DE
COMMVNICATIONE MOTVS
IN COLLISIONE CORPORVM
SESE NON DIRECTE PERCVTIENTIVM.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

Tabula II et III.

QVamnam motus alterationem, ſi duo corpora in ſe mutuo impingant, vtrumque corpus ex colliſione patiatur, quaeſtio eſt iam praeterito ſeculo producta atque multum agitata; huius vero ſeculi annis 1724 et 1726 ab Academia Scientiarum Regia Pariſina de nouo cum annexo praemio conſueto publice eſt propoſita: quo factum eſt, vt plures inſignes Geometrae iſtam quaeſtionem accuratiori examini ſubiecerint, ſuasque meditationes iudicio inclytae illius Academiae commiſerint. Hinc aliquot hac de re diſſertationes publici iuris ſunt factae, quibus iſta quaeſtio non ſolum maiore induſtria eſt tractata, ſed etiam ad ſummum certitudinis faſtigium euectae. Quantumuis autem haec materia exhauſta videatur, tamen nonniſi exigua huius quaeſtionis particula etiamnum eſt inueſtigata, atque tota, quam habemus, doctrina de percuſſionibus eſt tantum caſus maxime particularis quaeſtionis, quemadmodum proponi ſolet. Si enim hanc quaeſtionem extendamus ad corpora cuiuscunque figurae, quae quomodocunque in ſe inuicem irruant, regulae communicationis motus adhuc

cognitae minime ſufficiunt. Quod vt magis fiat perſpicuum ad hoc attendere oportet, quod regulae circa motus communicationem traditae in eiusmodi tantum colliſionibus locum inueniant, in quibus recta corporum in ſe inuicem impingentium centra grauitatis iungens per ipſum punctum impulſus transeat, atque in contactum ſimul ſit normalis; quarum conditionum niſi vtraque adſit, doctrina, quam de percuſſionibus habemus, perperam adhibetur; et qualis in huiusmodi colliſionibus motus mutatio producatur, adhuc maxime latet. Interim tamen ex his ſatis intelligitur, regulas receptas in colliſione corporum ſphaericorum ſemper tuto vſurpari poſſe, ſi quidem eorum centra grauitatis in ipſa figurae centra incidant. Nam quomodocunque duo globi ſibi mutuo occurrant, recta per eorum centra transiens quoque per punctum contactus transibit, eritque in contactum perpendicularis. Quoties autem contingit, vt duorum corporum ſe mutuo percutientium recta eorum centra grauitatis iungens non per ipſum contactum normaliter transeat, toties regulae conſuetae nullius erunt vſus. Huic igitur defectui cum *Cel. Dan. Bernoulli* ſubuenire ſe inſtituiſſe mihi nuper ſignificaſſet, meque ad eundem laborem ſuſcipiendum excitaſſet, tam propter ipſam rei dignitatem quam amicam admonitionem ſtatim hoc negotium ſum aggreſſus; in quo eidem viae, qua ante aliquot annos regulas communicationis motus vulgares elicui, inſiſtens, atque quibusdam nouis a me non pridem detectis principiis mechanicis in ſubſidium vocatis, tandem praefixum attigi ſcopum. Has igitur meditationes meas in ordinem disponere, atque clare explicare viſum eſt; totamque disquiſitionem tam ad corpora perfecte dura quam elaſtica, quae alias ſeorſim tractari ſolent, accommodabo.

Tabula II. Figura 1. §. 2. Quando duo corpora A et B concurrunt, ea ſe mutuo in puncto C tangent, eritque mihi in ſequentibus hoc punctum C punctum contactus. Fieri quidem poteſt, vt duo corpora concurrentia ſe mutuo in pluribus punctis vel etiam in integra quadam ſuperficiei portione tangant; ſed huiusmodi caſus in praeſenti non ſum contemplaturus, cum tractatu ſint nimis difficiles, atque methodo, qua ſum vſurus, nihilominus, ad calculum reuocari queant. In caſibus ergo, quos euoluere conſtitui, ſemper fiet contactus in puncto quopiam vti in C, quod punctum contactus ſeu punctum impulſus vocabo, ex quo effectus, quem corpora in ſe mutuo exerunt, eſt determinandus. Dabitur ergo planum, quod vtrumque corpus in puncto contactus C tangit, cuius veſtigium in figura eſt recta ECF; hocque planum vocabo planum contactus. Deinceps ſi ad hoc planum ducatur perpendicularis ef per punctum contactus C transiens, eam vocabo directionem impulſus, cum corpora concurrentia in ſe mutuo normaliter agant, atque hinc ſe mutuo ſecundum directionem ef vrgeant.

§. 3. Ex directione impulſus cum centris grauitatis vtriusque corporis comparata tres oriuntur colliſionum Figura 2. ſpecies. Prima ſpecies, quam colliſionem rectam appellabo, eſt, quando rectae AC et BC quae ex corporum centris grauitatis A et B in punctum contactus C ducuntur, ambae in planum contactus EF ſunt perpendiculares. Hoc ergo caſu recta iungens vtriusque corporis centra grauitatis per punctum contactus transit, et ſimul in planum contactus eſt normalis. Regulae igitur percuſſionis; quae adhuc ſunt erutae, tantum ad has primae ſpeciei colliſiones pertinent. Ad ſecundam ſpeciem refero colliſiones rectobliquas, in quibus altera recta BC, quae ex alterius corporis B centro grauitatis B in punctum contactus C ducitur; eſt normalis in planum contactus; altera vero AC ex centro A alterius corporis A in punctum contactus C ducta in planum contactus EF oblique cadit. Figura 3. Tertiae ſpeciei colliſiones, quas obliquas vocabo, ita erunt comparatae, vt vtraque recta AC et BC, quae ex corporum centris grauitatis A et B in punctum contactus C ducuntur, in planum contactus EF oblique incidat. Figura 4.

§. 4. De prima ergo colliſionum ſpecie ſeu colliſione recta non opus eſt, vt hic verba faciam, cum ea tam ab aliis iam ſatis tractata, quam a me etiam ante aliquot annos eadem methodo, qua hic ſum vſurus, pluribus expoſita ſit. Praeterea autem colliſio recta tanquam ſpecies ſecundae ſpeciei conſiderari poteſt, cum ea facto altero angulo, qui eſt obliquus, quoque recto, in ſpeciem primam abeat, ita vt regulae ad primam ſpeciem ſpectantes in regulis ſecundae ſpeciei contineantur. Simili modo ſpecies ſecunda in tertia comprehenditur, dum alter obliquorum angulorum in rectum abit; adeo vt ſpecies tertia latiſſime pateat, et tam primam quam ſecundam in ſe complectatur. Ne autem in hisce colliſionibus examinandis nimium diſtinear, nec ad ſolidorum contemplationem, quae ob imaginationis difficultatem taedioſa eſſe ſolet, deducar, alias colliſiones non tractabo, niſi quae in eodem fiunt plano. Hanc ob rem tam motus corporum directiones, quam impulſus directio itemque corporum centra grauitatis et punctum contactus mihi ſemper erunt in eodem plano; huc autem etiam ii caſus, in quibus hoc non contingit, reduci poſſunt, adeo vt hac reſtrictione vniuerſalitati nihil decedat.

§. 5. Quando duo corpora concurrunt, actio quam in ſe mutuo exercent fiet in ipſo puncto contactus et directio vis, qua alterum alterum vrget, erit normalis in planum contactus, ſeu incidet in directionem impulſus. Duo ergo huiusmodi corpora, quae concurrunt, prement ſe mutuo in puncto contactus, et niſi ſint duriſſima, impreſſionem facient, quae impreſſio eo erit maior, quo molliora fuerint corpora, et quo maiore vi in ſe mutuo irruant. Haec autem impreſſio ſiue ſit maior ſiue minor, hoc nihil refert in motuum alteratione, et hanc ob rem eius quantitas non in computum ingredietur. Poſtquam vero talis impreſſio eſt facta corpora ſe vel reſtituent in priſtinam figuram, vel impreſſionem factam retinebunt; illud ſcilicet euenit in corporibus elaſticis, hoc vero in non-elaſticis. Corpora igitur non elaſtica tam diu tantum in ſe mutuo agunt, quoad impreſſiones, quas patiuntur, ſint maximae, tum enim, quia ſeſe non reſtituunt, ceſſabit actio corporum reciproca, et vtrumque ea celeritate, quam hoc momento habet, moueri perget. Corpora vero elaſtica tam diu in ſe mutuo agent, quoad, impreſſiones, quas vtrumque eſt adeptum penitus fuerint reſtitutae. Atque haec eſt eſſentialis differentia inter corpora elaſtica et non elaſtica, ex qua regulae communicationis motus pro vtrisque debent deriuari.

§ 6. Ad mutuam hanc corporum actionem, ex qua alteratio motus in vtroque oritur, cum melius percipiendam, tum facilius explicandam, loco vis, qua corporum particulae, prope contactum ſitae impreſſioni reſiſtunt, in puncto contactus cogitatione ſubſtituo elaſtrum CD, quod quo magis fuerit compreſſum ſeu breuius factum, eo maiore vi ſeſe extendendi et in longitudinem naturalem reſtituendi gaudeat. Qua quidem ratione vis huius elaſtri creſcat pro diminutione longitudinis eius, nihil intereſt ad alterationem motus in colliſione factam determinandam; ſed quaecunque accipiatur ratio, eadem ſemper motus alteratio reperietur. Huius ergo elaſtri imaginarii poſitio CD incidere debebit in directionem impulſus, ſeu normalis erit in planum contactus. Quamdiu igitur hoc elaſtrum comprimitur, vi ſua ſeſe extendendi vrgebit vtrumque corpus; et, ſi corpora non fuerint elaſtica, eius vis ceſſabit ſubito, quando in ſtatum maximae compreſſionis fuerit reductum. At ſi corpora fuerint elaſtica, tum elaſtrum ſeſe in ſitum priſtinum actu reſtituere ponendum eſt, ita vt tamdiu corpora ambo vrgeat, donec naturalem ſuam longitudinem recuperauerit. Hac ergo ratione alteratio motus in colliſione corporum ad effectum potentiarum ſollicitantium eſt reducta.

Figura 5.

§. 7. Ad motum ergo, quem duo corpora in ſe inuicem impingentia poſt conflictum ſint habitura, definiendum, requiritur, vt effectum vis elaſtri CD ſeu datae cuiuſcunque vis in corpus datum determinare valeamus: ex his enim ſucceſſiuis elaſtri preſſionibus in vtrumque corpus exercitis coniunctim ſumtis oritur motus vtriusque corporis poſt conflictum. Quamobrem, antequam motus alterationem ex colliſione oriundam determinare liceat, inueſtigari debet, qualem effectum data potentia in dato puncto corpori cuicunque ſiue quieſcenti ſiue moto applicata producat dato tempore. In hoc vero negotio etiamnnm caremus ſufficientibus principiis; quae enim habentur et ſatis nota ſunt principia, quibus potentiarum ſollicitationes definiri ſolent, ea tantum corporibus infinite paruis ſunt accommodata, atque ad corpora finitae magnitudinis applicari omnino nequeunt, niſi directio potentiae ſollicitantis per centrum grauitatis corporis transeat. Atque iſte defectus in cauſa eſt, quod colliſiones primae tantum ſpeciei ope horum principiorum explicari potuerint, ad duas reliquas vero ſpecies haec principia non ſufficiant.

§. 8. Cum igitur non ita pridem in haec deſiderata mechanicae principia incidiſſem, ea ad has de colliſionibus quaeſtiones ſoluendas feliciter accommodare licuit. Haec ergo principia imprimis proferre et explicare decet, demonſtrationem autem ſeu methodum, qua ad ea perueni, inſtitutum hoc meum exponere prohibet; ſed alia forte occaſione eorum veritatem firmiſſimis demonſtrationibus declarare licebit. Ante omnia igitur eſt notandum in omni corpore duplicem motum ineſſe poſſe, quorum alter, quem progreſſiuum voco, eſt motus centri grauitatis; alter vero motus, quem gyratorium vocabo, conſiſtit in motu conuerſionis corporis circa centrum grauitatis. Cognitis ergo tum directione et celeritate centri grauitatis, tum motus gyratorii celeritate et plaga in quam ſit, totus corporis motus adaequate cognoſcitur. Motus autem gyratorius ſit circa axem per centrum grauitatis transeuntem vel fixum vel mobilem; fixus quidem erit axis, ſi vires centrifugae ſingularum corporis particularum ſe mutuo deſtruant; at ſi ſe non deſtruant, axis ſitum mutabit fietque mobilis. Cum ergo hic tantum motus in eodem plano factos explorare ſit propoſitum, motus gyratorios tantum circa axem fixum conſiderabo.

Fig. 2,3,4

§. 9. Ex hac inſtituta reſtrictione intelligitur, cuiusmodi ea corpora eſſe debeant, quorum conflictus hic ſum expoſiturus. Corpora ſcilicet ita debebunt eſſe comparata, vt, dum in ſe mutuo impingunt, directio impulſus in idem planum incidat, in quo ſita ſunt corporum collidentium centra grauitatis A et B, atque punctum impulſus C. Quare ſi puncta A, B, C in plano horizontali ſita eſſe ponamus, directio impulſus quoque horizontalis eſſe debebit, id quod eueniet, ſi planum contactus fuerit verticale. Praeterea vero corpora A et B eius indolis eſſe oportet, vt ea circa axem verticalem per centrum grauitatis transeuntem libere rotari queant; quae proprietas non in omnia corpora competit. Quamobrem eiusmodi tantum corpora conſiderabimus, quorum axes verticales per omnium ſectionum horizontalium grauitatis centra transeant, quippe quae circa axem verticalem per centrum grauitatis transeuntem libere rotari poſſunt. Denique motus directiones quoque in plano horizontali ſitas eſſe pono, quo tam motus ante conflictum quam poſt conflictum in plano horizontali fiant.

§. 10. Quando quidem directiones, in quibus corpora collidentia mouentur, non fuerint horizontales, ſi caſus nihilominus huc facile referuntur ope motus reſolutionis: in conflictu enim motus horizontales tantum variantur, verticalibus immutatis manentibus, ita vt poſt conflictum ope compoſitionis motus determinari queant. Ob hanc igitur reſtrictionem tractatio noſtra non minus generalis erit cenſenda. Reliquae vero duae conditiones omnino cum plurima corpora, tum plurimos impulſus excludunt. Sed huiusmodi caſus partim ob nimiam difficultatem tractandi praetermittere conſtitui, partim quod nonnulli ex modo, quo propoſitos ſum tractaturus, etiam paucis mutandis reſolui queant. In ſequentibus ergo perpetuo id erit tenendum, me tam motuum directiones, quam corporum centra grauitatis vna cum puncto et directione impulſus in eodem plano poſita eſſe intelligere, atque corpora eius tantum indolis admittere, quorum ſectiones horizontales omnes ſua grauitatis centra in eadem recta habeant ſita, quae recta verticalis mihi erit axis gyrationis.

§. 11. His praemiſſis ad principia, quibus ſum vſurus, exponenda progredior, quorum primum eſt, quod omne corpus habens motum progreſſiuum eundem motum vi inſita inertiae aequabiliter in directum perpetuo conſeruet; niſi a viribus externis impediatur. Corporum ergo, qualia hic contemplabor, motus centri grauitatis erit aequabilis in linea recta horizontali, qualemcunque id etiam interea habent motum gyratorium. Secundum principium in hoc conſiſtit, quod corpus eius ſcilicet indolis,

vti poſui, motum habens gyratorium circa axem verticalem per centrum grauitatis transeuntem, hunc quoque motum conſtanter ſeruet aequabilem, quomodocunque interea motus progreſſiuus in directum immutetur. Ex his duobus principiis conficitur, quod corpus duplici motu praeditum altero progreſſiuo, altero gyratorio circa axem per centrum grauitatis transeuntem, vtrumque motum perpetuo conſeruare debeat, niſi ab externis viribus impediatur. Horum duorum motuum autem vterque ſeorſim cognoſci poteſt, progreſſiuus ſcilicet cognoſcitur ex directione et celeritate centri grauitatis, gyratorius vero ex tempore, quo circa axem gyrationis conuertitur; quod ergo etiam colligetur ex celeritate angulari circa iſtum axem.

§. 12. Cum igitur conſtet cuiusmodi motus corpus ſibi relictum vi propria conſeruet, ſupereſt vt oſtendamus, quomodo vterque motus a potentiis ſollicitantibus tam generetur quam alteretur. Quemadmodum igitur motus corporis progreſſiuus a potentia quomodocunque applicata alteretur, ex ſequente principio intelligetur. Sit corpus A, Figura 6. cuius centrum grauitatis A moueatur in recta AB, in qua ergo ſua, quam habet, celeritate vniformiter progrederetur, niſi a potentiis ſollicitaretur. Sollicitetur autem a potentia C*c* ipſi in puncto C applicata, et quaeritur, quomodo iſte centri grauitatis motus ab hac potentia ſollicitante immutetur. Dico autem huius potentiae C*c* ad motum progreſſiuum AB alterandum effectum fore eundem, ac ſi tota corporis maſſa in centro grauitatis A eſſet concentrata, eique potentia A*a* aequalis et paral-

parallela ipſi C*c* eſſet applicata. Qui ergo effectus vt definiatur. reſoluatur motus corporis ſecundum AB, in duos laterales inter ſe normales AE et AF, quorum ille tantum a potentia A*a* turbabitur. Sit igitur potentia C*c* $= p$, maſſa corporis $= A$; celeritas ſecundum $AE = u$ et temporis elementum dt, eritque hoc tempuſculo $du = -\frac{pdt}{A}$; alter vero motus AF hoc tempuſculo inuariatus manebit.

§. 13. Iſta motus progreſſiui alteratio eadem ſemper eſt, quemcumque corpus ſimul habuerit motum gyrationis, ſed ab eadem potentia quoque ipſe motus gyrationis afficitur et turbatur; iſte autem potentiae ſollicitantis effectus in motu gyratorio perturbando ſequenti modo definietur. Figura 7. Sit corpus A, quod praeter motum progreſſiuum habeat motum circa axem verticalem per centrum grauitatis A transeuntem, quaeriturque, quomodo iſte motus gyratorius a potentia C*c* alteretur. Fiat motus gyratorius ſecundum ſenſum C*g*H ſitque celeritas puncti C circa $A = u$, et diſtantia $AC = f$ exprimet $\frac{u}{f}$ celeritatem angularem. Multiplicentur iam omnes corporis particulae per quadrata diſtantiarum ſuarum reſpectiue ab axe rotationis, ſitque horum factorum aggregatum $= S$. Sit porro potentia $Cc = p$, et ſinus anguli $ACc = m$; atque tempuſculo dt fiet $du = \frac{mffpdt}{S}$, ſeu celeritatis angularis $\frac{u}{f}$ decrementum $\frac{du}{f}$ erit $= \frac{mfpdt}{S}$. Hinc perſpicitur, ſi C*c* producta per centrum grauitatis A transeat, tum potentiam motum gyratorium omnino non afficere. Eo maior autem erit motus gyratorii alteratio, quo maiores fuerint tum diſtantia AC, tum ſinus anguli AC*c*.

§. 14. In colliſionibus primae ſpeciei ergo, in quibus directio impulſus per vtriusque corporis centrum grauitatis tranſit, a percuſſionis vi in neutro corpore motus gyratorius generari goteſt, nec, ſi corpora iam ante conflictum motum gyratorium habuerint, is in percuſſione mutabitur. Ad motum ergo ex huiusmodi colliſionibus ortum determinandum ſufficit prius principium noſſe, quo alteratio motus progreſſiui eſt definita. At ad colliſiones ſecundae atque tertiae ſpeciei omnino altero quoque principio opus habemus. In ſecunda enim ſpecie in altero corpore motus gyratorius vel generabitur vel alterabitur, atque in tertia ſpecie in vtroque corpore tam gyratorius motus producetur, quam mutabitur, propter impulſus directionem per neutrius corporis centrum grauitatis transeuntem. Cum igitur leges percuſſionis primae ſpeciei iam ſatis ſint inueſtigatae atque cognitae, a ſecunda ſpecie ordiri conueniet, in qua, qualis mutatio ex colliſione oriatur, determinabo.

§. 15. Quieſcat igitur corpus IHCA, cuius TIII. Figura 1 centrum grauitatis ſit in A, eiusque maſſa $= A$; in idque impingat corpus B directe motum celeritate *b* in directione 𝔟B, ita vt recta 𝔟B per centrum grauitatis B ducta per punctum impulſus C transeat, ſimulque ſit normalis in planum contactus. Haec ergo colliſio erit ſecundae ſpeciei, quia recta BC in planum contactus eſt normalis. Sit maſſa corporis $B = B$ atque ex A ducatur AC, quae in planum contactus oblique incidat. Sit *m* ſinus anguli AC𝔟, erit, ducta AG perpendiculari in BC productam, $\frac{AG}{AC} = m$ ſeu $m . AC = AG$. Ponatur

$AG = f$, et diſtantia $BG = k$, in ipſo impulſus initio, quae diſtantia k propter impreſſiones, quas corpora durante conflictu ſibi inducunt, diminuitur. Quare ſi corpora fuerint elaſtica conflictus tam diu durabit, donec interuallum BG priſtinam obtinuerit longitudinem k; ſin autem corpora non fuerint elaſtica tum conflictus mutuaque actio ceſſabit, quando interuallum BG fuerit minimum. Sit denique ſumma omnium corporis A particularum per quadrata ſuarum ab axe verticali per A transeunte diſtantiarum multiplicatarum $= S$.

§. 16. Durante ergo conflictu vtrumque corpus in C ſollicitabitur a potentia, cuius directio eſt in planum contactus normalis, ideoque corporis B motus diminuetur, dum eius directio immutata manet. Corpori vero A motus progreſſiuus imprimetur ſecundum directionem $A\alpha$ parallelam directioni βB ſeu BC (§. 12.). Simul vero corpori A motus gyratorius circa axem verticalem per centrum grauitatis A transeuntem imprimetur, quia directio impulſus BG non per centrum grauitatis A transire ponitur (§. 13.). Durante autem conflictu potentia, qua vtrumque corpus vrgetur eo erit maior, quo minor euadit linea BG; ita vt quantitas huius potentiae a diminutione interualli BG pendeat. Generatim igitur iam conſtat effectus, qui ex huiusmodi colliſione oritur: ſcilicet poſt conflictum corpus B minorem quam ante habebit celeritatem, eandem tamen directionem. Corpus vero A duplicem acquiret motum, alterum progreſſiuum ſecundum directionem $A\alpha$ parallelam directioni βB alterum gyratorium circa axem verticalem per A transeuntem in ſenſum CHI.

§. 17.

§. 17. Quo igitur, quanti ſint poſt conflictum hi ſinguli motus, definiam, ſit durante ipſo conflictu corporis A centrum grauitatis in A, corporis B in B. Erit, quia conflictus puncto temporis abſoluitur et impreſſiones ſunt quam minimae, vt ante $AG = f$, et ſinus anguli $ACB = m$; interuallum vero BG ſit $= x$, quod quam minimae a k differat. Sit potentia, qua vtrumque corpus hoc ſtatu ſollicitatur $= p$, quae ergo erit functio quaedam ipſius x, euaneſcens ſi fit $x = k$. Sit corporis B celeritas, quae ipſi adhuc ſupereſt in directione βB $= v$; corpus vero A iam habeat motum progreſſiuum in directione $A\alpha$ parallela ipſi βB, cum celeritate $= u$. Celeritas vero angularis, quam corpus A acquiſiuit ſit $= r$; celeritatem autem angularem metior celeritate, quam punctum quoduis circa axem gyrationis habet, diuiſa per eiusdem puncti ab axe diſtantiam; hic enim quotus ſemper eſt conſtans. Supra vero iam eſt oſtenſum, quomodo celeritatis angularis hac ratione expreſſae incrementum a data potentia nactum determinetur. Figura 2.

§. 18. Perueniant iam elemento temporis dt in ſitus proximos; ſcilicet A in a; B in b; G in g. Eritque $Bb = v\,dt$; $A\alpha = u\,dt$. Ad motum vero angularem cognoſcendum ducatur $a\gamma$ parallela ipſi AG, erit $ga\gamma$ angulus tempuſculo dt motu angulari genitus; qui cum ſit vt celeritas angularis r et dt coniunctim erit $\frac{g\gamma}{AG} = r\,dt$ ſeu $g\gamma = fr\,dt$. Quia vero ante erat $BG = x$, erit nunc $bg = x + dx$. Cum ergo habeatur $Bg = x + u\,dt + fr\,dt = v\,dt + x + dx$, fiet $dx = dt\,(u - v + fr)$ ſeu $dt = \frac{dx}{u - v + fr}$. Conſideremus iam ſollicitationes

teratempuſculo dt a potentia ſollicitante p peractas, eritque per (§. 12.), $dv=\frac{-pdt.}{B}$; $du=\frac{pdt}{A}$; $dr=\frac{m.AC.pdt}{S}$(§. 13) $=\frac{fpdt}{S}$. Sumtis ergo integralibus erit $v=b-\frac{\int pdt}{B}$; $u=\frac{\int pdt}{A}$; $r=\frac{f\int pdt}{S}$, integrali $\int pdt$ ita accepto vt euaneſcat poſito $t=0$, hoc eſt in ipſo conflictus initio. Hinc ergo obtinebitur $\int pdt=B(b-v)=Au=\frac{Sr}{f}$, ſeu $B(b-v)=Au=\frac{Sr}{f}$; quae proprietas etiam finito conflictu locum habet.

§. 19. Subſtituto loco dt eius valore $\frac{dx}{u-v+fr}$ habebitur $Bdv=\frac{-pdx}{u-v+fr}$; $Adu=\frac{pdx}{u-v+fr}$ atque $\frac{Sdr}{f}=\frac{pdx}{u-v+fr}$. Hinc formabitur iſta aequatio:

$$\alpha Budv-\alpha Bvdv+\alpha Bfrdv$$
$$+\beta Audu-\beta Avdu+\beta Afrdu=(-\alpha+\beta+\gamma)pdx$$
$$+\frac{\gamma Sudr}{f}-\frac{\gamma Svdr}{f}+\gamma Srdr.$$

Ponatur $\alpha=-A$, $\beta=B$, $\gamma=\frac{ABff}{S}$, prodibitque integrando $\frac{ABv^2+ABu^2+ABf^2r^2}{2}-ABvu-ABfrv+ABfru$ $=(A+B+\frac{ABff}{S})\int pdx+\frac{ABb^2}{2}$, ſumto $\int pdx$ ita vt euaneſcat poſito $x=k$, hoc eſt in ipſo conflictus initio. Sequentem igitur adepti ſumus aequationem $v^2+u^2+f^2r^2-2vu-2frv+2fru=b^2+2(\frac{1}{B}+\frac{1}{A}+\frac{ff}{S})\int pdx$, ex qua radicem extrahendo prodit $-v+u+fr$ $=\surd(b^2+2(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{ff}{S})\int pdx)$. Haec ergo aequatio ſi cum duabus prioribus inuentis coniungatur, praebebit tres aequationes, ex quibus pro quouis conflictus tempore, tam vtriusque corporis celeritates quam corporis A motus gyratorius poterunt determinari.

§. 20. Ponamus corpora ambo eſſe perfecte elaſtica, quia tum conflictus ceſſat, cum x fuerit priſtinam longitudinem k adeptum, ponamus $x=k$, fietque $\int pdx=0$, quia per hypotheſin pdx ita eſt integratum, vt euaneſcat poſito $x=k$. Quamobrem finito conflictu habebitur $b+v$ $=u+fr$; quae aequatio cum aequationibus $B(b-v)=Au$ $=\frac{Sr}{f}$ coniuncta, determinabit vtriusque corporis A et B celeritates poſt conflictum, nec non celeritatem gyratoriam, quam corpus A ex conflictu acquirit. Erit ſcilicet corporis B celeritas poſt conflictum in directione BC $=b-\frac{2ASb}{(A+B)S+ABf^2}$, corporis A vero motus progreſſiuus fiet in directione $A\alpha$ cum celeritate $=\frac{2BSb}{(A+B)S+ABff}$; corpus vero idem A ſimul habebit motum gyratorium circa axem verticalem per centrum grauitatis A trans euntem cum celeritate angulari $=\frac{2ABfb}{(A+B)S+ABff}$; vbi eſt b corporis B celeritas ante conflictum; $f=AB$; A et B ſunt corporum maſſae, atque S eſt ſumma omnium productorum, quae prodeunt multiplicando ſingulas corporis A particulas per quadrata ſuarum ab axe gyrationis diſtantiarum.

§. 21. Si corpora omni elatere careant, tum conflictus ceſſabit, quando impreſſio, quam impulſus vtrique corpori inducit, eſt maxima facta, hoc eſt, quando interuallum BG fit minimum. Hoc vero accidit, ſi fit $dx=0$. Cum autem inuenerimus $dx=dt(u-v+fr)$, erit

erit $dx=0$ quando eſt $v=u+fr$; quamobrem ceſſante conflictu mutuaque corporum actione erit $v=u+fr$; quae aequatio coniuncta cum aequationibus $B(b-v)=Au=\frac{Sr}{f}$, dabit quaeſitos valores pro v, u et r, ex quibus motus vtriusque corporis poſt conflictum cognoſcentur. Inuenietur autem corporis B celeritas poſt conflictum $b-\frac{ASb}{(A+B)S+ABf^2}$, eiusque directio erit BC eadem ſcilicet, quae ante. Corporis vero A celeritas ex conflictu acquiſita erit $=\frac{BSb}{(A+B)S+ABf^2}$, hac nempe celeritate centrum grauitatis corporis A in directione $A\alpha$ promouebitur. Motus vero gyratorii, quem corpus A in conflictu adipiſcitur circa axem verticalem per A transeuntem, celeritas angularis erit $=\frac{ABfb}{(A+B)S+ABff}$. Apparet ergo hoc caſu, quo corpora non elaſtica ponuntur, celeritatem corporis A vtramque duplo eſſe minorem, quam pro corporibus elaſticis; itemque decrementum celeritatis corporis B duplo eſſe minus.

§. 22 Si ponamus f euaneſcere, ita vt linea CG ſeu directio impulſus per centrum grauitatis A transeat, quo caſu recta AC normalis erit in planum contactus, tum reſultare debebunt regulae communicationis motus pro colliſionibus primae ſpeciei, iam ſatis quidem notae. Quod, quo eo facilius appareat, faciamus $f=0$, poſitis corporibus elaſticis, quo facto prodibit corporis B celeritas poſt conflictum $b-\frac{2Ab}{A+B}$; corporis A vero celeritas, qua eius centrum grauitatis progreditur $=\frac{2Bb}{A+B}$, celeritas gyratoria vero euaneſcit; quae regulae apprime conueniunt cum iam inuentis: ſin autem corpora fuerint elateris expertia, erit corporis B celeritas poſt conflictum $=b-\frac{Ab}{A+B}$, et corporis A celeritas $=\frac{Bb}{A+B}$. Ex his ergo cum inuentis formulis comparatis intelligitur corporis B poſt conflictum celeritatem eo maiorem futuram eſſe, quo maius fuerit interuallum $AG=f$; contra vero celeritatem corporis A eo minorem fore. Celeritas vero gyratoria erit $=0$, tam ſi $f=0$ quam ſi $f=\infty$; maxima ergo erit, ſi fuerit $(A+B)S=ABff$. hoc eſt, ſi $B=\frac{AS}{Aff-S}$, ſi quidem $Aff>S$.

§. 23. Operae pretium iam erit inueſtigare, quid in huiusmodi colliſionibus conſeruetur, vtrum ante et poſt conflictum quantitas virium viuarum, an vero quantitas motus maneat eadem. Illi enim qui motus quantitatem conſeruari ſtatuunt, leges communicationis motus in colliſionibus primae ſpeciei allegare ſolent, in quibus vtique tam pro corporibus elaſticis quam non elaſticis conſeruatio quantitatis motus perſpicitur; etiamſi corpora non elaſtica ad huiusmodi conſeruationem euincendam non idonea videantur. Nam quicquid vis nomine intelligitur in colliſione corporum non elaſticorum portio quaedam virium neceſſario perire debet, cum ad impreſſiones faciendas vi opus ſit, eaque in corporibus non amplius reſtauretur. In corporibus vero elaſticis ea vis, quae ad impreſſiones impenditur iterum in corpora transfertur, dum impreſſiones ſeſe reſtituunt, ita vt quomodocunque vires metiri velimus, eadem virium quantitas in colliſione corporum elaſticorum conſeruari debeat. Cum autem in colliſionibus corporum elaſticorum primae ſpeciei tam motus quam virium viuarum, prout appellari ſolent, quantitas conſeruetur, lis adhuc ſub iudice verſatur; quam ex colliſionibus ſecundae ſpeciei dirimere licebit.

§. 24. Inuenimus autem pro corporibus tam elaſticis quam non elaſticis hanc aequationem $B(b-v)=Au$, quae dat $Bb=Bv+Au$, ex qua aequabilis centri communis grauitatis progreſſio colligitur. Eſt vero Bb quantitas motus ante conflictum, Bv quantitas motus in corpore B poſt conflictum; quare ſi modo Au exhiberet quantitatem motus in corpore A poſt conflictum, conſeruatio quantitatis motus etiam hic locum teneret. Sed cum corpus A praeter motum progreſſiuum celeritate u habeat motum gyratorium circa centrum grauitatis, maiorem habebit motus quantitatem, quam ſi ſolo motu progreſſiuo moueretur. Ex quo perſpicitur in huiusmodi ſecundae ſpeciei colliſionibus quantitatem motus augeri, ſiue corpora ſint elaſtica ſiue minus; cum ergo vires verae a nihilo multiplicari nequeant, ſatis intelligitur vires per facta ex maſſis in celeritates perperam menſurari. Quod autem ad quantitatem virium viuarum attinet, ea in his etiam colliſionibus mirifice conſeruatur; ſi quidem corpora ponantur elaſtica. Corporis enim A poſt conflictum celeritate progreſſiua u et gyratoria r lati vis viua eſt $=Au^2+Sr^2$. Corporis B vero vis viua poſt conflictum eſt $=Bv^2$, ita vt ſumma virium viuarum $=Au^2+Bv^2+Sr^2$, quae ſi loco u, v, et r valores inuenti §. 20. ſubſtituantur, prodibit Bb^2 vis viua ante conflictum.

§. 25.

Figura 3.

§. 25. Impingat globus B ex materia vniformi conſtans, cuius maſſa ſit B, motus in directione $\mathfrak{C}B$ celeritate b directe in parallelepipedum rectangulum homogeneum EFHI quieſcens ita, vt recta $\mathfrak{C}B$ in punctum contactus C ſit normalis, atque parallelepipedi centrum grauitatis A eiusque ſectio baſi parallela EFHI per A transiens in eodem poſita ſint plano cum recta $\mathfrak{C}BC$. Planum ſcilicet chartae in figura tam parallelepipedum quam globum in duas partes ſimiles et aequales diuidere ponitur. Sit $AG=f$ parallelepipedi longitudo $IH=2c$ et latitudo $FH=2g$, atque maſſa parallelepipedi $=A$. Si nunc ſingulae parallelepipedi particulae per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe verticali per centrum grauitatis A transeunte multiplicentur prodibit eorum ſumma $S=\frac{A}{3}(g^2+c^2)$. Si ergo vtrumque corpus ponatur elaſticum, erit poſt conflictum celeritas corporis $B=b-\frac{2A(g^2+c^2)b}{(A+B)(g^2+c^2)+3Bf^2}$. Corporis A vero celeritas progreſſiua in directio $A\alpha$ parallela directioni $\mathfrak{C}B$ erit $=\frac{2B(g^2+c^2)b}{(A+B)(g^2+c^2)+3Bf^2}$. Interea vero parallelepipedum circa axem verticalem per A transeuntem gyrabitur celeritate angulari $=\frac{6Bfb}{(A+B)(g^2+c^2)+3Bf^2}$. Si corpora non fuerint elaſtica loco coefficientium 2 et 6 medietates 1 et 3 debent collocari.

Figura 1.

§. 26. In quaeſtione §. 15. poſuimus corpus A, in quod alterum B impingit, quieſcens, ſed ſolutio non fit difficilior, ſi corpus A tam motum progreſſiuum in directione $A\alpha$ parallela directioni $\mathfrak{C}b$, quam motum gyratorium circa axem verticalem per centrum grauitatis A

trans-

transeuntem tribuamus. Sit itaque celeritas corporis A progreſſiua $=a$, celeritas angularis $=c$, quae fiat in ſenſum CHI. Manentibus ergo iisdem, quibus ſupra vſi ſumus ratiociniis, obtinebimus ſequentes aequationes, $dx = dt(u-v+fr)$ atque $B(b-v)=A(u-a)=\frac{S(r-c)}{f}$. Praeterea ſi corpora fuerint elaſtica erit $-v+u+fr= b-a-fc$, at ſi non fuerint elaſtica habebitur $-v+u +fr=0$, Quamobrem ſi corpora fuerint elaſtica, erit poſt conflictum celeritas corporis B in directione βB$= b-\frac{2AS(b-a-fc)}{(A+B)S+ABff}$, corporis A vero celeritas progreſſiua in directione Aα erit $=a+\frac{2BS(b-a-fc)}{(A+B)S+ABff}$. Corporis denique A celeritas angularis, qua poſt conflictum circa axem per A transeuntem gyrabitur, erit $=c+\frac{2ABf(b-a-fc}{(A+B)S+ABf}$ Hae vero eaedem expreſſiones pro corporibus non elaſticis valebunt, ſi modo coefficientes 2 omittantur.

Figura 4. §. 27. Quamquam in hac ſolutione poſui vtriusque corporis A et B celeritates eſſe in directionibus inter ſe parallelis et ad planum contactus normalibus, tamen ex eadem ſolutione facile quoque ii caſus reſoluentur, in quibus corporum A et B celeritates ante conflictum quasuis habeant directiones. Moueatur ſcilicet corpus B ante conflictum in directione bB celeritate vt bB, et corpus A in directione Aa celeritate vt Aa. Reſoluantur hi motus in binos laterales inter ſe normales Bβ, Bq et Aα, Ap, quorum alterorum directiones Bβ et Aα ſint inter ſe parallelae et in planum contactus normales, alterae vero Bq et Ap ad priores normales. Cum igitur iam conſtet, motus in directionibus qB et Ap factos a conflictu non turbari, ponantur corpora B et A motibus βB et Aα tantum ferri, atque ex §. praecedente definiatur vtriusque motus poſt conflictum. Tum vero iſti motus ex conflictu orti iterum coniungantur cum motibus ſecundum directiones qB et Ap, et motus ex compoſitione orti erunt veri corporum motus poſt conflictum. Motus vero gyratorius corporis A neque ab hac reſolutione nec compoſitione motus afficietur.

§. 28. Quin etiam ex his ſimul intelligitur, ſi directiones, in quibus corpora A et B ante conflictum mouentur, non fuerint in plano horizontali, in quo centra grauitatis corporum A et B vna cum puncto impulſus C eſſe ponimus, motus poſt conflictum ſimili modo determinari poſſe. Hoc autem caſu vtriusque corporis A et B motus in ternos inter ſe normales reſolui debent, quorum vnus ſit in plano horizontali ad planum contactus normalis, ſecundus quoque in plano horizontali ſed plano contactus parallelus, tertius vero in linea verticali et proinde etiam plano contactus parallelus. In conflictu deinceps primi tantum motus conſiderentur, quippe qui ſoli a conflictu perturbantur, et quantam ex conflictu mutationem accipiant, definiatur. Denique hi motus reſultantes cum reliquis ſecundum leges compoſitionis motus iterum coniungantur, hocque pacto obtinebuntur vtriusque corporis motus poſt conflictum. Motus vero gyratorius corporis A tam ante quam poſt conflictum alius concipi non poteſt, niſi circa axem verticalem. Principia enim, de quibus etiamnum conſtat, ad alios motus gyratorios nonſunt ſufficientia.

§. 29.

§. 29. Progrediamur igitur ad colliſiones tertiae ſpeciei inueſtigandas, ſitque corpus quodcunque A quieſcens cuius maſſa ſit $=$ A, et centrum grauitatis in A, in id impingat aliud corpus B, cuius maſſa ſit B, et centrum grauitatis in B; ſit directio corporis B recta εB parallela directioni impulſus, et celeritas eius $= b$. Sit C punctum impulſus et EF planum contactus, ad quod per C ducatur normalis GH, in eamque ex A et B perpendicula AG et BA demittantur, erit GH directio impulſus parallela directioni motus εB corporis B. Cum igitur in conflictu vtrumque corpus vrgeatur a vi, cuius directio eſt GH, corpori A inducetur motus progreſſiuus ſecundum directionem Aα parallelam ipſi HG, corporis B vero celeritas progreſſiua b in directione εB minuetur, directione eius, quia eſt parallela ipſi HG, non mutata. Vtrique vero corpori in conflictu motus gyratorius circa axem verticalem per eius grauitatis centrum transeuntem inducetur, quia recta GH per neutrius centrum grauitatis transit. Sit ergo AG $= f$, BH $= h$, et ipſo impulſus initio GH $= k$. Denique ſit ſumma omnium particularum in quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe gyrationis multiplicatarum in corpore A $=$ S; in corpore B vero $=$ R.

Figura 6 §. 30. Durante conflictu teneat recta GH cum corporum centris grauitatis A et B ſitum in figura iisdem litteris repraeſentatum, erit vt ante AG $= f$, et BH $= h$; at cum in conflictu corpora aliquam impreſſionem ſecundum GH ſibi inducant, erit diſtantia GH minor quam k, ſit igitur ea $= x$. Hoc porro in ſtatu ſit corporis B celeritas progreſſiua $= v$, eiusque celeritas angularis quam iam acquiſiuit $= s$. Corporis A vero celeritas progreſſiua ſit $= u$, et celeritas angularis $= r$. Iam temporis elemento dt, transferantur puncta A, B, G, H in loca a, b, g, h, et ducantur $a\gamma$, $h\eta$ parallelae ipſis AG, BH. Erit ergo A$a = u\,dt$, B$b = v\,dt$, atque ob motus angulares habebitur $g\gamma = fr\,dt$, $\eta h = hs\,dt$. Interuallum vero gh erit $= x + dx$. At cum ſit H$g = x + u\,dt + fr\,dt = x + dx + v\,dt - hs\,dt$ erit $dx = dt(u - v + fr + hs)$ ſeu $dt = \frac{dx}{u-v+fr+hs}$. Sit porro vis, qua vtrumque corpus vi compreſſionis vrgetur $= p$, erit $dv = \frac{-p\,dt}{B}$; $du = \frac{p\,dt}{A}$; $dr = \frac{fp\,dt}{S}$ atque $ds = \frac{hp\,dt}{R}$. Hinc ergo fiet $\int p\,dt = B(b - v) = Au = \frac{Sr}{f} = \frac{Rs}{h}$.

§. 31. Si nunc loco dt ſubſtituatur $\frac{dx}{u-v+fr+hs}$, habebuntur ſequentes aequationes:

$$v\,dv - u\,dv - fr\,dv - hs\,dv = \frac{p\,dx}{B}$$
$$u\,du - v\,du + fr\,du + hs\,du = \frac{p\,dx}{A}$$
$$fu\,dr - fv\,dr + ffr\,dr + fhs\,dr = \frac{ffp\,dx}{S}$$
$$hu\,ds - hv\,ds + fhr\,ds + hhs\,ds = \frac{h^2p\,dx}{R}$$

quae aequationes inuicem additae et integratae dabunt ſequaentem aequationem $v^2 + u^2 + f^2r^2 + h^2s^2 - 2uv - 2frv - 2hsv + 2fru + 2hsu + 2fhrs = 2(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{ff}{S} + \frac{hh}{R})\int p\,dx + b^2$. Integrali $\int p\,dx$ ita accepto vt euaneſcat poſito $x = k$. Si ergo corpora fuerint perfecte elaſtica, conflictus ceſſabit, ſi x iterum fiat $= k$, quo caſu $\int p\,dx$ euaneſcit. Si igitur v, u, r, et s, cor-

corporum celeritates poſt conflictum denotent, habebitur pro corporibus elaſticis haec aequatio, poſtquam radix quadrata eſt extracta $u-v+fr+hs=b$, quae cum ante inuentis $B(b-v)=Au=\frac{Sr}{f}=\frac{Rs}{h}$ coniuncta dabit

$$v=b-\frac{2ARSb}{(A+B)RS+AB(Rff+Shh)};$$

$$u=\frac{2BRSB}{(A+B)RS+AB(Rff+Shh)};$$

$$r=\frac{2ABRfb}{(A+B)RS+AB(Rff+Shh)};$$

$$\text{atque } s=\frac{2ABShb}{(A+B)SR+AB(Rff+Shh)}.$$

§. 32. Si corpora omni elaſticitate careant loco aequationis $u-v+fr+hs=b$, hac vti oportet $u-v+fr+hs=0$. Nam cum hoc caſu conflictus mutuaque actio ceſſet, quando impreſſio vtrinque facta eſt maxima; hoc eueniet quando fit $dx=0$. Sed quia eſt $dx=dt(u-v+fr+hs)$, erit $dx=0$, ſi fuerit $u-v+fr+hs=0$. Quamobrem ſi haec aequatio cum ante inuentis $B(b-v)=Au=\frac{Sr}{f}=\frac{Rs}{h}$ coniungatur, prodibit

$$v=b-\frac{ARSb}{(A+B)RS+AB(Rff+Shh)};$$

$$u=\frac{BRSb}{(A+B)RS+AB(Rff+hh)}$$

$$r=\frac{ABRfb}{(A+B)RS+AB(Rff+Shh)}$$

$$\text{atque } s=\frac{ABShb}{(A+B)RS+AB(Rff+Shh)}.$$

Hae igitur ſunt motus communicationis leges pro colliſionibus tertiae ſpeciei, ex quibus ſi ponatur $h=0$, orientur leges pro colliſionibus ſecundae ſpeciei; atque ſi fiat $f=0$ et $h=0$, tum prodibunt leges notae pro colliſionibus ſpeciei primae. Ex his vero regulis pro corporibus elaſticis iterum conſeruatio virium viuarum conſpicitur.

§. 33. Si corpus A ante conflictum non quieſcat, ſed moueatur celeritate a in directione $A\alpha$ parallela directioni EB et directioni impulſus GH; habeatque iam ante conflictum vtrumque corpus motum gyratorium circa axem verticalem, in eum ſenſum vt in conflictu vterque augeatur. Sit corporis A celeritas angularis $=c$, et corporis B celeritas angularis $=e$. Quibus in calculum introductis prodibunt loco ſuperiorum aequationum ſequentes $B(b-v)=A(u-a)=\frac{S(r-e)}{f}=\frac{R(s-e)}{h}$, atque $u-v+fr+hs=b-a-fc-he$ pro corporibus elaſticis, at huius loco $u-v+fr+hs=0$ pro corporibus non elaſticis. Poſt conflictum ergo, ſi corpora ponantur elaſtica, erit corporis A celeritas progreſſiua

$$=a+\frac{2BRS(b-a-fc-he)}{(A+B)RS+AB(Rff+(Shh)}.$$

eiusque celeritas angularis

$$=c+\frac{2ABRf(b-a-fc-he)}{(A+B)+RSAB(Rff+Shh)}.$$

Corporis vero B poſt conflictum celeritas erit

$$=b-\frac{2ARS(b-a-fc-he)}{(A+B)RS+AB(Rff+Shh)},$$

et eius celeritas angularis

$$=e+\frac{2ABSh(b-a-fc-he)}{(A+B)RS+AB(Rff+Shh)}.$$

Eaedem formulae omiſſis binariis inſeruiunt pro corporibus non elaſticis.

§ 34. Quando ergo corporum directiones motus progreſſiui ante conflictum parallelae fuerint directioni impulſus, tum in conflictu directiones non mutantur. Ex quo intelligitur ſi hae directiones non fuerint parallelae directioni impulſus, tum motus, vt ſupra fecimus, in laterales eſſe reſoluendos, quorum alteri ſint normales in planum contactus, alteri eidem paralleli. Perſpicuum enim eſt ex principiis mechanicis, motus perpendiculares tantum a conflictu turbari, alteros omnino non affici. Quare poſt conflictum ope compoſitionis motus vtriusque corporis motus progreſſiuus poterit determinari. Quod autem ad motus gyratorios attinet, ii a motibus progreſſiuis nullatenus afficiuntur, et hanc ob rem easdem ſequentur leges, quascunque motus progreſſiui teneant directiones. Omnes igitur tres colliſionum ſpecies hic explicatas dedi duplici tamen reſtrictione, quarum prima corpora ſibi ita occurrere ponit, vt eorum centra grauitatis cum directione impulſus in eodem plano ſint poſita; altera vero corpora talia requirit, quae circa axem per centra grauitatis transeuntes et ad illud planum normales libere gyrari queant. Caſus autem in quibus hae conditiones locum non habent, per principia cognita tractare non licet; ſed eorum explicatio maiorem mechanicae promotionem requirit.

SPECIMEN ALGEBRAE AD ARCHITECTVRAM MILITAREM APPLICATAE,

AVCTORE

Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

Solent hodie Architecti militares ſubinde ad reſolutionem Problematum quorundam admouere Algebram, cuius inſtituti hinc et inde iam ab aliquo tempore ſpecimina publice apparent; et quod eo maiorem laudem meretur, quo propius ſic grauiſſima muniendi ſcientia ad Geometricam veritatem accedit. Idem inſtitutum hic perſequar, acturus de Propugnaculis munimentorum, Gallice *Baſtions*, quantum quidem per cognitionem harum rerum bellicarum mihi licebit. Tabula IV.

§. 2. Anguli propugnaculorum quantitas, vt ab architectis militaribus determinetur, ſequentes adhibentur ab eis Regulae et Axiomata. Nempe (1.) *Angulus propugnaculi par ſit violentiae tormentorum, vnde non ſit minor* 60 *gradibus, quia talem ſufficere vſus docuit.* (2.) *Rectus propugnaculi angulus optimus eſt.* Inueniunt nempe ictus tormentorum $r s$, $r s$, ad Faciem propugnaculi perpendiculariter directi, maius obſtaculum in angulo propugnaculi recto BAC, quam acuto BAC; quod idem adhuc magis patet in angulo propugnaculi obtuſo; vnde Figura 1.