SOLVTIO PROBLEMATIS GEOMETRICI CIRCA LVNVLAS A CIRCVLIS FORMATAS.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. I.

IN exercitationibus Mathematicis Celeb. *Dan. Bernoulli* Venetiis editis mentio fit problematis cuiusdam, quod Vir Celeb. *Goldbachus* quondam proposuisset, quo postulabatur vt in duabus lunulis oppositis a duobus circulis se mutuo intersecantibus formatis duae rectae aequales ita applicentur, vt a lunulis partes aequales abscindant. Subiuncta vero est ibi etiam solutio huius problematis facilis quidem, sed tantum particularis, cum eidem innumerabiles aliae solutiones satisfacere possint. Praeterea autem solutio, quae ibi est data, non solum Geometrico modo sine analysi exhibetur, sed etiam analysis ad id soluendum minus idonea censetur. Quod analysios incommodum, etiamsi in pluribus problematis Geometricis allegari soleat, tamen mihi quidem non tam analysi, quam analystae imputandum videtur. In hoc certe problemate clare ostendam, analysin ad id soluendum non solum non esse ineptam, sed etiam methodo Geometricae Tabb. VIII. et IX.

cae

cae longe esse praeferendam, cum eius ope generalem huius problematis solutionem sim traditurus, quod geometrica via vix praestari poterit.

Figura 1. §. 2. Sint igitur duo circuli $aObmS$ et $AOBMS$ centris c et C descripti, qui se mutuo in O et S secent, lunulasque oppositas $ObmSAO$ et $OBMSaO$ formantes, in quibus secundum problema ita applicari debent rectae aequales Ab, aB, vt a lunulis areas aequales OAb et OaB abscindant. Ad hoc ergo problema soluendum requiruntur primo ipsi circuli, deinde situs eorum mutuus ratione intersectionis, et tertio modus applicandi rectas aequales Ab et aB, vt areae OAb et OaB fiant inter se aequales. Ponamus autem figuram nostram conditionibus problematis satisfacere; eritque tum $Ab = aB$ atque trilineum $OAb =$ trilineo OaB; plures enim aequationes problema nondum suppeditat.

§. 3. Cum areae OAb et OaB, quae aequales esse debent praeter rectas Ab et aB diuersorum circulorum arcubus includantur, difficulter eae ad expressiones algebraicas reuocarentur. Quare ad hoc incommodum euitandum ducta recta Aa adiiciatur ad vtramque aream idem trilineum AOa, quo facto esse oportebit trilineum $AbOa =$ trilineo $aBOA$, qua aequatione vice prioris vtemur, cum vtrumque trilineum praeter rectas vnico arcu circulari claudatur. Tale autem trilineum si analytice exprimatur, expressio duabus constabit partibus, quarum altera erit algebraica, altera vero arcum circularem inuoluet, quae cum esse debeant inter se aequales, necesse est vt seorsim partes algebraicae inter se aequentur, atque etiam partes a circuli quadratura pendentes. Requiritur enim algebraica problematis solutio, quae non obtineretur, si quantitas algebraica arcui circulari aequaretur.

§. 4. Aequatur autem trilineam $bOaA$ sectori $cbOa$ demto rectilineo spatio $bcaA$; atque trilineum $BOAa$ aequale est sectori $CBOA$ demto spatio rectilineo $BCAa$. Quamobrem cum sit sector $cbOa -$ spatio $bcaA =$ sectori $CBOA -$ spatio $BCAa$, necesse est vt sit sector $cbOa =$ sectori $CBOA$; et spatium $bcaA =$ spatio $BCAa$. Quo igitur areae OAb et OaB fiant aequales, atque problema Geometrice construi queat, duplex aequatio erit resoluenda, quarum prima est vt sit sector $bcOa =$ sectori $CBOA$ atque spatium $bcaA =$ spatio $BCAa$, cum quibus aequationibus si tertia coniungatur, qua esse debet $Ab = aB$, problemati erit satis factum.

§. 5. Quo igitur istae conditiones obtineantur, ponatur radius circuli $ca = cb = c$; atque radius $CA = CB = C$. Deinde ductis chordis ab et AB, in easque ex centris demissis perpendiculis cd et CD sit $ad = ab = b$ atque $AD = AB = B$. His positis erit sinus dimidii anguli $bca = \frac{b}{c}$, atque sinus dimidii anguli $BCA = \frac{B}{C}$ posito toto $= 1$. Hinc porro erit arcus $bOa = 2c$. A sin. $\frac{b}{c}$, vbi A sin. $\frac{b}{c}$ denotat arcum cuius sinus est $\frac{b}{c}$ in circulo radii 1; parique modo erit arcus $BOA = 2C$. A sin. $\frac{B}{C}$; atque ex his orietur sector $bOac = c^2$. A sin. $\frac{b}{c}$, et sector $BOAC = C^2$. A sin. $\frac{B}{C}$. Quamobrem ob aequalitatem sectorum horum habebimus sequentem aequationem c^2. A sin. $\frac{b}{c} = C^2$. A sin. $\frac{B}{C}$.

 §. 6.

§. 6. Cum ergo debeat esse A sin. $\frac{b}{c}$: A sin. $\frac{B}{C}$ = $C^2 : c^2$, atque diuersi arcus circulares algebraice assignari nequeant, nisi rationem teneant rationalem, ante omnia requiritur vt ratio $C^2 : c^2$ sit rationalis. Sit igitur $C^2 : c^2 = N : n$ denotantibus N et n numeros integros, eritque nA sin. $\frac{b}{c}$ = N A sin. $\frac{B}{C}$; atque porro debebit esse sinus arcus n. A sin. $\frac{b}{c}$ = sin. arcus N. A sin. $\frac{B}{C}$. Ex inuentione autem sinuum arcuum multiplorum constat esse sinum

$$\text{arcus } n\text{A sin.}\frac{b}{c} = \frac{nb(c^2-b^2)^{\frac{n-1}{2}}}{1.\quad c^n} - \frac{n(n-1)(n-2)b^3(c^2-b^2)^{\frac{n-3}{2}}}{1.\ 2.\ 3\quad c^n}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)b^5(c^2-b^2)^{\frac{n-5}{2}}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\quad c^n} - \text{etc.}$$

similique modo sinus arcus N.A sin. $\frac{B}{C}$ exprimetur. Quamobrem sequens habebitur aequatio algebraica

$$\frac{nb(c^2-b^2)^{\frac{n-1}{2}}}{1.\quad c^n} - \frac{n(n-1)(n-2)b^3(c^2-b^2)^{\frac{n-3}{2}}}{1.\ 2.\ 3\quad c^n} +$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)b^5(c^2-b^2)^{\frac{n-5}{2}}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\quad c^n} - \text{etc.} =$$

$$\frac{NB(C^2-B^2)^{\frac{N-1}{2}}}{1.\quad C^N} - \frac{N(N-1)(N-2)B^3(C^2-B^2)^{\frac{N-3}{2}}}{1.\ 2.\ 3.\quad C^N} +$$

$$\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)B^5(C^2-B^2)^{\frac{N-5}{2}}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\quad C^N} - \text{etc.}$$

quae aequatio ob N et n numeros integros semper finito constabit terminorum numero, ex eaque licebit pro data

data ratione inter C^2 et c^2 relationem quam B et b inter ſe tenere debent, definire.

§. 7. Determinabo autem in ſubſidium ſequentium operationum relationem inter B et b pro caſibus quibusdam ſimplicioribus; ſitque primo $C^2 : c^2 = 2 : 1$ ſeu $C = c\sqrt{2}$, vnde ob $N = 2$ et $n = 1$ ſequens prodibit aequatio $\frac{b}{c} = \frac{2B\sqrt{(C^2 - B^2)}}{C^3}$ ſeu $bc = B\sqrt{(C^2 - B^2)}$. Secundo ſit $C = c\sqrt{3}$, ſeu $N = 3$ et $n = 1$, eritque $\frac{b}{c} = \frac{3B(C^2 - B^2)}{C^3} - \frac{B^3}{C^3}$ ſiue $3bCc = 3BC^2 - 4B^3$. Tertio ſit $C = 2c$ ſeu $N = 4$ et $n = 1$, fiet

$$\frac{b}{c} = \frac{4B(C^2 - B^2)^{\frac{3}{2}}}{C^4} - \frac{4B^3\sqrt{(C^2 - B^2)}}{C^4}$$

ſeu $4bcC^2 = (4BC^2 - 8B^3)\sqrt{(C^2 - B^2)}$. Quarto ſit $C^2 : c^2 = 3 : 2$ ſeu $N = 3$ et $n = 2$, erit $\frac{2b\sqrt{(c^2 - b^2)}}{c^2} = \frac{3BC^2 - 4B^2}{C^3}$. Quinto ſi fuerit $C^2 : c^2 = 4 : 3$ erit $\frac{3bc^2 - 4b^3}{c^3} = \frac{(4BC^2 - 8B^3)\sqrt{(C^2 - B^2)}}{C^4}$. Hique caſus ſufficiant ad exempla, quae afferemus, adornanda.

§. 8. Cum igitur primae conditioni, qua ſectores inter ſe debent eſſe aequales, ſit ſatisfactum determinata relatione chordarum ex data circulorum relatione, ad reliquas conditiones progrediamur, quarum ſecunda requirit vt quadrilaterum $bAac$ aequale ſit quadrilatero $BaAC$; vnde ſequens emergit aequatio $\triangle bac - \triangle baA = \triangle BAC - \triangle BAa$, quae quo analytice exprimatur demittantur ex punctis A et a in chordas ab et AB perpendicula Ae et aE, ſitque $Ae = p$ et $aE = P$, ex quibus illa aequatio per ſymbola ita exprimitur $b\sqrt{(cc - bb)} - bp = B\sqrt{(C^2 - B^2)} - BP$;

$= BP$, ex qua relatio perpendiculorum Ae et aE determinatur, ita vt dato altero alterum quoque innotescat.

§. 9. Tertia conditio requirit, vt sit recta Ab aequalis rectae aB, ad quod obtinendum pono $de = q$, atque $DE = Q$; vt sit $be = b + q$; $ae = b - q$ atque $BE = B + Q$ et $AE = B - Q$. Hinc orietur $Ab^2 = p^2 + b^2 + 2bq + q^2$; et $aB^2 = P^2 + B^2 + 2BQ + Q^2$, quare sequens habebitur aequatio $p^2 + b^2 + 2bq + q^2 = P^2 + B^2 + 2BQ + Q^2$, ex qua relatio inter Q et q determinatur. Hae aequationes autem nondum ad coniunctionem circulorum respiciunt, sed eaedem prodiissent, si vterque circulus seorsim fuisset consideratus.

§. 10. Coniungendi autem circulos modus hoc determinatur, quod triangula baA et BAa commune habent latus Aa; erit igitur ex vtroque $Aa^2 = p^2 + b^2 - 2bq + qq = P^2 + B^2 - 2BQ + Q^2$. Haec autem aequatio, si ab illa quae ante est inuenta subtrahatur, dat $4bq = 4BQ$, atque si addatur prodit $2p^2 + 2b^2 + 2q^2 = 2P^2 + 2B^2 + 2Q^2$. Loco ergo duarum inuentarum postremarum aequationum substitui possunt hae simpliciores $bq = BQ$ atque $p^2 + b^2 + q^2 = P^2 + B^2 + Q^2$.

§. 11. Vocatis ergo vt fecimus $ca = cb = c$; $CA = CB = C$; $da = db = b$; $DA = DB = B$; $Ae = p$; $de = q$; $aE = P$ et $DE = Q$; problema per sequentes quatuor aequationes soluetur.

I. C

$$\text{I.}\quad C^2 A \text{ fin. } \tfrac{B}{C} = c^2 A \text{ fin. } \tfrac{b}{c}$$
$$\text{II.}\quad B\surd(C^2 - B^2) - BP = b\surd(c^2 - b^2) - bp$$
$$\text{III.}\quad BQ = bq$$
$$\text{IV.}\quad P^2 + B^2 + Q^2 = p^2 + b^2 + q^2.$$

Si autem ex tertia et quarta aequatione determinentur Q et q, earum loco sequentes poterunt substitui $Q = b\surd(1 + \frac{P^2 - p^2}{B^2 - b^2})$ et $q = B\surd(1 + \frac{P^2 - p^2}{B^2 - b^2})$.

§. 12 Ad problema ergo soluendum ante omnia opus est, vt in duobus circulis inaequalibus aequales sectores formentur, quod semper fieri potest, si areae circulorum inter se rationem habuerint vt numerus ad numerum. Hoc autem ope diuisionis angulorum facile praestabitur; Sumto enim sectore BCA pro arbitrio, sector sector bca obtinebitur sumendo angulo bca tanto, vt $\angle bca : \angle BCA = AC^2 : ac^2$. Cum enim sit A fin. $\frac{b}{c}$: A fin. $\frac{B}{C} = C^2 : c^2 = AC^2 : ac^2$; atque A fin. $\frac{b}{c}$ exprimat dimidium angulum acb, pariterque A fin. $\frac{B}{C}$ dimidium angulum ACB, erit $\angle bca : \angle BCA = AC^2 : ac^2$.

§. 13. Constitutis ergo in duobus circulis sectoribus aequalibus, sumatur super chorda alterius circuli arbitraria altitudo, scilicet super chorda ab altitudo $Ae = p$; ex qua quidem nondum constat punctum e ex quo punctum A innotesceret. At cum sit $de = q = B\surd(1 + \frac{P^2 - p^2}{B^2 - b^2})$; atque $B\surd(C^2 - B^2) - BP = b\surd(c^2 - b^2) - bp$; erit $P = \surd(C^2 - B^2) - \frac{b\surd(c^2 - b^2)}{B} + \frac{bp}{B}$ atque $P^2 - p^2 = C^2 - B^2 + \frac{b^2c^2}{B^2} - \frac{b^4}{B^2} + \frac{b^2p^2}{B^2} + \frac{2bp(c^2 - B^2)}{B} - \frac{2b^2p\surd(c^2 - b^2))}{B^2}$

$-\frac{2b\sqrt{(C^2-B^2)(c^2-b^2)}}{B}-p^2$. Ex quibus elicitur $\frac{P^2-p^2}{B^2-b^2}=$
$\frac{B^2C^2+b^2c^2-b^4-B^4+2Bbp\sqrt{(C^2-B^2)}-2b^2p\sqrt{(c^2-b^2)}-2Bb\sqrt{(C^2-B^2)(c^2-b^2)}}{B^2(B^2-b^2)}$
$-\frac{p^2}{B^2}$; atque $q^2=\frac{B^2C^2+b^2c^2-B^2b^2-b^4}{B^2-b^2}-p^2+$
$\frac{2Bbp\sqrt{(C^2-B^2)}-2b^2p\sqrt{(c^2-b^2)}-2Bb\sqrt{(C^2-B^2)(c^2-b^2)}}{B^2-b^2}$.

Ex qua aequatione ſumto pro lubitu puncto e cognoſcetur punctum A, quo dato alter circulus ABMS facile deſcribetur. Namque ſuper Aa conſtituatur triangulum ABa ſumendo $AB=2B$ et $aB=Ab$, tumque ſuper AB fiat triangulum iſosceles ACB ſumendo $AC=BC$ $=C$ et centro C radio $AC=BC=C$ deſcribatur circulus ABMS, quo facto abſcindent rectae Ab et aB, quae per conſtructionem ſunt aequales, a lunulis $ObmSA$ et $OBMSa$ areas aequales OAb et OaB, vt problema poſtulat.

§. 24. Cum igitur ſumto pro lubitu interuallo de $=q$, ipſi reſpondeat applicata $eA=p$; innumerabilia dabuntur puncta A, ex quibus poſitio alterius circuli determinabitur, quo ipſo quaeſtioni infinitis modis ſatisfiet. Omnia autem haec puncta A in curua quadam continua erunt poſita, cuius natura ſequenti aequatione eſt expoſita

$$p^2+q^2=\frac{2Bbp\sqrt{(C^2-B^2)}-2b^2p\sqrt{(c^2-b^2)}}{B^2-b^2}+$$
$$\frac{B^2C^2+b^2c^2-B^2b^2-b^4-2Bb\sqrt{(C^2-B^2)(c^2-b^2)}}{B^2-b^2}$$

Ex qua aequatione intelligitur locum omnium punctorum A eſſe circulum cuius centrum in recta cd, ſi opus eſt producta ſit ſitum. Perſpicitur ergo duos circulos,

in

in quibus duo ſectores aequales habentur, innumerabilibus modis ita coniungi poſſe, vt problemati ſatisfiat.

§. 15. Haec eſt igitur generalis problematis ſolutio, ex qua poſtquam circuitus ille, in cuius peripheria ſita ſunt omnia puncta A fuerit deſcriptus, facilis quoque problematis conſtructio conſequitur. Quo autem omnes modi hoc problema ſoluendi clarius ob oculos ponantur, ex ſolutione vniuerſali particulares adornabimus, quas deducemus ex quantitate anguli, quo rectae bA et Ba in ſe mutuo inclinant. Obſeruaui enim hunc angulum a ſolis circulis et ſectoribus pendere, neque a variatione interſectionis mutari.

§. 16. Producantur itaque rectae bA, Ba, donec ſibi occurrant in Z; et analytice exprimatur quantitas anguli Z, quod fiet dum tangens ipſius quaeritur. Haec autem tangens ſequenti modo obtinebitur. Ex triangulo baA habetur primo tang. $bAe = \frac{b+q}{p}$; et tang. $aAe = \frac{b-q}{p}$ ex quibus reperitur tang. $bAa = \frac{2bp}{p^2+q^2-b^2}$; quare tangens anguli ZAa erit $= \frac{2bp}{b^2-p^2-q^2}$. Simili modo erit tangens anguli $ZaA = \frac{2BP}{B^2-P^2-Q^2}$. Tangens gitur ſummae horum angulorum reperietur =

$$\frac{2bp(B^2-P^2-Q^2)+2BP(b^2-p^2-q^2)}{(B^2-P^2-Q^2)(b^2-p^2-q^2)-4BbPp};$$

cuius negatiuo tangens anguli Z aequatur.

§. 17. Cum vero ſit $Q = b\sqrt{(1+\frac{P^2-p^2}{B^2-b^2})}$ erit $B^2-P^2-Q^2 = B^2-b^2-\frac{B^2P^2+b^2p^2}{B^2-b^2}$; atque ob $q = B\sqrt{(1+\frac{P^2-p^2}{B^2-b^2})}$, erit $b^2-p^2-q^2 = b^2-B^2-\frac{B^2P^2+b^2p^2}{B^2-b^2}$. Ex

quibus

quibus reperitur $2bp(B^2-P^2-Q^2)+2BP(b^2-p^2-q^2)$ $=2(B^2-b)(bp-BP)-\frac{2(B^2P^2-b^2p^2)(bp+BP)}{B^2-b^2}=$ $-\frac{2(BP-bp)[(B^2-b^2)^2+(BP+bp)^2]}{B^2-b^2}$. Deinde erit $(B^2-P^2-Q^2)(b^2-p^2-q^2-4BbPp=\frac{(B^2P^2-b^2p^2)^2}{(B^2-b^2)^2}-(B^2-b^2)^2-4BbPp=\frac{(B^2P^2-b^2p^2)^2-(B^2-b^2)^4-4BbPp(B^2-b^2)^2}{(B^2-b^2)^2}=$ $\frac{[(BP+bp)^2+(B^2-b^2)^2][(BP-bp)^2-(B^2-b^2)^2]}{(B^2-b^2)^2}$.

§. 18. His ergo valoribus in expressione inuenta substitutis prodibit tangens anguli $AZa=$ $\frac{2(B^2-b^2)(BP-bp)[(BP+bp)^2+(B^2-b^2)^2]}{[(BP+bp)^2+(B^2-b^2)^2][(BP-bp)^2-(B^2-b^2)^2]}=\frac{2(B^2-b^2)(BP-bp)}{(BP-bp)^2-(B^2-b^2)^2}$. Ex qua expressione intelligitur tangentem semissis anguli ad Z fore $=\frac{B^2-b^2}{BP-bp}$. Cum vero sit $B\surd(C^2-B^2)-BP$ $=b\surd(c^2-b^2)-bp$, erit tang. ang. $\frac{1}{2}Z=\frac{B^2-b^2}{B\surd(C^2-B^2)-b\surd(c^2-b^2)}$ ex qua expressione intelligitur quantitatem anguli Z per solas quantitates C, c, B, b determinari, neque a litteris variabilibus P, p, Q, et q pendere.

§. 19. Ponatur angulus $Z=0$, quo rectae Ab et aB partes aequales a lunulis abscindentes fiant inter se parallelae, qui est casus, quem *Celeb. Daniel Bernoulli* solum dedit solutum; Hoc ergo posito fiet tang. $\frac{1}{2}Z$ $=0$, ideoque erit $B^2-b^2=0$ et $B=b$. Cum autem sit $B=b$ ex aequatione $BQ=bq$ sequitur fore $Q=q$; atque aequatio $P^2+B^2+Q^2=p^2+b^2+q^2$ suppeditabit $P^2=p^2$; ex qua sequitur fore vel $P=p$ vel $P=-p$. Aequalitas autem $P=p$ ad institutum nostrum est inutilis; ex ea enim sequeretur fore $C=c$, adeoque circuli forent aequales, qui casus in problema non cadit. Quod autem futu-

futurum eſſet $C=c$ declarat haec aequatio $B\sqrt{(C^2-B^2)} - BP = b\sqrt{(c^2-p^2)} - bp$.

§. 20. Sit igitur $P=-p$, quo poſito aequatio $B\sqrt{(C^2-B^2)} - BP = b\sqrt{(c^2-b^2)} - bp$ tranſibit in hanc $2p = \sqrt{(c^2-b^2)} - \sqrt{(C^2-B^2)}$, vnde elicitur $p = \frac{\sqrt{(c^2-b^2)} - \sqrt{(C^2-B^2)}}{2}$ et $P = \frac{\sqrt{(C^2-B^2)} - \sqrt{(c^2-b^2)}}{2}$. Erit ergo p quantitas conſtans neque a q pendebit, et hanc ob rem locus puncti A erit linea recta parallela chordae ba et ab ea diſtans interuallo $\frac{\sqrt{(c^2-b^2)} - \sqrt{(C^2-B^2)}}{2}$, quae expreſſio ſi fuerit affirmatiua hoc interuallum a chorda ab verſus dextram eſt capiendum, ſin autem fuerit negatiua verſus ſiniſtram; ſi quidem figura ita delineatur, vti in tabula repraeſentatur.

§. 21. Cum praeterea ſit $B=b$, non ſolum circulorum inter ſe debebunt eſſe aequales, ſed etiam chordas AB, ab aequales eſſe oportet. Quare ſi ambo circuli ſuper hac chorda communi deſcribantur, vt in fig. 2. Figura 2. vbi $\alpha\beta$ eſt chorda communis, et c et C circulorum centra, erit lunula $M\alpha m\beta$ quadrabilis. Ob aequales enim ſectores $c\alpha m\beta$ et $C\alpha M\beta$ erit lunula $M\alpha m\beta$ = ſpatio $C\alpha c\beta$. Quae proprietas cum ſit communis omnium lunularum quadrabilium, perſpicuum eſt ope cuiusuis lunulae quadrabilis problema propoſitum ſolui poſſe, ita vt lineae partes aequales abſcindentes inter ſe fiant parallelae; atque etiam intelligere licet alio modo problemati in hoc ſenſu ſatisfieri non poſſe.

§. 22.

Fig. 2. et 3. §. 22. Data ergo quacunque lunula quadrabili $M\alpha m\mathfrak{G}$, problema ſequenti modo reſoluetur. Deſcribatur circulus $bmnOaS$ aequalis circulo $\alpha m\mathfrak{G}c$, in eoque applicetur chorda $ab=\alpha\mathfrak{G}$, in eamque ex centro c demittatur perpendiculum ed producendum ſi opus. Iam cum linea recta, in qua omnia puncta A ſunt ſita, ſit parallela chordae ab ab eaque interuallo $p=\frac{\sqrt{(c^2-b^2)}-\sqrt{(C^2-B^2)}}{2}$ diſtet, erit $p=\frac{c\delta-C\delta}{2}=\frac{-Cc}{2}$. Ex altera igitur parte centri in recta $cnad$ capiatur $df=\frac{1}{2}Cc$, et per f ducatur recta ipſi ba parallela infinita $mf\alpha B$, quae erit locus omnium punctorum A.

§. 23. Sumto ergo in hac recta vbiuis puncto A ſaltem intra circulum aOb, quo recta Ab tota in circulo hoc ſit ſita. Deinde ex a ipſi Ab ducatur parallela et aequalis aB, quae rectae mA occurat in B ita vt ſit $AB=ab$, et figura $AbaB$ parallelogrammum. Alter igitur circulus ita deſcribi debet, vt per puncta A et B tranſeat, id quod facile perficitur cum radius eius $C\alpha=C\mathfrak{G}$ ſit datus. Ex vna ergo lunula quadrabili data infinitis modis duo circuli lunulam formantes ita componi poſſunt, vt rectae aequales areas abſcindentes ſint inter ſe parallelae. Atque in hac conſtructione continetur ſolutio problematis *Cel. Dan. Bernoulli* loco cit. data.

§. 24. Ponamus nunc angulum ad Z eſſe rectum, adeoque $\frac{1}{2}$ Z ſemirectum, cuius tangens ſinui toti 1 aequatur. Erit igitur $B^2-b^2=B\sqrt{(C^2-B^2)}-b\sqrt{(c^2-b^2)}$, atque $B^2-b^2=BP-bp$, ex qua fit $P=\frac{bp}{B}+\frac{B^2-b^2}{2}$ atque $\frac{P^2-p^2}{B^2-b^2}=\frac{-p^2}{B^2}+\frac{2bp}{B^2}+\frac{B^2-b^2}{B^2}$, vnde erit $q^2=2B^2-(b-p)^2$

$(b-p)^2$ seu $q^2+(b-p)^2=2B^2$. Locus ergo punctorum A erit circulus radio $=B\sqrt{2}=\frac{AB}{\sqrt{2}}$ descriptus, cuius centrum in recta cd si opus est producta erit situm, atque a d versus dextram distabit interuallo $b=bd=\frac{1}{2}ab$.

§. 25. Ad hunc vero casum requiritur, vt sectores circulorum non solum sint aequales, sed insuper etiam vt sit $B^2-b^2=B\sqrt{(C^2-B^2)}-b\sqrt{(c^2-b^2)}$. Quae aequalitas quo cum sectorum aequalitate coniungatur, conueniet ad exempla descendere, et primo quidem sit $C=c\sqrt{2}$, erit $bc=B\sqrt{(C^2-B^2)}=B\sqrt{(2c^2-B^2)}$ et $c^4-bbcc=(c^2-B^2)^2$; vnde fiet $c\sqrt{(c^2-b^2)}=c^2-B^2$ et $B^2=c^2-c\sqrt{(c^2-b^2)}$. Quocirca habebitur $c^2-b^2-c\sqrt{(c^2-b^2)}=bc-b\sqrt{(c^2-b^2)}$ seu $b^2+bc-cc=(b-c)\sqrt{(c^2-b^2)}$ quae quadrata dat $2b^4=bbcc$ seu $b=\mp\frac{c}{\sqrt{2}}$ et $\sqrt{(c^2-b^2)}=\frac{c}{\sqrt{2}}$. Erit ergo angulus bca rectus et proinde angulus ACB semirectus; quia hic circulus duplo maior ponitur quam ille.

§. 26. Prodiit hic valor ipsius b negatiuus, quo $\sqrt{(c^2-b^2)}$ affirmatiuum obtineat valorem, atque sector abc minor fiat quadrante. Eadem vero prodiisset expressio, si angulus ad Z tribus rectis aequalis positus fuisset; tum enim orta esset ista aequatio $B^2-b^2=b\sqrt{(c^2-b^2)}-B\sqrt{(C^2-B^2)}$, quae reducta idem dat quod ante inuenimus, praeterquam quod hinc prodit $b=\frac{+c}{\sqrt{2}}$. Vtraque vero determinatio eodem redit, nam cum hic sit b negatiuum, alia differentia non resultat, nisi quod centrum circuli puncta A continentis ex altera parte ipsius d sit capiendum, id quod etiam altera solutio postulat.

Figura 4. §. 27. Deſcribantur ergo duo circuli, quorum alter altero ſit duplo maior, atque in minore abſcindatur quadrans abc; in maiore vero octans ACB, qui duo ergo ſectores inter ſe erunt aequales. Ductis nunc in chordis ab, AB ex centris c et C perpendiculis cd, CD; erit $ac = c$; $AC = C = c\sqrt{2}$, $ad = bd = b = \frac{c}{\sqrt{2}}$, et $cd = \frac{c}{\sqrt{2}}$; $AD = B = c\sqrt{(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})}$ et $CD = c\sqrt{(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})}$. Si nunc CD producatur in H, vt ſit $DH = AD$, erit $AH = B\sqrt{2}$, ideoque radius circuli, qui eſt locus omnium punctorum A; prout ante explicuimus. Ex his vero ſequenti modo problema propoſitum ita reſoluetur, vt rectae abſcindentes ſint inter ſe normales.

Tabula IX. Figura 1. et Tabula VIII. Figura 4. §. 28. Deſcribatur nunc minor circulus abc, et in cd producta ſumatur $dg = b = bd$, et centro g radio $gb = AH = B\sqrt{2} = c\sqrt{(2 - \sqrt{2})}$ deſcribatur circulus $ibkA$, qui erit locus omnium punctorum A. Secabit is autem cd in b et chordam ab in i et k, vt ſit $db = c\sqrt{(2 - \sqrt{2})} - \frac{c}{\sqrt{2}}$, et $di = dk = c\sqrt{(\frac{3}{2} - \sqrt{2})} = c - \frac{c}{\sqrt{2}} = bc - bd$. Sumto nunc in hac circuli peripheria puncto quocunque A, ductaque Ab, ad eam ex a normalis et ipſi Ab aequalis ducatur aB. Deinde radio $CA = CB = c\sqrt{2}$ deſcribatur circulus BOAC, quo facto erit areae OAb = areae OaB.

§. 29.

§. 29. Si punctum A capiatur in ipso puncto b, circuli se ita intersecabunt vt fig. 2. repraesentat, eritque $OAb = OaB$. Sin autem punctum A capiatur in i vt in fig. 3. repraesentatur, erit aB ad ab normalis et maioris circuli centrum C in Ba producta erit situm, eritque $aC = Aa = c$ et $BC = ab$. Si denique punctum A in k capiatur, prodibit fig. 4. in qua iterum aB ad ab est normalis, et centrum maioris circuli C in ba producta erit situm. Habebitur autem $aC = aB = c$; et $AC = BC = ab$; vnde duorum postremorum casuum constructio facillime consequitur.

Tabula IX. Figura 2.

Figura 3.

Figura 4.

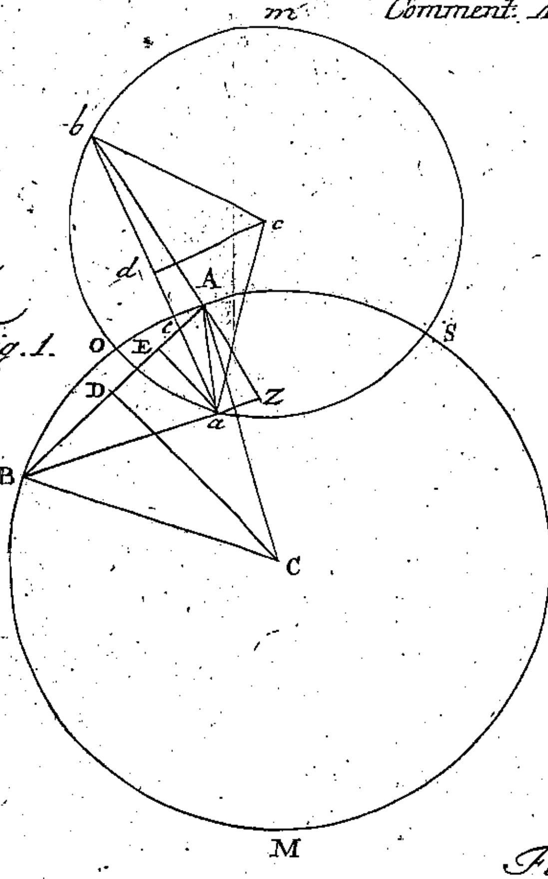


Fig. 1.

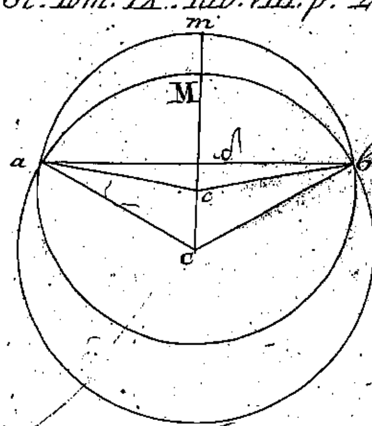


Fig. 2.

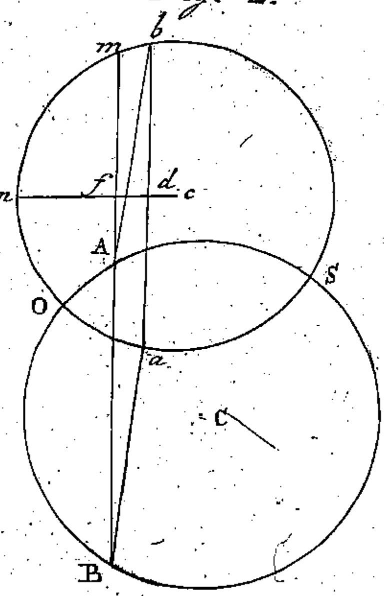


Fig. 3.

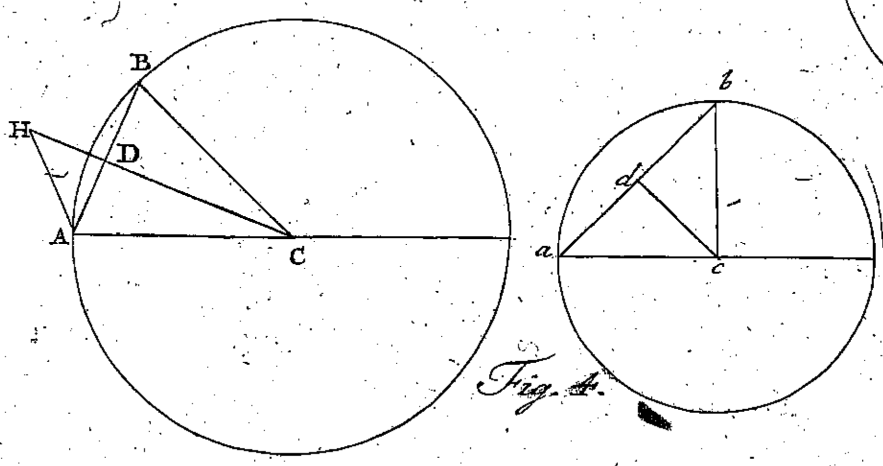
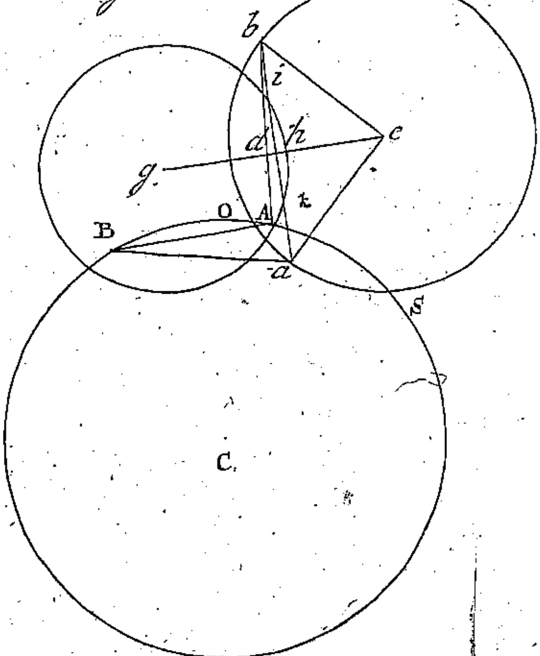


Fig. 4.

Fig. 1.



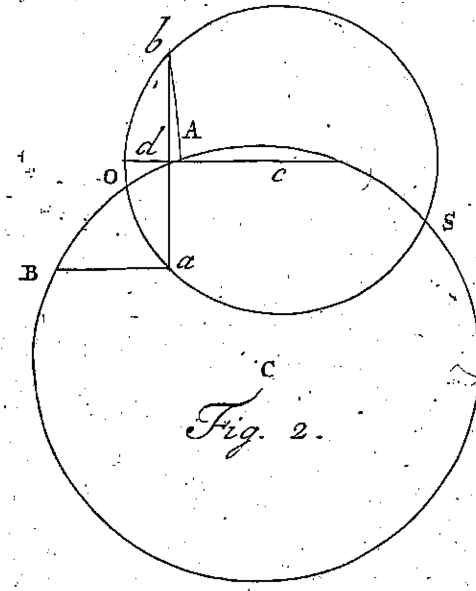


Fig. 2.

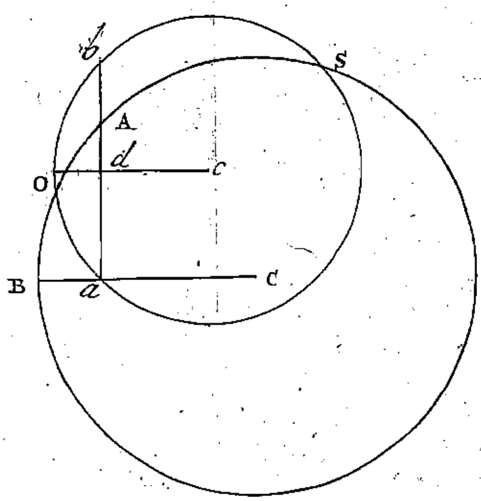


Fig. 3.

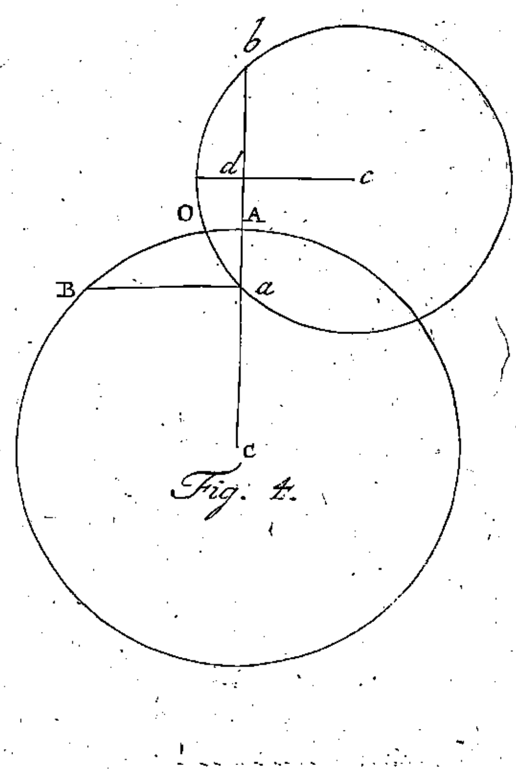


Fig. 4.