DE FRACTIONIBVS CONTINVIS. DISSERTATIO.

AVCTORE
Leonh. Euler.

§. 1.

Varii in Analysin recepti sunt modi quantitates, quae alias difficulter assignari queant, commode exprimendi. Quantitates scilicet irrationales et transcendentes, cuiusmodi sunt logarithmi, arcus circulares, aliarumque curuarum quadraturae, per series infinitas exhiberi solent, quae, cum terminis constent cognitis, valores illarum quantitatum satis distincte indicant. Series autem istae duplicis sunt generis, ad quorum prius pertinent illae series, quarum termini additione subtractioneue sunt connexi; ad posterius vero referri possunt eae, quarum termini multiplicatione coniunguntur. Sic vtroque modo area circuli, cuius diameter est $= 1$, exprimi solet; priore nimirum area circuli aequalis dicitur $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} -$ etc. in infinitum; posteriore vero modo eadem area aequatur huic expressioni $\frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{4.6}{5.5} \cdot \frac{6.8}{7.7} \cdot \frac{8.10}{9.9} \cdot \frac{10}{11}$ etc. in infinitum. Quarum serierum illae reliquis merito praeferuntur, quae maxime conuergant, et paucissimis sumendis terminis valorem quantitatis quaesitae proxime praebeant.

§. 2. His duobus serierum generibus non immerito superaddendum videtur tertium, cuius termini continua diui-

diuiſione inter ſe connectuntur, quas ſeries propterea fractiones continuas appellare conueniet. Minus quidem vſitatum eſt hoc ſerierum genus duobus reliquis; ſed non ſolum aeque diſtincte valorem quantitatis, quam exprimit, ob oculos ponit, verum etiam perquam eſt aptum ad valorem illum proxime inueniendum. Tam parum autem hoc ſerierum genus etiamnum eſt excultum, vt praeter vnam vel alteram huius generis ſeriem iam cognitam, nequidem methodus habeatur vel huiusmodi ſerierum veros valores inueniendi vel datas quantitates transcendentes in tales expreſſiones conuertendi. Cum igitur iam pridem in his fractionibus continuis examinandis laborauerim, atque plura cum ad earum vſum tum inuentionem pertinentia non parui momenti obſeruauerim, ea hic exponere conſtitui, quo aliis viam easdem tractandi planiorem efficerem. Quamuis enim nondum ad completam huius doctrinae theoriam pertigerim, tamen haec, quae magno labore elicui, inſigne adiumentum allatura eſſe confido, ad iſtam doctrinam magis perficiendam.

§. 3. Quo igitur, quid nomine fractionum continuarum intelligam, clarius percipiatur, ampliſſimum earum exemplum ante omnia exhibeo:

$$a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d + \cfrac{\delta}{e + \cfrac{\varepsilon}{f + \text{etc.}}}}}}$$

ex quo scribendi modo quilibet significationem huius expressionis facile cognoscet. Quantitas scilicet haec constat duobus membris numero integro a et fractione cuius numerator est α, denominator vero iterum ex duobus compositus est membris integro nimirum b et fractione cuius numerator est β, denominator vero rursum duobus consistit membris integro vide, licet c et fractione vt ante; sicque porro in infinitum. Duplices hic occurrunt quantitates, quas etiam litteris ex latino et graeco alphabeto desumtis distinxi; Harum quantitatum eas, quas etiam graecis litteris denotaui numeratores appellabo, quia fractionum sequentium numeratores reuera constituunt; reliquas vero quantitates latinis litteris expressas ad distinctionem omnes denominatores vocabimus; omnes enim praeter primam reuera sunt partes denominatorum.

§. 4. Primus, qui, quantum mihi constat, huiusmodi fractionem continuam protulit, erat Vicecomes *Brouncker*, qui post communicatam secum *Wallisii* quadraturam circuli, eandem expressionem ita commutauit, vt asseueraret, aream circuli se habere ad quadratum diametri vti 1 ad

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{2 + \text{etc.}}}}}}$$

vbi

vbi numeratores sunt quadrata numerorum imparium, denominatores vero 2. Qua autem via *Brounckerus* in hanc expressionem inciderit, non constat, atque merito foret dolendum, si eius methodus periisset; cum non sit dubitandum, quin eadem methodo plura praeclara in hoc genere exhiberi possent. *Wallisius* quidem, dum hanc fractionem recenset, ipse demonstrationem concinnare est conatus, quae autem minus est genuina, atque penitus ab auctoris methodo diuersa esse videtur. *Wallisius* autem hanc totam inuentionem deriuat ex sequente theoremate quod sit:

$$a^2 = (a-1)+\cfrac{1}{2(a-1)+\cfrac{9}{2(a-1)+\cfrac{25}{2(a-1)\text{ etc.}}}} \;\Bigg|\; (a+1)+\cfrac{1}{2(a+1)+\cfrac{9}{2(a+1)+\cfrac{25}{2(a+1)\text{ etc.}}}}$$

cuius veritatem per inductionem satis confirmat, sed, quod caput est, analysin non affert, qua ad hoc theorema sit peruentum.

§. 5. Commode autem atque facile ex data huiusmodi fractione continua valor eius vero proximus potest determinari, quin et limites definire licet, intra quos verus valor contineatur, vt, si quadratura quaepiam vel alia quantitas transcendens hoc modo fuerit expressa, facili negotio ea ipsa proxime assignari queat. Ostendam hoc ex generali fractionum continuarum forma:

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\delta}{e+\text{etc.}}}}}$$

in qua omnes quantitates ingredientes affirmatiuas pono. Apparet autem valorem vero propinquum obtineri, si fractio continua alicubi abrumpatur, atque eo propiorem valorem inuentum iri, quo longius fractio continuetur. Ita sumendo tantum a habebitur valor minor vero, cum annexa fractio tota negligatur. Sumendo autem $a+\frac{\alpha}{b}$, valor habebitur maior vero, quia in fractione denominator b est iusto minor. Sin autem sumatur

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c}}$$

habebitur iterum valor iusto minor ob fractionem $\frac{\beta}{c}$, indeque denominatorem $b+\frac{\beta}{c}$ nimis magnum. Atque hoc modo fractionem continuam successiue abrumpendo alternatiue valores iusto maiores et minores prodibunt; vnde quamtumuis prope ad verum fractionis continuae valorem accedere licebit.

§. 6. Sequens igitur habebitur expressionum series:

$$a,\ a+\frac{\alpha}{b},\ a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c}},\ a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d}}},\ \text{etc.}$$

qua-

quarum, quae ſunt ordine impares, vt prima, tertia, quinta, etc. minores ſunt vero fractionis continuae valore: pares autem erunt maiores eodem. Quare cum terminus tertius maior ſit primo, quintus maior tertio et ita porro; termini impares creſcendo tandem verum fractionis continuae valorem attingent; termini pares vero, qui continuo decreſcunt, decreſcendo tandem ad verum fractionis continuae valorem deſcendent. Si autem hae expreſſiones in fractiones ſimplices transmutentur, ſequens prodibit earundem expreſſionnm ſeries:

$$\frac{a}{1};\ \frac{ab+\alpha}{b};\ \frac{abc+\alpha c+\beta a}{bc+\beta};\ \frac{abcd+\alpha cd+\beta ad+\gamma ab+\alpha\gamma}{bcd+\beta d+\gamma b}$$

quae ſi attentius inſpiciatur, facile colligetur lex, qua iſti termini progrediuntur; cuiusque ope ſine operoſa fractionum illarum compoſitarum reductione has fractiones, quousque libuerit, continuare licet. Nimis quidem hae fractiones ſtatim fiunt prolixae; ſed in exemplis quibus hae litterae numeris exprimuntur, perquam commode haec ſeries continuatur.

§. 7. Lex autem progreſſionis harum fractionum ex ſequente ſchemate clare percipietur:

$$\begin{array}{cccccc}
 & a & b & c & d & e \\
\frac{1}{0}; & \frac{a}{1}; & \frac{ab+\alpha}{b}; & \frac{abc+\alpha c+\beta a}{bc+\beta}; & \frac{abcd+\alpha cd+\beta ad+\gamma ab+\alpha\gamma}{bcd+\beta d+\gamma b}. & \\
 & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon
\end{array}$$

Scilicet his fractionibus ſupra ſcripti ſunt denominatores fractionis continuae, infra vero numeratores tanquam indices; ipſis autem fractionibus praefixa eſt fractio $\frac{1}{0}$, quippe quae ex ipſa lege mox declaranda in hunc locum pertinet.

tinet. Lex iam progreſſionis in hoc conſiſtit vt cuiusque fractionis numerator per indicem ſupra ſcriptum multiplicatus vna cum numeratore praecedentis fractionis per ſuum infra ſcriptum indicem multiplicato praebeat numeratorem ſequentis fractionis: Atque eodem modo cuiusque fractionis denominator per indicem ſuum ſupra poſitum multiplicatus vna cum denominatore praecedentis fractionis per indicem ſuum infra ſcriptum multiplicato praebeat denominatorem fractionis ſequentis. Lex quidem haec ex ipſa inſpectione harum fractionum, ſi vlterius continentur, facile obſeruatur; ſed eadem etiam ex ipſa fractionum continuarum natura deduci poteſt: quam demonſtrationem autem hic apponere ſuperfluum iudico.

§. 8. Si iſtarum fractionum differentiae capiantur, ſubtrahendo quamque a praecedente, ſequens orietur ſeries:

$$\frac{1}{0} - \frac{a}{1.b} + \frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)} - \frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)} + \text{etc.}$$

cuius numeratorum progreſſio per ſe eſt manifeſta, denominatores vero ex binis denominatoribus praecedentibus formantur. Cum igitur ſuperioris ſeriei vltimus terminus, qui verum fractionis continuae valorem exhibet, componatur ex primo, quem reiecto $\frac{1}{0}$ ſumamus a, et omnibus differentiis, erit verus fractionis continuae propoſitae valor $=$:

$$a + \frac{a}{1.b} - \frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)} + \frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)} - \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{(bcd+\beta d+\gamma b)(bcde,} \text{ etc.}$$

Habemus adeo ſeriem infinitam primi generis, cuius termini additione et ſubtractione inter ſe coniunguntur, valori fractionis continuae propoſitae aequalem; haecque ſeries valde

valde conuergit, atque ad valorem illum proxime inueniendum admodum eſt apta. Si bini termini coniungantur alternationis ſignorum euitandae cauſa, reperietur eadem fractio continua aequalis ſequenti ſeriei:

$$a + \frac{\alpha c}{1(bc+\beta)} + \frac{\alpha\beta\gamma e}{(bc+\beta)(bcde+\beta de+\gamma be+\delta bc+\beta\delta)} + \text{etc.}$$

cuius numeratorum et denominatorum lex ex ſuperiore ſponte ſe prodit. Vehementer autem haec ſeries conuergit, atque eius ope citiſſime vero proxima ſumma inueniri poteſt.

§. 9. Quo magis igitur haec ſeries vltima inuenta conuergit, eo magis etiam ipſa fractio continua conuergere cenſenda eſt; quia datus terminorum ſeriei numerus dato fractionum numero fractionis continuae reſpondet. Perſpicuum ergo eſt fractionem continuam eo magis conuergere, quo minores ſint eius numeratores α, β, γ, etc. maioresque denominatores a, b, c, etc. Omnes autem hos numeros tam numeratores quam denominatores integros ponere licet; nam ſi eſſent fracti per notam fractionum reductionem in integros transmutari poſſent, ſingularum ſcilicet fractionum numeratores et denominatores per eundem numerum multiplicando. Poſitis ergo omnibus numeris tam α, β, γ, etc. quam a, b, c, etc. integris fractio continua maxime conuerget, ſi omnes numeratores α, β, γ, etc. aequentur vnitat; deinde vero conuergentia eo erit maior, quo maiores fuerint denominatores a, b, c, d, etc. Vnitate ſcilicet numeratores minores eſſe nequeunt, ſi enim alicubi numerator eſſet $= 0$; ibidem fractio continua abrumperetur, foretque fractio finita. Idem quoque accidit, ſi denominatorum ali-

 quis

quis fiat $=\infty$, ibidem enim pariter fractio continua abrumpetur atque in fractionem finitam transibit.

§. 10. Si igitur ſequens propoſita ſit fractio continua, cuius omnes numeratores ſint vnitates:

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f+\text{etc.}}}}}}$$

ad eius valorem appropinquabunt fractiones ſequentis ſeriei

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \frac{1}{0}; & \frac{a}{1}; & \frac{ab+1}{b}; & \frac{abc+c+a}{bc+1}; & \frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b} \end{array}$$

quae ſeries ope vnicae indicum a, b, c, d, etc. progreſſionis continuatur. Scilicet cuiusque fractionis tam numerator quam denominator per indicem multiplicatus et praecedentis fractionis numeratore et denominatore reſpectiue auctus, dabit numeratorem et denominatorem ſequentis fractionis. Valor deinde huius fractionis continuae aequabitur ſummae ſequentis ſeriei:

$$a+\frac{1}{1.b}-\frac{1}{b(bc+1)}+\frac{1}{(bc+1)(bcd+d+b)}-\frac{1}{(bcd+d+b)(bcde\ \text{etc.}}$$

vel ſummae huius, in quam iſta transmutatur

$$a+\left(\frac{c}{bc+1}\right)+\frac{e}{(bc+1)(bcde+de+be+bc+1)}+\text{etc.}$$

cuius

cuius ſeriei denominatores formantur ex alternis denominatoribus ſeriei fractionum ſuperioris; ideoque facile continuantur.

§. 11. Si in tali fractione continua, cuius numeratores omnes ſunt vnitates, denominatores fuerint numeri fracti, expediet talem fractionem continuam in aliam transformare, in qua tam numeratores quam denominatores ſint numeri integri. Ita ſi huiusmodi propoſita eſſet fractio continua.

$$a + \cfrac{1}{\frac{b}{B} + \cfrac{1}{\frac{c}{C} + \cfrac{1}{\frac{d}{D} + \cfrac{1}{\frac{e}{E} + \cfrac{1}{\text{etc.}}}}}}$$

haec tollendis fractionibus particularibus transmutabitur in ſequentem formam:

$$a + \cfrac{B}{b + \cfrac{BC}{c + \cfrac{CD}{d + \cfrac{DE}{e + \text{etc.}}}}}$$

Simili modo viciſſim quaeuis fractio continua in aliam transmutari poteſt, cuius omnes numeratores ſint vnitates, denominatores vero numeri fracti, erit ſcilicet:

$$a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d + \cfrac{\delta}{e + \cfrac{\zeta}{\text{etc.}}}}}} = a + \cfrac{1}{\frac{b}{\alpha} + \cfrac{1}{\frac{\alpha c}{\beta} + \cfrac{1}{\frac{\beta d}{\alpha\gamma} + \cfrac{1}{\frac{\alpha\gamma e}{\beta\delta} + \cfrac{1}{\frac{\beta\delta f}{\alpha\gamma\zeta} + \cfrac{1}{\text{etc.}}}}}}}$$

quae posterior forma ex priore facile formatur.

§. 11. Cum igitur data fractione continua eius valor vel verus ipse, si quidem fractio abrumpatur, vel vero proximus per fractionem ordinariam exhiberi queat; viciffim quoque fractio ordinaria in fractionem continuam transformari poterit. Quae transmutatio quomodo fit instituenda in fractionibus continuis, quarum numeratores omnes sint vnitates, denominatores vero numeri integri, primum ostendam. Omnis autem fractio finita, cuius numerator et denominator sunt numeri integri finiti in huiusmodi fractionem continuam transformatur, quae alicubi abrumpitur; fractio autem cuius numerator et denominatorsunt numeri infinite magni, cuiusmodi dantur pro quantitatibus irrationalibus et transcendentibus, in fractionem vere continuam et in infinitum excurrentem transibit. Ad talem fractionem continuam inueniendam sufficiet denominatores tantum assignasse, cum numeratores omnes vnitates esse ponamus. Hi vero inuenientur inter numeratorem et denominatorem fractionis propositae eandem operationem instituendo, quae ad maximum earum commu-nem rem diuiſorem inueſtigandum inſtitui ſolet. Numerator ſcilicet per denominatorem diuidatur, et per reſiduum ipſe denominator, et ita porro ſemper per reſiduum praecedens diuiſor. Quoti vero ex hac continuata diuiſione orti erunt denominatores fractionis continuae quaeſiti.

§. 12. Sic ſi haec propoſita ſit fractio $\frac{A}{B}$ in fractionem continuam transmutanda, cuius omnes numeratores ſint vnitates; diuido A per B, ſitque quotus a et reſiduum C, per hoc reſiduum C diuidatur praecedens diuiſor B, ſitque quotus b reſiduumque D, per quod C diuidatur et ita porro donec ad reſiduum $=0$, quotumque infinite magnum perueniatur. Operatio autem haec ſequenti modo repraeſentatur.

$$\begin{array}{llllll}
B \mid A \mid a & & & & & \\
 & C \mid B \mid b & & & & \\
 & & D \mid C \mid c & & & \\
 & & & E \mid D \mid d & & \\
 & & & & F \mid E \mid e & \\
 & & & & & G \text{ etc.}
\end{array}$$

Hac igitur operatione inueniuntur quoti, a, b, c, d, e, etc. quibus cognitis erit

$$\frac{A}{B} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \text{etc.}}}}}$$

 ſi

si enim sit residuum $G = 0$, erit $e = \frac{E}{F}$ atque $\frac{1}{e} = \frac{F}{E}$ hincque porro $d + \frac{1}{e} = d + \frac{F}{E} = \frac{D}{E}$; ac $\frac{1}{d + \frac{1}{e}} = \frac{E}{D}$;

$$c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e}} = c + \frac{E}{D} = \frac{C}{D}.$$

Hocque modo vsque ad initium ascendendo fractio continua reperietur $= \frac{A}{B}$.

§. 13. Si in fractione $\frac{A}{B}$ fuerit $A < B$ tum primus quotus a erit $= 0$, residuumque primum $= A$, ita vt tum B per A diuidi debeat. Hoc ergo casu erit

$$\frac{A}{B} = \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \text{etc.}}}}}$$

Casu autem quo $A < B$ vnicus in fractione continua prodibit terminus, si ratio inter A et B fuerint multipla; duobus autem consistet fractio continua denominatoribus, si ratio A:B pertinnat ad genus rationum superparticularium, plures vero aderunt denominatores, si ratio A:B ad genus superpartientium referatur. Reuera autem fractio continua in infinitum excurret, si ratio A ad B non fuerit vt numeri ad numerum, sed vel irrationalis vel transcendens. Ad huiusmodi autem expressiones in fractiones continuas transmutandas, oportet vt numeris rationalibus sint expositae saltem vero proxime, quemadmoadmodum hoc fieri ſolet per fractiones decimales. Tales igitur expreſſiones ſi habeantur, modo praeſcripto fractiones continuae formabuntur.

§. 14. Cum autem fractio vel alia expreſſio in huius modi fractionem continuam fuerit conuerſa, tum eius expreſſionis valor proximus modo §. 10. expoſito poterit aſſignari. Vti ſi inuenta fuerit haec expreſſio.

$$\frac{A}{B} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \text{etc.}}}}}$$

atque ex denominatoribus a, b, c, d, etc. formetur ſequens fractionum ſeries

$$\overset{a}{\frac{1}{0}};\ \overset{b}{\frac{a}{1}};\ \overset{c}{\frac{ab+1}{b}};\ \overset{d}{\frac{abc+c+a}{bc+1}};\ \overset{e}{\frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b}}\ \text{etc.}$$

hae fractiones proxime aequales erunt expreſſioni $\frac{A}{B}$, eoque minus diſtabunt, quo remotiores fuerint a prima. Ita autem quaelibet harum fractionum erit comparata, vt alia per numeros non maiores exhiberi nequeat, quae propius ad valorem $\frac{A}{B}$ accederet. Hoc itaque modo ſequens problema commode ſoluetur: *Datam fractionem ex magnis numeris conſtantem in ſimpliciorem conuertere, quae ad illam propius accedat, quam fieri poteſt numeris non maioribus.* Problema hoc Walliſius magno ſtudio pertractauit, ſolutionem vero dedit vehementer operoſam atque difficilem.

§. 15.

§. 15. Ad methodum noſtrum ad ſolutionem huius problematis auccommodandam, ſit propoſita fractio $\frac{355}{113}$, quae ſecundum *Metium* rationem peripheriae ad diametrum proxime exprimit; quaeramus igitur fractiones minoribus numeris conſtantes ab iſta fractione tam parum diſcrepantes, quam fieri poteſt. Diuido ergo 355 per 113 atque inuenio

$$\frac{355}{113} = 3 + \cfrac{1}{7 + \frac{1}{16}}$$

vnde formo ſequentes fractiones:

$$\begin{array}{cccc} 3, & 7, & 16, & \\ \frac{1}{0}, & \frac{3}{1}, & \frac{22}{7}; & \frac{355}{113} \end{array}$$

fractiones ergo $\frac{3}{1}$ et $\frac{22}{7}$ propius ad fractionem $\frac{355}{113}$ accedunt, quam vllae aliae numeris non maioribus compoſitae; erit autem altera $\frac{22}{7}$ maior, altera $\frac{3}{1}$ minor quam propoſita, vti iam ſupra in genere annotauimus. Has fractiones principales appellare liceat, nam praeter has aſſignari posſunt aliae minus principales quaeſito aeque ſatisfacientes; ſcilicet vti fractio $\frac{22}{7}$ ex praecedentibus cum indice 7 eſt formata, ita minus principales eodem modo formabuntur, loco 7 minores numeros ſingulos ſubſtituendo.

§. 16. Si autem ratio peripheriae ad diametrum exactior accipiatur, diuiſioque continua vti eſt praeceptum inſtituatur, ſequens quotorum ſeries prodibit 3, 7, 15, 1, 292, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14 etc. ex quibus ſequenti modo fractiones ſimpliciores eruentur.

$$
\begin{array}{cccccccl}
 & 3, & 7, & 15, & 1, & 292, & 1, & \\
\frac{1}{0}, & \frac{3}{1}; & \frac{22}{7}; & \frac{333}{106}; & \frac{355}{113}; & \frac{103993}{33102} & & \textit{principales.} \\
\hline
 & \frac{2}{1}, & \frac{19}{6}; & \frac{311}{99}; & & \frac{103638}{32989} & & \textit{minus principales.} \\
 & \frac{1}{1}; & \frac{16}{5}; & \frac{289}{92} & & ;\ \frac{103283}{32876} & & \\
 & & ;\ \frac{13}{4}; & \frac{267}{85} & & ;\ \frac{102928}{32763} & & \\
 & & ;\ \frac{10}{3}; & \frac{245}{78} & & \text{etc.} & & \\
 & & ;\ \frac{7}{2}; & \frac{223}{71} & & & & \\
 & & ;\ \frac{4}{1}; & \frac{201}{64} & & & & \\
 & & & \text{etc.} & & & &
\end{array}
$$

Hoc igitur pacto duplices fractiones nacti ſumus, quarum aliae nimis ſunt magnae, aliae nimis paruae; nimis magnae ſcilicet ſunt, quae ſub indicibus 3, 15, 292, etc. continentur, reliquae nimis ſunt paruae. Atque hinc facile integram tabulam *Walliſianam* condere licet, quae omnes complectitur rationes ad veram peripheriae ad diametrum rationem propius accedentes, quam fieri poteſt numeris non maioribus.

§. 17. Hac etiam methodo definire licebit rationem conſtitutionis annorum biſſextilium, quo annorum initia perpetuo in eandem tempeſtatem incidant. Pendet haec determinatio a quantitate anni tropici, quam iuxta accuratiſſimas obſeruationes ponam $365^{d.} 5^{h.} 49' 8''$. Exceſſus ergo ſupra 365 dies erit $5.^{h.}, 49' 8''$, qui ſi aequaretur quartae diei parti, tuto ſemper quartus quisque annus biſſextilis conſtitueretur; ſed cum iſte exceſſus minor ſit 6 horis, numerus annorum biſſextilium minor debet accipi; quod cognoſcetur ex ratione $24\,h$: ad $5\,h$: $49'$, $8''$ ſeu ex fractione $\frac{21600}{5237}$, ex qua ſequitur in interuallo 21600 annorum tantum 5237 annos biſſextiles conſtitui oportere. Cum autem haec periodus nimis ſit magna, minores obtinebimus periodos, fractiones minoribus numeris conſtantes inueſtigando, quae proxime fractioni $\frac{21600}{5237}$ ſint aequales. In hunc finem ſequentem diuiſionem inſtituo.

$$\begin{array}{r|r|l}
5237 & 21600 & 4 \\
 & 20948 & \\
\hline
652 & 5237 & 8 \\
 & 5216 & \\
\hline
21 & 652 & 31 \\
 & 651 & \\
\hline
1 & 21 & 21
\end{array}$$

Iam ex quotis inuentis 4, 8, 31, 21, qui erunt denominatores fractionis continuae, ſequentes formentur fractiones

$$\begin{array}{ccccc}
 & 4, & 8, & 31, & 21 \\
\frac{1}{0}, & \frac{4}{1}; & \frac{33}{8}; & \frac{1027}{249}; & \frac{21600}{5237}.
\end{array}$$

Ha-

Harum fractionum secunda $\frac{4}{1}$ statim dat rationem calendarii Iuliani, quo quartus quisque annus ponitur bissextilis. Propius ergo scopus attingeretur, si annis 33 tantum 8 anni bissextiles collocarentur; ex fractione tertia. Cum autem expediat pro annorum periodo numerum pariter parem habere, sumamus fractiones minus principales quartae respondentes, quae habeant numeratores per 4 diuisibiles; quae erunt.

$$\frac{136}{33};\ \frac{268}{65};\ \frac{400}{97};\ \frac{532}{129};\ \frac{664}{161};\ \text{etc.}$$

quarum tertia $\frac{400}{97}$ ad computum calendarii est commodissima. Apparet autem ex ea, interuallo annorum 400 tantum 97 annos bissextiles constitui debere; seu tres annos hoc interuallo, qui in calendario Iuliano bissextiles essent, in communes esse transmutandos; id quod etiam Constitutio Gregoriana praecipit. Ex quo intelligitur minore annorum interuallo accuratiorem correctionem adhiberi non posse. Accuratissime autem cum sole calendarium conciliabitur, si interuallo 21600 annorum denuo vnus annus, qui secundum constitutionem Gregorianam bissextilis esse deberet, in communem transmutetur.

§. 18. Quaeramus iam fractiones, quae ad $\sqrt{2}$ tam prope accedant, vt aliae minoribus numeris constantes propius accedere nequeant. Est vero $\sqrt{2} = 1,41421356 = \frac{141421356}{100000000}$, quae fractio, si diuisione continua iuxta modum praescriptum tractetur, dabit hos quotos, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, etc. ex quibus sequentes formabuntur fractiones quaesito satisfacientes, tam principales quam minus principales

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 2, & 2, & 2, & 2, & 2, & 2 \\ \frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{7}{5}, & \frac{17}{12}, & \frac{41}{29}, & \frac{99}{70}, & \frac{239}{169} \\ & & \frac{2}{1}; & \frac{4}{3}; & \frac{10}{7}; & \frac{24}{17}; & \frac{58}{41}; & \frac{140}{99} \\ V & \Lambda & V & \Lambda & V & \Lambda & V & \Lambda \end{array}$$

quarum fractionum alternae signo V notatae maiores sunt quam $\sqrt{2}$, reliquae vero signum Λ habentes minores quam $\sqrt{2}$.

§ 19. Notatu digna est haec proprietas ipsius $\sqrt{2}$, quod omnes quotos praeter primum habeat aequales binario, ita vt sit

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}}$$

Simili modo vero etiam si $\sqrt{3}$ euoluatur, reperiuntur quoti 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1 etc. ita vt sit

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}}}}$$

Quamuis

Quamuis enim non conſtet ex ipſa diuiſione, vtrum quoti hac lege vlterius progrediantur, tamen id non ſolum probabile videtur, ſed etiam ſequenti modo demonſtrari poteſt, quo valores huiusmodi fractionum continuarum, in quibus denominatores vel ſunt omnes aequales vel alterni vel terni etc. a poſteriori inueſtigare docebimus.

§. 19. Sit igitur propoſita ſequens fractio continua

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \text{etc.}}}}} \quad \text{quae ponatur} = x$$

erit

$$x - a = \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \text{etc.}}}}} = \frac{1}{b + x - a}$$

hinc erit

$$x^2 - 2ax + bx + a^2 - ab = 1$$

atque

$$x = a - \frac{b}{2} + \sqrt{\left(1 + \frac{bb}{4}\right)}.$$

Quare ſi fuerit $b = 2$ et $a = 1$, erit

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}} = \sqrt{2}$$

 ſi

ſi ergo ponatur $b = 2a$ erit

$$\sqrt{(a^2+1)} = a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a \text{ etc.}}}}}$$

vnde ex omnibus numeris, qui vnitate quadratum excedunt expedite per approximationem radix quadrata extrahi poteſt; vti poſito $a = 2$ ſequentes fractiones ad $\sqrt{5}$ proxime inueniendam inſeruient.

2,	4,	4,	4,	4,	4,	4	
$\frac{1}{0}$;	$\frac{2}{1}$;	$\frac{9}{4}$;	$\frac{38}{17}$;	$\frac{161}{72}$;	$\frac{682}{305}$;	$\frac{2889}{1292}$;	etc.
>	$\frac{1}{1}$;	$\frac{7}{3}$;	$\frac{29}{13}$;	$\frac{123}{55}$;	$\frac{521}{233}$;	$\frac{2207}{987}$	
	;	$\frac{5}{2}$;	$\frac{20}{9}$;	$\frac{85}{38}$;	$\frac{360}{161}$;	$\frac{1525}{682}$;	
	;	$\frac{3}{1}$;	$\frac{11}{5}$;	$\frac{47}{21}$;	$\frac{199}{89}$;	$\frac{843}{377}$;	

§. 20. Sit nunc propoſita ſequens fractio continua

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c \text{ etc.}}}}}}}$$

quae

quae ponatur $= x$ atque valor ipsius x reperietur sequente modo

$$x - a = \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b \text{ etc.}}}}}} = \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + x - a}}$$

hinc ergo erit $x - a = \frac{x + c - a}{bx + bc - ab + 1}$, seu

$$bxx + bcx - 2abx = abc - a^2 b + c.$$

Si ergo fuerit $c = 2a$ erit

$$bxx = aab + 2a \text{ atque } x = \sqrt{\left(a^2 + \frac{2a}{b}\right)}$$

simili modo si ponatur

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d \text{ etc.}}}}}}}$$

erit $x - a = \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + x - a}}}$

vnde

vnde sequitur

$$(bc+1)x^2+(bcd+b+d-c-2abc-2a)x-abcd+a^2bc-ab$$
$$-ad+aa-cd+ac-1=0.$$

Atque hoc modo omnes huiusmodi fractiones continuas, quarum denominatores vel omnes vel alterni vel terni vel quaterni etc. sunt inter se aequales, summare licet. Semper autem summa seu valor x est radix ex aequatione quadrata.

§. 21. Antequam ad alias fractiones continuas, in quibus denominatores progressiones arithmeticas constituunt, summandas progrediamur; quantitates quasdam transcendentes euoluamus, quae in fractiones continuas conuersae dent denominatores in progressione arithmetica progredientes, quo ex his via euadat planior eiusmodi fractiones continuas summandi. Hoc igitur logarithmis aliisque expressionibus transcendentibus tentans deprehendi in eiusmodi fractiones continuas deduci, si numerus cuius logarithmus hyperbolicus est vnitas, eiusque potestates quaeque considerentur. Posito igitur hoc numero $=e$, erit $e=$ 2, 71828182845904, qua expressione in fractionem continuam conuersa erit

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1 \text{ etc.}}}}}}}}}}$$

cuius

cuius denominatores terni constituunt progressionem arithmeticam 2, 4, 6, 8 etc. reliqui sunt vnitates. Quae lex etsi ex sola obseruatione est deprehensa, tamen probabile videtur eam in infinitum valere, quod quidem infra certo confirmabitur. Simili modo si $\sqrt{e} = 1,6487212707$ in fractionem continuam conuertatur erit

$$\sqrt{e} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{13 + \text{etc.}}}}}}}}}}$$

cuius progressionis lex similis est praecedentis. Similiaque obseruare licet in aliis fractionibus continuis, in quas potestates ipsius e transmutantur.

§. 22. Simili modo consideraui radicem cubicam ex numero e cuius logarithmus hyperbolicus est 1, inuenique

$$\frac{\sqrt[3]{e} - 1}{2} = 0,1978062125 = \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{30 + \cfrac{1}{42 + \cfrac{1}{54 + \cfrac{1}{\text{etc.}}}}}}}$$

in cuius fractionis continuae denominatoribus praeter primum progressio arithmetica obseruatur. Simile accidit, si potestates exponentium integrorum ipsius e considerentur et in fractiones continuas transformentur. Sic considerans quadratum reperi

$$\frac{e^2-1}{2}=3,1945280495 1=$$

$$3+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\text{ etc.}$$

Deinde etiam ex ipso numero e, ex quo formata fractio continua interruptam habuit progressionem arithmeticam denominatorum, obseruaui paucis mutandis huiusmodi fractionem continuam ab interruptione liberam formari posse. Prodiit enim

$$\frac{e+1}{e-1}=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\cfrac{1}{22+\cfrac{1}{26+\text{etc.}}}}}}}$$

in qua regularis inest progressio arithmetica differentia 4 progrediens

§. 23.

§. 23. Cum igitur obſeruaſſem tantam conuenientiam inter fractiones continuas, in quibus denominatores modo interruptam modo non interruptam conſtituant progreſſionem Arithmeticum; in eam incidi cogitationem, num forte fractio continua, in qua interrupta ſit denominatorum progreſſio, in aliam non interruptam transformari poſſit. Conſideraui igitur progreſſionem quamcunque a, b, c, d, e, etc. interque binos contiguos vbique hos duos numeros m, n interpolaui, vt prodiret ſequens fractio continua

$$a + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{d \text{ etc.}}}}}}}}}}$$

hancque inueni aequalem ſequenti fractioni continuae, in qua denominatores ſine interruptione progrediantur.

$$\frac{1}{mn+1}\left((mn+1)a + n + \cfrac{1}{(mn+1)b + m + n + \cfrac{1}{(mn+1)c + m + n + \cfrac{1}{(mn+1)d + m + n + \cfrac{1}{\text{etc.}}}}}\right)$$

Demonstratio huius conuenientiae in hoc consistit, quod fractiones ordinariae, quibus ad valorem vtriusque acceditur, inter se conueniant: prout tentanti patebit.

§. 24. Si quantitates interpolatae m, n inuertantur ordine, fractio continua posterior discrimen tantum in primo termino patietur ex quo sequens satis elegans theorema conficitur, quo erit

$$a + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{c \text{ etc.}}}}}}} - \left(a + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{c \text{ etc.}}}}}}}\right) = \frac{n - m}{mn + 1}$$

Quicunque ergo numeri loco a, b, c, d, etc. substituantur differentia inter duas fractiones continuas semper erit cognita atque constans, scilicet $= \frac{n - m}{mn + 1}$.

§. 25. Ex eadem inuenta aequalitate inter fractiones continuas superiores, interruptam scilicet et non interruptam, sequens consequitur aequalitas diuidendo vnitatem per vtramque et addendo vtrinque eandem quantitatem A

A + 1

$$A + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{c \text{ etc.}}}}}}}} = A + \cfrac{mn+1}{(mn+1)a + n + \cfrac{1}{(mn+1)b + m + n + \cfrac{1}{(mn+1)c + m + n \atop \text{etc.}}}}$$

Huius ergo aequationis ope quamuis fractionem continuam, interruptam habentem progressionem denominatorum binis quantitatibus m et n conuertere licebit in aliam, in qua denominatores sine interruptione progrediantur. Si ergo vt in fractionibus superioribus habuimus ponatur $m = n = 1$, sequens prodibit aequatio

$$A + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 \text{ etc.}}}}}}} = A + \cfrac{2}{2a + 1 + \cfrac{1}{2b + 2 + \cfrac{1}{2c + 2 + \cfrac{1}{\text{etc.}}}}}$$

Cum igitur ex §. 21. sit:

$$\frac{1}{e-2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 \text{ etc.}}}}}$$

erit

erit ponendo $A = 1$, $a = 2$, $b = 4$, vt sequitur

$$\frac{1}{e-2} = 1 + \cfrac{2}{5 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 \text{ etc.}}}}}}$$

hincque erit vnitatem per vtrumque diuidendo

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{5 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{26 + \text{ etc.}}}}}}}}$$

Simili modo ex eodem paragrapho reperietur

$$\sqrt{e} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9 \text{ etc.}}}}}}}} = 1 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{28 \text{ etc.}}}}}$$

Haeque

Haeque fractiones continuae nunc inuentae tantopere conuergunt, vt facili negotio valores ipsorum e et $\sqrt{e}$ quantumuis prope reperiri queant.

§. 26. Viciſſim vero etiam hinc fractio continua in qua denominatores ordine non interrupto progrediuntur, transmutari poterit in aliam, in qua denominatores interrupti ſint duobus conſtantibus numeris m et n: ita inueni fore

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e \text{ etc.}}}}} = a-n+\cfrac{mn+1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{\frac{b-m-n}{mn+1}+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{\frac{c-m-n}{mn+1}+\cfrac{1}{m \text{ etc.}}}}}}}}$$

Vel tollendo fractiones in his denominatoribus, ſi opus viſum fuerit, erit

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d \text{ etc.}}}} = a-n+\cfrac{mn+1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{mn+1}{b-m-n+\cfrac{mn+1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{mn+1}{c-m-n+\cfrac{mn+1}{m+\cfrac{1}{n \text{ etc.}}}}}}}}}$$

si ergo ponatur $m=n=1$, habebitur

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d\text{ etc.}}}} = a-1+\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{1}{2}b-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{1}{2}c-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{1}{2}d-1+\cfrac{1}{\text{etc.}}}}}}}}}}$$

§. 27. Quemadmodum hic fractiones continuas, quarum denominatores ita interrupto ordine progrediuntur, vt inter binos quosque contiguos duae interpositae sint quantitates constantes, considerauimus, ita eadem reductio extendi potest ad quatuor vel sex vel octo etc. quantitates constantes interpolatas. Numerus autem impar quantitatum constantum interpolari nequit. Sic si inter quantitatum a, b, c, d, etc. binas quasque contiguas interpolentur hae quatuor m, n, p, q, ponaturque breuitatis gratia $mnpq+mn+mq+pq+1=P$; et $mnp+npq+m+n+p+q=Q$ erit

$$a+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{m\text{ etc.}}}}}}} = \frac{1}{P}(Pa+npq+n+q+\cfrac{1}{Pb+Q+\cfrac{1}{Pc+Q+\cfrac{1}{Pd+Q+\text{etc.}}}}$$

Atque

Atque si fuerit $m = n = p = q = 1$, habebitur

$$a + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 \text{ etc.}}}}}}}} = \tfrac{1}{5}\left(5a + 3 + \cfrac{1}{5b + 6 + \cfrac{1}{5c + 6 + \cfrac{1}{5d + 6 + \text{etc.}}}}\right)$$

Ex quibus noua fractionum continuarum conuersio nascitur.

§. 28. Cum autem in praecedentibus, vbi numerum e cuius logarithmus est $= 1$, eiusque potestates in fractiones continuas conuerti, progressionem arithmeticam denominatorum tantum obseruauerim, neque praeter probabilitatem de huius progressionis continuatione in infinitum quicquam affirmare valuerim; in id potissimum incubui, vt in huius progressionis necessitatem inquirerem, eamque firmiter demonstrarem. Hocque etiam feliciter sum consecutus ex peculiari modo, quo integrationem huius aequationis $a\,dy + y^2 dx = x^{\frac{-4n}{2n+1}} dx$ reduxi ad integrationem huius $a\,dq + q^2 dp = dp$ Posito enim $p = (2n+1) x^{\frac{1}{2n+1}}$ inueni esse

$q =$

$$q = \frac{a}{p} + \cfrac{1}{\frac{3a}{p} + \cfrac{1}{\frac{5a}{p} + \cfrac{1}{\frac{7a}{p} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\frac{(2n-1)a}{p} + \cfrac{1}{x^{\frac{2n}{2n+1}} y}}}}}}$$

Vnde cum q per p dari queat, sitque $p = (2n+1) x^{\frac{1}{2n+1}}$, formari potest aequatio finita inter x et y, quae integralis erit aequationis $a\,dy + y^2 dx = x^{\frac{-4n}{2n+1}} dx$, quoties n est numerus integer affirmatiuus.

§. 29. Si ergo n ponatur numerus infinitus expressio inuenta erit fractio continua in infinitum excurrens, cuius denominatores constituent progressionem arithmeticam. Quamobrem habebitur sequens aequatio

$$q = \frac{a}{p} + \cfrac{1}{\frac{3a}{p} + \cfrac{1}{\frac{5a}{p} + \cfrac{1}{\frac{7a}{p} + \cfrac{1}{\frac{9a}{p} + \text{etc.}}}}}$$

atque

atque q seu valor huius fractionis continuae ex ista aequatione $a\,dq + q^2\,dp = dp$ definietur. Erit vero $\frac{a\,dq}{1-qq} = dp$ atque $\frac{a}{2}\, l \frac{1+q}{1-q} = p + C$. quae constans ex eo debet determinari, quod posito $p = 0$ fiat $q = \infty$. Quamobrem erit

$\frac{a}{2}\, l \frac{q+1}{q-1} = p$, atque $\frac{q+1}{q-1} = e^{\frac{2p}{a}}$ vnde fiet $q = \dfrac{e^{\frac{2p}{a}} + 1}{e^{\frac{2p}{a}} - 1}$,

qui est valor fractionis continuae inuentae. Deinde vero cum sit $e^{\frac{2p}{a}} = 1 + \frac{2}{q-1}$ habebitur

$$e^{\frac{2p}{a}} = 1 + \cfrac{2}{\frac{a-p}{p} + \cfrac{1}{\frac{3a}{p} + \cfrac{1}{\frac{5a}{p} + \cfrac{1}{\frac{7a}{p} + \text{etc.}}}}}$$

§. 30. Si ponatur $\frac{a}{2p} = s$, seu $a = 2ps$ erit

$$e^{\frac{1}{s}} = 1 + \cfrac{2}{2s - 1 + \cfrac{1}{6s + \cfrac{1}{10s + \cfrac{1}{14s + \text{etc.}}}}}$$

Atque

Atque ex priore inuenta aequatione erit

$$\frac{e^{\frac{1}{s}}+1}{e^{\frac{1}{s}}-1} = 2s + \cfrac{1}{6s + \cfrac{1}{10s + \cfrac{1}{14s + \cfrac{1}{18s + \text{etc.}}}}}$$

Si denominatores huius interpolentur binis vnitatibus habebitur

$$\frac{e^{\frac{1}{s}}+1}{e^{\frac{1}{s}}-1} = 2s - 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3s - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5s - 1 + \cfrac{1}{1\ \text{etc.}}}}}}}}$$

Ex qua oritur sequens fractio continua

$$e^{\frac{1}{s}} = 1 + \cfrac{1}{s - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3s - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5s - 1 + \cfrac{1}{1\ \text{etc.}}}}}}}}}$$

Ex his vero formulis fluunt omnes ſupra inuentae, quibus poteſtates quasdam ipſius e per fractiones continuas expreſſimus; ex quo neceſſitas progreſſionis ante tantum obſeruatae intelligitur.

§. 31. Iam ergo nacti ſumus fractionem continuam, cuius denominatores progreſſionem arithmeticam conſtituunt, cuiusque valorem exhibere licuit. Cum autem haec progreſſio ſit ſpecies tantum arithmeticae, generalem contemplatus ſum progreſſionem arithmeticam atque fractionem continuam, cuius denominatores eam progreſſionem conſtituant, ſequenti modo ad ſummam reuocaui. Sit ſcilicet ſequens fractio continua, cuius valorem, quem quaero, pono $= s$, ita vt ſit

$$s = a + \cfrac{1}{(1+n)a + \cfrac{1}{(1+2n)a + \cfrac{1}{(1+3n)a + \cfrac{1}{(1+4n)a + \cfrac{1}{\text{etc.}}}}}}$$

ex qua quo valorem ipſius s eruam, ab approximatione ad eum ordior. Erit itaque per methodum ſupra traditam

$$\begin{array}{llll} a, & (1+n)a, & (1+n)2a, & (1+3n)a \\ \frac{1}{0}; & \frac{a}{1}; & \frac{(1+n)a^2+1}{(1+n)a}; & \frac{(1+n)(1+2n)a^3+(2+2n)a}{(1+n)(1+2n)a^2+1} \end{array}$$

quae fractiones continuo magis ad valorem verum ipſius s accedunt; atque fractio infiniteſima verum ipſius s valorem dabit.

 §. 32.

§. 32. Si hae fractiones vlterius continuentur facile obſeruabitur lex, qua formatae ſunt; ex eaque concludetur fractionem infinitesimam poſt numeratoris et denominatoris diuiſionem per primum denominatoris terminum fore

$$\frac{a + \frac{1}{1 \cdot na} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 1(1+n)n^2a^3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1(1+n)(1+2n)n^3a^5} + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{1(1+n)na^2} + \frac{1}{1 \cdot 2(1+n)(1+2n)n^2a^4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3(1+n)(1+2n)(1+3n)n^3a^6} \text{ etc.}}$$

cui adeo s aequatur. Poſito ergo $a = \frac{1}{\sqrt{nz}}$ erit $s = \frac{1}{\sqrt{nz}} \cdot$

$$\frac{1 + \frac{z}{1 \cdot 1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2 \cdot 1(1+n)} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1(1+n)(1+2n)} + \text{etc.}}{1 + \frac{z}{1(1+n)} + \frac{z^2}{1 \cdot 2 \cdot 1(1+n)(1+2n)} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3(1+n)(1+2n)(1+3n)} + \text{etc.}}$$

qui valor quo obtineatur, ponatur

$$t = 1 + \frac{z}{1 \cdot 1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2 \cdot 1(1+n)} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1(1+n)(1+2n)} + \text{etc.}$$

et $u = 1 + \frac{z}{1(1+n)} + \frac{z^2}{1 \cdot 2(1+n)(1+2n)} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3(1+n)(1+2n)(1+3n)}$

$+ \text{etc.}$

ita vt futurum ſit $s = \frac{t}{u\sqrt{nz}}$. Ex inſpectione autem harum duarum ſerierum intelligitur fore $dt = udz$; atque ſimili modo deprehendetur eſſe $udz + ndu = tdz$. Ponatur $t = vu$, quo ſit $s = \frac{v}{\sqrt{nz}}$; erit $vdu + udv = udz$; atque $udz + nzdu = uvdz$; ex quibus ſequitur $\frac{du}{u} = \frac{dz - dv}{v} = \frac{vdz - dz}{nz}$, hincque ſequens aequatio inter z et v tantum conſiſtens $nzdv - vdz + v^2 dz = nzdz$; quae ſubſtituto $v = z^{\frac{1}{n}} q$ et $z = r^n$, abibit in hanc

$$dq + q^2 dr = nr^{n-2} dr.$$

Ex

Ex qua aequatione, ſi q determinetur per r ponaturque $r = n^{-\frac{1}{n}} a^{-\frac{2}{2}}$, erit valor quaeſitus $s = arq$.

§. 33. Aſſignatio ergo valoris fractionis continuae propoſitae, quem poſui s, exiſtente

$$s = a + \cfrac{1}{(1+n)a + \cfrac{1}{(1+2n)a + \cfrac{1}{(1+3n)a + \cfrac{1}{(1+4n)a \text{ etc.}}}}}$$

perducta eſt ad reſolutionem huius aequationis $dq + q^2 dr = nr^{n-2} dr$; ita autem huius aequationis integrale accipi debet, vt facto $a = \infty$ fiat $s = \infty$, vel poſito $a = 0$ fiat $s = 1$. Vnde ſequens pro introducenda conſtante in integrando regula naſcitur, vt caſu quo non eſt $n > 2$ fiat $q = \infty$ poſito $r = \infty$. Ponimus autem n eſſe numerum affirmatiuum, quo fractio continua oriatur, qualem hactenus conſiderauimus denominatores affirmatiuos habentem.

§. 34. Conſtat autem aequationem inuentam $dq + qqdr = nr^{n-2}dr$ congruere cum aequatione olim a *Com. Riccati* propoſita; iisque propterea tantum caſibus eſſe integrabilem, quibus n eſt numerus huius formae $\frac{2}{2m+1}$ denotante m integrum, eumque affirmatiuum, quo pro n obtineamus numeros affirmatiuos. Ob hos igitur caſus ſequentis fractionis continuae

$a + \frac{1}{\ldots}$

$$a + \cfrac{1}{\frac{(2m+3)a}{2m+1} + \cfrac{1}{\frac{(2m+5)a}{2m+1} + \cfrac{1}{\frac{(2m+7)a}{2m+1} + \text{etc.}}}}$$

valor ſemper per expreſſionem finitam exhiberi poterit. Quod quidem per ſe facile conſtat, nam facto $m = 0$, habemus hanc fractionem continuam

$$a + \cfrac{1}{3a + \cfrac{1}{5a + \cfrac{1}{7a + \cfrac{1}{9a + \text{etc.}}}}}$$

cuius valorem iam ſupra inuenimus. Ad hanc vero reduci poteſt illa generalis poſito enim $a = (2m+1)b$ habebitur

$$(2m+1)b + \cfrac{1}{(2m+3)b + \cfrac{1}{(2m+5)b + \cfrac{1}{\text{etc.}}}}$$

quae in iſta iam cognita toties continetur, quoties m fuerit numerus integer affirmatiuus.

§. 35. Apparet igitur per hanc ipſam fractionum continuarum reſolutionem integrationem aequationis $dq + q^2 dr = n r^{n-2} dr$ deduci ad integrationem huius aequationis $dq + q^2 dr = 2 dr$, ſiquidem n fuerit $= \frac{2}{2m+1}$ denotante

tante

ſtante m numerum integrum affirmatiuum. Quam ipſam reductionem iam ſupra §. 28 eodem modo, quo ex hoc fonte perfici poteſt, expoſui. Quo autem intelligatur, quomodo hac ratione verus huiusmodi fractionum continuarum valor reperiatur, conſiderabo caſum $n = 2$ ſeu $m = 0$, quo orietur

$$s = a + \cfrac{1}{3a + \cfrac{1}{5a + \cfrac{1}{7a + \cfrac{1}{\text{etc.}}}}}$$

Reperietur vero s ex hac aequatione $dq + q^2 dr = 2dr$, quae debito modo integrata dat $r = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, l\frac{q+\sqrt{2}}{q-\sqrt{2}}$ ex qua prodibit $q = \frac{(e^{2r\sqrt{2}}+1)\sqrt{2}}{e^{2r\sqrt{2}}-1}$. Eſt vero $r = \frac{1}{a\sqrt{2}}$ atque $s = arq = \frac{q}{\sqrt{2}}$, vnde proueniet valor ipſius $s = \frac{e^{\frac{2}{a}}+1}{e^{\frac{2}{a}}-1}$, prorſus vt iam ſupra inuenimus (§. 28.).