SUR QUELQUES PROPRIETÉS DES SECTIONS CONIQUES, QUI CONVIENNENT À UNE INFINITÉ D'AUTRES LIGNES COURBES.

Par Mr. *EULER.*

Traduit du Latin.

LES SECTIONS Coniques ont plusieurs proprietés qui ne conviennent qu'à elles seules; mais elles en ont aussi plusieurs qui leur sont communes avec une infinité d'autres Courbes. C'est ainsi que l'Axe qui coupe en deux toutes les ordonnées Orthogonales, & le centre, qui est placé au point du milieu de la Courbe, conviennent à un nombre innombrable d'autres lignes courbes, tant Algebriques que transcendantes; comme en est convaincu quiconque examine la nature des lignes courbes. Mais les Geometres ont encore fait voir que d'autres proprietés, qui du premier coup d'oeil paroissent propres aux Sections coniques, sont aussi communes aux autres lignes courbes. Il est manifeste que les proprietés par lesquelles les Sections coniques sont

ſont tout à fait déterminées, leur ſont tellement propres, qu'elles ne peuvent convenir à aucune autre ligne courbe: mais on rencontre outre cela d'autres proprietés, desquelles il eſt difficile de décider, ſi elles ſont propres aux Sections coniques ou non. Pour nous demêler de cet embarras, il faut rechercher par la voye de l'analyſe toutes les lignes courbes, qui puiſſent avoir une certaine proprieté propoſée, & ſi nous trouvons que les Sections coniques ſoient les ſeules Courbes qui y ſatisfaſſent, nous ſerons alors certains que cette proprieté eſt un attribut propre des Sections coniques. Les Geométres ont déja donné par ci par là les ſolutions de pluſieurs queſtions de cette nature; ſolutions qui ont donné des accroiſſemens trés conſidérables à l'Art d'inventer. Nous nous propoſons donc d'ajouter ici quelques autres queſtions ſemblables, tirées de la nature des diametres obliquangles, qui convient principalement aux Sections coniques.

II. Considerons donc cette proprieté de la Parabole, par laquelle il eſt conſtant que toute ligne droite paralléle à l'axe eſt en même tems un diametre obliquangle, qui coupe en deux toutes les droites paralléles entr'elles tirées ſous un certain angle au dedans de la Parabole. En effet ſoit AMF*m* une Parabole, dont l'axe ſoit AD, & qu'on lui tire une paralléle quelconque FI, qui rencontre la Parabole en F, on ſait que cette droite coupe en deux en E toutes les cordes M*m* paralléles à la tangente de la courbe en F. Nous determinons bien la poſition de ces droites coupées en deux, de maniere que nous les diſons paralléles à la tangente en F, mais cette condition eſt déja compriſe dans la nature de la biſection. Car ſi dans une courbe quelconque la droite FG coupe en deux toutes les cordes M*m* inclinées à FI ſous l'angle donné GE*m*, il eſt néceſſaire que la tangente de la courbe en F ſoit paralléle aux ordonnées mêmes;

Fig. 1.

mes; car la plus petite ordonnée & qui evanouït en tombant ſur le point T ſera congruente avec la tangente. Pour découvrir à préſent comment cette proprieté eſt propre à la Parabole, reſolvons le Probléme ſuivant.

III. *TROUVER la Courbe AMF*m *rapportée à l'axe AD, qui à la diſtance DE donnée de l'axe ait le diametre FEG parallele à l'axe AD, qui coupe en deux toutes les ordonnées M*m *tirées avec l'axe à l'angle donné T.*

Soit la diſtance du diametre à l'axe donnée DE $= a$, & le ſinus de l'angle MTA pareillement donné $= m$, le coſinus ſera $= n, = \sqrt{(1-mm)}$ en poſant le ſinus entier $= 1$. Si à preſent dans un point quelconque T de l'axe AD prolongé à l'indéfini, on méne ſous l'angle donné la droite TMm, elle coupera la courbe qu'on cherche en deux points M & m; ou bien la double valeur de la droite TM répondra au point T, dont chacune expoſera la diſtance du point T au point d'interſection M ou m. C'eſt pourquoi ſi nous poſons AT $= t$, & TM $= z$, la relation entre z & t s'exprimera par une équation, qui pour chaque valeur de t fournira une double valeur pour z; & ainſi cette équation ſera quarrée de la ſorte, $zz = 2Pz - Q$, les fonctions quelconques de t etant marquées par P & Q. Cette equation au lieu de la valeur donnée t fournit donc une double valeur pour z, par où eſt indiquée la double interſection de la droite Tm & de la courbe.

IV. Or TM & Tm etant deux racines de z, ſuivant cette équation $zz - 2Pz + Q = 0$, on aura TM $+$ Tm $= 2$P, & par conſéquent $\frac{TM + Tm}{2} = P$. Et parce que E eſt le point du milieu entre les points M & m, cela ſera $\frac{TM + Tm}{2} = TE$, & de là P $=$ TE. Mais à cauſe de DE $= a$ & ſin. DTE $= m$, il en naîtra $\frac{a}{TE} = m$, ou TE $=$ P $= \frac{a}{m}$, d'où l'equation entre z & t sera $zz = \frac{2az}{m} - Q$, Q etant pris pour une fonction quelconque de t. Posons à présent que l'equation entre les coordonnées pour la courbe requise AMm soit l'abscisse AP $= x$, & l'appliquée PM $= y$; $y : z$ sera $= m$, & $\frac{t + x}{z} = n$, d'où vient $z = \frac{y}{m}$; & $t = nz - x = \frac{ny}{m} - x$. La courbe AM$m$ aura donc la proprieté prescrite, si $\frac{yy - 2ay}{mm}$ est égal à une fonction quelconque de $\frac{ny}{m} - x$.

V. Si donc nous posons $ny - mx = X$ & $yy - 2ay = Y$, & que nous en formions l'équation générale entre X & Y rationelle, savoir,

$$o = \alpha + \beta X + \gamma Y + \delta X^2 + \epsilon XY + \zeta Y^2 + \eta X^3 + \theta X^2 Y + \&c.$$

dans cette équation générale seront contenuës toutes les équations possibles entre X & Y, & il en résultera Y $=$ à une fonction quelconque de X, en sorte que $yy - 2ay$ sera tout à fait $=$ à une fonction quelconque de $ny - mx$, comme le requiert nôtre solution. C'est pourquoi pour satisfaire pleinement au Problême proposé, qu'on forme une équation quelconque entre les deux variables X & Y, & qu'alors on mette $ny - mx$ à la place de X, & $yy - 2ay$ à la place de Y, ce qui etant fait on aura une équation entre x & y pour la courbe AMm, qui aura cette proprieté, que la paralléle FG menée à l'axe AD dans la distance DE $= a$ sera le diametre obli-

quangle

quangle de la courbe, qui coupera en deux toutes les cordes Mm, qui font avec lui l'angle mEG, dont le ſinus eſt $= m$, le coſinus $= n$.

VI. Il y a donc un nombre innombrable de lignes courbes, qui ont la proprieté qui etoit preſcrite dans le Problême, ſavoir que dans une diſtance donnée de l'axe AD, le diametre paralléle à l'axe coupe en deux toutes les cordes paralléles à la tangente en F. Or non ſeulement cette proprieté convient à la Parabole, mais dans la Parabole toute ligne droite paralléle à l'axe eſt en même tems le diametre, au lieu que dans les courbes trouvées une ſeule droite paralléle à l'axe a cette proprieté. C'eſt pourquoi pour approcher davantage de la nature de la Parabole, examinons s'il y a outre la Parabole d'autres courbes, dans leſquelles deux ou pluſieurs lignes droites paralléles à l'axe ſoient diametres. Et pour nous en demêler plus aiſément, cherchons, ſi entre les courbes trouvées, outre la Parabole il y en a quelqu'autre, dans laquelle l'axe Ad ſoit au moins le diametre orthogonal. Pour cet effet ſoit propoſé le Probleme ſuivant.

VII. *ENTRE toutes les courbes AM*m, *qui ſont partagées par l'axe AD en deux parties ſemblables & égales, determiner celles qui à une diſtance donnée de part & d'autre de l'axe AD ont deux diametres obliquangles, comme FI, qui coupent en deux toutes les chordes M*m *menées à l'angle donné avec l'axe AD.*

Puisque l'axe AD diviſe la courbe en deux parties ſemblables & egales, il eſt evident, ſi la droite FG paralléle à l'axe AD eſt le diametre, qu'alors dans l'autre partie de la courbe à la meme diſtance de l'axe il doit y avoir un diametre paralléle à l'axe. Mais pour que l'axe AD ſoit un ſemblable diametre orthogonal, il eſt néceſſaire que dans l'équation entre x & y; la variable y ait de part & d'autre un nombre pair de dimenſions, & jamais impair. On doit donc exclurre de l'équation générale trouvée pour la ſolution du

Problême précedent tous les cas dans lesquels les exposans de y se rencontrent impairs. Mais comme X est $= ny - mx$ & $Y = yy - 2ay$, y a de part & d'autre une dimension unique, & par conséquent impaire. On pourra donc des deux variables X & Y former une nouvelle variable Z, dans laquelle ne se rencontrera aucune puissance impaire de y, qui sera $Z = Y + \frac{2aX}{n} = yy - \frac{2max}{n}$. On satisfera donc aussi au Problême précedent par l'equation générale entre Y & Z, savoir: $o = \alpha + \beta Y + \gamma Z + \delta Y^2 + \epsilon YZ + \zeta Z^2 + \eta Y^3 + \theta Y^2 Z +$ &c. Y dénotant $= yy - 2ay$ & $Z = yy - \frac{2max}{n}$, & elle comprendra pareillement en soi toutes les Courbes qui y satisfont.

VIII. Or il paroit premierement que dans tous les termes qui ne contiennent pas Y, il ne se rencontre point de puissances impaires de y, & que par conséquent ces termes, savoir $\alpha, \gamma Z, \zeta Z^2, k Z^3$ &c. doivent etre laissés à l'ecart dans le cas dont il s'agit. Mais le terme Y doit etre exclus, comme emportant y', laquelle puissance ne peut etre otée par aucun des termes suivans, & la même raison donne l'exclusion aux termes YZ, YZ^2, YZ^3 &c. De plus, si l'on admet le terme Y^2 à cause de la puissance y^3 qu'il contient, on sera obligé d'admettre en même tems Y^3 par lequel on puisse oter y^3. Mais Y^3 contient encore y^5 qu'on ne peut oter sans Y^4, & ainsi de suite, une puissance quelconque de Y contenant toujours la puissance impaire de y, qui n'etoit pas dans les précedentes, & qui par conséquent devroit être détruite par les suivantes, d'où naitroit une progression à l'infini. Il en faut dire autant des termes Y^2Z, Y^3Z^2 &c. dont aucun ne sauroit etre employé, sans en admettre une infinité de suivans. On ne satisfera donc à la démande

mande que par cette équation $o = \alpha + \gamma Z + \zeta Z^2 + k Z^3$ &c. qui ne contienne point du tour Υ. Et par cette equation Z sera = à une constante, c'est à dire, $yy - \frac{2max}{n} = C$, qui appartient tellement à la Parabole, qu'elle exclut entierement toutes les autres Courbes.

IX. Outre la Parabole Apollonienne, il n'y a donc point d'autre Courbe composée de deux parties semblables & égales, qui ait au moins un diametre paralléle à l'axe, en sorte que cette proprieté ne convient qu'à la seule Parabole. Mais en vertu de l'equation $yy - \frac{2max}{n} = o$ (car nous pouvons faire la constante C egale à *Zero*) il paroit que non seulement à la distance donnée a, mais qu'à toute distance absolument de l'axe, on trouve le diametre paralléle à l'axe. Car si nous posons $\frac{2ma}{n} = c$, en sorte que $yy - cx = o$, qui est l'equation pour une Parabole quelconque, si à une distance quelconque $= a$, on mene une paralléle à l'axe, elle sera le diametre, & coupera en deux toutes les cordes, qui constituent avec l'axe un angle, dont la tangente soit $= \frac{m}{n} = \frac{c}{2a}$. Excepté donc l'axe qui partage la Courbe en deux parties egales & semblables, il ne sauroit y avoir aucun diametre obliquangle paralléle à l'axe, que toute droite paralléle à l'axe ne soit en même tems diametre. Mais cela doit etre restraint aux seules Courbes Algebriques, car les transcendantes ne sont pas excluës par cette progression de termes Y, Y^2, Y^3 &c. à l'infini; en sorte que ce nonobstant, on peut produire plusieurs Courbes transcendentes, qui ont plusieurs diametres paralleles entr'eux.

X. NOTRE DESSEIN ne nous permet pas de proceder ici à l'examen de ces Courbes transcendentes, car nous n'avons en vuë dans ce Mémoire que les Courbes Algébriques. Cependant, afin qu'il paroiſſe plus clairement, qu'il exiſte actuellement de ſemblables Courbes transcendantes, qui ſatisfont à la queſtion préſente, nous fournirons une équation générale, qui renferme en ſoi toutes ces Courbes transcendantes. Poſé $Y = yy - 2ay$, qu'on cherche la valeur de T par cette équation differentielle d'un degré infini, en poſant l'element dY conſtant.

$$o = \frac{dT}{dY} + \frac{4aYd^3T}{1.2.3.dY^3} + \frac{16a^4Y^2d^5T}{1.2.3.4.5\,dY^5} + \frac{64a^6Y^3d^7T}{1.2.\ldots.7dY^7} + \&c.$$

Alors T qui ſera fonction de Y ſera une ſemblable fonction de y, dans laquelle ne ſe rencontreront aucunes dimenſions impaires de y. C'eſt pourquoi, ſi l'on prend W fonction quelconque tant de T que de $Z = yy - \frac{2max}{n}$, l'equation $W = o$ exprimera toutes les Courbes qui ont la proprieté propoſée; ſavoir, qu'outre l'axe AD diametre orthogonal, elles auront de part & d'autre à une diſtance donnée $= a$ de cette axe des diametres obliquangles paralléles à l'axe.

XI. AU RESTE il eſt à propos de faire attention ici à cette loi générale de la nature, que toute Courbe qui a deux diametres paralleles entr'eux, aura une infinité de ſemblables diametres, egalement diſtans l'un de l'autre. En effet, que la courbe $mABCn$ ait deux diametres Aa, Bb, paralléles entr'eux, dont Aa coupe en deux les cordes Mm paralleles à la tangente en A, & Bb coupe pareillement MN, mn paralléles à la tangente en B. Des termes M & m d'une corde quelconque Mm diviſée en deux par le diametre Aa, qu'on tire les cordes MN & mn paralléles à la tangente en B, on

Fig. 4.

aura

aura $MQ = NQ$ & $mT = nT$. Qu'on tire la corde Nn, et elle ſera un angle donné avec les diametres Aa ou Bb, à cauſe de tous les angles donnés du quarré $MNnm$; enſuite en tirant PSR paralléle à MN, mn, cette nouvelle corde Nn ſera partagée en deux en R, & le point R ſera toujours poſé ſur la ligne droite Cc paralléle à Aa & Bb, & ſa diſtance du diametre Bb ſera égale à la diſtance du diametre B à l'egard du diametre Aa. Cette droite Cc coupera donc en deux toutes les cordes Nn, & ſera par conſéquent le diamétre.

XII. Or l'angle NRc ſera tellement determiné par les angles donnés MQb & mPa, que cot. mPa + cot. NRc ſera $= 2$ cot. MQb; & par conſéquent cot. $NRc = 2$ cot. $MQb -$ cot. mPa: Donc les cotangentes des angles mPa, MQb, NRc conſtituënt une proportion Arithmetique. Mais comme nous avons demontré par les deux diametres Aa, Bb le troiſieme Cc, de même par deux contiguës quelconques on démontrera le ſuivant; par où l'on comprend, que ſi une courbe a deux diametres paralléles entr'eux, elle aura une infinité de diamétres diſtans entr'eux à intervalles egaux. Que ſi la cotangente de l'angle mPa, ſous lequel le premier diametre coupe en deux les cordes, eſt dite $= p$, & la cotangente de l'angle MQb, ſous lequel le ſecond diametre, coupe en deux les cordes $Bb = q$, la cotangente de l'angle NRc, ſous lequel le troiſieme diametre coupe en deux les cordes ſera $= 2q - p$, & la cotangente de l'angle, ſous lequel le quatriéme diametre ſuivant coupe en deux les cordes $= 3q - 2p$, la cotangente pour le cinquieme diametre $= 4q - 3p$, & ainſi de ſuite; en ſorte que les cotangentes de tous les angles, ſous leſquels les diametres qui ſe ſuivent par ordre coupent leurs cordes en deux, conſtituënt une progreſſion arithmetique. Ainſi les Courbes transcendantes, dans leſquelles nous trouvons trois diametres, dont celui

celui du milieu eſt orthogonal, auront en même tems une infinité de diametres.

XIII. De la nous pourrons à préſent démontrer avec la plus grande rigueur Geometrique, que la Parabole eſt la ſeule courbe, dans laquelle toutes les droites ſans exception, qui ſont paralléles à l'axe, ſoient en même tems des diametres. Car pour attribuer cette proprieté à une courbe, il ſuffit qu'elle ait deux diametres qui s'approchent infiniment; alors, en vertu des démonſtrations precedentes, il faut que toutes les droites qui leur ſont paralléles ſoient des diametres. Or nous avons poſé ci deſſus §. X. la diſtance de deux diametres qui ſe ſuivent immediatement $= a$, c'eſt pourquoi cette diſtance a doit etre poſée evanouïſſante. Ce qui etant fait, il naitra de l'equation (§. X.) $o = \frac{dT}{dY}$, & par conſéquent $T =$ à une conſtante. Si donc $W = o$ exprime l'equation générale pour toutes les courbes, dont toutes les droites paralléles à l'axe ſont des diametres, W ſera une fonction quelconque de T ou d'une quantité conſtante, & de $Z = yy - \frac{2max}{n}$. On tirera donc de cette equation Z = à une conſtante, & ainſi $yy - \frac{2max}{n} = C$, laquelle équation ne renferme en ſoi aucune autre Courbe que la Parabole.

XIV. Aprés avoir expedié ce qui concerne les diametres paralléles entr'eux, à la conſidération deſquels la Nature de la Parabole nous avoit invité, examinons les diametres qui concourrent en un point, pour connoitre plus à fonds la nature de l'Ellipſe & de l'Hyperbole, courbes dans leſquelles toutes les droites menées par leur

leur centre ſont des diametres. Car en formant notre raiſonnement de la même maniere, nous comprendrons ſi cette proprieté ne ſe trouve dans aucunes autres Courbes, & à quel egard elle eſt commune à ces Sections coniques avec les autres Courbes. Il n'y a à la verité aucun doute, que ce ne ſoit là un attribut propre des Sections coniques, que toutes les droites ſans exception, qui ſont menées par le centre, ſont en même tems des diametres; mais peut-etre exiſte-t-il d'autres Courbes, qui ſi elles n'ont pas une infinité de diametres qui concourent au même point, en ont pourtant deux ou trois auxquels cela arrive. Pour le découvrir, nous propoſons le Problême ſuivant à reſoudre.

XV. *TROUVER toutes les Courbes AM*m *rapportées à l'axe AC avec cette condition, qu'en menant du point donné C la droite CF, qui faſſe avec l'axe l'angle donné ACF, cette droite coupe en deux en E toutes les cordes M*m *paralléles à la tangente en F.*

D'ABORD IL eſt manifeſte, que ſi toutes les cordes que la droite CF coupe en deux, ſont paralléles entr'elles, la tangente au point F doit auſſi leur etre paralléle. Comme donc l'angle ETC eſt conſtant, poſons le ſinus de l'angle ETC $= m$; le coſinus $= n = \surd\,(1 - mm)$; de plus que le ſinus de l'angle ACT ſoit $= p$, le coſinus $= q = \surd\,(1 - pp)$, le ſinus de l'angle CEm, ſous lequel le diametre CF coupe en deux les cordes Mm ſera $= mq + np$, & le coſinus $= nq - mp$. Puiſque le point T eſt variable, poſons CT $= t$, & en menant de T ſous l'angle donné CTE la droite TMm, elle coupera la Courbe en deux points M & m; & ainſi la valeur de la droite TM, qui ſoit $= z$, aura une double valeur, l'une pour TM, l'autre pour Tm. C'eſt pourquoi z ſera determiné par t par une équation quarrée, qui soit $zz = 2Pz - Q$, prenant P & Q pour fonctions de Ft; & par conséquent TM sera $= P - \sqrt{(PP-Q)}$ & $Tm = P + \sqrt{(PP-Q)}$.

XVI. Ainsi $TM + Tm$ sera $= 2P$, & parce que E est le point du milieu de la corde Mm, TE deviendra $= P$. Mais à cause des angles donnés dans le triangle CTE, on aura

$$CT : TE = \sin A.\ CET : \sin A.\ TCE$$
$$t : \quad P = mq + np : \quad p$$

d'où nous trouvons $P = \frac{pt}{mq+np}$; & de là nous aurons entre z & t cette equation: $zz = \frac{2ptz}{mq+np} - Q$, Q demeurant une fonction quelconque de t. Pour connoitre à présent la Courbe, posons $(CP = x)$ $PM = y$, on aura $\frac{y}{z} = \frac{PM}{TM} = m$, & par conséquent $z = \frac{y}{m}$ & $PT = t - x = nz = \frac{ny}{m}$, ensorte que soit $= \frac{mx + ny}{m}$. D'où résulte pour la Courbe demandée cette équation $\frac{yy}{mm} = \frac{2p\,(mx+ny)y}{mm\,(mq+np)} - Q$, Q dénotant une fonction quelconque de $t = \frac{mx - ny}{m}$. C'est pourquoi on aura $\frac{2pmxy + (np-mq)yy}{mm\,(mq+np)}$, ou $yy + \frac{2mpxq}{np-mq}$ pour fonction quelconque de $x - \frac{ny}{m}$. Ou si l'on dit $x - \frac{ny}{m} = X$ & $yy +$

2 mp

$\frac{2mpxy}{np-mq} = Y$, & que W ſoit fonction quelconque de X & Y, l'équation $W = o$ exprimera la nature de toutes les Courbes, qui ſatisfont à ce qu'on demande.

XVII. Cette solution eſt encore extrémement eloignée de notre but, car elle ne contient que les Courbes, qui renferment un ſeul diametre obliquangle, enſorte que l'interſection C eſt tout à fait arbitraire, comme dependant de la poſition de l'axe AC qui eſt arbitraire. Mais nous ne laiſſerons pas de nous approcher davantage de l'éxécution de notre deſſein par le moyen de cette ſolution, ſi entre ces Courbes innombrables, nous choiſiſſons celles que l'axe AC diviſe en deux parties ſemblables & egales, ou dans lesquelles l'axe AC eſt en même tems le diametre orthogonal. Il eſt donc requis pour cet effet que dans l'équation ci deſſus trouvée, les puiſſances de y ayent par tout des expoſans pairs, & qu'ainſi les puiſſances impaires de y ſe détruiſent. Puis donc que l'equation générale trouvée, en poſant $X = x + \frac{ny}{m}$ & $Y = yy + \frac{2mpxy}{np-mq}$ revient à ceci $o = \alpha + \beta X + \gamma Y + \delta X^2 + \varepsilon XY + \zeta Y^2 + \eta X^3 + \&c.$ les coefficièntes doivent etre determinées de maniere que les puiſſances impaires de y evanouïſſent.

XVIII. Et d'abord il paroit que β doit etre $= o$, parce que le terme $\frac{ny}{m}$ ne pourroit etre oté par aucun des ſuivans, comme d'un autre coté l'on voit que γ & δ peuvent etre determinés en ſorte que des termes $\alpha + \gamma Y + \delta X^2$ ſortent les dimenſions impaires de

 y: qu'on

y: qu'on poſe $\gamma = np - mq$ & $\delta = - \frac{mmp}{n}$, on aura $(np-mq)$ $Y - \frac{mmp}{n} X^2 = -mqyy - \frac{mmpxx}{n}$. Si donc on poſe $Z = nqyy + mpxx = mpX^2 - \frac{n(np-mq)}{m} Y$, alors Z ſera une fonction, dans laquelle y a ſeulement des dimenſions paires. C'eſt pourquoi ſi W eſt mis pour fonction quelconque de $Z = nqyy + mpxx$ & $X = mx + ny$, alors l'equation $W = o$ ſatisfera également comme la précedente, & outre cela elle ſera plus propre à rejetter les dimenſions impaires de y.

XIX. En posant donc $X = mx + ny$ & $Z = mpxx + ngyy$, l'equation pour les Courbes, dans leſquelles la droite CF eſt diametre, ſera $o = \alpha + \beta X + \gamma Z + \delta X^2 + \varepsilon XZ + \zeta Z^2 + \eta X^3 +$ &c. Si donc tous les termes dans leſquels X ſe trouvent evanouïſſent, la variable y aura partout des dimenſions paires, & la Courbe qui en réſulte ſera en même tems diviſée par l'axe AC en deux parties ſemblables & égales. Alors Z ſera $=$ C ou $aa = mpxx + nqyy$, laquelle equation contient les Sections Coniques decrites autour du centre C & ſur l'axe principal AC. En poſant donc bb à la place de $\frac{aa}{nq}$, on aura $yy = bb - \frac{mp}{nq} xx$. Soit à préſent l'equation pour les Sections coniques $yy = bb - kxx$ générale, & il paroit qu'elle a en effet autant d'etenduë que celle-ci. En menant donc du centre de la Section conique une droite quelconque CF faiſant un angle avec l'axe FCA, dont la tangente ſoit $= \frac{p}{q}$; cette droite coupera en deux toutes les cordes M m,

qui

qui etant prolongées font avec l'axe AC l'angle MTC, dont la tangente eſt $= \frac{m}{n} = K. \frac{q}{p}$. Ainſi la tangente de l'angle CE*m*, ſous lequel les cordes M*m* ſont coupées en deux par le diametre CF ſera $= \frac{pp + kqq}{(1-k)pq}$. D'où l'on voit que la tangente $\frac{p}{q}$ n'etant pas déterminée par ſoi-même, mais pouvant etre priſe arbitrairement, toute droite CF tirée du centre eſt un diametre; & ſi $k = 1$, toute cette droite ſera un diametre orthogonal, & la courbe un cercle, comme la choſe eſt évidente par elle même.

XX. Nous pourrons encore découvrir d'autres Courbes, dans lesquelles AC ſoit le diametre orthogonal, ſi nous déterminons les coefficientes des termes, dans lesquels X ſe trouve, de maniere que y n'ait nulle part des dimenſions impaires. Or il paroit d'abord que X ni X^2 ne ſauroient s'y trouver, parce que y & xy ne ſauroient etre otés par aucun des termes ſuivans; car afin que y n'entrât pas dans X, il faudroit que n fut $= o$, & afin que le terme xy ne fut pas dans XX, mn devroit etre $= o$. Mais les termes X^3 & XZ fourniſſent des termes homogenes, d'où les termes y^3 & xxy pourront etre rejettés, ſi np eſt $= 3mq$. Et afin que des termes X^4, X^3Z, & XZ^2, qui ſont homogenes, on puiſſe rejetter les dimenſions impaires, il faut ou que $\frac{np}{mq}$ ſoit $= 3$, ou $\frac{np}{mq} = 5 + 2\sqrt{5}$. De la même maniere il doit toujours y avoir une certaine relation entre les tangentes $\frac{m}{n}$ & $\frac{p}{q}$, afin de pouvoir ſatisfaire à ce qu'on demande; & ſi cette relation ne ſe trouve pas, il

eſt

eſt impoſſible de produire d'autres Courbes qui y ſatisfaſſent outre les Sections coniques.

XXI. Pour déveloper donc les cas particuliers, dans lesquels $\frac{m}{n}$ a une certaine relation avec $\frac{p}{q}$, poſons afin d'abréger $\frac{m}{n} = g$ & $\frac{mp}{nq} = k$, afin que X ſoit $= gx + y$ & $Z = Kxx + yy$. Qu'on prenne à préſent les termes homogenes, dans lequels x & y ont trois dimenſions, qui ſont $\alpha X^3 + \beta XZ$; ſubſtitution faite, ils donneront ces termes,

$$\begin{matrix} +\alpha g^3 \\ +\beta g k \end{matrix} x^3 \begin{matrix} +3\alpha g^2 \\ +\beta k \end{matrix} x^2 y \begin{matrix} +3\alpha g \\ +\beta g \end{matrix} x y^2 \begin{matrix} +\alpha \\ +\beta \end{matrix} y^3$$

dans lesquels les termes, qui contiennent les dimenſions impaires de y, doivent evanouïr. $\alpha + \beta$ ſera par conséquent $= o$ & $3\alpha g^2 + \beta k = o$; d'où $\beta = -\alpha$, & $k = 3gq$ ou $\frac{mp}{nq} = \frac{3mm}{nn}$, & de là $\frac{p}{q} = \frac{3m}{n}$. Or alors $\alpha X^3 + \beta XZ$ ſe change en $2\alpha(gxyy - q^3x^3)$ ou $2\alpha\left(\frac{m}{n}xyy - \frac{m^3x^3}{n^3}\right)$.

XXII. Si donc la tangente de l'angle ACF qui eſt $\frac{p}{q}$ eſt trois fois plus grande que la tangente de l'angle CTE, qui eſt $\frac{m}{n}$, alors on pourra produire des Courbes innombrables AMm, dans lesquelles AC eſt le diametre orthogonal, & CF le diametre obliquangle. De plus qu'on poſe la tangente de l'angle ACE $= \theta$

on

on aura $\frac{p}{q} = \theta$ & $\frac{m}{n} = \frac{1}{3}\theta$, & la tangente de l'angle CEM ſera $= \frac{4\theta}{3-\theta\theta}$. Alors en prenant $Z = yy + \frac{1}{3}\theta\theta xx$, & $V = \frac{1}{3}\theta xyy - \frac{1}{27}\theta^3 x^3$, que W denote une fonction quelconque de Z & V, & l'equation $W = o$ exprimera toujours la Courbe, qui poſſede la proprieté ſusdite. Or il eſt manifeſte, AC etant le diametre orthogonal, que la droite menée par C à l'autre partie de AC, qui fera par embas avec AC un angle, dont la tangente ſoit $= \theta$, ſera un diametre obliquangle, de même que CF menée par en haut. Donc les Courbes auxquelles cette proprieté convient, ſeront compriſes dans l'equation générale: $o = \alpha + \beta Z, \gamma V + \delta Z^2 + \varepsilon ZV + \zeta V^2 + \eta Z^3 +$ &c.

XXIII. Ainsi entre une infinité de Courbes de cette nature nous avons les lignes du troiſieme ordre, qui ſont compriſes dans cette equation: $a^3 = byy + \frac{1}{3}\theta\theta\mathfrak{b}xx + \frac{1}{3}\theta xyy - \frac{1}{27}\theta^3 x^3$, ou $yy = \frac{a^3 - \frac{1}{3}\theta\theta bxx + \frac{1}{27}\theta^3 x^3}{b + \frac{1}{3}\theta x}$. Ces Courbes ſont contenües dans les Hyperboles redundantes de Newton, qui ont un ſeul diametre orthogonal. L'equation générale pour celles-ci eſt $yy = \frac{Av^3 + \beta v^2 + Cv + D}{v}$, en prenant le commencement de l'abſciſſe dans le point de l'axe, où l'aſymtote aux appliquées y lui devient parallele. Entre ces Courbes donc celles qui ſatisferont à ce qu'on demande ſont celles où C ſera $\frac{BB}{4A}$. Car alors, en prenant $v = \frac{-B}{6A}$, on aura dans l'axe le point C, duquel ſi l'on mene

à l'axe

à l'axe la droite CF, faiſant avec l'axe l'angle CFA, dont la tangente ſoit $= 3\sqrt{A}$, cette droite ſera le diametre obliquangle, coupant en deux les cordes Mm, qui ſont avec l'axe CA un angle, dont la tangente $= \sqrt{A}$, & la tangente de l'angle, ſous lequel ces cordes rencontrent le diametre ſera $= \frac{4\sqrt{A}}{13A}$.

Fig. 6. XXIV. Soit donc MMmm une ſemblable Hyperbole redundante, ayant l'axe AP, qui eſt en même tems le diametre orthogonal, en ſorte qu'en prenant l'abſciſſe AP $= v$, & en poſant l'appliquée PM $= y$, yy ſoit $= \frac{Av^3 + Bv^2 + Cv + D}{v}$ $= \frac{(2Av + B)}{4A} + \frac{D}{v}$, C etant $= \frac{B^2}{4A}$, la droite LAL normale à l'axe ſera une aſymtote de la Courbe, & les deux autres aſymtotes HDG ſe croiſeront dans le point D de l'axe, de maniere que AD ſoit $= \frac{B}{24}$; la tangente de l'angle HDa ſera $= \sqrt{A}$, & toute la Courbe ſera compoſée de trois parties en forme d'Hyperbole MEM, $m k m$, & m C m. A preſent qu'on prenne AC $= \frac{B}{6A}$, & qu'on mene au deſſus & au deſſous les droites CF, CF, en ſorte que la tangente de l'angle CFA ſoit $= \zeta\sqrt{A}$ ces deux droites du diametre couperont en deux toutes les cordes Mm, qui etant prolongées ſont avec l'axe l'angle MTA, dont la tangente $= \sqrt{A}$; leſquelles droites Mm coupées en deux ſeront donc paralléles à l'un des diametres. Au reſte cette Courbe peut recevoir pluſieurs figures differentes, ſuivant qu'on determine la valeur de B, pourvu que A ſoit un nombre affirmatif. Il n'y à la

verité

verité dans la figure qu'une ſeule interſection de la Courbe avec l'axe en B; mais il peut arriver que la Courbe coupe l'axe en trois points, & cela arrive en effet, ſi en poſant $AB = a$, on prend $v = \frac{-a}{2} - \frac{B}{24} \pm \sqrt{\left(-\frac{Ba}{2A} - \frac{3aa}{4}\right)}$.

XXV. Les memes valeurs (§. XXII) $Z = yy + \frac{1}{3}\theta\theta xx$ & $V = \frac{1}{3}\theta xyy - \frac{1}{27}\theta^3 x^3$, peuvent faire trouver des Courbes innombrables d'ordres ſupérieurs, qui outre le diametre orthogonal, ayent deux ou pluſieurs diametres obliquangles. Mais comme la formule V ſe trouve par $\alpha X^3 + \beta XZ$ (§. XXI.) en faiſant evanouïr les puiſſances impaires de y; pareillement on peut faire la même choſe dans des dimenſions ſuperieures. En effet en prenant $V = \alpha X^4 + \beta X^2 Z$, & en poſant pour abreger $\frac{m}{n} = g$ & $\frac{mp}{nq} = k$, on aura

$$\begin{matrix} +\alpha g^4 \\ +\beta g^2 k \end{matrix} x^4 \begin{matrix} +4\alpha g^3 \\ +2\beta g k \end{matrix} x^3 y \begin{matrix} +6\alpha g^2 \\ +\beta k \\ +\beta g g \end{matrix} x^2 y^2 \begin{matrix} +4\alpha g \\ +2\beta g \end{matrix} x y^3 \begin{matrix} +\alpha \\ +\beta \end{matrix} y^4$$

Donc $2\alpha g^2 + \beta k$ ſera $= o$, & $2\alpha + \beta = o$: d'où $\beta = -2a$ & $k = gg$, ou $\frac{mp}{nq} = \frac{mm}{nn}$. Donc $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, & ſi l'on poſe comme auparavant $\frac{p}{q} = \theta$, cela ſera $\frac{m}{n} = \theta$: $g = \theta$; $\alpha k = \theta\theta$; & ainſi V ſera $= -\alpha\theta^4 x^4 + 2\alpha\theta^3 x^2 y^2 - \alpha y^4$, ou $V = -\alpha(\theta^2 xx - yy)^2$. C'eſt pourquoi ſi W eſt pris pour une fonction quelconque de $Z = \theta^2 xx + yy$ & $V = (\theta^2 xx - yy)^2$, & qu'on poſe $W = o$, la Courbe, outre le diametre orthogonal CA, aura les diametres obliquangles menés par C, qui font avec CA un angle,

 dont

dont la tangente $= \theta$; & ces diametres couperont en deux les cordes Mm inclinées à l'axe CA ſous l'angle, dont la tangente $= \theta$. Entre ces Courbes la plus ſimple eſt celle qui eſt exprimée par cette équation $\alpha^4 = \vartheta^4 x^4 y^4$. Au reſte toutes ces Courbes, outre le diametre orthogonal CA ont auſſi un diametre orthogonal qui y inſiſte normalement en C; ce qui ſe comprend par ce que dans ces equations non ſeulement y, mais encore x, ont partout des dimenſions paires.

XXVI. En se ſervant de la même maniere on peut aller plus loin, & par l'élimination des puiſſances impaires de y qu'on rejette des membres homogenes des puiſſances ſuperieures, on trouve d'autres fonctions pour V, qui requerront d'autres raiſons entre $\frac{m}{n}$ & $\frac{p}{q}$. Nous ne nous y arrêterons pourtant pas davantage, mais nous rapporterons une proprieté d'une trés grande etenduë à l'egard des diametres, qui peut etre accommodée à toutes les Courbes qu'on
Fig. 5. trouvera par cette voye. Voici de quoi il eſt queſtion. Si la Courbe ABC a deux diametres AO, BO, qui s'entrecoupent au point O, cette même Courbe aura pluſieurs diametres, qui concourront au point O, & quelquefois à l'infini, à moins que les diametres ſuivans ne coincident avec les précedens. Pour expliquer ceci, que la Courbe ait deux diametres AO, & BO, dont AO coupe en deux les cordes Mm ſous l'angle mPO, & BO coupe de même les cordes MN ſous l'angle MQO. Des termes M & m d'une corde quelconque Mm coupée en deux par le diametre AO, qu'on mene des ordonnées à l'autre diametre BO, qui ſoient MN & mn, coupées en deux par le diametre BO en Q & q. En menant donc la corde Nn, tous les angles ſeront donnés dans le quarré MN nm, & ſi de P on

mene

mene PR paralléle à MN, *mn*, cette ligne coupera la corde N*n* en R. Or en tirant ORC, les angles BOC & NRC seront aussi donnés, d'où il s'ensuit que la droite OC sera encore un diametre, qui coupera en deux les cordes N*n* menées à l'angle donné NRO.

XXVII. Pour comprendre plus distinctement ce qui vient d'etre dit, que la tangente de l'angle *m*PO soit $=\alpha$; la tangente de l'angle AOB$=$B, & la tangente de l'angle MQO $=\beta$. Il en résultera la cotangente de l'angle BOC $=\frac{1}{B}+\frac{2}{\beta}$, & par conséquent la tangente de l'angle BOC, qui soit $=C=\frac{\beta B}{\beta+2B}$, & si l'on dit la tangente de l'angle NRO $=\gamma$, γ sera $=\frac{\alpha\beta^2(1+BB)}{2\alpha\beta+4\alpha B-2\alpha\beta B^2-\beta^2-4\beta B-4BB-\beta\beta BB}$. De là, si les tangentes suivantes des angles dans le même ordre sont posées D & δ, D sera $=\frac{\gamma C}{\gamma+2C}$ & $\delta=\frac{\beta\gamma(1+CC)}{2\beta\gamma+2\beta C-2\beta\gamma C^2-\gamma^2-4\gamma C-4CC-\gamma\gamma CC}$. Et ainsi de suite on trouvera des diametres à l'infini, à moins qu'ils ne coïncident exactement avec le premier.

XXVIII. A ces problemes sur les diametres ou paralléles entr'eux, ou concourans à un point donné, j'en joindrai un autre qui y a de l'affinité, & dont l'habile Mr. *Clairaut* fait mention dans une des Lettres qu'il m'a fait l'honneur de m'ecrire. L'origine de ce Probleme vient de la proprieté qu'a l'Ellipse, par laquelle les Parallélogrammes inscrits dans l'Ellipse autour des deux diametres conjugués, comprennent partout la même aire. Or comme toutes

 les

les droites tirées dans les autres Courbes d'un point fixe, comme d'un centre, ne ſont pas des diametres, nous ne ferons pas attention dans cette recherche à la condition, qui concerne les diametres, & nous propoſerons ſeulement le Problême de la maniere ſuivante.

Fig. 3. *TROUVER une Courbe A Mam B qui ait deux diametres orthogonaux ACB & a C perpendiculaires entr'eux; que le centre de cette Courbe ſoit par conſéquent en C, & que comme l'Ellipſe elle ait cette proprieté, qu'en menant du centre C un rayon quelconque CM, & en même tems un autre rayon CM parallèle à la tangente MT au point M, l'aire du triangle ſoit MCm conſtante par tout; etant égale à l'aire du triangle ACa.*

XXIX. Pour résoudre ce Problême, poſons, aprés avoir fait tomber une perpendiculaire MP du point M ſur l'axe AC, l'abſciſſe CP $= x$ & l'appliquée PM $= y$; l'equation pour la Courbe, qui ſoit W $= o$, devra d'abord etre telle, que x & y ayent de part & d'autre des dimenſions paires, en ſorte que ſoit que l'on poſe x, ſoit y, ou l'une & l'autre, l'equation négative demeure toujours la même. W ſera donc une fonction quelconque de xx & yy; car cette condition eſt requiſe par la proprieté preſcrite, en vertu de laquelle, tant la droite AC que a C doivent etre des diametres orthogonaux de la Courbe. A preſent que du point M on tire pareillement ſur l'axe AB la perpendiculaire mp, & que l'on diſe C$p = t$ & $pm = u$, il faut à cauſe de la continuité de la Courbe que la même equation ſe trouve entre t & u, qui eſt entre x & y; ou que ſi dans l'equation W$=o$, à la place de xx on poſe tt, la valeur de yy ſe change uu.

XXX. Qu'on prenne une nouvelle variable z, par laquelle on détermine les valeurs xx & yy, en ſorte qu'en rejettant z, il en naiſſe l'equation pour la Courbe W $= o$. Que l'on conçoive de plus

plus une telle quantité z, qu'en la faisant negative, xx se change en tt, & yy en uu, car alors il est manifeste qu'en rejettant z, l'equation entre tt & uu doit se trouver, de même qu'entre xx & yy, comme la loi de la continuité le requiert. Soient donc P&R fonctions paires de z, qui demeurent les mêmes, en posant $-z$ à la place de $+z$; & que Q & S soient fonctions des dimensions impaires de z, qui se changent en leurs negatives, si l'on pose $-z$ à la place de $+z$. Si donc l'on pose $xx = P + Q$, & $yy = R + S$: en faisant z negatif, on aura $H = P - Q$ & $uu = R - S$. Par ces dénominations on parvient donc à découvrir, premiérement que les parties de la Courbe AMa & amB constituënt la même Courbe continuë, & ensuite que tant AC que aC sont des diametres orthogonaux.

XXXI. De plus puisque la droite Cm doit etre paralléle à la tangente MT, à cause de la soutangente $PT = -\frac{y\,dx}{dy}$, cela sera $PT : PM = Cp : pm$, ou $dx : dy = t : u$, d'où naît $u\,dx + t\,dy = o$. Enfin comme l'aire du triangle MCm doit etre constante, qu'on cherche cette aire, qui est $= \frac{1}{2}$ CM. Cm. sin A. MCm. Mais sin A. MCm = sin A (MCP + mCp) $= \frac{PM.Cp + CP.pm}{CM.Cm}$; d'où l'aire du triangle MCm sera $= \frac{ty + ux}{2}$; par conséquent la valeur de $\frac{ty + ux}{2}$ doit etre constante, & ainsi sa differentielle sera égale à Zero, en sorte que $y\,dt + t\,dy + u\,dx + x\,du = o$. Or $u\,dx + t\,dy$ etant $= o$, cela sera $y\,dt + x\,du = o$; par laquelle

 équation

équation, on comprend que la tangente mt fera paralléle au rayon CM, & qu'ainsi les rayons CM & Cm doivent etre reciproquement paralléles à leurs tangentes MM & mt.

XXXII. Posons $ty + ux = 2cc$, & comme x est $= \sqrt{(P+Q)}$ $y = \sqrt{(R+S)}$; $t = \sqrt{(P-Q)}$ & $u = \sqrt{(R-S)}$, substitutions faites on aura $\sqrt{(P+Q)(R-S)} + \sqrt{(P-Q)(R+S)} = 2cc$. Que V denote une fonction quelconque impaire de Z, & qu'on pose $\sqrt{(P+Q)(R-S)} = cc + V$; en faisant Z negatif, $\sqrt{(P+Q)(R-S)}$ se changera en $\sqrt{(P-Q)(R+S)}$ en sorte que $\sqrt{(P-Q)(R+S)}$ soit $= cc - V$, comme le requiert la nature de la condition. On peut donc en inférer $R+S = \frac{(cc-V)^2}{P-Q}$ & $R-S = \frac{(cc+V)^2}{P+Q}$. Ainsi x sera $= \sqrt{(P+Q)}$; $t = \sqrt{(P-Q)}$; $y = \frac{cc-V}{\sqrt{(P-Q)}}$ & $u = \frac{cc+V}{\sqrt{(P+Q)}}$. De là naît $dx = \frac{dP+dQ}{2\sqrt{(P+Q)}}$ & $dy = \frac{-dV}{\sqrt{(P-Q)}} - \frac{(cc-V)(dP-dQ)}{2(P-Q)\sqrt{(P-Q)}}$: & en conséquence $udx + tdy = \frac{(cc+V)(dP+dQ)}{2(P+Q)} - dV - \frac{(cc-V)(dP-dQ)}{2(P+Q}$. Comme donc $udx + tdy$ doit etre $= o$: o sera $= (PP-QQ)\,dV - V(PdP-QdQ) - cc\,(PdQ-QdP)$.

XXXIII.

XXXIII. QU'ON DIVISE cette équation par $(PP-QQ)^{\frac{3}{2}}$, & cela fera $\frac{dV}{\sqrt{(PP-QQ)}} - \frac{V(PdP-QdQ)}{(P^2-Q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{cc(PdQ-QdP)}{(P^2-Q^2)^{\frac{3}{2}}}$; qui aprés l'intégration donne $\frac{V}{\sqrt{(PP-QQ)}} = \int \frac{cc(PdQ-QdP)}{(PP-QQ)^{\frac{3}{2}}}$. Posons $Q = Pz$, puisque P est une fonction paire, Pz deviendra une fonction impaire, telle que doit etre Q, & par conséquent à cause de $dQ = Pdz + zdP$, on aura $\frac{V}{P\sqrt{(1-zz)}} = \int \frac{ccdz}{P(1-zz)^{\frac{3}{2}}}$, qui doit etre une formule intégrable, si nous voulons découvrir les Courbes Algébriques. Soit donc $\int \frac{ccdz}{P(1-zz)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Z}{\sqrt{(1-zz)}}$, afin que V devienne $= PZ$, d'où il paroit que Z doit etre une fonction impaire de Z, afin que V devienne une fonction impaire, comme nous l'avons supposé. Or de là naît $\frac{ccdz}{P} = (1-zz)\,dZ + Zzdz$ & P $= \frac{ccdz}{(1-zz)dZ + Zzdz}$.

XXXIV. EN PRENANT donc Z pour une fonction quelconque impaire de Z, soit $P = \frac{ccdz}{(1-zz)dZ + Zzdz}$; qui est une fonction paire, donc $Q = Pz = \frac{cczdz}{(1-zz)dZ + Zzdz}$; & $V = PZ = \frac{ccZdz}{(1-zz)dZ + Zzdz}$. On arrivera donc par ces voyes à la solution complette du Problême; & x & y seront determinés de la maniere suivante par z & sa fonction impaire Z prise arbitrairement; en sorte que xx soit $= \frac{cc(1+z)dz}{(1-zz)dZ + Zzdz}$; & yy =

$= \frac{cc\,(1-z)\,(1+z)\,(dZ - Zdz)^2}{((1-zz)\,dZ + Zzdz)\,dz}$. Or de z & Z faits negatifs résultent pour tt & uu les mêmes valeurs qui leur conviennent en vertu de ce qui precede, $tt = \frac{cc\,(1-z)\,dz}{(1-zz)\,dz + Zzdz}$ & $uu = \frac{cc\,(1+z)\,((1-z)\,dZ + Zdz)^2}{((1-zz)\,dZ + Zzdz)\,dz}$. On déduira donc de là un nombre innombrable de Courbes doüées des proprietés proposées, qui premierement ayent autour des axes principaux aC & AC des parties semblables & égales, & qui ensuite en menant par le centre C les deux rayons CM & Cm, aux tangentes de la Courbe en M & m reciproquement paralléles, donnent pour aire du triangle MCm $= cc$.

XXXV. On trouvera donc l'equation pour la Courbe entre x & y, si l'on rejette la variable Z de ces deux equations; $xx = \frac{cc\,(1+z)\,dz}{(1-zz)\,dz + Zzdz}$ & $yy = \frac{cc.(1-z)\,((1+z)\,dZ - Zdz)^2}{((1-zz)\,dZ + Zzdz)\,dz}$; & en divisant l'une par l'autre nous aurons $\frac{yy}{xx} = \frac{(1-z)\,((1+z)\,dZ - Zdz)^2}{(1+z)\,dz^2}$ & $\frac{y}{x} = \frac{((1+z)\,dZ - Zdz)\sqrt{(1-zz)}}{(1+z)\,dz}$, & le produit donnera $yx = \frac{cc((1+z)\,dZ - Z\,dz)\,\sqrt{(1-zz)}}{(1-zz)\,dZ + Zzdz}$. Mais si nous

ne

ne desirons pas l'équation entre x & y, les mêmes formules trouvées donnent une construction commode, car en prenant une valeur quelconque pour Z, par où z sera en même tems determiné, on trouvera les valeurs pour xx & yy, & elles determineront un point de la Courbe. On pourra aussi batir là dessus une Construction Geometrique, si l'on pose une Courbe, dont les coordonnées soient z & Z, & qui ait cette proprieté, qu'en faisant z negatif, l'autre Z le devienne aussi; car la raison entre dZ & dz sera definie par la tangente de cette Courbe.

XXXVI. Puisque Z doit etre une telle fonction de z qu'elle se change en $-Z$, en mettant $-z$ à la place de z, posons pour le cas le plus simble $Z = \alpha z$; & cela sera $xx = \frac{cc(1+z)}{\alpha}$ & $yy = \alpha cc\ (1-z)$; d'où $1+z = \frac{\alpha xx}{cc}$ & $1-z = 2 - \frac{\alpha xx}{cc}$. Donc $yy = 2\alpha cc - \alpha\alpha xx$, qui est l'équation pour l'ellipse, laquelle Courbe satisfait manifestement à ce qui etoit demandé.

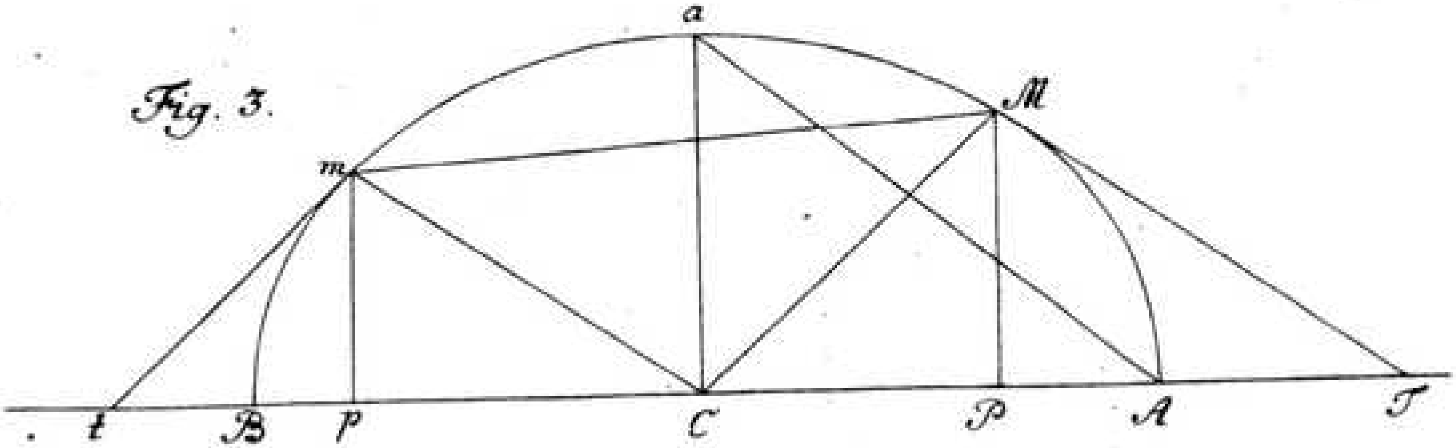
XXXII. Posons à present $Z = \alpha z^n$, n etant un nombre impair, afin que Z devienne fonction impaire de z, $\frac{dZ}{dz}$ sera $= \alpha n z^{n-1}$ & $(1-zz)\ dZ + Zzdz = (\alpha n z^{n-1} - \alpha(n-1)z^{n+1})\ dz = \alpha z^{n-1} dz\,(n-(n-1)\,zz)$ & $(1+z)\,dZ - Zdz = \alpha z^{n-1} dz\ (n+(n-1)z)$, desquels on trouve $xx = \frac{cc\ (1+z)}{\alpha z^{n-1}(n-(n-1)\,zz)}$

 & yy

& $yy = \frac{\alpha cc\,(1-z)\,z^{n-1}(n+(n-1)z)^2}{n-(n-1)zz}$. Donc $xxyy = c^4\,(1-zz)$ $\frac{(n+(n-1)z)^2}{(n-(n-1)zz)^2}$; d'où en rejettant z resulte une equation Algebrique de plusieurs dimensions. Que si l'on pose $Z = \frac{\alpha z}{1-zz}$, xx sera $= \frac{cc\,(1+z)\,(1-zz)}{\alpha(1+2zz)}$ & $yy = \frac{\alpha cc(1-z+2zz)^2}{1+2zz}$. On peut de la même maniere substituer un nombre innombrable de fonctions de z à la place de Z, qui fourniront toujours des équations pour les Courbes, qui satisfont à ce qui est demandé; & je n'en ai point trouvé entr'elles, qui conduisît à une équation plus simple entre x & y, quoiqu'elles soient toutes faciles à construire.

MEMOIRES

Fig. 3.



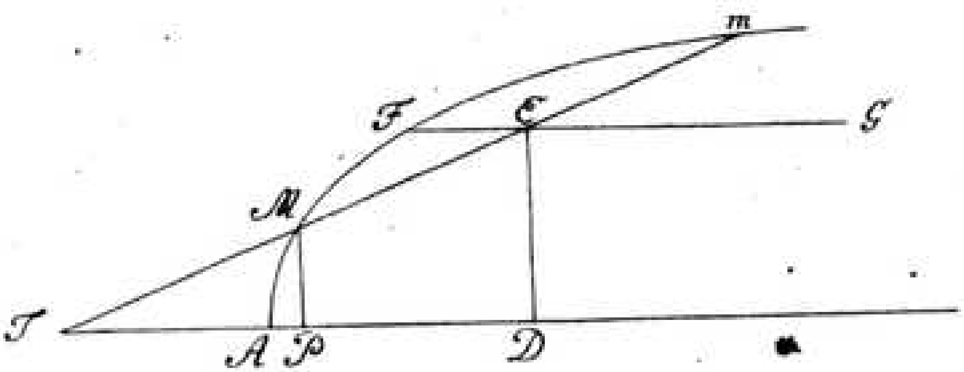


Fig. 1.

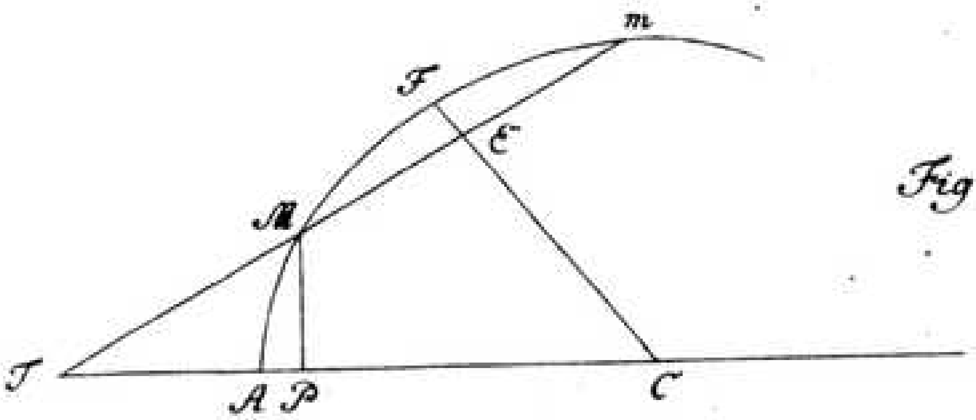


Fig. 2.

F. H. Frisch sc.

Tab. VII.

ad p. 98.

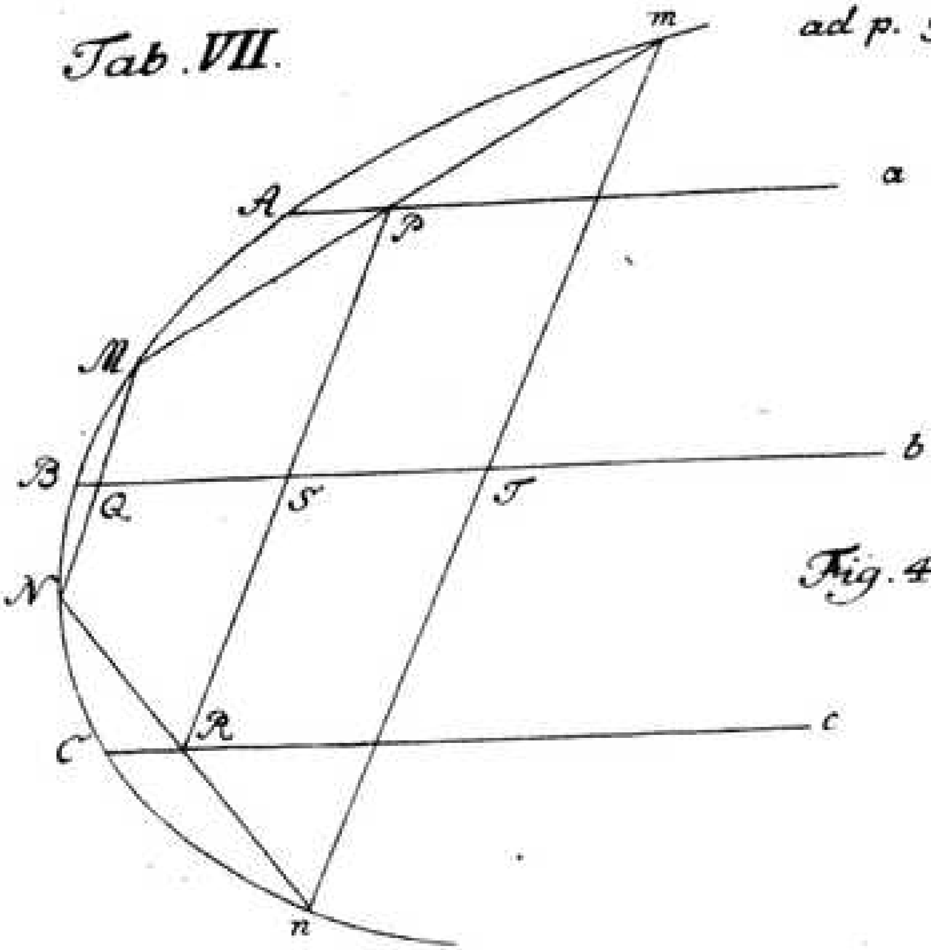


Fig. 4.

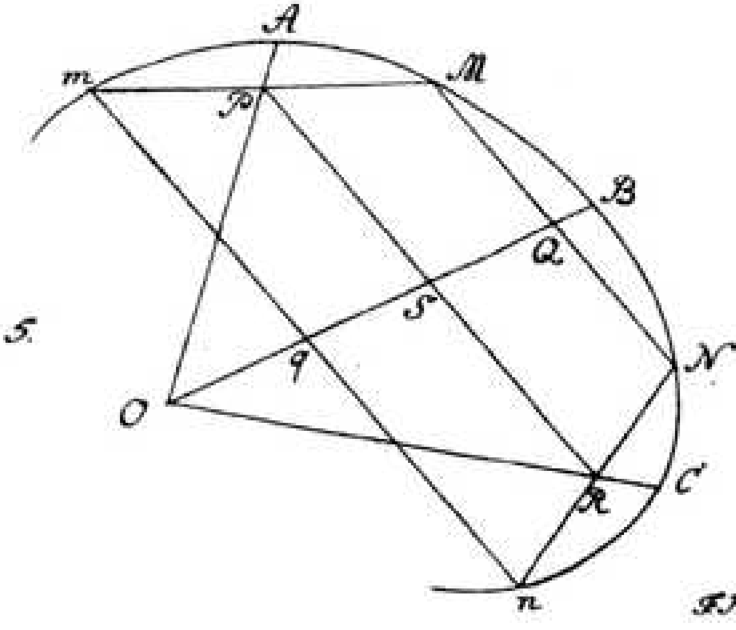
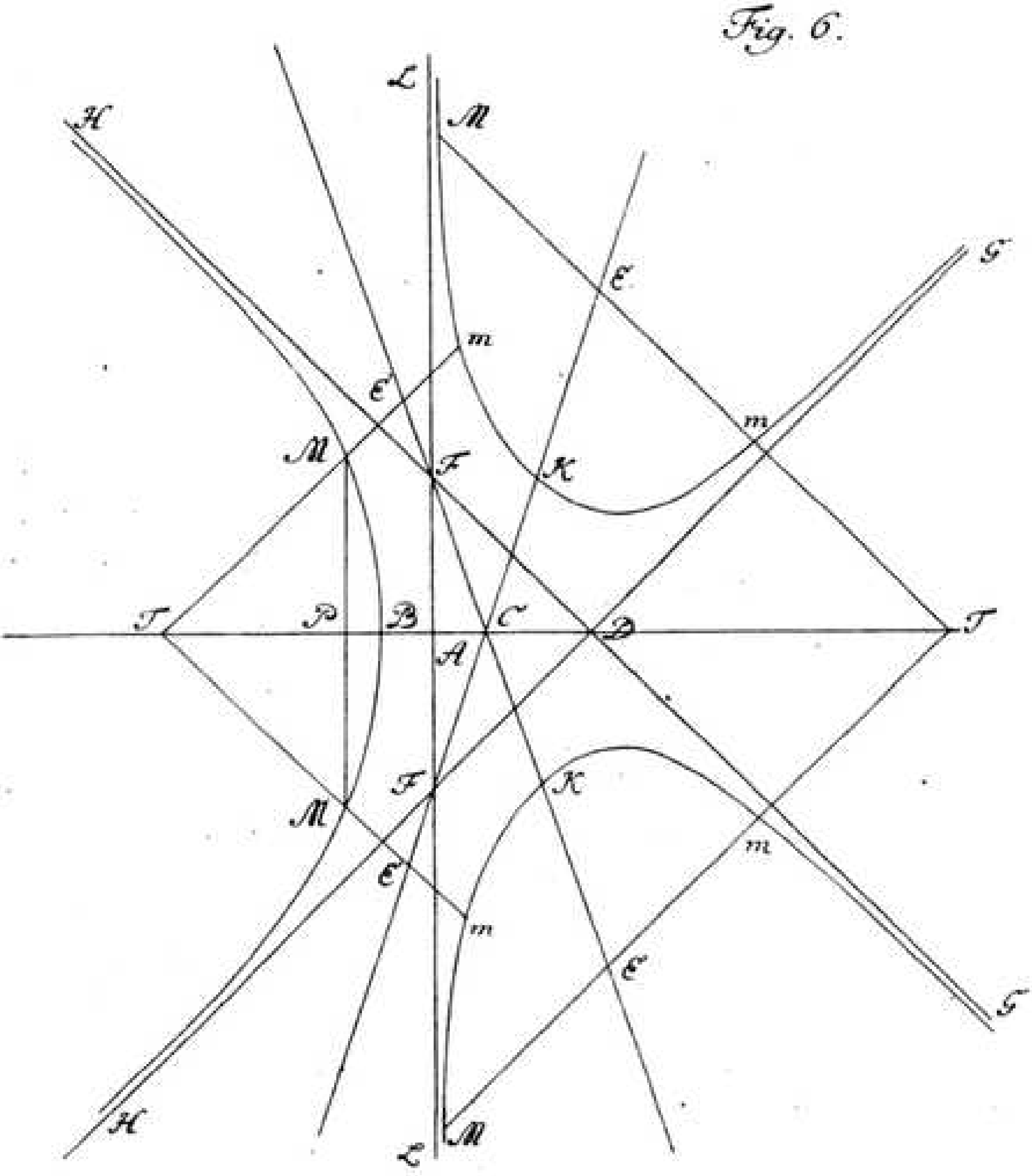


Fig. 5.

F.H.F.

Tab. VIII. ad p. 98.



J. H. Frisch. sc.