

23 7 58

Sectio I.

De motu corporum in tubis, qui motu sibi
parallelo secundum datam directionem
sunt mobiles.

§. VI.

Quoniam in hac investigatione quantitates diversissimæ naturæ, massæ scilicet corporum, vires sollicitantes, celeritates, tempora & spatia in computum ingrediuntur, ante omnia explicari conveniet, quo pacto singulas designare atque exprimere velimus. Ac primo quidem cum massa seu quantitas materiæ in quovis corpore contentæ proportionalis sit ipsius ponderi, quod idem corpus circa superficiem terræ constitutum esset habiturum, massam cuiusque corporis hic per pondus ejusdem exprimemus. Si igitur corpus, quod contemplamur, revera prope terræ superficiem versetur, ejus massa & pondus eadem littera denotabitur, fin autem corpus extra terram consideretur, ejus massa æqualis censembitur ponderi, quod idem corpus, si prope terram collocaretur, habere deberet. Cum autem gravitas non ubique terrarum eadem observetur, sed minor sit prope æquatoriem quam circa polos, superior determinatio ad certam terræ regionem erit adstringenda, talem scilicet ubi gravitas per accuratissima experimenta est explorata, eo quod deinceps mensuram celeritatum ex iisdem experimentis sumus petituri. Si igitur massam cuiuspiam corporis litera

AS 8 9.

terā A designabimus, hæc litterā A simul exprimet quantitatem ponderis, quod idem corpus, si in præfata terræ regione collocaretur, esset habiturum. Quia autem variatio gravitatis per universam terram nunc quidem satis est cognita, ista restrictio, siquidem corpus alibi ponderetur, facile instituitur.

§. VII. Deinde vires quasvis sollicitantes, seu uti vocari solent, motrices, ut a viribus acceleratricibus distinguantur, commodissime per pondera explicabimus. Cum enim omnes vires & pondera sint quantitates homogeneæ, proposita quacunque vi sollicitante semper assignari poterit pondus isti vi æquale. Hoc igitur recepto designandi modo massæ & vires nobis erunt quantitates homogeneæ. Quare cum vis acceleratrix prodeat, si vis motrix seu sollicitans per massam corporis, quod urget, dividatur, manifestum est vires acceleratrices nobis per meros numeros expressum iri: sic quia corporis in regione terræ constituti tam massa, quam vis id deorsum urgens, quæ cum ejus pondere congruit, eadē littera denotetur, vis acceleratrix inde oriunda per unitatem exprimetur, atque si vis quodcunque corpus sollicitans vel major sit vel minor quam pondus, quod istud corpus prope terram constitutum habiturum esset, tum vis ejus acceleratrix tantumdem major vel minor erit unitate.

§. VIII. Quod ad celeritates attinet, nulla certior atque ad pleraque problemata mechanica solvenda accommodatior mensura videtur, quam quæ ex altitudine, unde corpus in nostris regionibus cadens eandem acquirit celeritatem, petitur; quia hinc simul facillime colligitur, quantum spatium quævis

45 9 56

quævis celeritas dato tempore veluti uno minuto secundo confidere valeat: Quia enim tempora, quibus corpus libere labendo ex variis altitudinibus descendit, rationem subduplicaram harum ipsarum altitudinum tenent, atque celeritas ex hujusmodi lapsu acquisita tanta est, ut eodem tempore, quo lapsus duravit, motu uniformi spatium duplae altitudini æquale percurrere valeat; si per unicum experimentum celeritas, quam corpus ex data altitudine delapsum nanciscitur, fuerit cognita, omnes quoque celeritates, quæ ex aliis altitudinibus oriuntur, definiri poterunt. Ad hoc autem ob variabilitatem gravitatis certa terræ regio est eligenda, quæ eadem ad mensuram massarum ante indicaram stabiliendam est adhibenda. Ex experimentis autem sub eadem fere, ubi habitamus, poli elevatione, Londini scilicet & Parisiis institutis corporis grave uno minuto secundo per altitudinem 15,625 pedum rhenanorum delabi colligitur, quam mensuram eo libenter retinemus, quod iste numerus sit quadratus, ejusque radix quadrata in hoc calculo frequentissime occurrat. Corpus ergo ex altitudine 15,625 ped. Rh. tantam assequitur celeritatem, qua tempore unius minuti secundi spatium 31,25 ped. uniformiter percurrere possit. Hinc si corpus ex quavis alia altitudine, puta b ped., delabatur, celeritatem acquirret, quæ se habebit ad illam, ut \sqrt{b} ad $\sqrt{15,625}$ hoc est, ut $\sqrt{1000}b : 125$ unde hac celeritate absolvetur uno minuto secundo spatium $\frac{31,25}{125} \sqrt{1000}b = \frac{1}{4} \sqrt{1000}b$ ped. Rh. Quantum ergo altitudo, ex qua celeritas quæpiam generatur,

Euleri Opuscula.

B

non

45 10 55

non ipsa huic celeritati est proportionalis, sed ejus radix quadrata, tamen aptissime celeritatis quantitatem definit; atque idcirco in posterum loco celeritatum altitudines ipsis debitas in computum introducemos, sive celeritates per radices quadratas ex altitudinibus ipsis debitiss exprimemus.

§. IX. Quo autem magnitudinem hujus pedis Rhenanii, quo hic uti constituimus, accuratius definiamus, quoniam ejus mensura apud omnes auctores non satis certa & fixa videtur, ejus relationem ad pedem regium parisinum, qui constantissimæ mensuræ conservatur, indagare debemus. Observata autem est longitudo penduli simplicis singulis minutis secundis oscillantis 3 pedum parisin. & 8 $\frac{1}{2}$ linearum, quarum 144 unum pedem conficiunt; ita ut ista penduli longitudo sit $= \frac{3965}{1296}$ ped. Paris. Si jam altitudo, ex qua grave uno minuto secundo delabitur, ponatur π hujusmodi pedum, arque π denotet circumferentiam circuli cuius diameter $= 1$, ita ut sit $\pi = 3,14159265$, erit 1 ad $\pi\pi$ uti longitudo penduli simplicis singulis minutis secundis oscillantis ad duplam altitudinem, per quam grave uno minuto secundo delabitur. Hinc ergo erit $\pi = \frac{3965}{2592} \pi\pi = 15,0976$ ped. paris. ex quo pes noster rhenanus se habet ad pedem parisinum ut 15,0976 ad 15,625, seu ut 1000 ad 1034,93, quæ proportio proxime ad communem pedis thenani mensuram accedit, vulgo enim is ad parisinum statui solet ut 1000 ad 1035. Si ergo, ut fieri solet, pes rhenanus in mille particulas æqua-

43. xx 58

sequales dividatur, harum particularum 1034, 93 constituent pedem parisinum. Ex pede autem parisino, qui in 1440 scrupula, quæ sunt decimæ linearum partes, dividi solet, formabitur pes rhenanus sumendis 1391, 395 scrupulis. Quoniam igitur omnium reliquorum pedum relatio ad parisinum constat, ii quoque facile ad pedem nostrum rhenanum reducentur.

§. X. Temporis quidem dimensio per se est clarissima; cum horæ & minuta tam prima quam secunda sint mensuræ notissimæ & constantissimæ; verumtamen in præsenti negotio alia mensura cum mensuris præcedentium quantitatum homogena uti conveniet; quæ tamen ita sit comparata, ut in priorem, minuta scilicet secunda, facile converti possit. Retinebimus nempe usitatisimum in mechanicis modum, quo tempus spatio per celeritatem diviso exprimi solet; locum quidem hæc exprimendi ratio proprietatum habet in motu uniformi, sed cum minima spatii elementa singula perpetuo motu aquabili percurri assumantur, per calculum integralem ad omnes motus extenditur. Ponamus igitur spatiū & celeritate, quæ sit debita altitudini & uniformiter describi absolvique tempore, quoniam celeritatem ipsum per \sqrt{b} exponimus, erit tempus $s = \frac{a}{\sqrt{b}}$, quæ quidem expressio $\frac{a}{\sqrt{b}}$ utique tempori s est proportionalis. Ut autem hinc tempus in minutis secundis exhiberi possit, totum negotium unica observatio conficit. Ex ante allega-

45 12 55

et scilicet constat, celeritate, quæ ex lapsu per altitudinem 15,625 ped. rh. gignitur, uno minuto secundo spatium 31,25 ped. rh. absolvit, hoc ergo casu fit $a = 31,25$ & $b = 15,625$,

unde erit tempus $t = \frac{31,25}{\sqrt{15,625}}$, quod cum sit unum minu-

tum secundum, generatim erit $\frac{31,25}{\sqrt{15,625}}$ ad t'' uti expressio si-

milis temporis cuiusvis $t = \frac{a}{\sqrt{b}}$ ad numerum minutorum se-
cundorum. Quare si fuerit tempus nostro notandi modo

$t = \frac{a}{\sqrt{b}}$, erit hoc tempus $= \frac{\sqrt{15,625}}{31,25} \cdot \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{1:5 \cdot a}{31,25 \sqrt{1000 b}}$

$= \frac{4a}{\sqrt{1000b}}$ minutorum secundorum, si quidem a & b in
pedibus rhenanis experimentur. Vel si fit $t = \frac{a}{\sqrt{b}} = \sqrt{c}$,

erit hoc tempus $= \frac{\sqrt{10c}}{25}$ min. sec. dummodo linea c in
pedibus rhenanis exprimatur.

§. XI. Hoc igitur modo tam tempora quam celeritates
per radices quadratas ex quapiam longitudine exponuntur;
atque productum ex celeritate in tempus dabit ipsum spatium,
quod corpus hac celeritate uniformiter motum isto tempo-
re percurrit. Cum igitur in motu uniformi ex spatio & ce-
leritate tempus determinetur, ita vicissim ex spatio & tem-
pore corporis celeritas innoteſcat. Sic si tempore t unifor-
miter descriptum sit spatium $= a$, erit corporis celeritas $=$
 $\frac{a}{t}$; atque altitudo celeritati debita $= \frac{aa}{tt}$; Quod si ergo tem-

pus

13 58

pus in minutis secundis detur, inde primum idonea nos
straque instituto conformis expressio est investiganda, quæ
loco & substituatur. Ponamus tempus propositum esse π'' ;
atque temporis expressionem ad nostrum scopum accommo-
datam esse $\tau = \sqrt{c}$, erit, uti ante vidimus, si c in pedibus
rhenanis exprimatur, $\pi = \frac{\sqrt{10}c}{25}$, ideoque $\sqrt{c} = \frac{25\pi}{\sqrt{10}}$; &
 $c = 62,5\pi\pi = \frac{125\pi\pi}{2} = \frac{1000\pi\pi}{16}$. Hic scilicet numerus $\frac{1000\pi\pi}{16}$
longitudinem c in pedibus rhenanis exhibebit, qua cognita
erit $\sqrt{c} = \tau$. Simili modo si celeritas per numerum pedum
rhen. qui uno minuto secundo percirratur, detur, hinc
idonea expressio in calculum introducenda eruetur. Confi-
ciat ista celeritas uno minuto secundo m pedes rh. sitque altitu-
do huic celeritati debita $= b$, cuius magnitudo in pedibus
rhen. inveniri debeat. Quia igitur ex iis, quæ ante sunt
tradita, est $\frac{1}{4}\sqrt{1000}b = m$, fiet $\sqrt{b} = \frac{4m}{\sqrt{1000}}$, quæ est
apta expressio pro celeritate adhibenda: ipsa vero altitudo
huic celeritati debita est $= b = \frac{16mm}{1000}$, qui numerus alti-
tudinem b in pedibus rhenanis expressam præbebit.

§. XII. Ut nunc effectum virium sollicitantium in motu
civis que corporis perturbando explicemus, quoniam ideas
precedentes omnes ex descensu gravium libero haufimus,
primum hunc ipsum descensum secundum has ideas perpen-
damus. Delabatur igitur corpus secundum rectam vertica-

49 14 50

lem in medio non resistente, & quidem in A motum ex quiete inchoaverit. Sit massa corporis $= A$, quæ cum ponderi ejusdem corporis æqualis statuatur, erit quoque vis hoc corpus deorsum urgens $= A$, ideoque vis acceleratrix, quam præbet vis motrix per massam divisa $= 1$. Elapo tempore t pervenerit hoc corpus in P, sitque altitudo AP $= x$, & celeritas in P acquisita sit debita altitudini $= v$, erit utique $v = x$. Jam elemento temporis dt corpus uiterius descendet per spatiolum $Pp = dx$, erit altitudo debita celeritati in $p = v + dv$, quæ cum congruat cum ipsa altitudine $Ap = x + dx$, erit $dv = dx$. Elicitur autem hoc incrementum dv a vi acceleratrice, quæ quoties unitate exprimitur, incrementum dv perpetuo æquale erit elemento spatii percursi dx . Porro cum elementum $Pp = dx$ motu uniformi percurratur, erit $dt = \frac{dx}{Vv} = \frac{dx}{Vx}$, unde integrando fit $t = 2Vx$.

Seu quia est $x = \frac{2x}{Vx}$, manifestum est celeritate Vx & eodem tempore t per motum uniformem spatiū $= 2x$ hoc est duplæ altitudini AP æquale descripsim iri, uti Galilæus demonstravit. Ceterum hic ipsa prima mechanicæ principia tanquam cognita sumimus, eorum autem applicationem ad corpora diversimode mobilia, quando opus erit, seorsim demonstrabimus.

§. XIII. Maneat ut ante corporis, quod secundum rem AB promovetur, massa $= A$, & perfecto spatio AP $= x$, sit ejus celeritas in P debita altitudini $= v$, in P autem urgetur

25 19 59

geatur secundum directionem motus PB $v = P$, qua ejus celeritas ac propterea altitudo v augatur. Jam puncto temporis ds procedat per spatiolum $Pp = dx$, atque in p sit altitudo debita celeritati $= v + dv$. Vis autem acceleratrix erit $= \frac{P}{A}$, quæ si unitati esset æqualis, foret $dv = ds$, praesenti ergo casu se habebit ds ad dv ut 1 ad $\frac{P}{A}$, unde fit

$dv = \frac{P dx}{A}$; Quamobrem erit incrementum altitudinis debite celeritati dv ad elementum spatii dx , uti vis motrix sollicitans P ad massam corporis A . Vicissim ergo ex elemento dv cognito innotescet vis motrix, erit enim $P = \frac{A dv}{dx}$.

Sin autem loco celeritatis tempus t in computum inducatur, quia est $ds = \frac{dx}{\sqrt{v}}$, erit $Vv = \frac{dx}{dt}$ & $v = \frac{dx^2}{dt^2}$. Si jam elementum temporis ds constans assumatur, erit $dv = \frac{2dxdx}{ds^2} = \frac{Pdx}{A}$, seu $\frac{P}{A} = \frac{2ddx}{ds^2}$, unde ex tempore

& spatio vis motrix ita definietur, ut sit $P = \frac{2A dd x}{dt^2}$.

Hic quidem directionem vis sollicitantis cum directione motus consentientem assumimus, ita ut ab ea celeritas corporis augatur; sin autem vis sollicitans retro vergat, ita ut dum corpus per Pp progreditur, versus A retrahatur a vi P , tum quia hæc vis ratione prioris est negativa, erit $dv = -\frac{Pdx}{A}$ & $\frac{2ddx}{dt^2} = -\frac{P}{A}$. Ceterum his duobus casibus sola

corpo-

MS TS SE

corporis celeritas mutatur, ejus directione manente eadent; si autem directio vis fuerit obliqua, tum simul quoque directio motus variabitur, quem effectum hanc sumus investigaturi.

Tab. I. §. XIV. Moveatur corpus, cuius massa ut ante sit $= A$, *Fig. 2.* in linea quacunque AM & cum in M pervenerit habeat celeritatem altitudini v debicam, qua uniformiter in directum esset progressurum secundum directionem Mm : in M autem urgeatur a vi motrice P secundum directionem MN . Referatur via corporis AM prolubitu ad axem AP , qui sit ad directionem MN normalis, & vocetur abscissa $AP = x$, applicata $PM = y$. Tempusculo dt progrediatur corpus per elementum Mm , ductaque ordinata pm ipsi PM parallela erit $Pp = Mm = dx$, $m_n = dy$, & $Mm = V(dx^2 + dy^2)$ quod vocetur $= ds$. Jam resolvatur motus corporis verus more solito in duos laterales secundum directiones MN & M_n , atque illo absolveret tempusculo dt spatiolum $MN = dy$, hoc vero spatiolum $M_n = dx$. Celeritas ergo illius motus erit $= \frac{dy}{ds} Vv$, hujus vero $= \frac{dx}{ds} Vv$; critque $dt = \frac{V(dx^2 + dy^2)}{Vv}$. Jam prior motus solus a vi motrice P afficitur critque uti ostendimus, quia altitudo ejus celeritati debita est $= \frac{v dy^2}{ds^2}$, diff. $\frac{v dy^2}{ds^2} = \frac{P dy}{A}$: & quia alter motus prius non afficitur, cuius celeritas est debita altitudini $\frac{v dx^2}{ds^2}$ erit diff. $\frac{v dx^2}{ds^2} = o$. Addatur haec æquatio ad illam & ob

483 47 58

& ob $ds^2 = dx^2 + dy^2$ erit diff. $\frac{v(dy^2 - dx^2)}{ds^2} = dv$

$= \frac{P dy}{A}$. Quæ æquatio $dv = \frac{P dy}{A}$ præbet accelerationem

motus secundum veram directionem Mm . Quia vero est

diff. $\frac{v dx^2}{ds^2} = 0$, erit sumto ds constante $dx^2 dv + 2 v dx ddx$

$= 0$, ubi si loco dv ejus valor $\frac{P dy}{A}$ substituatur, orietur:

$\frac{P dx dy}{A} + 2 v ddx = 0$. Est vero, quia ds est constans, ra-

dius curvedinis in $M = \frac{ds dy}{ddx}$, qui si dicatur $= r$, erit $ddx =$

$\frac{ds dy}{r}$, unde ista æquatio nascerur $\frac{P dx dy}{A} + \frac{2 v ds dy}{r} = 0$,

quæ præbet $r = -\frac{2 A v ds}{P dx}$, hæcque ergo curvatura orbitæ producitur ab obliquitate potentiarum sollicitantibus.

§. XV. Si igitur directio vis sollicitantis MN cum direccione motus corporis Mm angulum constitutus obliquum. NMm , non solum corporis celeritas variatur, sed etiam ejus via, in qua incedit, incurvatur: qui duplex effectus, quo melius percipiatur, sit angulus $NMm = \phi$, massa corporis $= A$ & vis motrix secundum directionem $Mm = P$: porro sit spatiolum elementum temporis dt percursum $Mm = ds$, & aliquid debita celeritati in M sit $= v$. His positis erit

Eukeri Opuscula.

C

dx =

25 18 58

$dx = ds \sin \phi$ & $dy = ds \cos \phi$, posito sinu toto = 1. Quibus valoribus loco dx & dy substitutis, erit primo $d\nu = \frac{P}{A} ds \cos \phi$: deinde via ita incurvabitur, ut ejus radius osculi sit $r = \frac{-2Av}{P \sin \phi}$; quem cum axem AP versus tendere assumissimus, manifestum est lineam in plagam contrariam, eam scilicet, in quam tendit directio vis sollicitantis MN, fore incurvaram; eritque ergo hujus curvedinis radius $= \frac{2Av}{P \sin \phi}$. Sit nunc

Tab. I.

Fig. 3. in fig. 3. M = directio motus, & elementum viæ tempusculo ds descriptum $Mm = ds$, directio vis sollicitantis P sit ut ante MN cum directione M m angulum constituens NMT = ϕ . Resolvatur hæc vis in binas laterales alteram secundum directionem tangentis MT, alteram vero secundum directionem ad viam corporis normalem MR, erit vis MT = $P \cos \phi$ & vis MR = $P \sin \phi$. Ponatur autem vis tangentialis MT = T & vis normalis MR = R, erit T = $P \cos \phi$ & R = $P \sin \phi$. His valoribus in superioribus formulæ substitutis proveniet $d\nu = \frac{T ds}{A}$ & $r = \frac{2Av}{R}$. Unde patet, quod quidem ex elementis abunde constat, celeritatem corporis a sola vi tangentiali affici, & ita quidem perinde, scilicet si altera vis R penitus abesse. Alterius vero vis normalis R effectus tantum in incurvanda via corporis consumitur, neque ab altera vi afficitur. Erit ergo perpetuo radius

35 19 55

radius curvatur ad altitudinem celeritati debitam bis sum-
tam, uti massa corporis ad vim normalem.

§. XVI. Vicissim ergo si datur corporis secundum direc-
tionem Mm procedentis acceleratio, scilicet si datur va-
lor ipsius $d\mathbf{v}$, dum per spatiolum $Mm = ds$ promovetur,
tum vis tangentialis corpus secundum directionem motus
sollicitans inde determinari potest: erit nimicum haec vis $T =$
 $\frac{Ad\mathbf{v}}{ds}$. Simili modo cognoscitur, si corporis via Am fuerit
incurvata, atque in M radius curvatur MR , qui sit $= r$, de-
tetur, tum corpus a quapiam vi normali secundum direc-
tionem radii osculi MR sollicitari, eritque haec vis $R = \frac{2A\mathbf{v}}{r}$.
Ucunque ergo motus corporis tam ratione directionis, quam
ratione celeritatis varietur, vires has variationes producen-
tes semper assignari poterunt, exque reducentur ad duas
normalem & tangentialem, quarum illa ex mutatione direc-
tionis, haec vero ex mutatione celeritatis originem habet.
Hoc autem intelligendum est, si motus corporis perficiatur
in eodem plano, si enim via a corpore descripta duplitem
habeat curvaturam, tum vires sollicitantes ad tres direc-
tiones inter se normales revocantur. Quodsi loco celerita-
tis in calculum introducatur tempus t , quoniam est $d\mathbf{v} =$
 $\frac{ds}{dt}$, fiet $V\mathbf{v} = \frac{ds}{dt}$ & $v = \frac{dt^2}{ds^2}$; sumatur elementum ds
constans, eritque $d\mathbf{v} = \frac{2dsddt}{ds^2}$. Hinc si vis tangentialis se-
condum

25 20 58

candum MT ut ante sic $\equiv T$, & vis normalis secundum MR

$\equiv R$; utriusque effectus ita se habebit, ut sit $\frac{2 d ds}{dt^2} \equiv$

$\frac{T}{A}$, & $r \equiv \frac{2 Ad s^2}{R dt^2}$, seu $R \equiv \frac{2 A ds^2}{r dt^2}$. Quæ dux æqua-

tiones si in se multiplicentur, tam ds quam massa A eliminabitur,

sicutque $R ds \equiv \frac{T ds^2}{r}$; unde erit generatim vis tangentia-

lis T ad vim normalem R, uti $r ds$ ad ds^2 seu ut — diff.

$\frac{1}{ds}$ ad $\frac{1}{r}$; si quidem elementum temporis dt statuatur

constans.

§. XVII. Hæ leges motus autem præcipue spectant corpuscula infinite parva, in quæ varius partium motus non cadit: atque ad corpora finitæ magnitudinis referri nequeunt, nisi ratione morus ita sint comparata, ut tota eorum massa in unico punto collecta concipi possit. Cujusmodi indolis cum assumamus ea corpora, quæ in tubis moventur, ex his legibus motus corporum tubis inclinorum determinari debebit. Quod aurem ad motum ipsius tubi attinet, quia diverse ejus partes diversimode moveri possunt, peculiares motus leges sunt investigandæ, quæ a ratione mobilitatis tubi pendetunt. Atque in hac quidem sectione motum tubi ejusmodi constituiimus, ut perpetuo singulæ ejus partes æquibus celeritatibus secundum communem directionem moveantur. Evenit hoc in motu reptorio, ubi corpus respe-

Etū

33. 21. 55

Et u plagarum mundi perpetuo eundem sicutum retinere ponitur. Hic autem potissimum contemplabimur motum reptiorum super linea recta, secundum quam omnia tubi puncta moveantur & quidem quovis momento æqualibus celeritatibus. Sit igitur A B C corpus quocunque, in cuius superficie A B affixus concipiatur tubus, in quo unum plurave corpora sint inclusa. Hic autem primum solius tubi seu corporis A B C, quocum tubus est connexus, motum ejusque variationem a potentiss sollicitantibus oriundam investigari oportet, & hancobrem nulla adhuc corpora tubo inclusa consideramus. Sit igitur recta O V directionem motus tubi determinans, cui corpus A B C basi sua^z B C ita incumbat, ut ea perpetuo linea recta O V maneat applicata. Hoc scilicet modo corpus A B C, nisi quiescat, motu sibi parallelo secundum directionem O V ita movebitur, ut quovis momento cuncta ejus puncta M secundum eandem directionem æquibus celeritatibus progrediantur: unde si unius ejus puncti M celeritas fuerit cognita, eidem omnium reliquorum punctorum celeritates æquales erunt.

§. XVIII. Porro autem assumimus hoc corpus motu sic super linea O V nullam frictionem pati, unde si semel nactum fuerit motum secundum directionem O V, hunc motum perpetuo uniformem conservabit, nisi a potentiss sollicitantibus perturberetur. Quare si celeritas puncti C secundum directionem CV debita poratur altitudini w , non solum omnes particulae corporis M eandem celeritatem secundum eandem directionem

48 22 55

M N parallelam ipū C V habebunt, sed etiam eodem motu perpetuo promovebuntur. Quia enim hoc motu situs relativus partium non immutatur, omnes particulæ motum insitum perinde conservabunt, ac si a se invicem essent dissolutæ. Quod autem ad effectum virium sollicitantium attinet, quia mobilitas corporis ita est restricta, ut alium motum nisi secundum directionem O V recipere nequeat; manifestum est alias potentias, nisi quarum directio sit eadem, motum corporis afficere non posse. Videamus ergo cujusmodi vi opus sit, ut motus corporis A B C datam accelerationem inde accipiat. In hunc finem concipiatur corporis particula quæcunque M, cuius massa sit $= dM$. Cum igitur ejus celeritas debita sit altitudini π , quo hæc altitudo π incrementum capiat du , dum punctum M per elementum spatii $Mm = dx$ progreditur, necesse est ut secundum directionem M N sollicitetur vi $= \frac{du}{dx} dM$, ubi $\frac{du}{dx}$, quia omnes particulæ æquali motu sunt præditæ, quantitas erit constans. Quodsi jam omnium istarum virium, quibus singulæ corporis particulæ sollicitari debent, una vis æquivalens investigatur, ea repertetur $= \frac{du}{dx} / dM = \frac{Md\pi}{dx}$, siquidem M denotet massam totius corporis A B C, hujusque vis, uti ex staticis patet, directio erit parallela rectæ O V & per corporis A B C centrum gravitatis transibit. Ut igitur altitudo celeritati totius corporis A B C debita π , dum corpus per spatiolum Cc $= dx$ progreditur, incrementum capiat du ; necesse est ut corpus secun-

23

secundum directionem GH per ejus centrum gravitatis G trans-
euntem & rectæ OV parallelam sollicitetur vi $\equiv \frac{Md\mathbf{u}}{dx}$.

§. XIX. Vicissim ergo si corpus ABC, quod motu sibi parallelo secundum directionem OV celeritatem habeat altitudini \mathbf{x} debitam, sollicitetur secundum eandem directionem a vi P per ejus centrum gravitatis G transeunte, motus corporis sibi parallelus quidem manebit, sed ita accelerabitur, ut dum per spatiolum Cx $\equiv dx$ progreditur, fiat $P \equiv \frac{Md\mathbf{u}}{dx}$ seu $d\mathbf{u} \equiv \frac{Pdx}{M}$. Perinde igitur se habebit iste effectus, ac si massa totius corporis M in ejus centro gravitatis G esset collecta; atque adeo regulæ ante pro corpusculis infinite parvis traditæ quoque ad hunc casum patent. Quin etiam hæc acceleratio a vi GH oriunda eadem effectu futura, etiamsi corpus liberrime esset mobile, quia in hoc ratiocinio restrictionis mobilitatis ratio non est habita. Ob hanc autem sit, ut aliæ vires in corpore nullum effectum exercere possint, nisi quatenus cum directione OV consentiunt. Ac primo quidem vires, quarum directio ad OV est normalis motum corpus ABC nullo modo sufficient: quare cum omnes vires resolvi possint in binas laterales, quarum alteræ sint secundum OV directæ, alteræ ad OV normales, priores tantum motum corporis alterabunt, posteriores vero, nisi quatenus pressionem corporis ad planum OV efficiunt, penitus negligi possunt. Ante quidem ex his viribus earum.

25 24 25

earum tantum effectus est definitus, quarum directio non solum rectæ O V est normalis, sed etiam per centrum gravitatis corporis G transit: nunc autem ob restrictionem mobilitatis efficitur, ut qualibet vis secundum directionem O V agens, sive ea per centrum gravitatis G transeat sive secus, eundem effectum producere debeat. Ponamus enim vim P corpus secundum directionem M N sollicitare: si in centro gravitatis G æqualem vim in directione contraria G h applicatam concipiamus, hæ duæ vires corpus, quia alium motum nisi in directione O V recipere nequit, in æquilibrio tenebunt, hincque vis $MN = P$ eundem effectum præstabit, atque æqualis vis G H in centro gravitatis G applicata, eritque propterea $du = \frac{Pdx}{M}$; quæ enim vires ab eadem potentia in æquilibrio retinentur, ex quoque in corpore, cui sunt applicatae, eundem effectum producunt.

Tab. I. §. XX. His præmissis principiis propositum aggrediamur;
Fig. 5. ac primo quidem consideremus tubum rectum A B ad planum O V, super quo est mobilis, utcunque inclinatum, seu quod eodem redit, concipiatur tubus plano inclinato A B C secundum longitudinem A B adjunctus, ita ut hoc planum inclinatum A B C secundum directionem O V libere moveri possit, alium autem motum recipere nequeat. In tubo autem inclusum sit corpus, cuius massa $= A$; tubi autem cum adjuncta plani inclinati mole massa sit $= M$. Elapsso jam tempore t pervenerit tam tubus A B, quam corpus in eo P in situum, quem figura repræ-

25

representat; initio autem ponamus corpus tubo inclusum extitile in A, & punctum tubi B in punto O habuisse. Vocetur spatum AP = x , & OB = s , atque angulus constans ABC = θ . Cum igitur tempusculo ds ipse tubus per spatiolum Bb = ds , & corpus in tubo per spatiolum Pp = dx progrediatur, erit celeritas tubi seu plani inclinati secundum directionem OV = $\frac{ds}{dt}$.

& celeritas corporis in tubo = $\frac{dx}{ds}$. Præter hunc vero motum

corpus tubo inclusum motum cum tubo habebit communem, ita ut sumta $P\pi$ basi OV parallela in corpore P duplex insit motus, alter secundum directionem Pp celeritate $\frac{dx}{ds}$, alter vero

secundum directionem $P\pi$ celeritate $\frac{ds}{dt}$. Ad hos ergo motus producendos viribus secundum easdem directiones sollicitantibus erit opus. Ac primo quidem corpus in P, cuius massa posita est = A, secundum directionem Pp sollicitari debet

$vi = \frac{2A d dx}{d t^2}$, & secundum directionem $P\pi$ vi = $\frac{2A d ds}{d t^2}$ posito elemento temporis ds constante.

Simili modo oportet, ut ipse tubus AB cum piano inclinato ABC secundum directionem BV sollicitetur $vi = \frac{2M d ds}{d t^2}$; ostendimus enim modo

perinde esse, ubi haec vis corpori ABC sit applicata, dummodo ejus directio parallela sit directioni motus OV.

33 26 SP

§. XXI. Hæ ergo vires ad motum, quem tam in tubo quam in corpore inesse singimus, producendum requiruntur: quæ ideo vires cum iis, quibus cum tubis tum corpus revera sollicitantur, convenire debent: hæcque convenientia nobis suppeditabit æquationes, ex quibus hos singulos motus determinare licebit. Præter vires autem externas, quæ tam in corpus quam tubum agunt, imprimis spectanda est pressio, qua corpus P tubum urget. Quatenus enim firmitas tubi impedit, quo minus corpus eum sequatur motum, quem securum esset, si omnino liberum esset, eatenus corpus vim in ipsum tubum exerit, eumque premit. Quia autem latera tubi tantum corporis motum ad latera coercent, pressio non potest esse nisi normalis ad directionem tubi. Ponamus ergo corpus in P existens tubum premere secundum directionem P N ad tubum A B normalem, hancque pressionem esse $\equiv P$; & quia nullum corpus alterum premere potest, quin simul tantundem reprimatur, unde principium æqualitatis inter actionem & reactionem est derivatum; manifestum est corpus in P æquali vi P secundum directionem contrariam P π sollicitari. Quantquam autem quantitas hujus pressionis P adhuc est incognita, tamen expedit eam statim in calculum introducere, quam complicatis ratiociniis eam prius definire: hoc enim modo ea facillime cum toto motu ex æquationibus mox inveniendis determinabitur. Ob hanc igitur pressionem P ipse tubus seu totum corpus A B C sollicitatur vi. $\equiv P$ secundum directionem P N; ideoque secundum directionem P π vi $\equiv P \sin \theta$, quæ sola

93 27 65

sola vis motum tubi afficit. Corpus autem in P urgebitur vi pari P secundum directionem P π , quæ secundum directiones P ρ & P π resoluta dabit vim secundum P ρ $= - \frac{P \cos \theta}{\sin \theta}$

& secundum P π vi $= - \frac{P}{\sin \theta}$; uti ex resolutione vitium facile colligitur.

§. XXII. Si jam neque tubus neque corpus in tubo ab ulla vi externa sollicitetur, omnes motus variationes a sola pressione orientur. Quare cum corpus in P secundum directionem P ρ sollicitari debeat vi $= \frac{2 A d dx}{dt^2}$, revera autem in hac directione sollicitetur vi $= - \frac{P \cos \theta}{\sin \theta}$, habebimus æquationem $\frac{2 A d dx}{dt^2} = - \frac{P \cos \theta}{\sin \theta}$: simili modo sollicitationes tam corporis quam tubi secundum directionem P π dabunt has æquationes $\frac{2 A d ds}{dt^2} = - \frac{P}{\sin \theta}$ & $\frac{2 M d s}{dt^2} = P \sin \theta$. Ha-

duæ æquationes, si altera per alteram dividatur, dant $\frac{M}{A} = - \sin \theta^2$, quæ æqualitas locum habere nequit, nisi sit P $= o$: sit ergo P $= o$, eritque tam $dd s = o$, quam $d dx = o$. Hinc fiet integrando $\frac{ds}{dt} = a$ & $\frac{dx}{dt} = \beta$. Hoc ergo casu tam motus corporis in tubo, quam ipsius tubi erit uniformis, atque tubus a corpore nullam pressionem sustinebit. Qui

28 28 28

ergo motus initio tam tubo quam corpori ipsi inclusò fuerit impressus, idem perpetuo conservabitur uniformis, qui casus statim primo intuitu resolvi potuissest, quia nihil impediret, quomodo tam tubus, quam corpus ipsi inclusum motum semel impressum prosequantur, perinde ac si a se invicem essent soluta. Ceterum eliminatio ipsius P aliis modis institui potest, prima enim & secunda æquatio præbent $\frac{2Addx}{dt^2} = \frac{2Addscos\theta}{dt^2}$

$= 0$. Tum summa secundæ & tertiae erit $\frac{2Addx}{dt^2} +$

$\frac{2Mddx}{dt^2} = -\frac{Pcos\theta^2}{sin\theta}$; unde si ope primæ P eliminetur,

erit $\frac{2Addx cos\theta}{dt^2} - \frac{2Addx}{dt^2} - \frac{2Mddx}{dt^2} = 0$. Prior

dat $dx - ds \cos\theta = mdt$, & altera $Addx \cos\theta - Ads -$

$Mds = mdt$; unde eruitur $dx = \frac{m(A+M)ds - mdt \cos\theta}{A \sin\theta^2 + M}$

& $dt = \frac{-Add \cos\theta - mds}{A \sin\theta^2 + M}$. Cum igitur nem dx quam

ds sit constans, manifestum est, ob $ddx = 0$ & $ddx = 0$ pressionem P esse nullam.

§. XXIII. Ponamus nunc corpus in P a gravitate naturali sollicitari, lineamque O V esse horizontalem, qui est casus a Cel. Bernoullio primum in hoc genere solutus. Urgebitur ergo corpus P a vi eius ponderi æqualli A in directione PQ perpendiculari ad O V; atque in hac hypothesi perinde erit, sive simul planum inclinatum ABC grave statuatur sive minus.

Refol-

MS. 29. 88.

Resolvatur hæc vis $PQ = A$ secundum directiones P_p & P_π ,
 prodibitque ea quæ corpus secundum P_p urget $= \frac{A}{\sin \theta}$, &
 secundum $P_\pi = \frac{A \cos \theta}{\sin \theta}$. Si igitur hæc vis cum pressione
 coniungatur, corpus P primum in directione P_p sollicitatur vi $=$
 $\frac{A - P \cos \theta}{\sin \theta}$, & in directione P_π vi $= \frac{A \cos \theta - P}{\sin \theta}$; ipse
 autem ratus ut ante sollicitabitur in directione $O V$ vi $=$
 $P \sin \theta$; quæ vires, si ante inventis & ex inde motus deriva-
 tis æquales ponantur, orientur tres sequentes æquationes:

$$I. \frac{2Addx}{ds^2} = \frac{A - P \cos \theta}{\sin \theta}; \quad II. \frac{2Adds}{ds^2} = \frac{A \cos \theta - P}{\sin \theta}$$

$$\text{& III. } \frac{2Mddx}{ds^2} = P \sin \theta$$

addantur secunda & tertia prodibitque æquatio

$$IV. \frac{2(A + M)ddx}{ds^2} = \frac{A \cos \theta - P \cos \theta}{\sin \theta}$$

cum eliminando P prima & secunda dabit:

$$V. \frac{2Addx}{ds^2} - \frac{2Addx \cos \theta}{ds^2} = A \sin \theta$$

cum ex prima & quarta nescetur:

$$VI. \frac{-2Addx \cos \theta}{ds^2} + \frac{2(A + M)ddx}{ds^2} = 0$$

que duæ æquationes inserviunt quantitatibus x & s per se
 definiendis. Pressio autem commodissime definitur ex æqua-
 tionibus

30

tionibus II & III. quarum hæc per illam divisa dat $\frac{M}{A} =$

$\frac{P \sin \epsilon}{A \cos \epsilon - P}$, unde invenitur pressio $P = \frac{A M \cos \epsilon}{M + A \sin \epsilon}$; quæ ergo est constans, atque perpetuo ejusdem manet quantitatibus. Cum igitur ex staticis sit pressio corporis in planum immobile $= A \cos \epsilon$, erit pressio in planum mobile ad professionem in idem planum immobile uti M ad $M + A \sin \epsilon$.

§. XXIV. Inventa pressione P , si ejus valor substituatur, æquatio prima abibit in hanc formam

$$\frac{2Adx}{dt^2} = \frac{A(A+M)\sin\epsilon}{M+A\sin\epsilon t^2} \text{ seu } \frac{2dx}{dt} = \frac{(A+M)dt\sin\epsilon}{M+A\sin\epsilon t^2}$$

Hæc æquatio integrata dabit:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(A+M)t\sin\epsilon}{M+A\sin\epsilon t^2} + C.$$

Si ergo ponamus initio, ubi $t=0$, corpus in tubo quievisse, quia $\frac{dx}{dt}$ exprimit ejus celeritatem, fuit $C=0$, erique

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(A+M)t\sin\epsilon}{M+A\sin\epsilon t^2}, \text{ ideoque celeritas corporis in}$$

tubo in ratione temporis crescit. Porro autem integrando si initio motus corpus fuerit in punto A erit $x = \frac{(A+M)t\sin\epsilon}{M+A\sin\epsilon t^2}$, hincque ad quodvis tempus locus corporis in tubo assignabitur. Deinde secunda vel tertia

æquatio

AS : 31 : SS

equatio præbet: $\frac{2 \ddot{d}s}{dt^2} = \frac{A \sin \vartheta \cos \vartheta}{M + A \sin \vartheta^2}$, unde si planum inclinatum initio ubi erat $\vartheta = 0$, in O quieverit, obtinetur $\frac{ds}{dt} = \frac{A \sin \vartheta \cos \vartheta}{M + A \sin \vartheta^2}$: ita ut quoque celeritas plani in ratione temporis crescat: denuo vero integrando erit $s = \frac{A \sin \vartheta \cos \vartheta}{4(M + A \sin \vartheta^2)}$. Tam corpus ergo in tubo quam ipse rubus motu uniformiter accelerato movebitur; eritque quovis momento celeritas corporis in tubo progredientis ad celeritatem plani inclinati ut $A + M$ ad $A \cos \vartheta$. Hinc colligitur casus descensus super planum inclinato immobili si massa plani inclinati M statuatur infinita, cum enim fieri $\frac{ds}{dt}$ seu celeritas plani nulla, celeritas autem corporis super hoc planum quiete erit $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} s \sin \vartheta$ & $x = \frac{1}{2} s^2 \sin \vartheta$; qui motus cum eo, qui in Mechanica definiri solet, egregie convenit. Cum enim sic $s = \sqrt{\sin \vartheta} = 2\sqrt{x}$, erit celeritas $\frac{dx}{dt} = \sqrt{x} \sin \vartheta$ & aliterudo debita celeritati $= x \sin \vartheta$ hoc est altitudini, ex qua corpus jam descendit.

§. XXV. Ex duplice motu, quem in corpore tubo incluso inesse invenimus, facile ejus verus motus & directio concluditur. Capiantur enim P_p & P_x celeritatibus, quas corpus secundum has directiones habet, proportionales, ita ut sit P_p

Tab. I.
Fig. 6.

33 32 33

sit $Pp = \frac{dx}{dt}$ & $P\pi = \frac{ds}{dt}$, compleaturque parallelogram-

mum $Pp T \pi$: quo facto diagonalis $P T$ tam veram directio-

nem motus quam celeritatem exhibebit. Cum jam sit angulus

ad $p = 0$ & $p T = \frac{ds}{dt}$, erit $P T = \frac{\sqrt{(dx^2 + ds^2 - 2dxds\cos\theta)}}{dt}$

quæ expressio simul celeritatem corporis P exprimit, ita ut al-

titudo huic celeritati debita sit $= \frac{dx + ds^2 - 2dxds\cos\theta}{dt^2}$.

Producatur $p T$ donec rectæ verticali PQ occurrat in Q erit

que $PQ = \frac{dx \sin\theta}{dt}$ & $QT = \frac{dx \cos\theta - ds}{dt}$: unde

erit tang. $QP T = \frac{dx \cos\theta - ds}{dx \sin\theta}$, quare cum sit tang.

$p PQ = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$, prodibit tang. $p PT = \frac{ds \sin\theta}{dx - ds \cos\theta}$

tanto ergo angulo $p PT$ directio corporis vera a directio-

ne tubi deficit. Cum igitur invenerimus $\frac{dx}{ds} =$

$\frac{(A + M) \sin\theta}{2(M + A \sin\theta^2)}$ & $\frac{ds}{dx} = \frac{A \sin\theta \cos\theta}{2(M + A \sin\theta^2)}$, erit ce-

leritas corporis in P vera $= \frac{\sin\theta}{2(M + A \sin\theta^2)} \sqrt{V}$

$(A^2 \sin\theta^2 + 2AM \sin\theta^2 + MM)$ & altitudo huic

celeritati debita $= \frac{\sin\theta^2 (A^2 \sin\theta^2 + 2AM \sin\theta^2 + MN)}{4(M + A \sin\theta^2)^2}$

$= x \sin$

28 33 50

$$= \frac{x \sin^2 (\Lambda^2 \sin^2 \theta + 2AM \sin \theta^2 + MM)}{(A + M)(M + A \sin \theta^2)} \text{ ob } x = \\ \frac{(A + M) n \sin^2 \theta}{(M + A \sin \theta^2)}. \text{ Deinde est tangens anguli QPT} = \\ 4(M + A \sin \theta^2)$$

$\frac{M \cos \theta}{(A + M) \sin \theta}$; Sicque corpus in tubo revera secundum lineam rectam PT descendit, quae ad horizontem inclinatur angulo PTQ, cuius tangens est $= (1 + \frac{A}{M}) \tan \theta$, eritque ergo QT: QP = M: A + M. Via autem hæc corporis vera PT declinabit a directione tubi PP_p angulo TPP_p, cuius tangens est $= \frac{A \sin \theta \cos \theta}{M + A \sin \theta^2}$. Celeritas autem corporis in P vera se habebit ad celeritatem ejusdem corporis, quam ibidem acquisitura esset super plano inclinato immobili, ut $V(M^2 + 2AM \sin \theta^2 + A^2 \sin \theta^4)$ ad $V(A + M)(M + A \sin \theta^2)$, ideoque illa minor erit quam hæc. Tempus denique totius descensus per AB \Rightarrow erit $= 2V \frac{(M + A \sin \theta^2)}{(A + M) \sin \theta}$. Quare cum hoc tempus, si planum inclinatum esset immobile, foret $= 2V \frac{\sin \theta}{\sin \theta}$, erit tempus descensus super plano inclinato immobili ad tempus descensus super mobili uti $V(A + M)$ ad $V(A \sin \theta^2 + M)$, unde illud hoc erit majus.

§. XXVI. Qui hæc phænomena obiter tantum intueniuntur,
Euleri Opuscula. E

34

tur, principium conservationis virium vivarum non parum
viri pati videbitur; vix enim cum hoc principio conciliari
posse putabunt, quod corpus super piano inclinato mobili,
cum huic quoque motus imprimi debeat, breviori tempore
descendet, quam super immobili. Ad hoc quoque insuper
accedit, quod corpus super piano inclinato mobili majorem
consequitur celeritatem, quam natum esset eodem tem-
pore descendens super piano inclinato immobili. Celeritas
enim tempore super piano inclinato mobili acquisita est
 $\frac{1}{2} \sin \theta \sqrt{(M^2 + 2AM \sin^2 \theta + AA \sin^2 \theta)}$ cum super
 $\frac{1}{2} (M + A \sin^2 \theta)$

immobili si $M = \infty$, eodem tempore acquiratur celeritas
 $\frac{1}{2} \sin \theta$, quæ illa est minor. Nihilo tamen minus eadem
conservatur virium vivarum quantitas: cum enim vis viva sit
productum ex massa in celeritatis quadratum, erit corporis
tubo inclusi vis viva $= \frac{A \pi \sin^2 \theta (M^2 + 2AM \sin^2 \theta + AA \sin^2 \theta)}{4(M + A \sin^2 \theta)^2}$

tubis autem seu planis inclinati vis viva est $= \frac{AAM \pi \sin^2 \theta \cos \theta}{4(M + A \sin^2 \theta)^2}$
 $= \frac{A \pi \sin^2 \theta (AM - AM \sin^2 \theta)}{4(M + A \sin^2 \theta)^2}$, quæ ad illam addita dabit

summam $= \frac{A \pi \sin^2 \theta (A + M)}{4(M + A \sin^2 \theta)^2} = Ax \sin \theta$, ideoque eadem
est, ac si corpus A verticaliter ex eadem altitudine $x \sin \theta$
esset delapsum. Conservatio autem virium vivarum ex aequationibus §. 23. V. & VI. sponte sequitur; si enim quinta per

d n &

28 35 58

dx & sexta per ds multiplicetur, habebitur earum summa
 $\frac{2Adxddx - 2Adxdds \cos \theta - 2Adsddx \cos \theta + 2Adsdds + 2Mdsdds}{dt^2}$

$= Adx \sin \theta$, cuius integrale est $\frac{Adx^2 - 2Adxds \cos \theta + Ads^2 + Mds^2}{dt^2}$

$= Ax \sin \theta$. Est vero uti vidimus $\frac{A(dx^2 - 2dxds \cos \theta + ds^2)}{dt^2}$

vis viva corporis A & $\frac{Mds^2}{dt^2}$ vis viva corporis M, quarum
 adeo summa est $= Ax \sin \theta$. Cum igitur $x \sin \theta$ sit altitudo
 verticalis, ex qua corpus jam est delapsum, manifestum est
 eandem prorsus generari vim vivam, ac si corpus A libere
 ex eadem altitudine descendisset.

§. XXVII. Ponamus jam rectam OV super qua planum inclinatum ABC est mobile, ipsam ad horizontem HV esse inclinatam angulo HVO = ζ : in plano autem inclinato ABC sit angulus ABC = α & recta AC ad OV normalis. Porro sit ut ante massâ corporis super AB incedentis = A, & massâ plani inclinati ABC = M: si jam utrumque corpus gravitate naturali præditum statuatur, investigemus motum inde oriundum. Cœperit mons initio ex quiete, quo tempore plani inclinati punctum B in O corpus autem in A sic versatum. Tam elapso tempore s pervenerit planum inclinatum in situm ABC, & corpus in punctum P. Vocentur spatia AP = x & OB = s, ductaque PG ipsi OV parallela,

36

rallela, necesse est ut corpus in P solleitetur secundum direc-
 tionem PB vi $\equiv \frac{2Addx}{dt^2}$, & secundum directionem PB vi
 $\equiv \frac{2Adds}{dt^2}$: ipsum autem planum inclinatum ABC secun-
 dum directionem BV impelli debet vi $\equiv \frac{2Mddx}{dt^2}$ posito ds
 constante, quemadmodum jam supra ostendimus. Sit jam
 pressio, quam corpus P in planum AB secundum direc-
 tionem PN ad AB normalem exerit $\equiv P$, atque corpus P
 æquali vi P secundum directionem oppositam P \approx urgetur.
 Quia nunc plani inclinati ABC motus a nulla vi, nisi cujus
 directio rectæ OV est parallela, afficitur, ex pressione PN \equiv
 P resultabit vis secundum directionem PG urgens $\equiv P \sin \theta$
 ob ang: ANP $\equiv \theta$. Corpus autem in P σ vi P \approx P sol-
 licitabitur in directione PB vi $\equiv -\frac{P \cos \theta}{\sin \theta}$, & in directione
 PG vi $\equiv -\frac{P}{\sin \theta}$. Singulas enim vires ad directiones, secun-
 dum quas motus fieri consideratur, reduci oportet. Est au-
 tem corporis P celeritas secundum PB $\equiv \frac{dx}{dt}$, & secundum
 PG $\equiv \frac{ds}{dt}$, quam communem habet cum motu plani incli-
 natii ABC, quæ secundum directionem BV pariter est $\equiv \frac{ds}{dt}$.
 Ex duplice vero corporis P motu orietur ejus vera celeritas \equiv
 $V(dx)$

AS 37 SE

$$\sqrt{\frac{dx^2 - 2dxds \cos \theta + ds^2}{dt}}, \text{ quæ erit secundum PT di-}$$

recta existente tang BPT = $\frac{ds \sin \theta}{dx - ds \cos \theta}$: hactenus scilicet
eadem formulæ valent, quas ante Inveneramus.

§. XXVIII. Jam consideremus vires gravitatis, quibus
utrumque corpus sollicitatur: ac primo quidem corpus in P
urgebitur vi = A secundum directionem PQ ad horizon-
tem HV perpendicularem. Cum igitur sit angulus HVO
= ζ , erit BIP = $90 - \zeta$ & APQ = $90 - \zeta + \theta$; atque
QPG = $90 - \zeta$. Resolvatur nunc vis PQ = A secundum
directiones motus PB & PG, eritque ex staticis:

$$\text{sin BPG: vim PQ} = \text{sin QPG: vim PB} = \text{sin QPB: vim } \\ PG. \text{ Hinc ergo corpus in P sollicitabitur secundum direc-} \\ \text{tionem PB vi} = \frac{A \cos \zeta}{\sin \theta}, \text{ & secundum PG vi} = \frac{A \cos (\theta - \zeta)}{\sin \theta}$$

Deinde planum inclinatum vi gravitatis = M sollicitatur se-
cundum directionem verticalem GK, ex qua oritur vis se-
cundum directionem ejus motus BV agens = M sin ζ . Si ad
has vires adjiciantur ex, quæ ex pressione sunt ortæ, omnino
corpus P sollicitabitur secundum directionem PB vi =
 $\frac{A \cos \zeta}{\sin \theta} - \frac{P \cos \theta}{\sin \theta}$, quæ vi $\frac{2 A d ds}{dt^2}$ æqualis esse debet.

Deinde idem corpus in directione PG impelletur vi =
 $\frac{A \cos (\theta - \zeta)}{\sin \theta} - \frac{P}{\sin \theta}$, quæ vi $\frac{2 A d ds}{dt^2}$ æqualis est. Deni-

E 3

que

38

que ipsum planum inclinatum in directione B V impelletur
 $v_i = M \sin \zeta + P \sin \theta$, quæ $v_i \frac{2Mddx}{dt^2}$ æqualis est ponen-
da, unde tres sequentes æquationes:

$$\text{I. } \frac{2Addx}{dt^2} = \frac{A \cos \zeta - P \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\text{II. } \frac{2Adds}{dt^2} = \frac{A \cos(\theta - \zeta) - P}{\sin \theta}$$

$$\text{III. } \frac{2Mddx}{dt^2} = M \sin \zeta + P \sin \theta$$

quæ duæ posteriores additæ dabunt ut supra:

$$\text{IV. } \frac{2(A+M)dds}{dt^2} = \frac{A \cos(\theta - \zeta) + M \sin \zeta \sin \theta - P \cos \theta}{\sin \theta}$$

hincque porro derivantur æquationes quinta & sexta:

$$\text{V. } \frac{2Addx - 2Adds \cos \theta}{dt^2} = A \sin(\theta - \zeta), \&$$

$$\text{VI. } \frac{-2Addx \cos \theta + 2Adds + 2Mddx}{dt^2} = (A+M) \sin \zeta.$$

6. XXIX. Si æquatio V per dx & VI per ds multipliceretur, & ambae addantur, prodibit hæc æquatio:

$$\frac{2Adddx - 2Addds \cos \theta - 2Addddx \cos \theta + 2Addsdds + 2Mddds}{dt^2}$$

$$= Addx \sin(\theta - \zeta) + (A+M) ds \sin \zeta; \text{ quæ integrata}$$

$$\frac{Addx^2 - 2Addxds \cos \theta + Adds^2 + Mds^2}{dt^2} = Ax \sin(\theta - \zeta) + (A+M)s \sin \zeta$$

omnino est eadem, quam principium conservationis virium
vivarum

38 39 40

vivis rom præbet, unde summus hujos principii usus in istiusmodi problematis solvendis luculentter apparet, quod statim perducat ad æquationem, quam nos demum per integrationem obtinuimus. Præsens autem problema ex tribus primariis æquationibus eliminanda P facilis resolvetur. Tertia enim per secundam dñs dat $\frac{M}{A} = \frac{M \sin \zeta \sin \theta + P \sin \theta^2}{A \cos(\zeta - \theta) - P}$

unde elicitur $P = \frac{AM \cos^2 \cos \theta}{M + A \sin \theta^2}$; quamobrem quoque hoc casu pressio corporis in tubum perpetuo manet eadem, sequitur ad pondus corporis A ut $M \cos^2 \cos \theta$ ad $M + A \sin \theta^2$, substituatur hic pressionis valor in æquatione prima & habebitur $\frac{2A dd.x}{dt^2} = \frac{A(A + M) \sin \theta \cos \zeta}{M + A \sin \theta^2}$, quæ integrata

$$\text{dat } \frac{dx}{dt} = \frac{(A + M) t \sin \theta \cos \zeta}{2(M + A \sin \theta^2)} \& x = \frac{(A + M) t \sin \theta \cos \zeta}{4(M + A \sin \theta^2)}$$

unde fit $x = \frac{2V(M + A \sin \theta^2)t}{V(A + M) \sin \theta \cos \zeta}$. Tertia vero æquatio

$$\text{dabili } \frac{2M dd.x}{dt^2} = \frac{M(M \sin \zeta + A \sin \theta \cos(\theta - \zeta))}{M + A \sin \theta^2}, \text{ unde fit}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(M \sin \zeta + A \sin \theta \cos(\theta - \zeta))t}{2(M + A \sin \theta^2)} \& x = \frac{(M \sin \zeta + A \sin \theta \cos(\theta - \zeta))t^2}{4(M + A \sin \theta^2)}$$

Alterque ergo motus est uniformiter acceleratus. Casus hic notari meretur quo $\zeta = \theta$, & sinus tubi AB sit horizontalis; num enim corpus A secundum lineam verticalem descendit,

$$\text{fit namque tang BPT} = \frac{(M \sin \zeta + A \sin \theta \cos(\theta - \zeta))' \sin \theta}{(M + A \sin \theta^2) \sin(\theta - \zeta)}$$

quæ

28 40 55

que easū $\zeta = \pi$, sit infinite magna & angulum BPT rectum declarat.

Tab. I. §. XXX. Sint nunc in tubo AB, qui motu sibi parallelo super recta OV poritur mobilis sub angulo constante ABC = θ plura corpora inclusa, quorum motum una cum motu tubi determinare oporteat. Accommodemus autem solutionem ad tria corpota, quia inde solutio pro quovis alio numero facile concludi poterit. Pervenerit elapsso tempore t tubus cum corporibus in situum, quem figura repräsentat, versenturque tria hæc corpora in P, Q & R; sit massa primi in P = A; secundi in Q = B, & tertii in R = C, vocenturque distancie eorum AP = x, AQ = y & AR = z, Deinde sit massa tubi seu totius corporis ABC = M, & spatium motu iam confectum a puncto fixo O, vocetur OB = r. Quatenus ergo hæc corpora in tubo progrediuntur, corpus P cuius celeritas est $= \frac{dx}{dt}$ secundum directionem PB

fallidari debet vi $= \frac{2A dx}{dt^2}$, corpus Q cuius celeritas est $=$

$\frac{dy}{dt}$ vi $= \frac{2B dy}{dt^2}$, & corpus R cuius celeritas est $= \frac{dz}{dt}$ vi $=$

$\frac{2C dz}{dt^2}$, sumto elemento dt constante. Deinde quia hæc corpora quoque motum cum tubo secundum directiones ipsi

OV parallelas habent communem celeritatem $\frac{dr}{dt}$; corpus P in

dire-

33 41 53

directione P E urgeri oportet $v_i = \frac{2A dds}{dt^2}$, corpus Q in directione Q F $v_i = \frac{2B dds}{dt^2}$ & corpus R in directione R G $v_i = \frac{2C dds}{dt^2}$. Ipse denique tubus secundum directionem BV propelli debet $v_i = \frac{2M dds}{dt^2}$. His ergo viribus æquales statui debebunt exæ, quibus tam corpora, quam tubus æstu sollicitantur. Quæ cum cognitæ assumantur ad easdem directiones reduci debent, siveque totidem resultabunt æquationes, quorū ad problema resolvendum requiruntur. In hoc scilicet versatur totius methodi, qua hic utimur, vis, ut vires quæ ex natura motus adeste debere colliguntur, iis quæ vera sollicitant, æquales ponantur.

§. XXXI. Ad vires autem sollicitantes referri oportet pressiones, quas corpora in se invicem exercent, quæ etiæ sunt incognitæ, tamen si in calculum introducantur, inde innoscunt. Sit igitur pressio, quam corpus P in tubum exerit $= P$, pressio corporis Q $= Q$ & pressio corporis R $= R$, quorum pressionum directiones erunt rectæ PL, QM & RN ad AB normales. Ergo ob æqualitatem inter actionem & reactionem corpus P in directione opposita P / urgetur $v_i = P$, corpus Q in directione Q $v_i = Q$ & corpus R in directione R $v_i = R$. Hic jam vires corpora P, Q & R sollicitantes resolvantur secundum directiones AB & OV, reperiaturque

Euleri Opuscula.

F

Corpus

42

	secundum Corpus P	sollicitari P B	secundum Corpus Q	sollicitari Q B	secundum Corpus R	sollicitari R B	sup dire
		$vi = -\frac{P \cos \theta}{\sin \theta}$		$vi = -\frac{Q \cos \theta}{\sin \theta}$		$vi = -\frac{R \cos \theta}{\sin \theta}$	

Ipse autem tubus seu corpus A B C a viribus P R = P,
Q M = Q & R N = R secundum directionem motus sui.
 B V sollicitabitur $vi = P \sin \theta + Q \sin \theta + R \sin \theta$
 Quamobrem si nullæ aliæ vires externæ corpora impellerent,
 sequentes haberemus æquationes :

$$\text{I. } \frac{2A d dx}{dt^2} = -\frac{P \cos \theta}{\sin \theta}; \quad \text{II. } \frac{2A d ds}{dt^2} = -\frac{P}{\sin \theta}$$

$$\text{III. } \frac{2B d dy}{dt^2} = -\frac{Q \cos \theta}{\sin \theta}; \quad \text{IV. } \frac{2B d ds}{dt^2} = -\frac{Q}{\sin \theta}$$

$$\text{V. } \frac{2C d dz}{dt^2} = -\frac{R \cos \theta}{\sin \theta}; \quad \text{VI. } \frac{2C d ds}{dt^2} = -\frac{R}{\sin \theta}$$

$$\text{VII. } \frac{2M d Js}{dt^2} = P \sin \theta + Q \sin \theta + R \sin \theta.$$

Ex quibus æquationibus sequitur fore pressiones P = o, Q = o;
 & R = o, atque singula corpora motu uniformi, eo scilicet
 qui ipsis initio erat impressus, perpetuo esse progressura.

§. XXXII. Impellantur autem singula hæc corpora gra-
 vitate naturali deorsum, sitque recta O V horizontalis, & cum
 corporum P, Q, R pondera sint A, B, C, ex resolutione
 supra

43

supra instituta (23.) sequentes vires, quæ corpora secundum directiones AB & OV sollicitabunt, emergent.

	secundum P B	sollicitabitur $v_i = \frac{A}{\sin \theta}$	secundum P E	sollicitabitur $v_i = \frac{A \cos \theta}{\sin \theta}$
Corpus P	P B	$v_i = \frac{A}{\sin \theta}$	P E	$v_i = \frac{A \cos \theta}{\sin \theta}$
Corpus Q	Q B	$v_i = \frac{B}{\sin \theta}$	Q F	$v_i = \frac{B \cos \theta}{\sin \theta}$
Corpus R	R B	$v_i = \frac{C}{\sin \theta}$	R G	$v_i = \frac{C \cos \theta}{\sin \theta}$

Motus autem tubi, quia est horizontalis, ab ejus gravitate prorsus non afficeretur. Hæc ergo vires cum præcedentibus expressionibus junctæ sequentes præbebunt æquationes:

$$\text{I. } \frac{2Addx}{dt^2} = \frac{A - P \cos \theta}{\sin \theta}; \quad \text{II. } \frac{2Adds}{dt^2} = \frac{A \cos \theta - P}{\sin \theta}$$

$$\text{III. } \frac{2Bddy}{dt^2} = \frac{B - Q \cos \theta}{\sin \theta}; \quad \text{IV. } \frac{2Bdds}{dt^2} = \frac{B \cos \theta - Q}{\sin \theta}$$

$$\text{V. } \frac{2Cddz}{dt^2} = \frac{C - R \cos \theta}{\sin \theta}; \quad \text{VI. } \frac{2Cd ds}{dt^2} = \frac{C \cos \theta - R}{\sin \theta}$$

$$\text{& VII. } \frac{2Mddz}{dt^2} = P \sin \theta + Q \sin \theta + R \sin \theta.$$

Ex æquationibus II, IV, VI & VII conficietur hæc:

$$\frac{2(M + A \sin \theta^2 + B \sin \theta^2 + C \sin \theta^2) dds}{dt^2} = (A + B + C) \sin \theta \cos \theta,$$

& $\frac{2dds}{dt^2} = \frac{(A + B + C) \sin \theta \cos \theta}{M + (A + B + C) \sin \theta^2}$. Quo valore substituto pressiones P, Q, R sequenti modo definientur,

F. 2

P =

33 44 55

$$P = \frac{A M \cos \theta}{M + (A + B + C) \sin \theta^2}$$

$$Q = \frac{B M \cos \theta}{M + (A + B + C) \sin \theta^2}$$

$$R = \frac{C M \cos \theta}{M + (A + B + C) \sin \theta^2}$$

qua ergo singulæ sunt constantis quantitatis.

§. XXXIII. Primum ergo motus plani inclinati ex æquatione
 $\frac{2ddx}{dt^2} = \frac{(A+B+C) \sin \theta \cos \theta}{M + (A+B+C) \sin \theta^2}$ cognoscetur, erit enim ejus

celeritas $\frac{ds}{dt} = \frac{(A+B+C) t \sin \theta \cos \theta}{2M + 2(A+B+C) \sin \theta^2} + M$, & ipsum
 spatium $OB = s = \frac{(A+B+C) t \sin \theta \cos \theta}{4M + 4(A+B+C) \sin \theta^2} + Mt + m$.

Deinde si loco pressionum P, Q, R. valores inventi substituantur, reperietur:

$$\frac{2ddx}{dt^2} = \frac{(A+B+C+M) \sin \theta}{M + (A+B+C) \sin \theta^2} = \frac{2ddy}{dt^2} = \frac{2ddz}{dt^2}; \text{ unde}$$

intelligitur singula corpora in tubo æquales accelerationes habere. Elapo ergo tempore s celeritates corporum in tubo ita se habebunt:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(A+B+C+M) t \sin \theta}{2M + 2(A+B+C) \sin \theta^2} + A$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(A+B+C+M) t \sin \theta}{2M + 2(A+B+C) \sin \theta^2} + B$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(A+B+C+M) t \sin \theta}{2M + 2(A+B+C) \sin \theta^2} + C$$

Denique

§ 45

Denique ad datum tempus distantiae corporum in tubo a puncto ejus summo A ita definiuntur, ut sit

$$AP = x = \frac{(A + B + C + M) n \sin \theta}{4M + 4(A + B + C) \sin \theta^2} + \alpha t + a$$

$$AQ = y = \frac{(A + B + C + M) n \sin \theta}{4M + 4(A + B + C) \sin \theta^2} + \beta t + b$$

$$AR = z = \frac{(A + B + C + M) n \sin \theta}{4M + 4(A + B + C) \sin \theta^2} + \gamma t + c$$

ubi constantes quantitates ex motu initiali determinari debent. Ceterum patet, hos omnes motus esse uniformiter acceleratos, atque principium conservationis virium vivarum in his locum habere. Ex his autem formulis facile erit solutionem ad plura corpora transferre, atque si insuper corpora cum tubo a viribus quibuscumque sollicitentur, inventio æquationum differentio-differentialium nulla difficultate laborabit, cum tantum opus sit, ut vires sollicitantes secundum binas motus directiones resolvantur.

§. XXXIV. Quoniam hæc abunde sufficiunt ad motum corporum in tubo recto mobili cognoscendum, progredior ad tubum curvilineum. Sit igitur tubus curvilineus A P B mobilis secundum lineam rectam O V, cui basi sua B C incumbit ita, ut super ea rependo progrediatur. Sit massa corporis tubo inclusi = A, massa ipsius tubi seu corporis A B C = M, & elapsso tempore t pervenerit tubus in situ, quem figura exhibet, & corpus ipsi inclusum jam sit in P. Vocetur spatium a tubo jam percursum O B = s; & longi-

SS 46 SP

tudo spatii curvilinei in tubo A P = x . Ducatur in P tangentis P T, angulusque PTQ ponatur = ϕ , qui ob figuram tubi curvam erit variabilis; sit R centrum circuli osculantis curvam in P, eritque radius osculi PR = $\frac{-dx}{d\phi}$, qui vocetur = r . Jam corpus in tubo progredietur secundum tangentem P T celeritate = $\frac{dx}{dt}$, ad quem motum necesse est ut corpus secundum directionem PT sollicitetur vi = $\frac{2A dx}{dt^2}$. Deinde vero ut corpus in P motu suo curvaturam tubi sequatur, oportet ut secundum directionem radii osculi PR = r urgeatur vi = $\frac{2A dx^2}{r dt^2}$ (16), seu cum sit $r = \frac{-dx}{d\phi}$ hæc vis erit = $\frac{2A dx d\phi}{dt^2}$, quæ secundum directiones P T & PS resoluta dat pro directione P T = $\frac{2A dx d\phi \cos\phi}{dt^2 \sin\phi}$ & pro directione PS vim = $\frac{2A dx d\phi}{dt^2 \sin\phi}$. Porro quia motus tubi ipsi quoque corpori est communis, tubus autem secundum directionem OV progrereditur celeritate = $\frac{ds}{dt}$, in corpore P etiam inheret celeritas secundum directionem PS ipsi OV parallelam, quæ erit = $\frac{ds}{dt}$, ad quam conservandam corpus in directione PS sollicitari debet vi = $\frac{2A d ds}{dt^2}$.

Omnino

Omr
 $\frac{2Ad}{dt}$
 $\frac{2Ad}{dt^2}$
 recti
 Hæc
 serv:
 in ti
 pon:
 est
 = F
 PR
 reet
 PT
 ipse
 nem
 corp

AS 47 SB

Omnino ergo corpus P in directione PT sollicitatur vi

$$\frac{2Addx}{dt^2} + \frac{2Adxd\Phi \cos\Phi}{dt^2 \sin\Phi} & \text{in directione } Ps \text{ vi} = \frac{2Adds}{dt^2}$$

$\frac{2Adxd\Phi}{dt^2 \sin\Phi}$. Denique motus tibi requirit vim secundum directionem BV vel aliam ipsi parallelam sollicitantem $= \frac{2Mdds}{dt^2}$.

Hæque sunt vires ad motum, quem adesse concipimus, conservandum necessariæ: quibus eæ vires, quibus tñ corpus in tubo, quam ipse tubus aëtu sollicitantur, æquales sunt ponendæ, ut solutio inde adornari possit.

§. XXXV. Nunc primum pressio corporis in tubum est consideranda, quæ secundum directionem PN urgens sit $= P$, atque ipsum corpus secundum directionem oppositam PR reprimet. Hæc vis in corpus P agens secundum directiones motus PT & PS resoluta uabit pro directione PT vim $= -\frac{P \cos\Phi}{\sin\Phi}$ & pro directione PS vim $= -\frac{P}{\sin\Phi}$;

ipse vero tubus ab hac pressione pelletur secundum directionem BV vi $= P \sin\Phi$. Quodsi jam nullæ vires præterea corpora urgeant, hinc habebimus sequentes æquationes:

$$\text{I. } \frac{2Addx}{dt^2} + \frac{2Adxd\Phi \cos\Phi}{dt^2 \sin\Phi} = -\frac{P \cos\Phi}{\sin\Phi}$$

$$\text{II. } \frac{2Adds}{dt^2} + \frac{2Adxd\Phi}{dt^2 \sin\Phi} = -\frac{P}{\sin\Phi}$$

$$\text{III. } \frac{2Mdds}{dt^2} = P \sin\Phi.$$

Ex

SS. 43 SS.

Ex secunda & tertia eliminando ddx elicetur haec aequatio

$$\frac{2AMdx d\Phi}{dt^2 \sin \Phi} = -\frac{MP}{\sin \Phi} - AP \sin \Phi, \text{ quæ dat } P =$$

$-\frac{2AMdx d\Phi}{(M+A \sin \Phi^2) dt^2}$. Prima vero & secunda eliminando

P præbet $ddx = dd_s \cos \Phi$, seu $dd_s = \frac{ddx}{\cos \Phi}$, deinde valor ipsius P in tertia aequatione substitutus producit:

$$\frac{dd_s}{dt^2} = \frac{-Adx d\Phi \sin \Phi}{(M+A \sin \Phi^2) dt^2} \text{ seu } dd_s = \frac{-A dx d\Phi \sin \Phi}{M+A \sin \Phi^2}$$

qui bini ipsius dd_s valores præbent hanc aequationem $\frac{ddx}{\cos \Phi}$

$$+ \frac{Adx d\Phi \sin \Phi}{M+A \sin \Phi^2} = 0 \text{ seu } \frac{ddx}{dx} + \frac{A d\Phi \sin \Phi \cos \Phi}{M+A \sin \Phi^2} = 0$$

cujus integrale est $dx + \frac{1}{2}(M+A \sin \Phi^2) = \alpha dt$; seu $dt =$

$$\frac{dx}{\alpha} \sqrt{(M+A \sin \Phi^2)}. \text{ Hinc porro efficitur: } \frac{dd_s}{ds} =$$

$$\frac{-\alpha A d\Phi \sin \Phi}{(M+A \sin \Phi^2)}, \text{ cuius integrale est } \frac{ds}{ds} = \frac{\alpha A \cos \Phi}{(A+M) \sqrt{(M+A \sin \Phi^2)}}$$

$$+ C \text{ & } ds = \frac{A dx \cos \Phi}{A+M} + \frac{C dx}{\alpha} \sqrt{(M+A \sin \Phi^2)}; \text{ cum igitur}$$

hanc deinceps aequatio inter x & Φ totus motus cognoscitur.

§. XXXVI. Anmetur jam corpus in P gravitate naturali siue recta OV horizontalis, atque corpus in P , cuius massa $= A$, secundum rectam PQ ad OV perpendiculararem urgetur $vI = A$. Resolvatur haec vis secundum directiones motus corporis PT & PS, probabitque vis secundum

PT.

PS 49 CP

PT agens $= \frac{A}{\sin \phi}$, & vis secundum PS $= \frac{A \cos \phi}{\sin \phi}$. Si jam
hae vires insuper in formulas precedentes introducantur, pro-
dibunt sequentes æquationes:

$$\text{I. } \frac{2A dx}{dt^2} + \frac{2Adx d\phi \cos \phi}{dt^2 \sin \phi} = \frac{A - P \cos \phi}{\sin \phi}$$

$$\text{II. } \frac{2Adx}{dt^2} + \frac{2Adx d\phi}{dt^2 \sin \phi} = \frac{A \cos \phi - P}{\sin \phi}$$

$$\text{III. } \frac{2M dx}{dt^2} = P \sin \phi.$$

Ex secunda & tertia eliminetur $\frac{ddx}{dt^2}$, & oritur:

$$\frac{2AM dx d\phi}{dt^2 \sin \phi} = \frac{AM \cos \phi - MP - AP \sin \phi^2}{\sin \phi}$$

$$\text{unde fit } P = \frac{AM \cos \phi}{M + A \sin \phi^2} - \frac{2AM dx d\phi}{(M + A \sin \phi^2) dt^2}$$

qui valor in prima æquatione substitutus præbet:

$$\frac{2dx}{dt^2} + \frac{2Adx d\phi \cos \phi}{dt^2 \sin \phi} = \frac{(M + A) \sin \phi}{M + A \sin \phi^2} + \frac{2M dx d\phi \cos \phi}{(M + A \sin \phi^2) dt^2 \sin \phi} \text{ seu}$$

$$\frac{2dx}{dt^2} + \frac{2Adx d\phi \sin \phi \cos \phi}{(M + A \sin \phi^2) dt^2} = \frac{(M + A) \sin \phi}{M + A \sin \phi^2}. \text{ Multiplice-}$$

mur hanc æquatio per $(M + A \sin \phi^2) dx$, prodibitque:

$$\frac{2M dx dt^2}{dt^2} + \frac{2Adx dd\phi \sin \phi^2}{dt^2} + \frac{2A dx^2 d\phi \sin \phi \cos \phi}{dt^2}$$

$\equiv (M + A) dx \sin \phi$; cuius integrale est:

$$\frac{M dx^2 + A dx^2 \sin \phi^2}{dt^2} \equiv (M + A) \int dx \sin \phi; \text{ unde obtinetur}$$

Euleri Operatoria.

G

$dt \equiv$

35 . 50 . 56 .

$ds = dx \sqrt{\frac{M+A \sin \Phi^2}{(M+A)/dx \sin \Phi}}$. At ductis ad axem verticalem A C applicatis infinite propinquis PS & ps, ob $Pp = dx$ erit $Ss = dx \sin \Phi$, ideoque $\int dx \sin \Phi = AS$. Posita ergo hac abscissa $AS = p$, erit $ds = dx \sqrt{\frac{M+A \sin \Phi^2}{(M+A)p}} = \sqrt{\frac{Md x^2 + Ad p^2}{(M+A)p}}$; quare cum natura curvæ APB sit cognita ac propterea relatio Inter p & x, ad datum tempus locus corporis P super curva APB determinari poterit.

§. XXXVII. Ad motum autem ipsius tubi seu quantitatem s determinandam sumatur æquatio tertia $\frac{2Mddx}{ds} = Pds \sin \Phi$

$= Pdx \sin \Phi \sqrt{\frac{M+A \sin \Phi^2}{(M+A)/dx \sin \Phi}}$; substituatur hic loco P valor

ante inventus, qui posito loco ds valore jam reperto erit

$$P = \frac{AM \cos \Phi}{M+A \sin \Phi^2} = \frac{2AM(M+A)d\Phi / dx \sin \Phi}{(M+A \sin \Phi^2)dx}$$

Hincque proveniet: $\frac{2Mddx}{ds} =$

$$\frac{AMdx \sin \Phi \cos \Phi}{T(M+A \sin \Phi^2)(M+A)/dx \sin \Phi} = \frac{2AMd\Phi \sin \Phi \sqrt{(M+A \sin \Phi^2)}}{(M+A \sin \Phi^2)^2}$$

qua se feliciter est integrabilis, integrata enim dat:

$\frac{ds}{dx} = \frac{A \cos \Phi \sqrt{dx \sin \Phi}}{T(M+A \sin \Phi^2)(M+A)/dx \sin \Phi}$, ad quem si initio, cum corpus erat in A, tubus quieverit, nullam constantem adjicere necesse est. Dat ergo huc expressio celeritatem tubi, qua secundum horizontem B V progreditur. Ex ea tamen si loco

93 51 58

si loco dt valor ante inventus substituatur, orietur

$$ds = \frac{Adx \cos \Phi}{M+A} \text{ & propterea } s = \frac{Adx \cos \Phi}{A+M}. \text{ Quare si ut}$$

ante posuimus abscissam $AS = p$, vocetur applicata $PS = q$

$$\text{erit } dq = dx \cos \Phi, \text{ ac propterea } s = \frac{Aq}{A+M}. \text{ Si quidem}$$

tibi ponetum B initio fuerit in O. Eadem haec æquatio facilis invenitur, si æquationum supra repertarum prima per $\cos \Phi$ multiplicata a secunda subtrahatur, prodibit enim:

$$\frac{2Adds}{dt^2} - \frac{2Add \cos \Phi}{dt^2} + \frac{2Adxd\Phi \sin \Phi}{dt^2} = -P \sin \Phi.$$

Cum jam ex tercia sit $P \sin \Phi = \frac{2MddS}{dt^2}$, erit divisione per $\frac{2}{dt^2}$

instituta:

$$(A+M) ddS = Addx \cos \Phi - Adxd\Phi \sin \Phi$$

quæ integrata dat:

$$(A+M) ds = Adx \cos \Phi \text{ & } ds = \frac{Adx \cos \Phi}{A+M}$$

ut modo inveneramus. Sic igitur totum motum corporis gravis in tubo quocunque curvilineo super plano horizontali mobili determinavimus.

§. XXXVIII. Hinc motus oscillatorius determinari potest corporis super curva secundum horizontem mobili motu. Sit enim proposita curva AB, quæ basi sua C e piano horizontali O V ita incumbat ut sine frictione ultro citroque promoveri possit. Habeat hæc curva duos ramos AB, a B

38 52 58

similes & aequales & tangens ejus in B sit horizontalis. Incepit corpus, cuius massa = A descensum ex puncto A, & nunc elapsu tempore pervenerit in P; ex A demittatur perpendicularis AC, ad eamque ex P ducatur horizontalis PS, sit massa totius molis AC et a = M, & vocatis AS = p, PS = q, & arcu AP = x, erit $dp = dx \sin \Phi$ & $dq = dx \cos \varphi$; atque elementum temporis ds ita exprimetur ut sit $ds = \sqrt{\frac{Md x^2 + Ad p^2}{(M+A)p}}$. Consideretur autem recta verticalis DBE instar axis, & vocetur BE = u; BM = v; PM = w & BP = z; erit $p = u - v$; $dp = -dv$ & $dx^2 = dz^2 = dw^2 + dv^2$. Ex his elementum temporis conficitur $ds = \sqrt{\frac{Md z^2 + Ad w^2}{(M+A)(u-v)}}$: cuius integrale, si ita sumatur ut evanescat posito $w = u$, definiet tempus descensus per arcum AP, atque si ponatur $w = 0$, prodibit tempus dimidiæ oscillationis seu descensus per arcum AB. Quod si jam quadratur, cuiusmodi esse debet curva APR, ut ubicunque corpus in ea descensum inchoaverit, perpetuo eodem tempore ad ipsum punctum B perveniat: hæc quæstio ad tautochronismum pertinet; cui satisfiet, si elementum temporis ita exprimatur, $ds = \frac{du \sqrt{c}}{\sqrt{u(u-m)}}.$

Hinc fieri $\frac{Md z^2 + Ad w^2}{(M+A)(u-v)} = \frac{cdw^2}{u(u-v)}$ seu $Md z^2 + Ad w^2 = \frac{(M+A)c dw^2}{u}$ in qua, cum constans arbitraria c non amplius insit, hæc æquatio exprimet naturam curvæ quæsitæ. Erit

MS 53 SE

$$\text{Erit ergo } dz^2 = \frac{du^2 ((M+A)c - Au)}{Mu} \text{ & } dv^2 =$$

$$\frac{(M+A)du^2(c-u)}{Mu}, \text{ ideoque } dv = du \sqrt{\frac{(M+A)(c-u)}{Mu}};$$

quam
curvam patet esse cycloidem elongatam, quæ ex cycloide
ordinaria, seu tautochrona immobili construitur, si hujus ap-
plicatae augeantur in ratione i ad $\sqrt{\frac{M+A}{M}}$. Perspicuum enim
est, si massa M ponatur infinita, cycloidem communem
prodire.

Sectio II.

De motu corporum in tubis circa axem fixum mobilibus.

§. XXXIX.

Cum ea, quæ spectant ad motum corporum tubis in-
clusorum, in præcedente sectione jam sint tradita,
huic sectioni tantum erunt præmittenda præcepta de
motu corporum circa axem fixum mobilium, ex quibus pa-
test, quomodo iste motus a quibusvis viribus sollicitantibus
alteretur. Corpora autem hic contemplamur inflexibilia,
quorum singulæ partes cum inter se, tum ab axe fixo per-
petuo eisdem teneant distantias. Sit igitur axis iste fixus,
circa quem corpus quodplam est mobile, normalis ad pla-
num tabulæ, idque trajiciat in puncto O, siveque A, B, C
particulae quæcunque corporis in hoc piano sitæ, quarum

G 3

distan-

Tab. II.
Fig. II.