdw}{dt}$.

§ LXXI. Multiplicetur æquatio prima per Adt erit:

$Adtddt - Axdtdw^2 - Aydtddw = 0$ seu

$Adtddt - Azdzdw^2 - Aydtddw = 0.$

Hæc addatur ad æquationem V per dw multiplicatam, ac summa erit

$$Azdzd\omega^2 + (Azz + Mkk)d\omega dd\omega + Adsdds - A(ydsdd\omega + yd\omega dds + dydsd\omega) = 0$$ cujus integrale est:

VII. $(Azz + Mkk)\, d\omega^2 + Ads^2 - 2Aydsd\omega = Fgdt^2$

hæcque æquatio complectitur principium conservationis virium vivarum. Unde manifestum est hæc duo principia, si ad solutionem hujus quæstionis adhibita fuissent, statim suppeditatura fuisse has duas æquationes integrales, ad quas methodo directa utentes non nisi post plures operationes pertigimus. Contrahunt ergo hæc principia calculum mirifice, dum labori integrationis parcitur. Atque hoc quidem casu istæ binæ æquationes sufficientes sunt ad problema resolvendum, cum tres tantum habeamus variabiles z, s & ω. Verum si plura corpora in hujusmodi tubo quoque inessent, tum pluribus etiam opus esset æquationibus ad problema solvendum, quas hæc principia præbere non valent. Ceterum etiam præsenti casu hæc principia quantitatem pressionis corporis in tubum sponte non ostendunt, cum ea tamen ex nostris formulis primum inventis facile cognoscatur. Cum enim ex æquatione tertia sit $\frac{2dd\omega}{dt^2} = \frac{Px}{Mkk}$, hoc valore in secunda substituto erit $\frac{4Adsd\omega}{dt^2} - \frac{2Ayd\omega^2}{dt^2} - \frac{2Addyds}{xdt^2} + \frac{APxx}{Mkk} = -P$; unde oritur $P = \frac{2A(dyds + yxd\omega^2 - 2xdsd\omega)Mkk}{(Axx + Mkk)xdt^2}$ ubi si radius osculi r introducatur ob $dy = \frac{xds}{r}$, erit $P = \frac{2AMkk(ds^2 : r + yd\omega^2 - 2dsd\omega)}{(Axx + Mkk)dt^2}$.

§. LXXII.

§. LXXII. Cum autem ob curvaturam tubi datam æquatio habeatur inter z & ds, motus tam tubi quam corporis in ipso facile definitur. Cum enim ex æquatione VI sit

$$dt^2 = \frac{((Azz + Mkk)\,d\omega - Ay\,ds)^2}{EEf^3}$$

si brevitatis gratias ponatur $\frac{EEf^3}{Fg} = Hhh$, erit hunc valorem in æquatione VII substituendo:

$$(Azz + Mkk)\,Hhh\,d\omega^2 + AHhh\,ds^2 - 2AHhhy\,ds\,d\omega = (Azz + Mkk)^2\,d\omega^2 - 2Ay(Azz + Mkk)\,ds\,d\omega + AAy^2\,ds^2$$

unde per extractionem radicis obtinetur:

$$d\omega = \frac{Ay\,ds}{Azz + Mkk} - \frac{h\,ds}{Azz + Mkk}\sqrt{\frac{AH(Axx + Mkk)}{Azz + Mkk - Hhh}}$$

Hincque porro fit

$$Efds\sqrt{f} = \pm h\,ds\sqrt{\frac{AH(Axx + Mkk)}{Azz + Mkk - Hhh}}$$

Simili quoque modo motus tubi cum corpore incluso definiri posset, si tubus sive rectus sive curvus non in plano ad axem rotationis normali sit positus; atque si etiam duplicem habeat curvaturam: hoc enim casu primum oporteret motum corporis ad tres directiones fixas revocare, viresque his motibus convenientes deinde ad alias directiones, quas tubus quovis situ præbet, reducere. Verum calculus fieret prolixus minusque concinnus, eumque ideo eo magis prætermittimus, quod methodus, qua uti conveniat hic satis sit explicata, facileque ad hujusmodi casus magis complicatos, quoties opus fuerit, accommodari queat.