ADDITAMENTUM I.

De Curvis Elasticis.

I.

JAm pridem summi quique Geometræ agnoverunt, Methodi in hoc Libro traditæ non solum maximum esse usum in ipsa Analysi, sed etiam eam ad resolutionem Problematum physicorum amplissimum subsidium afferre. Cum enim Mundi universi fabrica sit perfectissima, atque a Creatore sapientissimo absoluta, nihil omnino in mundo contingit, in quo non maximi minimive ratio quæpiam eluceat: quamobrem dubium prorsus est nullum, quin omnes Mundi effectus ex causis finalibus, ope Methodi maximorum & minimorum æque feliciter determinari queant, atque ex ipsis causis efficientibus. Hujus rei vero passim tam eximia extant specimina, ut ad veritatis confirmationem pluribus Exemplis omnino non indigeamus; quin potius in hoc erit elaborandum, ut, in quovis Quæstionum naturalium genere, ea investigetur quantitas, quæ maximum minimumve induat valorem: quod negotium ad Philosophiam potius quam ad Mathesin pertinere videtur. Cum igitur duplex pateat via effectus Naturæ cognoscendi; altera per causas efficientes, quæ Methodus directa vocari solet; altera causas finales; Mathematicus utrâque pari successu utitur. Quando scilicet causæ efficientes nimis sunt absconditæ, finales autem nostram cognitionem minus effugiunt; per Methodum indirectam Quæstio solet resolvi: e contrario autem Methodus directa adhibetur, quoties ex causis efficientibus effectum definire licet. Inprimis autem opera est adhibenda, ut per utramque viam aditus ad Solutionem aperiatur: sic enim non solum altera Solutio per alteram maxime confirmatur, sed etiam ex utriusque consensu summam percipimus voluptatem. Hoc modo, curvatura funis seu catenæ suspensæ duplici via est eruta; altera a priori, ex sollicitationibus gravitatis; altera vero per Methodum maximorum ac minimorum, quoniam funis ejusmodi curvaturam recipere debere intelligebatur, cujus centrum gravitatis infimum obtineret locum. Similiter curvatura radiorum per medium diaphanum variæ densitatis transeuntium, tam a priori est determinata, quam etiam ex hoc principio, quod tempore brevissimo ad datum locum pervenire debeant. Plurima autem alia similia exempla a Viris Celeberrimis BERNOULLIIS, aliisque, sunt prolata, quibus tam Methodus solvendi a priori, quam cognitio causarum efficientium maxima accepit incrementa. Quanquam igitur, ob hæc tam multa ac præclara specimina, dubium nullum relinquitur, quin in omnibus lineis curvis, quas Solutio Problematum physico-mathematicorum suppeditat, maximi minimive cujuspiam indoles locum obtineat; tamen sæpenumero hoc ipsum maximum vel minimum difficillime perspicitur; etiamsi a priori Solutionem eruere licuisset. Sic etsi figura, quam lamina elastica incurvata induit, jam pridem est cognita; tamen quemadmodum ea curva per Methodum maximorum & minimorum, hoc est, per causas finales, investigari possit, a nemine adhuc est animadversum. Quamobrem cum Vir Celeberrimus, atque in hoc sublimi naturam scrutandi genere perspicacissimus, *Daniel* BERNOULLI mihi indicasset se universam vim, quæ in lamina elastica incurvata insit, una quadam formula quam *vim potentialem* appellat, complecti posse; hancque expressionem in curva Elastica minimam esse oportere; quoniam hoc invento Methodus mea maximorum ac minimorum hoc Libro tradita mirifice illustratur, ejusque usus amplissimus maxime evincitur; hanc occasionem exoptatissimam prætermittere non possum, quin, hanc insignem curvæ Elasticæ proprietatem a Celeb. BERNOULLIO observatam publicando, simul Methodi meæ usum clarius patefaciam. Continet enim ista proprietas in se differentialia secundi gradus, ita ut ei evolvendæ Methodi Problema isoperimetricum solvendi ante traditæ non sufficiant.

2. Sit

2. Sit AB lamina Elastica utcunque incurvata; vocetur arcus $AM = s$, & radius osculi curvæ $MR = R$: atque, secundum BERNOULLIUM, exprimetur *vis potentialis* in laminæ portione AM contenta hac formula $\int \frac{ds}{RR}$, siquidem lamina sit ubique æqualiter crassa, lata & elastica, atque in statu naturali in directum extensa. Hinc ista erit curvæ AM indoles, ut in ea hæc expressio omnium minimum obtineat valorem. Quoniam vero in radio osculi R differentialia secundi gradus insunt, ad curvam hac proprietate præditam determinandam quatuor opus erit conditionibus, id quod cum Quæstionis natura apprime convenit. Cum enim per datos terminos A & B infinitæ laminæ Elasticæ eæque ejusdem longitudinis inflecti queant, quæstio non erit determinata, nisi præter duo puncta A & B, simul alia duo puncta, seu quod eodem redit positio tangentium in punctis extremis A & B præscribatur. Proposita namque lamina Elastica, longiori quam est distantia punctorum A & B; ea non solum ita incurvari potest, ut intra terminos A & B contineatur, sed etiam ut ejus tangentes in punctis hisce datas teneant directiones. His notatis; Quæstio de invenienda curvatura laminæ Elasticæ, ex hoc fonte resolvenda, ita debet proponi: *ut, inter omnes curvas ejusdem longitudinis, quæ non solum per puncta* A *&* B *transeant, sed etiam in his punctis a rectis positione datis tangantur, definiatur ea in qua sit valor hujus expressionis* $\int \frac{ds}{RR}$ *minimus.* *De curvatura Laminæ Elasticæ uniformis. Fig. 1.*

3. Quia solutionem ad coordinatas orthogonales accommodari convenit, sumatur recta quæcunque AD pro axe, in qua sit abscissa $AP = x$, applicata $PM = y$; ponatur, uti Methodus tradita jubet, $dy = p\,dx$, $dp = q\,dx$; erit elementum curvæ $Mm = ds = dx\sqrt{(1+pp)}$. Primum ergo quia curvæ, ex quibus quæsita erui debet, isoperimetræ statuuntur, habebitur ista expressio consideranda $\int dx\sqrt{(1+pp)}$; quæ cum generali $\int Z dx$ comparata hunc præbet valorem differentialem *Fig. 2.*

$\frac{1}{dx}$

$\frac{\alpha}{dx}\, d.\, \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Deinde cum sit radius osculi $= \frac{dx(1+pp)^{3:2}}{dp}$ $= \frac{(1+pp)^{3:2}}{q} = R$, formula $\int \frac{ds}{RR}$, quæ minimum esse debet, abit in $\int - \frac{qq\,dx}{(1+pp)^{5:2}}$. Comparetur hæc cum forma generali $\int Z\,dx$; erit $Z = \frac{qq}{(1+pp)^{5:2}}$, & posito $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq$, erit $M = 0$, $N = 0$, $P = \frac{-5pqq}{(1+pp)^{7:2}}$, & $Q = \frac{2q}{(1+pp)^{5:2}}$. Valor ergo differentialis ex hac formula $\int \frac{qq\,dx}{(1+pp)^{5:2}}$ oriundus, erit $-\frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2}$. Quamobrem pro curva quæsita hæc habebitur æquatio, $\frac{\alpha}{dx}\, d.\, \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$ $= \frac{dP}{dx} - \frac{ddQ}{dx^2}$; quæ, per dx multiplicata & integrata, dat $\frac{\alpha p}{\sqrt{(1+pp)}} + \beta = P - \frac{dQ}{dx}$. Multiplicetur hæc æquatio per $q\,dx = dp$, ut prodeat $\frac{\alpha p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} + \beta\,dp = P\,dp - q\,dQ$. Cum autem, ob $M = 0$ & $N = 0$, sit $dZ = P\,dp + Q\,dq$, erit $P\,dp = dZ - Q\,dq$, quo valore loco $P\,dp$ substituto, emerget $\frac{\alpha p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} + \beta\,dp = dZ - Q\,dq - q\,dQ$; quæ denuo integrata dat $\alpha\sqrt{(1+pp)} + \beta p + \gamma = Z - Qq$. Jam cum sit $Z = \frac{qq}{(1+pp)^{5:2}}$, & $Q = \frac{2q}{(1+pp)^{5:2}}$, erit $\alpha\sqrt{(1+pp)} + \beta p + \gamma = \frac{-qq}{(1+pp)^{5:2}}$. Sumantur constantes arbitrariæ α, β, & γ negative, eritque $q = (1+pp)^{5:4}$ $\times \sqrt{(\alpha}$

$\times \sqrt{(\alpha\sqrt{(1+pp)}+\beta p+\gamma)} = \frac{dp}{dx}$. Hinc ergo elicitur sequens æquatio

$$dx = \frac{dp}{(1+pp)^{5:4}\sqrt{(\alpha\sqrt{(1+pp)}+\beta p+\gamma)}}.$$

Deinde ob $dy = p\,dx$, habebitur quoque

$$dy = \frac{p\,dp}{(1+pp)^{5:4}\sqrt{(\alpha\sqrt{(1+pp)}+\beta p+\gamma)}};$$

quæ duæ æquationes sufficerent ad curvam per quadraturas construendam.

4. Harum formularum sic in genere spectatarum neutra est integrabilis; combinari autem certo quodam modo possunt, ut aggregatum integrationem admittat. Cum enim sit

$$d.\frac{2\sqrt{(\alpha\sqrt{(1+pp)}+\beta p+\gamma)}}{\sqrt{\sqrt{(1+pp)}}} = \frac{dp(\beta-\gamma p)}{(1+pp)^{5:4}\sqrt{(\alpha\sqrt{(1+pp)}+\beta p+\gamma)}}$$

erit $\frac{2\sqrt{(\alpha\sqrt{(1+pp)}+\beta p+\gamma)}}{(1+pp)^{1:4}} = \beta x - \gamma y + \delta$. Quoniam axis positio est arbitraria, constans δ sine defectu amplitudinis omitti potest. Deinde vero etiam axis ita mutari potest ut fiat $\frac{\beta x-\gamma y}{\sqrt{(\beta\beta+\gamma\gamma)}}$ abscissa, eritque applicata $\frac{\gamma x+\beta y}{\sqrt{(\beta\beta+\gamma\gamma)}}$; hinc etiam tuto γ nihilo æqualis poni potest, quia nihil impedit, quominus illa nova abscissa per x exprimatur. Hanc ob rem; habebimus pro curva Elastica istam æquationem

$2\sqrt{(\alpha\sqrt{(1+pp)}+\beta p)} = \beta x(1+pp)^{1:4}$; quæ, sumptis quadratis, dat $4\alpha\sqrt{(1+pp)}+4\beta p = \beta^2 x^2\sqrt{(1+pp)}$. Sit, ad homogeneitatem introducendam, $\alpha = \frac{4m}{aa}$ & $\beta = \frac{4n}{aa}$ erit $naap = (nnxx-maa)\sqrt{(1+pp)}$, unde $n^2a^4pp = (nnxx-maa)^2(1+pp)$; ideoque $p = \ldots$ $\frac{nnxx-maa}{\sqrt{(n^2a^4-(nnxx-maa)^2)}} = \frac{dy}{dx}$. Mutatis ergo constantibus, atque abscissam x data constante sive augendo sive minuendo; habebitur hujusmodi æquatio pro curva Elastica generalis:

$d y = \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x x) d x}{\sqrt{(a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma x x)^2)}}$, ex qua oritur

$d s = \frac{a a d x}{\sqrt{(a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma x x)^2)}}$; ex quibus æquationibus consensus hujus curvæ inventæ cum curva Elastica jam pridem eruta manifesto elucet.

5. Quo autem iste consensus clarius ob oculos ponatur, naturam curvæ Elasticæ a priori quoque investigabo; quod etsi jam a Viro summo *Jacobo* BERNOULLIO excellentissime est factum; tamen, hac idonea occasione oblata, nonnulla circa indolem curvarum Elasticarum, earumque varias species & figuras adjiciam; quæ ab aliis vel prætermissa, vel leviter tantum pertractata esse video.

Fig. 3. Sit lamina Elastica AB in B ita muro seu pavimento firmo infixa, ut hæc extremitas B non solum firmiter retineatur, sed etiam tangentis in B positio determinetur. In A autem lamina connexam habeat virgam rigidam AC, cui normaliter applicata sit vis CD $= P$, qua lamina in statum incurvatum BMA redigatur. Sumatur hæc recta AC producta pro axe, ac, posita AC $= c$, sit abscissa AP $= x$, applicata PM $= y$. Quod si jam lamina in M omnem elasticitatem subito amitteret, ac perfecte flexilis evaderet; a vi P utique inflecteretur, inflexione proficiscente a vis P momento $= P(c + x)$. Quominus ergo hæc inflexio actu sequatur, elasticitas laminæ in M in æquilibrio consistit cum vis sollicitantis momento $P(c + x)$. Elasticitas autem primo ab indole materiæ ex qua lamina constat, & quam ubique eandem statuo, pendet; tum vero simul ab incurvatione laminæ in puncto M, ita ut sit reciproce proportionalis radio osculi in M. Sit ergo radius osculi in M $= R = \frac{d s^3}{- d x d d y}$; existente $d s = \sqrt{(d x^2 + d y^2)}$ & $d x$ constante; atque exprimat $\frac{E k k}{R}$ vim Elasticam laminæ in M, quæ cum momento vis sollicitantis $P(c + x)$ in æquilibrio consistat, ita ut sit $P(c + x) = \frac{E k k}{R} = \frac{- E k k d x d d y}{d s^3}$. Æquatio hæc

per

per dx multiplicata fit integrabilis, eritque integrale
$P\,(xx + cx + f) = \frac{-Ekkdy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$; unde oritur
$dy = \frac{-Pdx\,(\frac{1}{2}xx + cx + f)}{\sqrt{(E^2k^4 - P^2(\frac{1}{2}xx + cx + f)^2)}}$, quæ æquatio omnino convenit cum ea, quam modo per Methodum maximorum ac minimorum ex principio *Bernoulliano* elicui.

6. Ex comparatione hujus æquationis cum ante inventa, definiri poterit vis quæ requiritur ad datam laminæ curvaturam inducendam; siquidem curvatura contineatur in æquatione generali inventa. Teneat scilicet lamina elastica figuram AMB, cujus natura exprimatur hac æquatione
$dy = \frac{(\alpha + \beta x + \gamma xx)\,dx}{\sqrt{(a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma xx)^2)}}$; exprimat vero Ekk hujus laminæ elasticitatem absolutam, ita scilicet, ut Ekk, in quovis loco, per radium osculi divisa præbeat vim elasticam veram. Ad comparationem instituendam multiplicetur numerator & denominator per $\frac{Ekk}{aa}$, ut habeatur
$dy = \frac{Ekkdx(\alpha + \beta x + \gamma xx) : aa}{\sqrt{(E^2k^4 - \frac{E^2k^4}{a^4}(\alpha + \beta x + \gamma xx)^2)}}$. Nunc ergo erit $-\frac{1}{2}P = \frac{Ekk\gamma}{aa}$; $-Pc = \frac{Ekk\beta}{aa}$; $-Pf = \frac{Ekk\alpha}{aa}$; ideoque vis CD sollicitans $= \frac{-2Ekk\gamma}{aa}$; intervallum AC $= c = \frac{\beta}{2\gamma}$, & constans $f = \frac{\alpha}{2\gamma}$.

7. Ut igitur lamina elastica AB altero termino B muro infixa incurvetur in figuram AMB, cujus natura exprimitur hac æquatione $dy = \frac{(\alpha + \beta x + \gamma xx)\,dx}{\sqrt{(a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma xx)^2)}}$, necesse est ut hæc lamina sollicitetur in directione CD normali ad axem AP, sumpta distantia AC $= \frac{\beta}{2\gamma}$, a vi CD $= \frac{-2Ekk\gamma}{aa}$; quæ vis scilicet in plagam contrariam, ac figura indicat, dirigetur,

si γ fuerit quantitas positiva. Quia $\frac{Ekk}{R}$ æquivalet momento vis sollicitantis, expressio $\frac{Ekk}{aa}$ homogenea erit ponderi seu vi puræ; quæ vis propterea $\frac{Ekk}{aa}$ cognoscetur ex elasticitate laminæ. Sit hæc vis $= F$; atque erit vis flectens CD ad hanc vim F ut -2γ ad 1; erit enim γ numerus purus.

8. Hinc porro definiri potest vis ad laminæ portionem BM in statu suo conservandam requisita, si portio AM prorsus rescindatur. Rescissa hac portione AM, desinat lamina Elastica in virgam rigidam MT omnis flexionis expertem, quæ autem cum lamina ita sit connexa, ut perpetuo tangentem in puncto M referat, utcunque lamina inclinetur. Hoc posito, ex antecedentibus manifestum est, ad conservationem curvaturæ BM requiri ut virga MT in puncto N trahatur in directione ND vi quæ sit $= \frac{-2Ekk\gamma}{aa}$; directio autem ND erit normalis ad axem AP, atque intervallum AC erit $= \frac{\beta}{2\gamma}$. Distantia itaque MN fiet $= \frac{ds}{dx} CP = \frac{ds}{dx} . \frac{\beta + 2\gamma x}{2\gamma} = \frac{(\beta + 2\gamma x) ds}{2\gamma dx}$ est vero $\frac{ds}{dx} = \frac{aa}{\sqrt{(a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma xx)^2)}}$. Quod si hæc vis ND $= \frac{-2Ekk\gamma}{aa}$ resolvatur in normalem NQ ad tangentem MT, & tangentialem NT, erit vis normalis NQ $= \frac{-2Ekk\gamma}{aa} . \frac{dx}{ds}$, & vis tangentialis NT $= \frac{-2Ekk\gamma}{aa} . \frac{dy}{ds}$.

9. Sin autem pars BM rescindatur, relicta parte AM, quæ in directione CD sollicitatur ut ante vi $= \frac{-2Ekk\gamma}{aa}$; ad curvaturam AM conservandam extremitas M, quæ connexa intelligatur cum virga rigida tangente MN, sollicitari debebit in puncto N a vi pariter $= \frac{-2Ekk\gamma}{aa}$, sed in directione contraria

traria ei, quam casu præcedente invenimus. Perpetuo enim vires utrique extremitati laminæ incurvatæ aplicandæ se mutuo destruere, atque adeo æquales & directiones oppositas habere debent. Alioquin enim tota lamina moveretur, ad quem motum compescendum opus foret vi æquilibrium inter vires sollicitantes producente. Hinc ergo vires cuicunque portioni laminæ resectæ applicandæ facillime definiri possunt, quæ jam inductam curvaturam conservent.

10. Sit A M lamina Elastica incurvata, quæ in A & M annexas habeat virgas rigidas A D, M N, quibus in directionibus directe oppositis D E, N R applicatæ sint vires æquales D E, N R, quæ in æquilibrio consistentes laminæ curvaturam A M inducant, pro qua æquationem quæri oporteat. Primum ergo, pro axe sumatur recta A P per punctum A transiens, atque ad directionem vis sollicitantis E R normalis. Ponatur Elasticitas laminæ absoluta $= Ekk$: sitque anguli C A D, quem tangens A D in A cum axe constituit, & qui est datus, sinus $= m$, cosinus $= n$, existente sinu toto $= 1$, ita ut sit $mm + nn = 1$. Vocetur porro distantia A C $= c$, & vis flectens D E $=$ N R $= P$; ac, positis abscissa A P $= x$, applicata P M $= y$, natura curvæ hac exprimetur æquatione Fig. 4.

$dy = \frac{-Pdx(\frac{1}{2}xx + cx + f)}{\surd(E^2k^4 - P^2(\frac{1}{2}xx + cx + f)^2)}$. Quoniam vero directio tangentis in A datur, posito $x = 0$, fieri debet $\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n}$; hinc ergo obtinebitur $\frac{m}{n} = \frac{-Pf}{\surd(E^2k^4 - P^2f)} = \frac{m}{\surd(1 - mm)}$, & $m = \frac{-Pf}{Ekk}$. Determinatur ergo hinc constans f, ita ut sit $f = \frac{-mEkk}{P}$, ideoque hinc tota curva determinatur.

11. Ad curvaturam ergo superiori æquatione expressam laminæ A M inducendam, tangenti A D in puncto D, ita ut sit A D $= \frac{c}{n}$, applicatam esse oportet vim D E $= P$; cujus Fig. 5.

directio sit parallela applicatis PM. Resolvatur hæc vis DE in duas laterales Dd, Df, inter se normales; erit vis Dd $= Pn$ & vis Df $= Pm$. Quo jam consideratio rectæ AD ex computo expellatur, loco vis Dd, in datis punctis A & B, sumpto intervallo AB $= h$, duæ vires substitui possunt, Aa $= p$; Bb $= q$; normales pariter ad virgam AB, sumendo $ph = Pn$. BD $= nP\left(\frac{c}{n} - h\right)$, & $q = p + nP$. Quia deinceps perinde est, in quonam virgæ AD puncto applicetur vis tangentialis Df $= mP$, applicetur ea in ipso puncto A ponendo AF $= nP$. Sit autem hæc vis AF $= r$, ita ut lamina MA a tribus viribus Aa $= p$, Bb $= q$, & AF $= r$ sollicitetur, a quibus, qualis incurvatio oriatur, investigemus.

12. Primo ergo, cum sit $mP = r$, erit $P = \frac{r}{m}$, qui valor substitutus in prioribus æquationibus dabit $ph = \frac{cr}{m} - \frac{nhr}{m}$, & $q = p + \frac{nr}{m}$. Hinc erit $\frac{n}{m} = \frac{q-p}{r}$; ex qua æquatione primum positio axis AP innotescit; erit nempe tangens anguli CAD $= \frac{r}{q-p}$: hinc $m = \frac{r}{\sqrt{(r^2+(q-p)^2)}}$ & $n = \frac{q-p}{\sqrt{(r^2+(q-p)^2)}}$. Deinde ex æquatione $hp = \frac{cr}{m} - \frac{nhr}{m} = \frac{cr}{m} - hq + hp$; fit $c = \frac{mhq}{r}$, seu $c = \frac{hq}{\sqrt{(r^2+(q-p)^2)}}$; atque $P = \sqrt{(rr+(q-p)^2)}$. Cum autem sit $f = \frac{-mEkk}{P} = \frac{-Ekkr}{rr+(q-p)^2}$ erit $\frac{1}{2}xx + cx + f = \frac{1}{2}xx + \frac{hqx}{\sqrt{(r^2+(q-p)^2}} - \frac{Ekkr}{rr+(q-p)^2}$; unde pro curva quæsita ista obtinebitur æquatio

$$dy = \frac{dx\left(\frac{Ekkr}{\sqrt{(rr+(q-p)^2)}} - hqx - \frac{1}{2}xx\sqrt{(rr+(q-p)^2)}\right)}{\sqrt{\left(E^2k^4 - \left(\frac{Ekkr}{\sqrt{(rr+(q-p)^2)}} - hqx - \frac{1}{2}xx\sqrt{(rr+(q-p)^2)}\right)^2\right)}}.$$

Hæc autem æquatio maxime est accommodata ad modum maxime

xime consuetum laminas incurvandi, dum eæ vel forcipe vel duobus digitis apprehenduntur; quorum alter laminam in directione Aa, alter in directione Bb urget, præter quas vires lamina insuper in directione AF protrahi potest.

13. Si vis tangentialis $AF = r$ evanescat; incidet axis AP in ipsam tangentem AF, productam, eritque tum

$$dy = \frac{-dx(hqx + \tfrac{1}{2}(q-p)xx)}{\sqrt{(E^2k^4 - (hqx + \tfrac{1}{2}(q-p)xx)^2)}}.$$

Sin autem vires normales p & q fiant inter se æquales; erit axis AP normalis ad tangentem AF, ob $n = 0$; & pro curva orietur hæc æquatio

$$dy = \frac{dx(Ekk - hqx - \tfrac{1}{2}rxx)}{\sqrt{(2Ekk(hqx + \tfrac{1}{2}rxx) - (hqx - \tfrac{1}{2}rxx)^2)}}.$$

Hic si præterea fuerit $r = 0$, ita ut lamina in punctis A & B urgeatur a viribus æqualibus Aa, Bb, contrariis tantum, natura curvæ exprimetur hac æquatione $dy = \frac{dx(Ekk - hqx)}{\sqrt{hq(2Ekkx - hqxx)}}$, quæ integrata dat $y = \sqrt{\frac{2Ekkx - hqxx}{hq}}$; quæ est pro Circulo, lamina ergo hoc casu in arcum Circuli incurvatur, cujus radius erit $= \frac{Ekk}{hq}$.

14. Cum igitur videamus non solum Circulum in curvarum Elasticarum classe contineri, sed etiam in ipsis infinitam varietatem locum habere; operæ pretium erit hic enumerationem omnium variarum specierum in hoc curvarum genere contentarum instituere. Hoc enim modo non solum indoles harum curvarum penitius perspicietur; sed etiam, casu quocunque oblato, ex sola figura dijudicare licebit, ad quamnam speciem curva formata referri debeat. Eodem autem modo hic specierum diversitatem constituemus, quo vulgo linearum algebraïcarum species, in dato ordine contentæ enumerari solent. *Enumeratio curvarum Elasticarum.*

15. Æquatio generalis pro curvis Elasticis . . . .

$dy = \frac{(\alpha + \beta x + \gamma xx)dx}{\sqrt{(a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma xx)^2)}}$, initio abscissarum in axe

per

per intervallum $\frac{\mathfrak{C}}{2\gamma}$ promoto, & pro $\frac{aa}{\gamma}$ ſcribendo aa, ſeu ponendo $\gamma = 1$, accipiet hanc formam ſimpliciorem:
$dy = \frac{(\alpha + xx)\,dx}{\sqrt{(a^4 - (\alpha + xx)^2)}}$. Quia vero eſt $a^4 - (\alpha + xx)^2$ $= (aa - \alpha - xx)(aa + \alpha + xx)$; ponatur $aa - \alpha = cc$, ut ſit $\alpha = aa - cc$, atque æquatio tranſibit in hanc formam
$dy = \frac{(aa - cc + xx)\,dx}{\sqrt{(cc - xx)(2aa - cc + xx)}}$. Qua æquatione exprimatur natura curvæ AMC, poſita abſciſſa AP $= x$, & applicata PM $= y$. Cum ergo ſit $\mathfrak{C} = 0$, directio vis laminam Elaſticam incurvans erit ad axem AP in ipſo puncto A normalis, ideoque AD repræſentabit directionem vis ſollicitantis, quæ vis ipſa erit $= \frac{2Ekk}{aa}$, exprimente Ekk elaſticitatem abſolutam.

Fig. 6.

16. Si ponatur $x = 0$, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{aa - cc}{c\sqrt{(2aa - cc)}}$; quæ expreſſio præbet tangentem anguli quem curva AM in A cum axe AP conſtituit; cujus anguli ſinus erit $= \frac{aa - cc}{aa}$. Quare ſi fuerit $aa = \infty$, lamina in puncto A erit normalis ad axem AP, nullamque habebit curvaturam, propterea quod vis incurvans $\frac{2Ekk}{aa}$ evaneſcit. Caſu ergo quo $a = \infty$, prodit laminæ figura naturalis, hoc eſt linea recta: quæ ergo primam ſpeciem linearum Elaſticarum conſtituit, quam repræſentabit recta AB utrimque in infinitum producta.

17. Antequam reliquas ſpecies enumeremus, conveniet in genere circa figuram Elaſticæ quaſdam obſervationes inſtituere. Intelligitur autem angulus PAM, quem curva in A cum axe AP conſtituit, decreſcere, quo minor evadat quantitas aa, hoc eſt quo magis vis incurvans $\frac{2Ekk}{aa}$ intendatur. Atque ſi evadat $aa = cc$, tum axis AP ipſe curvam in A tanget. Quod ſi autem fuerit $aa < cc$, tum curva AM, quæ adhuc deorſum excurrebat, nunc ſurſum verget, quoad fiat $aa = \frac{1}{2}cc$; quo caſu

tangens

tangens curvæ in rectam Ab incidet. At si fiat $aa < \frac{1}{2} cc$, tum angulus PAM prorsus fiet imaginarius, ideoque in A nulla existet curvæ portio, qui diversi casus specierum varietatem constituent.

18. Ex æquatione porro intelligitur, quia formam suam non mutat, si coordinatæ x & y ambæ negativæ statuantur, curvam circa A ramos habere similes & æquales AMC & Amc alternatim dispositos; ita ut in A sit punctum flexus contrarii; unde cognita curvæ portione AMC, simul ejus continuatio Amc ultra A cognoscetur, quippe quæ illi est similis & æqualis. Sic sumpta Ap = AP, erit quoque pm = PM. Recedendo autem ab A, curva utrimque magis ab axe reclinatur, donec sumpta abscissa = AE = c, applicata EC curvam tangat; namque posito $x = c$, fit $\frac{dy}{dx} = \infty$. Perspicuum autem est abscissam x ultra AE = c excrescere non posse; alioquin enim fieret $\frac{dy}{dx}$ imaginarium; hinc ergo tota curva continebitur inter applicatas extremas EC & ec, ultra quos cancellos egredi non queat. Jam ergo generatim cognitos habemus binos curvæ ramos AC & Ac utrimque ab A usque ad cancellos protensos.

19. Videamus ergo quonam cursu curva ultra C & c progrediatur. Hunc in finem sumamus rectam CD ipsi AE parallelam pro axe, ac ponamus has novas coordinatas CQ = t, QM = u; eritque $t + x$ = AE = CD = c; & $y + u$ = CE = AD = b; unde fit $x = c - t$ & $y = b - u$, seu $dy = - du$. His valoribus substitutis, orietur æquatio pro curva inter coordinatas CQ = t & QM = u, quæ erit $du = \frac{(aa - 2ct + tt)dt}{\sqrt{t(2c - t)(2aa - 2ct + tt)}}$. Hic primum patet, si sumatur t infinite parvum, fore $du = \frac{aadt}{2a\sqrt{ct}}$, ideoque $u = a\sqrt{\frac{t}{c}}$; quæ æquatio indicat curvam ultra C simili modo ver-

ſus N progredi incipere, quo ex C ad M extenditur. Ambiguitas autem ſigni $\surd$ in denominatore æquationis luculenter declarat, applicatam u æque negative accipi poſſe atque affirmative: unde manifeſtum eſt, rectam CD eſſe curvæ diametrum, atque adeo arcum CNB ſimilem & æqualem fore arcui CMA.

20. Simili autem modo recta cd, ex altera parte axi AE per c parallela ducta, erit curvæ diameter; propterea quod ramus Acb ſimilis & æqualis eſt ramo ACB. In punctis ergo B & b, erunt quoque puncta flexus contrarii omnino uti in A; unde curva ſimiliter ulterius progredietur. Habebit ergo curva infinitas diametros CD, cd, &c. intervallo eodem Dd a ſe invicem diſtantes ac parallelas inter ſe; hancque ob rem curva conſtabit ex infinitis partibus inter ſe ſimilibus & æqualibus; atque ideo tota curva cognoſcetur, ſi unica tantum portio AMC fuerit perſpecta.

21. Quia in A eſt punctum flexus contrarii, ibidem erit radius oſculi infinite magnus; id quod ex ipſa curvæ natura patet. Cum enim curva in A ſollicitetur a vi $= \frac{2Ekk}{aa}$ in directione AD; erit in quovis loco M, ſi radius oſculi ibi ponatur $= R$, ex natura elaſticitatis $\frac{2Ekk}{aa}x = \frac{Ekk}{R}$; unde fit $R = \frac{aa}{2x}$. In puncto ergo A radius oſculi eſt infinitus; at vero in punctis C, c, ob $AE = Ae = c$, erit radius oſculi $= \frac{aa}{2c}$; in his ſcilicet locis maxime a recta BAb remotis curvatura eſt maxima.

22. Etſi autem pro puncto C conſtat abſciſſa $AE = c$, tamen diſtantia EC niſi per integrationem æquationis
$dy = \frac{(aa - cc + xx)\,dx}{\surd(cc - xx)(2aa - cc + xx)}$ definiri non poteſt. Si enim poſt integrationem ponatur $x = c$; valor ipſius y dabit diſtantiam CE, quæ bis ſumpta præbebit diſtantiam AB, ſeu intervallum Dd, inter diametros interjacens. Simili modo inte-

integratione opus erit ad laminæ incurvatæ AC longitudinem determinandam. Cum enim posito arcu $AM = s$, sit

$$ds = \frac{aa\,dx}{\sqrt{(cc - xx)(2aa - cc + xx)}},$$ hujus integrale, posito $x = c$, dabit longitudinem curvæ AC.

23. Cum autem istæ formulæ integrationem non admittant, per approximationem valores intervalli AD & arcus curvæ AC commode exprimere nitamur. Ponamus in hunc finem $\sqrt{(cc - xx)} = z$; eritque $PM = y = \int \frac{(aa - zz)\,dx}{z\sqrt{(2aa - zz)}}$, & $AM = s = \int \frac{aa\,dx}{z\sqrt{(2aa - zz)}}$. Est vero per seriem $\frac{1}{\sqrt{(2aa - zz)}}$

$$= \frac{1}{a\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{4} \times \frac{zz}{aa} + \frac{1.3}{4.8} \times \frac{z^4}{a^4} + \frac{1.3.5}{4.8.12} \times \frac{z^6}{a^6} + \&c.\right);$$

unde fiet

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}}\int dx\left(\frac{a}{z} + \frac{1}{4} \times \frac{z}{a} + \frac{1.3}{4.8} \times \frac{z^3}{a^3} + \frac{1.3.5}{4.8.12} \times \frac{z^5}{a^5} + \&c.\right)$$

$$s - y = \frac{1}{\sqrt{2}}\int dx\left(\frac{z}{a} + \frac{1}{4} \times \frac{z^3}{a^3} + \frac{1.3}{4.8} \times \frac{z^5}{a^5} + \frac{1.3.5}{4.8.12} \times \frac{z^7}{a^7} + \&c.\right).$$

24. Quia autem hæc integralia tantum pro casu $x = c$ desideramus; quo casu fit $z = 0$, ea commode ope peripheriæ Circuli exprimi poterunt. Posita enim ratione diametri ad peripheriam $= 1 : \pi$, erit $\int \frac{dx}{z} = \int \frac{dx}{\sqrt{(cc - xx)}} = \frac{\pi}{2}$; posito post integrationem $x = c$. Pari modo autem sequentia integralia ita determinabuntur, ut sit

$$\int z\,dx = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}\,cc$$

$$\int z^3\,dx = \frac{1.3}{2.4} \times \frac{\pi}{2}\,c^4$$

$$\int z^5\,dx = \frac{1.3.5}{2.4.6} \times \frac{\pi}{2}\,c^6$$

$$\int z^7\,dx = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.6} \times \frac{\pi}{2}\,c^8.$$

&c.

 His

His ergo integralibus in subsidium vocatis, erit:

$$AC = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1.1}{2.2}\times\frac{cc}{2aa} + \frac{1.1.3.3}{2.2.4.4}\times\frac{c^4}{4a^4} + \&c.\right)$$

$$AC - AD = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(\frac{cc}{2aa} + \frac{1.3}{2.4}\times\frac{c^4}{4a^4} + \frac{1.3.3.5}{2.4.4.6}\times\frac{c^6}{8a^6} + \&c.\right).$$

Ex his ergo reperiuntur AD & AC ut sequitur:

$$AC = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1^2}{2^2}\times\frac{cc}{2aa} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\times\frac{c^4}{4a^4} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\times\frac{c^6}{8a^6} + \&c.\right)$$

$$AD = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1^2}{2^2}\times\frac{3}{1}\times\frac{cc}{2aa} - \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\times\frac{5}{3}\times\frac{c^4}{4a^4} - \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\times\frac{7}{5}\times\frac{c^6}{8a^6} - \&c.\right).$$

Si itaque detur $AE = c$, & $AD = b$, ex his æquationibus & recta constans a & longitudo curvæ AC definietur. Vicissim autem ex data longitudine curvæ AC, & recta a, per quam vis inflectens determinatur, reperiri poterunt rectæ AD & CD.

Species prima. 25. Quoniam igitur speciem primam constituimus, si in æquatione generali $dy = \frac{(aa - cc + xx)\,dx}{\sqrt{(cc - xx)(2aa - cc + xx)}}$ fuerit $c = 0$, seu $\frac{a}{c} = \infty$, quo casu linea resultat repræsentans statum laminæ Elasticæ naturalem; ad eandem speciem primam referamus quoque eos casus, quibus c est quantitas quamminima, ita ut præ a pro evanescente haberi queat. Quia ergo x ipsam c superare nequit; etiam x præ a evanescet, ideoque ista prodibit æquatio $dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{2(cc - xx)}}$, cujus integrale est $y = \frac{a}{\sqrt{2}}\,\mathrm{A\,sin.}\,\frac{x}{c}$, quæ est æquatio pro curva Trochoide in infinitum elongata. Fiet autem $AD = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}$, a qua ipsa curvæ longitudo infinite parum tantum discrepat, propterea quod angulus DAM est infinite parvus. Sit longitudo laminæ ACB $= 2f$, ejusque elasticitas absoluta $= Ekk$; ob $f = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}$, erit vis ad hanc curvaturam infinite parvam laminæ inducendam requi-

requisita finitæ magnitudinis & quidem $= \frac{Ekk}{ff} \times \frac{\pi\pi}{4}$. Scilicet si extremitates A & B colligentur filo AB, hoc filum contrahi debebit vi $= \frac{Ekk}{ff} \times \frac{\pi\pi}{4}$.

26. Secundam speciem constituat casus, quo $c > 0$, attamen $c < a$; scilicet si c contineatur intra limites 0 & a. His enim casibus angulus DAM recto erit minor; est namque anguli PAM sinus, seu anguli DAM cosinus $= \frac{aa - cc}{aa}$. Hoc ergo casu, forma lineæ curvæ talis fere erit qualem Figura 6, repræsentat. Quia igitur est $c < a$ erit $\frac{cc}{2aa} < \frac{1}{2}$; cum vero sit $\frac{cc}{2aa} > 0$, erit utique $AC = f > \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}$ unde $aa < \frac{8ff}{\pi\pi}$; quare vis, qua extremitates laminæ A & B ope fili AB ad se invicem attrahuntur, major erit quam casu præcedente, nempe $> \frac{Ekk}{ff} \times \frac{\pi\pi}{4}$. *Species secunda.*

27. In tertia specie unicum complector casum, quo $c = a$, quia hoc casu axis AP curvam in puncto A tangit: hæcque species singulare nomen curvæ Elasticæ rectangulæ obtinuit. Erit ergo $dy = \frac{xxdx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}$, & $ds = \frac{aadx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}$; hoc igitur casu AD & AC ita se habebunt ut sit: *Species tertia.*

$$AC = f = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1^2}{2^2} \times \frac{1}{2} + \frac{1^2 . 3^2}{2^2 . 4^2} \times \frac{1}{4} + \frac{1^2 . 3^2 . 5^2}{2^2 . 4^2 . 6^2} \times \frac{1}{8} + \&c.\right)$$

$$AD = b = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1^2}{2^2} \times \frac{3}{1.2} - \frac{1^2 . 3^2}{2^2 . 4^2} \times \frac{5}{3.4} - \frac{1^2 . 3^2 . 5^2}{2^2 . 4^2 . 6^2} \times \frac{7}{5.8} - \&c.\right).$$

Quanquam autem hinc, neque b, neque f per a accurate assignari potest; tamen alibi insignem relationem inter has quantitates locum habere demonstravi. Scilicet ostendi esse $4bf = \pi aa$, seu rectangulum ex AD & AC formatum erit æquale areæ Circuli cujus diameter est $=$ AE. Reperietur autem, calculum subducendo, proxime $f = \frac{5a}{6} \times \frac{\pi}{2}$, ita ut sit $a = \frac{12f}{5\pi}$; hinc vis qua laminæ extremitates A, B ad se invicem contrahi debent; erit $= \frac{Ekk}{ff} \times \frac{25}{72} \pi\pi$. Propius vero reperitur $f = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} . 1,1803206$, hincque $b = \frac{\pi aa}{4f} = \frac{a}{\sqrt{2}} \times 1,1803206$; unde in numeris puris erit $\frac{f}{a} = 1,311006$, & $\frac{b}{a} = 0,834612$.

Species quarta

28. Si $c > a$, orietur species quarta, eousque patens, quoad fiat $AD = b = 0$; qui alter limes ipsius c definietur per hanc æquationem:

$$1 = \frac{1^2}{2^2} \times \frac{1}{1} \times \frac{cc}{2aa} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} \times \frac{5}{3} \times \frac{c^4}{4a^4} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} \times \frac{7}{5} \times \frac{c^6}{8a^6} + \&c.$$

Fig. 7. In hac ergo specie cum sit $c > a$; curva in A supra axem AE ascendet, angulumque constituet PAM, cujus sinus erit $= \frac{cc - aa}{aa}$; mox autem videbimus hunc angulum PAM minorem esse quam 40°, 41′; quoniam si hunc valorem acquirit, intervallum AD evanescit, quem casum ad speciem quintam refero. Hinc in specie quarta continentur casus quibus $\frac{cc}{aa}$ inter hos limites 1 & 1,651868 comprehenditur. Harum autem curvarum forma ex figura intelligitur; dummodo notetur, quo propius $\frac{cc}{aa}$ ad posteriorem limitem 1,651868 accesserit, eo minus esse futurum intervallum AD, eoque propius laminæ terminos A & B ad se invicem adduci. Fieri ergo potest ut laminæ gibbositates m & R, item M & r, se mutuo non solum tangant, sed etiam intersecent, atque hujusmodi intersectiones in infinitum multiplicabuntur, donec omnes diametri DC, dc coincidant, atque cum axe AE confundantur.

Species quinta. Fig. 8.

29. Hoc si evenerit, orietur species quinta, cujus natura hac exprimetur æquatione inter coordinatas $AP = x$ & $PM = y$;

$$dy = \frac{(cc - aa - xx)\,dx}{\sqrt{(cc - xx)(2aa - cc + xx)}},$$

existente hac inter a & c relatione, ut sit intervallum $AD = b = 0$. Ponatur

$\frac{cc}{2aa}$

$\frac{cc}{2aa} = v$, atque v ex hac æquatione infinita definiri debet

$$1 = \frac{1.3}{2.2}v + \frac{1.1.3.5}{2.2.4.4}v^2 + \frac{1.1.3.3.5.7}{2.2.4.4.6.6}v^3 + \&c.$$

Quærantur primum per methodos cuique solitas, vel saltem tentando, limites inter quos verus valor ipsius v contineatur, atque hujusmodi limites reperientur $v = 0,824$ & $v = 0,828$. Quod si jam uterque substituatur in æquatione ex erroribus binis oriundis, concludetur tandem fore $v = 0,825934 = \frac{cc}{2aa}$; unde fit $\frac{cc}{aa} = 1,651868$ & $\frac{cc - aa}{aa} = 0,651868$; quæ expressio cum sit sinus anguli PAM, ex Tabulis reperietur hic angulus $= 40°, 41'$; ideoque hujus duplum, seu angulus MAN, erit $= 81°, 82'$. Quare si laminæ elasticæ extremitates eousque ad se invicem adducantur, ut se contingant; tum curvam AMCNA formabunt, & ambæ extremitates in A angulum constituent $= 81°, 22'$.

30. Si ambæ extremitates laminæ A & B, postquam ad se invicem fuerint adductæ, aucta vi in plagas contrarias a se invicem diducantur; orietur curva hujus formæ AMCNB, quæ speciem sextam constituat. In curvis ergo ad hanc speciem pertinentibus, erit $\frac{cc}{2aa} > 0,825934$; ita tamen ut sit $\frac{cc}{2aa} < 1$. Quod si enim sit $cc = 2aa$ orietur species septima mox explicanda. Erit ergo in his curvis angulus PAM, quem curva in A cum axe constituit major quam $40°, 41'$, minor tamen recto: cum enim ejus sinus sit $= \frac{cc - aa}{aa}$, ob $cc < 2aa$, sinus iste necessario est minor sinu toto; neque ergo angulus PAM rectus fieri potest, nisi ponatur $cc = 2aa$. *Species sexta. Fig. 9.*

31. Sit jam $cc = 2aa$, quo casu species septima constituitur, atque natura curvæ exprimetur hac æquatione *Species septima.*

$dy = \frac{(aa - xx)\,dx}{x\sqrt{(2aa - xx)}}$; ex qua colligitur, curvæ ramos A & B infinitum extendi ita, ut recta AB fiat curvæ asymtota. *Fig. 10.* Fiet ergo uterque ramus AMC & BNC infinitus, id quod ex

serie

ſerie ſupra pro arcu AC inventa intelligitur; erit enim
$AC = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} + \&c.\right)$, cujus ſeriei ſumma eſt infinita. Quod ſi igitur laminæ longitudo AC fuerit finita $= f$, neceſſe eſt ut ſit $a = 0$, hincque etiam $CD = c = 0$; lamina ergo, poſtquam in nodum fuerit incurvata, hoc caſu iterum in directum extendetur, ad quam extenſionem opus erit vi infinita. Sin autem lamina fuerit infinite longa, curvam formabit nodatam ad aſymtotam AB convergentem, exiſtente $CD = c$. Æquatio autem pro hac curva ope logarithmorum integrari poteſt, obtinebitur enim

$$y = \sqrt{(cc - xx)} - \frac{c}{2}\, l\, \frac{c + \sqrt{(cc - xx)}}{x},$$

ſumptis abſciſſis x in ipſa diametro DC; ita ut ſit $DQ = x$, & $QM = y$; evaneſcit enim applicata y, poſito $x = CD = c$. In nodo autem O applicata y pariter evaneſcit: ad quem locum inveniendum, ponatur $\frac{2\sqrt{(cc - xx)}}{c} = l\,\frac{c + \sqrt{(cc - xx)}}{x}$. Sit ϕ angulus cujus coſinus $= \frac{x}{c}$ & ſinus $= \frac{\sqrt{(cc - xx)}}{c}$, erit $2\,\text{ſin.}\,\phi = l\,\text{tang.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}\phi)$, qui logarithmus ex hyperbolicorum genere ſumi debet; cujuſmodi Canon ſi deficiat, ſumatur ex Canone vulgari logarithmus tangentis anguli $45^\circ + \frac{1}{2}\phi$, a cujus characteriſtica denarius auferatur, ſitque reſiduum $= \omega$; quo facto erit $2\,\text{ſin.}\,\phi = \omega . 2,30258509$: ſumendis ergo iterum logarithmis vulgaribus, erit $l2 + l\,\text{ſin.}\,\phi = l\omega +$ $0,3622156886$, ſeu $l\,\text{ſin.}\,\phi = l\,\omega + 0,0611856930$. Hoc artificio tentando, mox vero proximus valor anguli ϕ elicietur; unde porro per regulam falſi verus valor anguli ϕ, ex eoque abſciſſa $x =$ DO definietur. Reperitur autem hoc modo angulus $\phi = 73^\circ, 14', 12''$, unde prodit $\frac{x}{c} = 0,2884191$, & $\frac{\sqrt{(cc - xx)}}{c} = 0,9575042$; angulus vero QOM fit $= 2\phi - 90 = 56^\circ, 28', 24''$, ideoque angulus MON $= 112^\circ, 56', 48''$. Cum igitur ſpecie quinta angulus nodi eſſet $81^\circ, 22'$, in in specie sexta angulus nodi MON continebitur inter limites $81°, 22'$ & $112°, 56', 48''$. In specie quarta autem siquidem detur nodus, erit ejus angulus minor quam $81°, 22'$.

32. Sit jam $cc > 2aa$, puta $cc = 2aa + gg$; erit æquatio pro curva, ob $aa = \frac{cc - gg}{2}$ Species octava.

$$dy = \frac{(xx - \frac{1}{2}cc - \frac{1}{2}gg)\,dx}{\sqrt{(cc - xx)(xx - gg)}},$$ qua æquatione species octava continetur, eritque, si recta dDd repræsentet directionem vis sollicitantis, $x = DQ$ & $y = QM$. Primum ergo patet applicatam y realem esse non posse, nisi sit $x > g$, tum vero x non potest excedere rectam $DC = c$, unde sumpta $DF = g$, tota curva continebitur inter rectas ipsi dd parallelas per puncta C & F ductas, quæ curvam simul tangent. Perinde autem est utra rectarum c & g sit major, dummodo fuerint inæquales; æquatio enim non variatur si rectæ c & g inter se permutentur. Deinde vero hæc curva quoque habebit infinitas diametros inter se parallelas DC, dc, dc, & quæ per singula puncta G & H ducuntur rectæ pariter ad dDd normales; nusquam autem per totam curvam dabitur punctum flexus contrarii, ideoque continua curvatura utrimque in infinitum progreditur, uti figura indicat; anguli autem qui in nodis constituuntur MON majores erunt quam $112°, 56', 42''$. Fig. 11.

33. Cum in hac specie non solum contineantur casus quibus $gg < cc$, sed etiam quibus $gg > cc$, unicus adhuc superest casus quo $c = g$, quo quidem tota curva in spatium evanescens, ob $CF = 0$, redigitur. Quod si autem utramque c & g statuamus infinitam, ita tamen ut earum differentia fiat finita, curva finitum spatium occupabit. Ad eam ergo inveniendam, ponatur $g = c - 2h$, & $x = c - h - t$, atque ob $c = \infty$, quantitates h & t vero finitæ, erit $\frac{1}{2}cc + \frac{1}{2}gg = cc - 2ch$; & $xx - \frac{1}{2}cc - \frac{1}{2}gg = -2ct$; tum vero $cc - xx = 2c(h+t)$, & $xx - gg = 2c(h-t)$; ex quibus sequens prodibit æquatio, $dy = \frac{t\,dt}{\sqrt{(hh - tt)}}$, pro Circulo. Lamina Species nona.

elastica ergo hoc casu in Circulum incurvatur, uti supra jam annotavimus; Circulus ergo speciem nonam atque ultimam constituet.

34. His enumeratis speciebus, facile erit pro quovis casu oblato assignare, ad quamnam speciem curva formata pertineat. Sit
Fig. 12. lamina elastica in G muro infixa, termino vero A appendatur pondus P, quo lamina in figuram GA incurvetur. Ducatur tangens AT, atque ex angulo TAP totum judicium erit petendum. Si enim hic angulus fuerit acutus, referetur curva ad speciem secundam; sin sit rectus ad tertiam, eritque elastica rectangula. Quod si angulus TAP fuerit obtusus, minor tamen quam 130°, 41′, curva ad speciem quartam pertinebit; ad quintam autem si angulus TAP sit $= 130°, 41'$; sin autem angulus TAP major fuerit, curva sub specie sexta continebitur. Ad septimam vero pertineret, si iste angulus fieret duobus rectis æqualis; quod autem nunquam fieri potest. Hæc igitur species cum duabus sequentibus produci nequit laminæ immediate pondus appendendo.

Fig. 3. 35. Ut igitur pateat quomodo reliquæ species laminam incurvando produci queant, laminæ in B fixæ, non immediate, sed virgæ rigidæ AC cum laminæ termino A firmissime connexæ in C appendatur pondus P, quod trahat in directione CD. Sit intervallum $AC = h$, elasticitas laminæ absoluta $= Ekk$, & anguli MAP quem lamina in A cum horizontali constituit, sinus $= m$. His positis, si ponatur abscissa $AP = t$ & applicata $PM = y$, reperietur pro curva ista æquatio

$$dy = \frac{dt(mEkk - Pht - \frac{1}{2}Ptt)}{\sqrt{(E^2k^4 - (mEkk - Pht - \frac{1}{2}Ptt)^2)}}.$$

Ponatur jam $CP = x = h + t$, quo æquatio ad formam qua in divisione specierum usi sumus, reducatur; erit

$$dy = \frac{dx(mEkk + \frac{1}{2}Phh - \frac{1}{2}Pxx)}{\sqrt{(E^2k^4 - (mEkk + \frac{1}{2}Phh - \frac{1}{2}Pxx)^2)}}$$

quæ comparata cum forma

$$dy = \frac{dx(aa - cc + xx)}{\sqrt{(cc - xx)(2aa - cc + xx)}}$$

seu

seu $dy = \frac{dx(aa - cc + xx)}{\sqrt{(a^4 - (aa - cc + xx)^2)}}$ dabit $\frac{1}{2} Paa = Ekk$, seu $aa = \frac{2Ekk}{P}$; & $\frac{1}{2} Pcc - \frac{1}{2} Paa = mEkk + \frac{1}{2} Phh$; ergo $cc = \frac{2(1+m)Ekk}{P} + hh$.

36. Curva ergo ad speciem secundam pertinebit, si fuerit $\frac{2mEkk}{P} + hh < 0$, seu $P < \frac{-2mEkk}{hh}$: nisi ergo angulus PAM sit negativus, vis P negativa esse atque virga in C sursum trahi debet. Ad speciem tertiam curvatura pertinebit, si $P = \frac{-2mEkk}{hh}$. Quarta autem species prodibit si fuerit $2mEkk + Phh > 0$, simul vero $2mEkk + Phh < 2\alpha Ekk$; existente $\alpha = 0,651868$. Sin autem sit $P = \frac{2(\alpha - m)Ekk}{hh}$, tum curva ad speciem quintam pertinebit. Quod si vero fuerit $Phh > 2(\alpha - m)Ekk$, simul vero $Phh < 2(1-m)Ekk$, curva ad speciem sextam est referenda. Septimaque species proveniet, si $Phh = 2(1-m)Ekk$. Octava autem species obtinebitur, si $Phh > 2(1-m)Ekk$; quare si angulus PAM fuerit rectus, ob $1 - m = 0$, curva semper ad speciem octavam pertinebit. Species denique nona orietur, si fuerit $h = \infty$; uti jam supra annotavi.

37. Quæ ante de specie prima sunt annotata inservire possunt viribus columnarum dijudicandis. Sit enim AB columna super basi A verticaliter posita, gestans pondus P. Quod si jam columna ita sit constituta ut prolabi nequeat; ab onere P, si fuerit nimis magnum, nil aliud erit metuendum, nisi columnæ incurvatio; hoc ergo casu columna spectari poterit tanquam elasticitate prædita. Sit igitur elasticitas absoluta columnæ $= Ekk$: ejusque altitudo $AB = 2f = a$, atque supra §. 25 vidimus, vim requisitam ad hanc columnam vel minimum inclinandam esse $= \frac{\pi\pi Ekk}{4ff} = \frac{\pi\pi}{aa} \cdot Ekk$. Nisi ergo onus gestandum P majus

De vi Columnarum. *Fig. 13.*

sit quam $E.\frac{\pi\pi kk}{aa}$, nulla prorsus incurvatio erit metuenda; contra vero si pondus P fuerit majus, columna incurvationi resistere non poterit. Manente autem elasticitate columnæ, atque adeo ejus crassitie eadem; pondus P, quod sine periculo gestare valet, erit reciproce ut quadratum altitudinis columnæ: columnaque duplo altior quartam tantum oneris partem gestare poterit. Hæc igitur præcipue in usum vocari possunt circa columnas ligneas, quippe quæ incurvationi sunt obnoxiæ.

Elasticitatis absolutæ determinatio per experimenta. Fig. 14.

38. Quo autem vis atque incurvatio cujusque laminæ elasticæ a priori determinari queat; necesse est ut elasticitas absoluta, quam hactenus per Ekk expressimus, sit cognita; id quod unico experimento commode præstabitur. Infigatur lamina elastica uniformis FH, cujus elasticitatem absolutam investigari oportet, altero termino F parieti firmo GK; ita ut situm teneat horizontalem FH; hic enim gravitatem naturalem negligere liceat. Alteri termino H appendatur pondus pro arbitrio sumptum P, quo lamina in statum AF incurvetur. Sit longitudo laminæ AF = HF = f, recta horizontalis AG = g, & verticalis GF = h; qui valores omnes per experimentum erunt cogniti. Comparetur jam hæc curva cum æquatione generali

$$dy = \frac{(cc - aa - xx)\,dx}{\sqrt{(cc - xx)(2aa - cc + xx)}}$$

in qua si fuerint a & c per f, g, h, definita; erit vis incurvans $P = \frac{2Ekk}{aa}$; ideoque elasticitas absoluta $Ekk = \frac{1}{2}Paa$.

39. Quia jam tangens in F est horizontalis, erit hic $\frac{dy}{dx} = 0$, ideoque $x = \sqrt{cc - aa}$. Hinc ergo erit AG $= g = \sqrt{(cc - aa)}$, & $aa = cc - gg$; ideoque

$$dy = \frac{(gg - xx)\,dx}{\sqrt{(cc - xx)(cc - 2gg + xx)}}$$

posito autem hic $x = g$, fieri debebit $y =$ GF $= h$, seu $s =$ AF $= f$; est vero $ds = \frac{(cc - gg)\,dx}{\sqrt{(cc - xx)(cc - 2gg + xx)}}$.

Jam si pondus P sumatur valde parvum, ut lamina paulisper

per tantum deprimatur; tum erit c quantitas valde magna; ideoque erit proxime $\frac{1}{\sqrt{(cc-xx)(cc-2gg+xx)}} =$ $(c^4 - 2ccgg + 2ggxx - x^4)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{cc} + \frac{gg}{c^4} - \frac{ggxx}{c^6}$ $+ \frac{x^4}{2c^6}$, ideoque integrando quoque proxime:

$$s = \frac{(cc-gg)x}{cc} + \frac{(cc-gg)ggx}{c^4} - \frac{(cc-gg)ggx^3}{3c^6} + \frac{(cc-gg)x^5}{10c^6},$$

$$\& y = \frac{ggx}{cc} + \frac{g^4x}{c^4} - \frac{g^4x^3}{3c^6} + \frac{ggx^5}{10c^6}$$
$$- \frac{x^3}{3cc} - \frac{ggx^3}{3c^4} + \frac{ggx^5}{5c^6} - \frac{x^7}{14c^6}.$$

Sit nunc $x = g$, fietque $f = g - \frac{37g^5}{30c^4}$ & $h = \frac{2g^3}{3cc} + \frac{2g^5}{3c^4}$.

Quod si ergo recta FG $= h$ in usum vocetur, erit $cc = \frac{2g^3}{3h}$, & $aa = \frac{g(2gg - 3gh)}{3h}$: unde elicitur elasticitas absoluta $Ekk = \frac{Pgg(2g - 3h)}{6h}$; qui valor a vero vix sensibiliter discrepabit, dummodo laminæ curvatura non nimis magna inducatur.

40. Hæc autem elasticitas absoluta Ekk primum pendet ab natura materiæ, ex qua lamina est fabrefacta; unde alia materia magis, alia minus elatere prædita dici solet. Secundo quoque ita pendet a laminæ latitudine, ut expressio Ekk ubique latitudini laminæ debeat esse proportionalis, si cetera sint paria. Tertio verum crassities laminæ plurimum confert ad valorem ipsius Ekk determinandum, quæ ita comparata esse videtur, ut, ceteris paribus, Ekk sit ut crassitiei quadratum. Conjunctim ergo tenebit expressio Ekk rationem compositam ex ratione elateris materiæ, latitudinis laminæ simplici, ac duplicata crassitiei laminæ. Hinc per experimenta quibus latitudinem & crassitiem

metiri licet, omnium materiarum elasticitates inter se comparari ac determinari poterunt.

De curvatura laminæ elasticæ inæquabilis. Fig. 2.

41. Quemadmodum igitur hactenus laminæ, cujus curvaturam determinavi, elasticitatem absolutam Ekk per totam longitudinem constantem posui; ita solutio eadem methodo poterit absolvi, si quantitas Ekk utcunque ponatur variabilis. Scilicet si elasticitas absoluta fuerit ut functio quæcunque portionis laminæ AM, quæ functio sit $= S$, posito arcu $AM = s$; atque existente radio osculi in $M = R$; curva AM, quam lamina induit, ita erit comparata, ut in ea, inter omnes alias ejusdem longitudinis, sit $\int \frac{Sds}{RR}$ minimum. Solvetur ergo iste casus per formulam secundam generalem. Sit $dy = pdx$; $dp = qdx$; at $dS = Tds$, atque, inter omnes curvas in quibus est $\int dx\sqrt{(1+pp)}$ ejusdem magnitudinis, ea determinari debebit, in qua sit $\int \frac{Sqqdx}{(1+pp)^{5:2}}$ minimum. Prior formula $\int dx\sqrt{(1+pp)}$ dat pro formula differentiali $\frac{1}{dx}\, d.\, \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Altera vero $\int \frac{Sqqdx}{(1+pp)^{5:2}}$ cum $\int Zdx$ comparata dabit $Z = \frac{Sqq}{(1+pp)^{5:2}}$. Cum igitur positum sit $dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq$, $\Pi = \int [Z]\, dx$, & $d[Z] = [M]dx + [N]dy + [P]dp$; erit $Ld\Pi = \frac{qqTds}{(1+pp)^{5:2}}$; unde $L = \frac{qqT}{(1+pp)^{5:2}}$, $d\Pi = ds = dx\sqrt{(1+pp)}$; ideoque $[Z] = \sqrt{(1+pp)}$, $[M] = 0$, $[N] = 0$, & $[P] = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Deinde vero est $M = 0$, $N = 0$, $P = -\frac{5Sqqpdp}{(1+pp)^{7:2}}$, & $Q = \frac{2Sq}{(1+pp)^{5:2}}$; ita ut sit $dZ = \frac{qqdS}{(1+pp)^{5:2}} + Pdp + Qdq$.

42. Jam sumatur integrale $\int Ldx = \int \frac{qqTdx}{(1+pp)^{5:2}} =$

$\int$

$\int \frac{qq\,dS}{(1+pp)^3}$; ſitque H ejus valor, ſi ponatur $x = a$, cujus quidem conſtantis a conſideratio mox ex calculo rurſus evaneſcet. Erit ergo $V = H - \int \frac{qq\,dS}{(1+pp)^3}$: Unde valor differentialis fiet $= -\frac{dP}{dx} - \frac{1}{dx} d.\,[P]\,V + \frac{ddQ}{dx^2}$. Quamobrem ex his duobus valoribus differentialibus naſcetur hæc æquatio pro curva quæſita

$$\frac{\alpha}{dx}\,d.\,\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = +\frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx}d.\,[P]\,V - \frac{ddQ}{dx^2},$$

quæ integrata dat

$$\frac{\alpha p}{\sqrt{(1+pp)}} + \beta = P + [P]\,V - \frac{dQ}{dx},\ \text{ſive}$$

$$\frac{\alpha p}{\sqrt{(1+pp)}} + \beta = \frac{Hp}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}\int\frac{qq\,dS}{(1+pp)^3} + P - \frac{dQ}{dx},$$

ubi conſtans H alias determinata in conſtante arbitraria α comprehendi poteſt, quo ipſo conſtans a ex calculo egreditur. Idcirco ergo prodibit hæc æquatio

$$\frac{\alpha p}{\sqrt{(1+pp)}} + \beta = P - \frac{dQ}{dx} - \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}\int\frac{qq\,dS}{(1+pp)^3}.$$

43. Multiplicetur hæc æquatio per $dp = q\,dx$, atque prodibit:

$$\frac{\alpha p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} + \beta\,dp = P\,dp - Q\,dq - \frac{p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}\int\frac{qq\,dS}{(1+pp)^3}.$$

Cum autem ſit $dZ = \frac{qq\,dS}{(1+pp)^{5:2}} + P\,dp + Q\,dq$, erit $P\,dp = dZ - Q\,dq - \frac{qq\,dS}{(1+pp)^{5:2}}$; quo valore ſubſtituto, emerget æquatio integrabilis hæc:

$$\frac{\alpha p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} + \beta\,dp = dZ - q\,dQ - Q\,dq - \frac{qq\,dS}{(1+pp)^{5:2}} - \frac{p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}\int\frac{qq\,dS}{(1+pp)^3},$$

cujus integralis eſt:

$$\alpha\sqrt{(1+pp)} + \beta p + \gamma = Z - Qq - \sqrt{(1+pp)}\int\frac{qq\,dS}{(1+pp)^3}\ \text{ſeu}$$

$$\alpha\sqrt{(1+pp)}+\beta p+\gamma = \frac{-Sqq}{(1+pp)^{5:2}} - \sqrt{(1+pp)}\int\frac{qq\,dS}{(1+pp)^{3}}.$$

Quo signum integrale tollamus, divisa æquatione per $\sqrt{(1+pp)}$, ea denuo differentietur;

$$\frac{\beta\,dp}{(1+pp)^{3:2}} - \frac{\gamma p\,dp}{(1+pp)^{3:2}} + \frac{2qq\,dS}{(1+pp)^{3}} + \frac{2Sq\,dq}{(1+pp)^{3}} - \frac{6Spqq\,dp}{(1+pp)^{4}} = 0$$

quæ per $\frac{(1+pp)^{3:2}}{2q}$ multiplicatâ, præbet:

$$\frac{\beta\,dp}{2q} - \frac{\gamma p\,dp}{2q} + \frac{q\,dS+S\,dq}{(1+pp)^{3:2}} - \frac{3Spq\,dp}{(1+pp)^{5:2}} = 0;$$

cujus, ob $dp = q\,dx$ & $dy = p\,dx$, integrale erit

$$\alpha + \tfrac{1}{2}\beta x - \tfrac{1}{2}\gamma y + \frac{Sq}{(1+pp)^{3:2}} = 0.$$

At est $\frac{-(1+pp)^{3:2}}{q}$ = radio osculi R; unde constantes β & γ duplicando, orietur hæc æquatio $\frac{S}{R} = \alpha + \beta x - \gamma y$: quæ æquatio apprime congruit cum ea, quam altera Methodus directa suppeditat. Exprimet enim $\alpha+\beta x-\gamma y$ momentum potentiæ incurvantis, recta quacunque pro axe assumpta, cui momento utique æqualis esse debet elasticitas absoluta S per radium osculi R divisa. Sic igitur non solum Celeb. BERNOULLII observata proprietas Elasticæ plenissime est evicta; sed etiam formularum mearum difficiliorum usus summus in hoc Exemplo est declaratus.

44. Si ergo curva fuerit data, quam lamina inæquabiliter elastica a potentia $CD = P$, sollicitata format; hinc elasticitas absoluta laminæ in quovis loco poterit cognosci. Sumpta enim recta CP, quæ ad directionem vis sollicitantis est normalis, pro axe, ac posita $CP = x$, $PM = y$, arcu curvæ $AN = s$, & radio osculi in $M = R$, ob momentum potentiæ P ad punctum M relatum $= Px$; erit $\frac{S}{R} = Px$; ideoque elasticitas absoluta in puncto M, quæ est S, $= PRx$. Hinc

Fig. 3.

cum,

cum, data curva, in singulis punctis detur radius osculi R, elasticitas absoluta in quovis loco innotescit. Quod si ergo materia laminæ, una cum crassitie, ubique fuerit eadem; latitudo autem sit variabilis: quia elasticitas absoluta latitudini est proportionalis, ex curva formata latitudo laminæ in singulis locis colligitur.

45. Sit ex lamina elastica excissa lingula triangularis f A f, ubique ejusdem crassitiei. Quoniam ergo latitudo m m, in quovis loco M, est longitudini A M proportionalis; posita A M $= s$, erit elasticitas absoluta in M ut s. Sit ea $= Eks$; atque laminæ termino f f muro horizontaliter infixo, appendatur cuspidi A pondus P; quo laminæ recta media AF in curvam FmA incurvetur, cujus natura quæritur. Positis autem in axe horizontali abscissa A p $= x$, applicata p m $= y$, & arcu Am $= s$; erit $Px = \frac{Eks}{R}$, denotante R radium osculi in m. Multiplicetur hæc æquatio per dx, & ob $R = \frac{-ds^3}{dxddy}$, posito dx constante, erit $Pxdx = \frac{-Eksdx^2ddy}{ds^3}$, seu $\frac{Pxdx}{Ek} + \frac{sdx^2ddy}{ds^3} = 0$. At, cum sit $d.\frac{sdy}{ds} = \frac{sddy}{ds} - \frac{sdydds}{ds^2} + dy = \frac{sdx^2ddy}{ds^3} + dy$; ob $dds = \frac{dyddy}{ds}$, erit $\int \frac{sdx^2ddy}{ds^3} = \frac{sdy}{ds} - y$: unde integrando habebitur $\frac{Pxx}{2Ek} + a = \frac{-sdy}{ds} + y$.

Fig. 13. Fig. 14.

46. Sit $dy = pdx$, erit $ds = dx\sqrt{(1+pp)}$, & posito $\frac{2Ek}{P} = c$, fiet $a + \frac{xx}{c} = y - \frac{sp}{\sqrt{(1+pp)}}$; ideoque erit $\frac{a\sqrt{(1+pp)}}{p} + \frac{xx\sqrt{(1+pp)}}{cp} = \frac{y\sqrt{(1+pp)}}{p} - s$; quæ differentiata dat

$$\frac{-adp}{pp\sqrt{(1+pp)}} + \frac{2xdx\sqrt{(1+pp)}}{cp} - \frac{xxdp}{cpp\sqrt{(1+pp)}} = \frac{dy\sqrt{(1+pp)}}{p} - \frac{ydp}{pp\sqrt{(1+pp)}} - dx\sqrt{(1+pp)} = \frac{-ydp}{pp\sqrt{(1+pp)}}.$$

Hinc oritur $a - y = \frac{2pxdx(1+pp)}{cdp} - \frac{xx}{c}$. Ponatur dp constans,

ac differentiando erit $-pdx = \frac{2px\,ddx(1+pp)}{c\,dp} + \frac{2p\,dx^2(1+pp)}{c\,dp} + \frac{2x\,dx(1+3pp)}{c} - \frac{2x\,dx}{c}$, seu
$0 = c\,dx\,dp + 2x\,ddx(1+pp) + 2dx^2(1+pp) + 6px\,dx$; cujus æquationis autem resolutio ulterior non constat. Simplicissima autem pro curva est æquatio hæc $\frac{y\,ds - s\,dy}{ds} = \frac{Pxx}{2Ek}$; quia enim posito $x = 0$, & y & s evanescere debent, constans a debet esse $= 0$.

De Incurvatione laminarum elasticarum naturaliter non rectarum.

47. Hoc igitur modo curvatura laminæ, sive æqualiter sive inæqualiter elasticæ, determinatur, si ab una potentia sollicitetur; atque, quod præcipue est notandum, si lamina naturaliter fuerit in directum extensa. Quod si enim lamina in statu naturali jam fuerit curva; tum utique a vi sollicitante aliam curvaturam induet; ad quam inveniendam, præter sollicitationem atque elasticitatem, simul figuram ejus naturalem nosse oportet. Sit igitur lamina elastica naturaliter curva B m a, cujus quidem elasticitas sit ubique eadem, $= Ekk$; quæ a vi sollicitante P in figuram BMA incurvetur. Per A ducatur recta CAP ad directionem vis sollicitantis normalis, quæ habeatur pro axe; sitque intervallum AC $= c$, abscissa AP $= x$, applicata PM $= s$; erit momentum vis sollicitantis pro puncto M $= P(c+x)$. *Fig. 16.*

48. Sit porro radius osculi curvæ quæsitæ in M $= R$: sumatur in statu naturali arcus am $=$ AM $= s$, sitque in puncto m radius osculi $= r$; qui ob curvam a m B cognitam dabitur per arcum s. In M ergo, quia curvatura major est, radius osculi R minor est quam r, atque excessus anguli elementaris in M supra angulum in statu naturali erit $= \frac{ds}{R} - \frac{ds}{r}$, qui excessus erit effectus a potentia sollicitante productus. Quamobrem erit $P(c+x) = Ekk\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$; quæ cum r per s detur, erit æquatio pro curva quæsita; quæ autem sic in genere spectata ulterius reduci non potest.

49. Po

49. Ponamus ergo laminam in statu naturali amB habere figuram circularem; erit r radius ejus circuli qui sit $= a$, unde fit $P(c+x) = Ekk\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a}\right)$. Multiplicetur hæc æquatio per dx, & integretur; orietur $\frac{P}{Ekk}\left(\frac{1}{2}xx + cx + f\right) = \frac{-dy}{ds} - \frac{x}{a}$: quæ æquatio, si loco c scribatur $c + \frac{Ekk}{P}$; abibit in $\frac{P}{Ekk}\left(\frac{1}{2}xx + cx + f\right) = \frac{-dy}{ds}$: quæ est eadem æquatio quam supra pro lamina naturaliter recta invenimus. Lamina ergo naturaliter circularis in easdem curvas incurvatur, quæ laminæ naturaliter rectæ inducuntur: tantum scilicet locus applicationis potentiæ, seu intervallum $AC = c$, pro utroque casu secundum datam legem variari debebit. Eædem ergo novem species curvarum prodibunt pro figuris, quas lamina naturaliter circularis inducere potest, quas supra numeravimus. Lamina enim circularis, si intervallum AC capiatur infinitum, primum in lineam rectam extendi potest; tum quæcunque potentia insuper applicata eundem præstabit effectum, ac si sola laminæ elasticæ naturaliter rectæ applicaretur.

50. Ponamus autem, quæcunque sit laminæ figura naturalis, punctum C infinite distare; ita ut momentum vis sollicitantis ubique sit idem, quod per Ekk divisum ponatur $= \frac{1}{b}$; eritque $\frac{1}{b} = \frac{1}{R} - \frac{1}{r}$ & $\frac{1}{R} = \frac{1}{b} + \frac{1}{r}$. Hinc fiet $\int \frac{ds}{R} = \frac{s}{b} + \int \frac{ds}{r} =$ amplitudini arcus AM; sicuti $\int \frac{ds}{r}$ exprimit amplitudinem arcus am; quemadmodum quidem Celeb. *Joh.* BERNOULLI hoc *amplitudinis* nomine in eximio Tractatu *De motu reptorio* uti est solitus. Sit igitur $\frac{s}{b} + \int \frac{ds}{r}$ arcus in circulo, cujus radius $= 1$ sumptus, qui ob r per s datum, quoque in s erit cognitus. Hinc autem reperientur coordinatæ orthogonales x & y, ita ut sit

$$x = \int ds \sin.\left(\frac{s}{b} + \int\frac{ds}{r}\right), \text{ \& } y = \int ds \cos.\left(\frac{s}{b} + \int\frac{ds}{r}\right);$$

unde curva quæsita per quadraturas construi poterit.

Fig. 17. 51. Hinc determinari potest figura a m B, quam lamina in situ naturali habere debet, ut a potentia P in directione A P sollicitante in lineam rectam A M B explicetur. Sumpta enim longitudine A M $= s$; erit momentum potentiæ sollicitantis pro puncto M $= Ps$; radius osculi autem in M, per hypothesin, erit infinitus seu $\frac{1}{R} = 0$. Sumpto jam in statu naturali arcu a m $= s$, positoque radio osculi in m $= r$; quia hæc curva convexitate sua rectam A B spectat, in calculo præcedente poni debet r negativum. Hinc erit $Ps = \frac{Ekk}{r}$, seu $rs = aa$; quæ est æquatio naturam curvæ a m B complectens.

52. Cum igitur sit $\frac{1}{r} = \frac{s}{aa}$; erit $\int\frac{ds}{r} = \frac{ss}{2aa}$; seu erit amplitudo arcus a m ut quadratum ipsius arcus. Hinc coordinatæ orthogonales x & y pro hac curva a m B ita definientur, ut sit $x = \int ds \sin.\frac{ss}{2aa}$, & $y = \int ds \cos.\frac{ss}{2aa}$: Scilicet in circulo, cujus radius $= 1$, abscindi debet arcus $= \frac{ss}{2aa}$, cujus sinus & cosinus ad coordinatas determinandas assumi debent. Ex eo autem quod radius osculi continuo decrescit, quo major capiatur arcus a m $= s$, manifestum est curvam in infinitum non protendi, etiamsi arcus s capiatur infinitus. Curva ergo erit ex spiralium genere, ita ut infinitis peractis spiris in certo quodam puncto tanquam centro convolvatur, quod punctum ex hac constructione invenire difficillimum videtur. Non exiguum ergo analysis incrementum capere existimanda erit, si quis methodum inveniret, cujus ope, saltem vero proxime, valor horum integralium $\int ds \sin.\frac{ss}{2aa}$ & $\int ds \cos.\frac{ss}{2aa}$ assignari posset, casu quo s ponitur infinitum; quod Problema non indignum videtur, in quo Geometræ vires suas excerceant.

53. Sit

53. Sit $2aa = bb$, & cum sit

$$\text{fin.}\ \frac{ss}{bb} = \frac{s^2}{b^2} - \frac{s^6}{1.2.3b^6} + \frac{s^{10}}{1.2.3.4.5b^{10}} - \frac{s^{14}}{1.2\ldots7b^{14}} + \&c.$$

$$\text{cof.}\ \frac{ss}{bb} = 1 - \frac{s^4}{1.2b^4} + \frac{s^8}{1.2.3.4b^8} - \frac{s^{12}}{1.2.3.4.5.6b^{12}} + \&c.$$

coordinatæ x & y curvæ quæsitæ commode per series infinitas exprimi poterunt: erit enim

$$x = \frac{s^3}{1.3b^2} - \frac{s^7}{1.2.3.7b^6} + \frac{s^{11}}{1.2.3.4.5.11b^{10}} - \frac{s^{15}}{1.2\ldots7.15b^{14}} + \&c.$$

$$y = s - \frac{s^5}{1.2.5b^4} + \frac{s^9}{1.2.3.4.9b^8} - \frac{s^{13}}{1.2.3\ldots6.13b^{12}} + \&c.$$

ex quibus seriebus vehementer convergentibus, nisi arcus s assumatur valde magnus, valores coordinatarum x & y vero proxime satis expedite determinari possunt. Verum cujusmodi valores x & y acquirant, si ponatur arcus s infinite magnus, ex his seriebus nullo modo concludi potest.

54. Quoniam igitur positio infiniti loco s facienda maximam parit difficultatem; huic quidem incommodo sequenti modo remedium afferri potest. Ponatur $\frac{ss}{bb} = v$, ut sit $s = b\sqrt{v}$, erit $ds = \frac{b\,dv}{2\sqrt{v}}$ fietque, $x = \frac{b}{2}\int\frac{dv}{\sqrt{v}}$ fin. v, & $y = \frac{b}{2}\int\frac{dv}{\sqrt{v}}$ cof. v. Nunc autem dico valores debitos pro x & y, si ponatur $s = \infty$, inventum iri ex his formulis integralibus,

$$x = \frac{b}{2}\int dv\left(\frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{1}{\sqrt{(\pi+v)}} + \frac{1}{\sqrt{(2\pi+v)}} - \frac{1}{\sqrt{(3\pi+v)}} + \&c.\right)\text{fin. } v$$

$$y = \frac{b}{2}\int dv\left(\frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{1}{\sqrt{(\pi+v)}} + \frac{1}{\sqrt{(2\pi+v)}} - \frac{1}{\sqrt{(3\pi+v)}} + \&c.\right)\text{cof. } v,$$

si post integrationem ponatur $v = \pi$, denotante π angulum duobus rectis æqualem. Hoc ergo modo positio infiniti quidem evitatur, contra vero series infinita

$$\frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{1}{\sqrt{(\pi+v)}} + \frac{1}{\sqrt{(2\pi+v)}} - \&c.$$ in calculum introducitur, cujus summa cum adhuc lateat, resolutio hujus nodi maximæ adhuc difficultati est obnoxia.

 55. Tra-

De Incurvatione laminæ elasticæ in singulis punctis a viribus quibuscunque sollicitatæ.

55. Tradita jam methodo investigandi curvaturam cujusque laminæ elasticæ, si ea ab una vi in dato loco applicata sollicitetur; conveniet quoque curvaturam a pluribus, imo infinitis, potentiis laminæ elasticæ inductam indagare. Quoniam vero nondum constat, cujusmodi expressio his casibus futura sit vel maxima vel minima; methodo utar tantum directa, quo ex ipsa solutione fortasse proprietas ea, quæ est maxima vel minima erui queat. Sit igitur lamina elastica, naturaliter recta, in statum A m M redacta, primum a viribus finitis P & Q secundum directiones CE & CF interse normales sollicitantibus, tum vero a viribus infinite parvis singulis laminæ elementis mμ applicatis, & secundum directiones mp & mq illis CF & CF parallelas trahentibus; quibus positis requiritur natura curvæ AmM laminæ inductæ.

Fig. 18.

56. Sumatur recta FCA producta pro axe, ponatur AC $= c$, & vocetur abscissa AP $= x$, applicata PM $= y$, arcus curvæ AM $= s$, & radius osculi in M $= R$. Sit elasticitas laminæ absoluta constans $= Ekk$; atque summa momentorum ex omnibus viribus sollicitantibus respectu puncti M ortorum æqualis esse debet $\frac{Ekk}{R}$. Primum quidem a vi finita P in directione CE trahente oritur momentum $= P(c + x)$, in eam plagam agens qua vis elastica æquilibratur. Momentum autem ex altera vi Q ortum, nempe Qy in contrariam plagam tendit, ex quo ex viribus finitis P & Q conjunctim oritur momentum $P(c + x) - Qy$. Jam consideretur quodvis elementum laminæ intermedium mμ, cujus respondens abscissa Ap ponatur $= \zeta$, & applicata pm $= \eta$, sit autem vis elementum mμ in directione mp urgens $= dp$, & vis urgens in directione mq $= dq$; erit momentum ex his viribus pro puncto M ortum $= (x - \zeta)\, dp - (y - \eta)\, dq$.

57. Ad summam ergo omnium horum momentorum inveniendam, punctum M, ac proinde x & y, tantisper pro constantibus haberi debent, dum solæ coordinatæ ζ & η cum viribus dp & dq tanquam variabiles spectantur. Erit ergo summa momen-

momentorum a viribus arcum Am sollicitantibus ortorum $= xp - \int \zeta dp - yp + \int \eta dq$; ubi p exprimit summam omnium virium arcum AM in directionibus applicatis pm parallelis sollicitantium, & q summam omnium virium arcum Am in directionibus axi Ap parallelis sollicitantium. At est $\int \zeta dp = \zeta p - \int p d\zeta$ & $\int \eta dq = \eta q - \int q d\eta$; unde fit summa momentorum ex viribus arcui Am applicatis ortorum $= (x - \zeta)p + \int p d\zeta - (y - \eta) q - \int q d\eta$. Promoveatur jam punctum m in M usque, fietque $\zeta = x$, $\eta = y$, & $d\zeta = dx$ atque $d\eta = dy$; unde summa omnium momentorum per totum arcum AM sumptorum erit $= \int p dx - \int q dy$. Quocirca obtinebitur pro curva quæsita hæc æquatio $\frac{Ekk}{R} = P(c + x) - Qy + \int p dx - \int q dy$, ubi ergo p exprimit summam omnium virium verticalium seu in directionibus applicatarum MP agentium, & q summam omnium virium horizontalium seu in directionibus MQ axi AP parallelis agentium per totum arcum AM.

58. Si formulæ $p dx$ & $q dy$ integrationem non admittant, tum æquatio inventa per differentiationem ab his formulis integralibus liberari debebit, unde habebitur ista æquatio:

$$\frac{-Ekk\,dR}{RR} = P dx - Q dy + p dx - q dy.$$

Sin autem nec p nec q per expressiones finitas exhiberi possint; quippe quæ jam exprimunt summas infinitarum virium infinite parvarum, tum per ulteriorem differentiationem valores finiti p & q exterminari debebunt, ut tantum insint dp & dq cum differentio-differentialibus ddp & ddq. Orietur autem, post primam differentiationem, $-Ekk\,d.\frac{dR}{RRdx} = dp - (Q + q) \times d.\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} dq$. Sit $\frac{dy}{dx} = \omega$, eritque denuo æquatione differentiata:

$$-Ekk\,d.\frac{d.\frac{dR}{RRdx}}{d\omega} = d.\frac{dp}{d\omega} - 2dq - \omega\,d.\frac{dq}{d\omega}$$

quæ æquatio ad differentialia quarti ordinis ascendit.

59. Sint

59. Sint laminæ, loco potentiarum verticalium & horizontalium p & q, in singulis punctis M applicatæ duæ potentiæ altera normalis $MN = dv$ & altera tangentialis $MT = dt$. Hinc erit $dp = \frac{dxdv}{ds} + \frac{dydt}{ds}$ & $dq = \frac{dxdt}{ds} - \frac{dydv}{ds}$, &, ob $dy = \omega dx$ & $ds = dx\sqrt{(1+\omega\omega)}$, habebitur $dp = \frac{dv}{\sqrt{(1+\omega\omega)}} + \frac{\omega dt}{\sqrt{(1+\omega\omega)}}$, & $dq = \frac{dt}{\sqrt{(1+\omega\omega)}} - \frac{\omega dt}{\sqrt{(1+\omega\omega)}}$: quibus in præced. §. æquatione ultima substitutis, proveniet sequens æquatio,

$$-Ekk\,d.\frac{d.\frac{dR}{RRdx}}{dv} = \frac{-dt}{\sqrt{(1+\omega\omega)}} + \frac{2\omega dv}{\sqrt{(1+\omega\omega)}} + \sqrt{(1+\omega\omega)}d.\frac{dv}{d\omega};$$

quæ multiplicata per $\sqrt{(1+\omega\omega)}$ fit integrabilis : posito enim, brevitatis gratia, $z = \frac{dR}{RRdx}$, reperietur integrale,

$$A - t + \frac{dv\sqrt{(1+\omega\omega)}}{d\omega} = -Ekk\left(\frac{dz\sqrt{(1+\omega\omega)}}{d\omega} - \frac{\omega z}{\sqrt{(1+\omega\omega)}} + \frac{1}{2RR}\right)$$
$$= -Ekk\left(\frac{1+\omega\omega}{d\omega}d.\frac{dR}{RRdx\sqrt{(1+\omega\omega)}} + \frac{1}{2RR}\right).$$

Cum vero sit $R = \frac{-(1+\omega\omega)^{3:2}dx}{d\omega}$, erit $d\omega = \frac{-(1+\omega\omega)^{3:2}dx}{R}$; quo loco $d\omega$ valore substituto, habebitur :

$$A - t - \frac{Rdv}{ds} = -Ekk\left(\frac{1}{2RR} - \frac{R}{ds}d.\frac{dR}{RRds}\right),$$

ob $dx\sqrt{(1+\omega\omega)} = ds$. Quocirca æquatione ordinata, pro curva quæsita orietur hæc æquatio

$$t + \frac{Rdv}{ds} - A = Ekk\left(\frac{1}{2RR} - \frac{R}{ds}d.\frac{dR}{RRds}\right).$$

60. Primum quidem manifestum est, si vis elastica Ekk evanescat, laminam transmutari in filum perfecte flexile; atque hinc in his æquationibus continentur omnes curvæ, quas filum perfecte flexile a viribus quibuscunque sollicitatum formare potest. Sic si filum a propria gravitate tantum deorsum sollicitatur, erit

$q = 0$,

$q = 0$, & p exprimet pondus funis AM, eritque ergo $\frac{p\,dx}{dy} = Q =$ constanti, facto $P = 0$, quæ est æquatio generalis pro omnis generis Catenariis. Sin autem filum perfecte flexile, in singulis punctis, a viribus quarum directiones sunt normales ad ipsam curvam sollicitetur, ita ut in puncto M filum sollicitetur secundum directionem MN, vi $= dv$; ob $t = 0$, erit $\frac{R\,dv}{ds} = A =$ constanti, quæ est proprietas generalis curvarum Velariarum, Lintneariarum, omniumque in quibus hujusmodi sollicitationes locum habent.

61. Ad laminas elasticas autem revertor, de quibus mox ista quæstio præ ceteris notatu digna se offert, cujusmodi figuram accipiat lamina elastica proprio pondere incurvata. Sit AmM hæc curva quæ quæritur, & quia solæ vires verticales a gravitate ortæ urgent, fiet $P = 0$, $Q = 0$, $q = 0$, & p exprimet pondus laminæ AM. Quare si F sit pondus laminæ longitudinis a; quia lamina uniformis assumitur, erit $p = \frac{Fs}{a}$; unde curvæ natura hac exprimetur æquatione $\frac{-Ekk\,dR}{RR} = \frac{Fs\,dx}{a}$. Sit amplitudo curvæ $\int \frac{ds}{R} = u$, erit $R = \frac{ds}{du}$, & $dx = ds$ sin. u; unde, sumpto elemento ds constante, reperietur æquatio $s\,ds$ sin. $u + \frac{Eakk}{F} \cdot \frac{ddu}{ds} = 0$, quæ autem, quantum primo intuitu patet, ulterius reduci nequit. *De curvatura laminæ elasticæ a proprio pondere orta.*

62. In primis autem notari meretur curva, quam fluidum altitudinis quasi infinitæ laminæ elasticæ inducit. Sit AMB figura hæc quæ quæritur, & posito $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$; elementum Mm in directione normali MN urgebitur vi ipsi ds proportionali; unde erit $dv = n\,ds$, & $dt = 0$. Hinc orietur vis verticalis $dp = n\,dx$, & horizontalis $dq = -n\,dy$; ex quibus statim fit $p = nx$ & $q = -ny$; ideoque in æquatione prima fiet $\frac{Ekk}{R} = P(c+x) - Qy + \frac{1}{2}nxx + \frac{1}{2}nyy$. *Fig. 19.*

Coordinatæ vero x & y ita quantitatibus conſtantibus augeri diminuive poſſunt, ut æquatio pro curva hujuſmodi faciem acquirat $xx + yy = A + \frac{B}{R}$. Hæc autem æquatio ſi multiplicetur per $xdx + ydy$, fiet integrabilis; eſt enim $\int \frac{xdx + ydy}{R}$ $= -\int \frac{x + y\omega}{(1 + \omega\omega)^{3:2}} d\omega$, [poſito $dy = \omega dx$] $= \frac{y - \omega x}{\surd(1 + \omega\omega)}$ $= \frac{ydx - xdy}{ds}$. Hanc ob rem, poſt integrationem conſtantibus mutatis, prodibit $(xx+yy)^2 = A(xx+yy) + \frac{B(ydx - xdy)}{ds}$ $+ C$. Sit $\surd(xx+yy) = z$ & $y = uz$; erit $x = z\surd(1 - uu)$; unde $ydx - xdy = \frac{-zzdu}{\surd(1 - uu)}$, & $ds = \surd(dz^2 + \frac{zzdu^2}{1 - uu})$. Ergo poſito $\frac{du}{\surd(1 - uu)} = dr$, erit $z^4 - Az^2 - C =$ $\frac{-Bzzdr}{\surd(dz^2 + zzdr^2)}$; hincque $dr = \frac{du}{\surd(1 - uu)}$ $= \frac{dz(z^4 - Az^2 - C)}{z\surd(B^2zz - (z^4 - Az^2 - C)^2)}$. Curva hæc ergo, ſi fuerit $A = 0$ & $C = 0$, erit algebraica; habebitur enim hæc æquatio $\frac{du}{\surd(1 - uu)} = \frac{zzdz}{\surd(B^2 - z^6)} = \frac{3zzdz}{3\surd(a^6 - z^6)}$, quæ integrata dat A ſin. $u = \frac{1}{3}$ A ſin. $\frac{z^3}{a^3}$, ſeu $\frac{z^3}{a^3} = 3u - 4u^3$ $= \frac{3y}{z} - \frac{4y^3}{z^3}$; unde hæc reſultat æquatio $z^6 = 3a^3yzz - 4a^3y^3$; ſeu, ob $zz = xx + yy$, hæc $x^6 + 3x^4y^2 + 3xxy^4 + y^6$ $= 3a^3xxy - a^3y^3$.

De motu oſcillatorio laminarum elaſticarum.

63. Ex his etiam motus oſcillatorius laminarum elaſticarum utcunque ad motum comparatarum definiri poteſt: quod argumentum profecto digniſſimum primum excolere cœpit Vir Celeb. *Daniel* BERNOULLI, mihique, jam ante complures annos, Problema de oſcillationibus laminæ elaſticæ altero termino parieti firmo infixæ determinandis propoſuit, cujus Solutionem exhibui

exhibui in *Comment. Petropol.* Tomo VII. Ex hoc autem tempore, cum mihi commodius hoc Problema tractare contigit; tum etiam per commercium cum Celeb. BERNOULLIO plures accesserunt aliæ quæstiones & considerationes, quarum enodationem, ob materiæ affinitatem, hic adjungam. Quando autem motus vibratorius est satis promtus, tum simul a lamina vibrante sonus editur, cujus tenor ac relatio ad alios, ope doctrinæ de sonis, ex his principiis determinabitur. Et quoniam sonorum indoles facillime ad experimenta revocatur; hoc ipso consensus calculi cum veritate explorari, atque adeo Theoria confirmari poterit: quo pacto, cognitio nostra circa naturam corporum elasticorum non parum amplificabitur.

64. Primum autem monendum est, hîc tantum circa oscillationes minimas quæstionem institui; atque adeo intervallum, per quod lamina inter oscillandum excurrit, esse quasi infinite parvum. Neque vero, hac limitatione, usus & applicatio quicquam diminuitur: non solum enim oscillationes, si per majora spatia fierent, isochronismo destituerentur; sed etiam sonorum distinctorum formatio, ad quam hic potissimum spectamus, minimas oscillationes requirit. Considero igitur hic primum laminam elasticam uniformem naturaliter rectam, cujus alter terminus B pavimento immobili firmiter sit infixus, ita ut lamina sibi relicta situm teneat rectum BA. Sit hujus laminæ longitudo $AB = a$, ejusque elasticitas absoluta in singulis locis $= Ekk$; ab ejus vero pondere vel mentem revocamus, vel infixionem ejusmodi statuimus, ut ejus status a gravitate turbari nequeat. *Fig. 20.*

65. Jam lamina hæc a vi quacunque impulsa vibrationes peragat minimas, circa statum naturalem BA utrinque excurrendo per minima intervalla Aa. Sitque BMa status quispiam, quem lamina inter oscillandum tenet; qui quoniam infinite parum tantum distat a statu naturali BPA, rectæ MP, Aa simul repræsentabunt vias, quas laminæ puncta M & a percurrunt, vel potius hæ rectæ ad vias veras rationem habebunt a ratione æqualitatis infinite parum discrepantem. Ad motum autem oscillatorium determinandum, absolute necesse est naturam *De oscillationibus laminæ elasticæ altero termino muro infixæ.*

curvæ BMa, quam lamina inter oscillandum induit, nosse. Sit igitur $AP = x$, $PM = y$, arcus $aM = s$, & radius osculi in $M = R$; & intervallum minimum $Aa = b$; atque, ex conditione memorata, erit arcus s proxime æqualis abscissæ x, ac proinde pro ds sumi poterit dx: præ dx enim evanescet dy. Et cum, posito dx constante, sit generatim radius osculi $= \frac{ds^3}{dx\,ddy}$, erit præsenti casu $R = \frac{dx^2}{ddy}$; nam curva BMa convexitatem axi BA obvertit, & quia lamina in B muro firmiter est infixa, erit recta AB tangens curvæ in puncto B.

66. His positis, tam ad naturam curvæ BMa quam ad ipsum motum oscillatorium determinandum, sit f longitudo penduli simplicis isochroni: oscillationes enim minimas esse isochronas, cum natura rei declarat, tum ipse calculus instituendus monstrabit. Acceleratio ergo, qua laminæ punctum M versus P urgetur, erit $= \frac{PM}{f} = \frac{y}{f}$. Quare si massa totius laminæ ponatur $= M$, quæ per ejus pondus exprimitur; erit elementi $Mm = ds = dx$ massa $= \frac{M\,dx}{a}$; unde vis motrix elementum Mm in directione MP sollicitans erit $= \frac{My\,dx}{af}$; sicque vires, quibus singulæ laminæ particulæ ad motum actu cientur, innotescunt, cum ex ipsa curva BMa, tum ex longitudine penduli simplicis isochroni f. Quoniam vero lamina a vi elastica revera ad motum incitatur; ex hac cognita vicissim & natura curvæ BMa, & longitudo penduli simplicis isochroni determinabitur.

67. Quoniam ergo lamina perinde movetur, ac si singulis ipsius elementis Mm in directione MP vires essent applicatæ $= \frac{My\,dx}{af}$; sequitur, si laminæ singulis elementis Mm in directionibus contrariis $M\pi$ æquales vires $\frac{My\,dx}{af}$ applicarentur, laminam in statu BMa æquilibrari. Hinc lamina inter oscillandum eandem curvaturam subibit, quam indueret quieta, si in singu-

singulis punctis M sollicitaretur viribus $\frac{Mydx}{af}$ in directionibus $M\pi$. Per regulam ergo supra §. 56 inventam, colligantur omnes hæ vires per arcum aM applicatæ, atque prodibit summa $= \frac{M}{af} \int y\,dx$, quæ ibi in locum ipsius p substitui debet. Quare cum vires reliquæ P, Q, & q, quæ ibi habebantur, evanescant, natura curvæ exprimetur æquatione $\frac{Ekk}{R} = \int p\,dx$: unde habebitur $\frac{Ekk}{R} = \frac{M}{af} \int dx \int y\,dx$. Cum vero sit $R = \frac{dx^2}{ddy}$, erit $\frac{Ekk\,ddy}{dx^2} = \frac{M}{af} \int dx \int y\,dx$; & differentiando $\frac{Ekk\,d^3y}{dx^2} = \frac{Mdx}{af} \times \int y\,dx$: denuoque differentiando prodibit ista æquatio differentialis quarti ordinis. $Ekk\,d^4y = \frac{Mydx^4}{af}$.

68. Hac ergo æquatione & natura curvæ BMa exprimitur, & ex eadem, si ad casum oblatum accommodetur, longitudo f determinabitur; qua cognita, ipse motus oscillatorius innotescet. Ante omnia autem hanc æquationem integrari oportet: quæ cum pertineat ad id æquationum differentialium altiorum graduum genus, cujus integrationem generalem exhibui in *Miscell. Berol.* Volumine VII, hinc sequens æquatio integralis reperietur, ponendo brevitatis ergo $\frac{Ekk.\,af}{M} = c^4$; prodibit scilicet

$$y = Ae^{\frac{x}{c}} + Be^{-\frac{x}{c}} + C\,\text{sin.}\frac{x}{c} + D\,\text{cos.}\frac{x}{c},$$

ubi e denotat numerum cujus logarithmus hyperbolicus est $= 1$; & sin. $\frac{x}{c}$ & cos. $\frac{x}{c}$ denotant sinum & cosinum arcus $= \frac{x}{c}$ in circulo, cujus radius $= 1$, assumpti. Tum vero A, B, C, & D sunt quatuor constantes arbitrariæ per quadruplicem integrationem introductæ, quas ex accommodatione calculi ad præsentem casum definire oportet.

69. Determinatio autem constantium sequenti modo instituetur.

tur. Primum posito $x = 0$, fieri debet $y = b$; hinc ergo oritur ista æquatio, $b = A + B + D$, quæ est *prima*.

Secundo, cum sit $\frac{c^4 ddy}{dx^2} = \int dx \int y dx$; facto $x = 0$, fieri debet $\frac{ddy}{dx^2} = 0$; at est $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{A}{cc} e^{\frac{x}{c}} + \frac{B}{cc} e^{-\frac{x}{c}} - \frac{C}{cc} \text{fin.} \frac{x}{c} - \frac{D}{cc} \text{cof.} \frac{x}{cc}$: unde oritur hæc æquatio *secunda*, $0 = A + B - D$.

Tertio, cum sit $\frac{c^4 d^3 y}{dx^3} = \int y dx$; posito $x = 0$, simul $\frac{d^3 y}{dx^3}$ evanescere debet: quia ergo erit $\frac{c^3 d^3 y}{dx^3} = A e^{\frac{x}{c}} - B e^{-\frac{x}{c}} - C \text{cof.} \frac{x}{c} + D \text{fin.} \frac{x}{c}$: prodit æquatio *tertia*, $0 = A - B - C$.

Quarto autem, si ponatur $x = a$, applicata y evanescit, unde obtinebitur æquatio *quarta*, $0 = A e^{\frac{a}{c}} + B e^{-\frac{a}{c}} + C \text{fin.} \frac{a}{c} + D \text{cof.} \frac{a}{c}$.

Quinto, quia AB est tangens curvæ in puncto B; facto $x = a$, fieri debet $\frac{dy}{dx} = 0$: unde prodit æquatio *quinta*, $0 = A e^{\frac{a}{c}} - B e^{-\frac{a}{c}} + C \text{cof.} \frac{a}{c} - D \text{fin.} \frac{a}{c}$.

Ex his ergo quinque æquationibus, primum quatuor constantes A, B, C, D definientur; tum vero, in quo cardo rei versatur, determinabitur valor ipsius $c = \sqrt[4]{\frac{Ekk.af}{M}}$; ex quo longitudo penduli simplicis isochroni f elicietur; quo ipso, durationes oscillationum cognoscentur.

70. Ex æquationibus secunda & tertia, constantes C & D ex A & B ita definientur, ut sit

$$C = A - B, \ \& \ D = A + B.$$

qui

qui valores in æquationibus quarta & quinta substituti dabunt

$$o = Ae^{\frac{a}{c}} + Be^{-\frac{a}{c}} + (A - B)\,\text{sin.}\,\frac{a}{c} + (A + B)\,\text{cos.}\,\frac{a}{c}$$

$$o = Ae^{\frac{a}{c}} - Be^{-\frac{a}{c}} + (A - B)\,\text{cos.}\,\frac{a}{c} - (A + B)\,\text{sin.}\,\frac{a}{c};$$

ex quibus eruitur,

$$\frac{A}{B} = \frac{-e^{-\frac{a}{c}} + \text{sin.}\,\frac{a}{c} - \text{cos.}\,\frac{a}{c}}{e^{\frac{a}{c}} + \text{sin.}\,\frac{a}{c} + \text{cos.}\,\frac{a}{c}} = \frac{e^{-\frac{a}{c}} + \text{cos.}\,\frac{a}{c} + \text{sin.}\,\frac{a}{c}}{e^{\frac{a}{c}} + \text{cos.}\,\frac{a}{c} - \text{sin.}\,\frac{a}{c}}$$

unde obtinebitur hæc æquatio,

$$o = 2 + (e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{c}})\,\text{cos.}\,\frac{a}{c},$$

seu $e^{\frac{2a}{c}}\,\text{cos.}\,\frac{a}{c} + 2e^{\frac{a}{c}} + \text{cos.}\,\frac{a}{c} = o$,

quæ dat $e^{\frac{a}{c}} = \dfrac{-1 \pm \text{sin.}\,\frac{a}{c}}{\text{cos.}\,\frac{a}{c}}$. Cum igitur $e^{\frac{a}{c}}$ sit quantitas affirmativa, cosinus anguli $\frac{a}{c}$ erit negativus; ideoque angulus $\frac{a}{c}$ recto major.

71. Ex hac æquatione intelligitur dari infinitos angulos $\frac{a}{c}$ quæsito satisfacientes, ex quibus infiniti diversi modi oscillationum ejusdem laminæ oriuntur. Curva enim in uno pluribusve punctis axem AB secare potest, antequam in B axem tangat; ex quo ejusdem laminæ plures, imo infiniti, oscillandi modi æque sunt possibiles. Cum igitur hic inprimis contemplemur casum, quo B primum est punctum, ubi lamina ab axe AB tangitur; huic casui satisfaciet minimus angulus $\frac{a}{c}$ æquationem inven-

inventam resolvens; qui angulus cum sit recto major, ponatur $\frac{a}{c} = \frac{1}{2}\pi + \phi$; existente ϕ angulo recto minore. Hinc, ob sin. $\frac{a}{c} = $ cos. ϕ, & cos. $\frac{a}{c} = -$ sin. ϕ, obtinebitur duplex æquatio.

$$e^{\frac{a}{c}} = \frac{1 \mp \text{cos. } \phi}{\text{sin. } \phi}.$$

quæ præbet, vel $e^{\frac{a}{c}} = $ tang. $\frac{1}{2}\phi$, vel $e^{\frac{a}{c}} = $ cot. $\frac{1}{2}\phi$, quarum posterior minorem dabit valorem pro angulo ϕ; quæ ergo ad casum propositum erit accommodata.

72. Sequentes possibiles oscillationum modi reperientur, si pro $\frac{a}{c}$ ponantur anguli duobis rectis majores, tribus vero minores. Sic posito $\frac{a}{c} = \frac{3}{2}\pi - \phi$, erit sin. $\frac{a}{c} = -$ cos. ϕ, & cos. $\frac{a}{c} = -$ sin. ϕ; unde fit $e^{\frac{a}{c}} = \frac{1 + \text{cos. } \phi}{\text{sin. } \phi}$, seu, vel $e^{\frac{a}{c}} =$ tang. $\frac{1}{2}\phi$, vel $e^{\frac{a}{c}} = $ cot. $\frac{1}{2}\phi$. Simili modo alii oscillationum modi reperientur, ponendo $\frac{a}{c} = \frac{5}{2}\pi + \phi$; $\frac{a}{c} = \frac{7}{2}\pi - \phi$, &c. Ex quibus omnibus, si sumantur logarithmi hyperbolici, orientur sequentes æquationes:

I.	$\frac{1}{2}\pi + \phi = l$ cot. $\frac{1}{2}\phi$;	II.	$\frac{1}{2}\pi + \phi = l$ tang. $\frac{1}{2}\phi$;
III.	$\frac{3}{2}\pi - \phi = l$ cot. $\frac{1}{2}\phi$;	IV.	$\frac{3}{2}\pi - \phi = l$ tang. $\frac{1}{2}\phi$;
V.	$\frac{5}{2}\pi + \phi = l$ cot. $\frac{1}{2}\phi$;	VI.	$\frac{5}{2}\pi + \phi = l$ tang. $\frac{1}{2}\phi$;
VII.	$\frac{7}{2}\pi - \phi = l$ cot. $\frac{1}{2}\phi$;	VIII.	$\frac{7}{2}\pi - \phi = l$ tang. $\frac{1}{2}\phi$;

&c.

Harum autem æquationum tertia congruit cum secunda; posito enim $\frac{1}{2}\phi = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\theta$, ut sit cot. $\frac{1}{2}\phi = $ tang. $\frac{1}{2}\theta$; tertia transit in $\frac{1}{2}\pi + \theta = l$ tang. $\frac{1}{2}\theta$, quæ est ipsa secunda. Simili modo quarta congruit cum prima: tum quinta & octava inter se con-

congruunt; atque sexta cum septima. Quamobrem sequentes tantum prodibunt æquationes diversæ:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \tfrac{1}{2}\pi + \phi = l\ \text{cot.}\ \tfrac{1}{2}\phi \\ \text{II.} & \tfrac{1}{2}\pi + \phi = l\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\phi \\ \text{III.} & \tfrac{5}{2}\pi + \phi = l\ \text{cot.}\ \tfrac{1}{2}\phi \\ \text{IV.} & \tfrac{5}{2}\pi + \phi = l\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\phi \\ \text{V.} & \tfrac{9}{2}\pi + \phi = l\ \text{cot.}\ \tfrac{1}{2}\phi \\ \text{VI.} & \tfrac{9}{2}\pi + \phi = l\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\phi \end{array}$$

&c.

72. Logarithmus autem hyperbolicus tangentis vel cotangentis cujuspiam anguli reperitur, sumendo logarithmum Tabularem, indeque auferendo logarithmum sinus totius, atque residuum multiplicando per 2, 302585092994; qui labor ut sublevetur denuo logarithmis uti conveniet. Sit u logarithmus hyperbolicus tangentis seu cotangentis anguli $\frac{1}{2}\phi$, qui quæritur; sumatur ex Tabulis logarithmus ejusdem tangentis cotangentisve, qui logarithmo sinus totius multatus ponatur $= v$. Cum ergo sit $u = 2,302585092994 \times v$; erit, sumendis logarithmis vulgaribus,

$$lu = lv + 0,3622156886.$$

Hoc logarithmo invento, cum sit $u = \frac{n}{2}\pi + \phi$, erit $lu = l\left(\frac{n}{2}\pi + \phi\right)$. Ad hoc evolvendum, angulus ϕ in partibus radii exprimi debet, quemadmodum & π eodem modo exprimitur, dum est $\pi = 3,1415926535$, ac propterea . . . . $\frac{1}{2}\pi = 1,5707963267 9$. Angulus autem ϕ eodem modo exprimetur, si is in minuta secunda convertatur, atque ab hujus numeri logarithmo subtrahatur constanter 5, 3144251332; sic enim prodibit $l\phi$, ex quo ad numeros regrediendo valor ipsius ϕ eruitur. Erit autem constanter pro unoquoque oscillationum genere $\frac{a}{c} = u = \frac{n}{2}\pi + \phi$.

74. His circa calculum instituendum monitis, per approxi-

 matio-

mationes valor anguli ϕ pro quovis oſcillationum genere non difficulter eruetur. Tribuendo enim pro lubitu ipſi ϕ valores aliquot, & per calculum determinando, & $\frac{n}{2}\pi + \phi$, & $l\ \begin{matrix}\text{tang.}\\ \text{cot.}\end{matrix}\ \frac{1}{2}\phi$. mox valor ipſius ϕ prope verus cognoſcetur. Quod ſi autem habeantur limites anguli ϕ utcunque remoti, ſtatim invenientur limites propiores, ex hiſque tandem verus valor ipſius ϕ. Sic pro æquatione prima $\frac{a}{c} = \frac{1}{2}\pi + \phi = l\ \text{cot.}\ \frac{1}{2}\phi$, ſequentes limites anguli ϕ erui 17°, 26′, & 17°, 27′, ex quibus per ſequentem calculum verus valor ipſius ϕ obtinebitur.

ϕ =	17°, 26′, 0″	17°, 27′, 0″
in min. ſec. =	62760″	62820″
log. =	4, 7976829349	4, 7980979321
ſubtr.	5, 3144251332	5, 3144251332
$l\,\phi$ =	9, 4832578017	9, 4836727989
ϕ =	0, 3042690662	0, 3045599545
$\frac{1}{2}\pi$ =	1, 5707963268	1, 5707963268
$\frac{1}{2}\pi + \phi$ =	1, 8750653930	1, 8753562813
$\frac{1}{2}\phi$ =	8°, 43′, 0″	8°, 43′, 30″
l cot. $\frac{1}{2}\phi$ =	10, 8144034109	10, 8139819342
v =	0, 8144034109	0, 8139819342
$l\,v$ =	9, 9108395839	9, 9106147660
add. =	0, 3622156886	0, 3622156886
$l\,u$ =	0, 2730552725	0, 2728304546
u =	1, 8752331540	1, 8742626675
diff.	+ 1677610	— 10936138

Ex his ergo utriuſque limitis erroribus concluditur fore $\phi =$ 17°, 26′, 7″ $\frac{98}{100}$, & $\frac{1}{2}\pi + \phi$, ſeu $\frac{a}{c} =$ 107°, 26′, 7″ $\frac{98}{100}$. Cum vero in minutis ſecundis ſit $\phi = 62767,98$, erit

$l\,\phi =$

$$\begin{array}{rcl} l\,\Phi & = & 4,7977381525 \\ \text{subtr.} & = & \underline{5,3144251332} \\ & & 9,4833130193 \\ \text{ergo } \Phi & = & 0,3043077545 \\ \text{add. } \tfrac{1}{2}\pi & = & \underline{1,5707963268} \\ \dfrac{a}{c} & = & 1,8751040813 \end{array}$$

quo invento, erit $\frac{A}{B} = \text{tang. } \frac{1}{2}\Phi = 0,1533390624$. Reperitur ergo ratio constantium A & B, ex quibus & ratio reliquarum constantium C & D ad illas cognoscetur.

75. Restat adhuc prima æquatio $b = A + B + D$, quæ, ob $D = A + B$, abit in $b = 2A + 2B$; ideoque $A + B = \frac{1}{2}b$: cum ergo sit $\frac{A}{B} = \text{tang. } \frac{1}{2}\Phi$, fiet $B\,(1 + \text{tang. } \frac{1}{2}\Phi) = \frac{1}{2}b$, & $B = \frac{b}{2 + 2\,\text{tang. } \frac{1}{2}\Phi}$. Unde ex tang. $\frac{1}{2}\Phi = 0,1533390624$ singulæ æquationis constantes sequenti modo determinabuntur:

$$\frac{A}{b} = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2}\Phi}{2\,(1 + \text{tang. } \frac{1}{2}\Phi)} = \frac{0,1533390624}{2,3066781248};$$

$$\frac{B}{b} = \frac{1}{2\,(1 + \text{tang. } \frac{1}{2}\Phi)} = \frac{1,0000000000}{2,3066781248}$$

$$\frac{C}{b} = \frac{-1 + \text{tang. } \frac{1}{2}\Phi}{2\,(1 + \text{tang. } \frac{1}{2}\Phi)} = \frac{-0,8466609376}{2,3066781248}$$

$$\frac{D}{b} = \frac{1 + \text{tang. } \frac{1}{2}\Phi}{2\,(1 + \text{tang. } \frac{1}{2}\Phi)} = \frac{1,1533390624}{2,3066781248}$$

quibus inventis, natura curvæ aMB, quam lamina inter oscillandum induit, hac exprimetur æquatione

$$\frac{y}{b} = \frac{A}{b}\,e^{\frac{x}{c}} + \frac{B}{b}\,e^{-\frac{x}{c}} + \frac{C}{b}\,\text{sin.}\,\frac{x}{c} + \frac{D}{b}\,\text{cos.}\,\frac{x}{c}.$$

76. Quod autem ad oscillationum velocitatem attinet, ea

ex æquatione $\frac{a}{c} = 1,8751040813$ cognoſcetur. Ponatur brevitatis gratia: $n = 1,8751040813$ ut ſit $a = nc$.

Et cum ſit $c^4 = \frac{Ekk.af}{M}$, ubi $\frac{M}{a}$ exprimit gravitatem ſpecificam laminæ, & Ekk elaſticitatem abſolutam; eo modo, quo hactenus ſum uſus, erit $a^4 = n^4.\ Ekk.\ \frac{a}{M}.f$, ideoque $f = \frac{a^4}{n^4}\cdot\frac{1}{Ekk}\cdot\frac{M}{a}$, ex quo longitudo penduli ſimplicis iſochroni tenebit rationem compoſitam ex quadruplicata longitudinis laminæ, ſimplici gravitatis ſpecificæ, & inverſa elaſticitatis abſolutæ. Sit g longitudo penduli ſimplicis ſingulis minutis ſecundis oſcillantis, ita ut ſit $g = 3,16625$ ped. Rhenani; quia durationes oſcillationum ſunt in ſubduplicata ratione pendulorum, tempus unius oſcillationis a lamina noſtra elaſtica factæ, erit $= \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{g}}$ ſecund. $= \frac{aa}{nn}\sqrt{\frac{1}{g}\cdot\frac{1}{Ekk}\cdot\frac{M}{a}}$; unde numerus oſcillationum uno minuto ſecundo editarum erit $= \frac{nn}{aa}\sqrt{g.\ Ekk.\ \frac{a}{M}}$, qui numerus exprimit ſoni quem lamina excitat tenorem. Soni ergo a diverſis laminis elaſticis uno termino muro infixis editi erunt in ratione compoſita ſubduplicata elaſticitatum abſolutarum directe, inverſa ſubduplicata gravitatum ſpecificarum, & inverſa duplicata longitudinum. Quare ſi duæ laminæ elaſticæ tantum longitudine differant, erunt ſoni reciproce ut quadrata longitudinum; ſcilicet lamina duplo longior edet ſonum duabus octavis graviorem. Corda autem tenſa duplo longior ſonum una tantum octava graviorem edit, ſi tenſio maneat eadem. Ex quo patet ſonos laminarum elaſticarum longe aliam ſequi rationem, atque ſonos cordarum tenſarum.

77. Quod ad naturam curvæ aMB ultra terminos a & B continuatæ attinet, primum quidem patet curvam ultra a divergendo ab axe BA continuato progredi. Poſito enim x negativo fiet

$y =$

$$y = Be^{\frac{x}{c}} + Ae^{-\frac{x}{c}} - C \sin. \frac{x}{c} + D \cos. \frac{x}{c}.$$

Hic jam omnes termini ſunt affirmativi, quia ſolus coefficiens C ante obtinuerat valorem negativum; unde dum creſcit x, etiam y creſcere debet, quia numerus B major eſt quam A; atque adeo terminus $Be^{\frac{x}{c}}$ prævalet. Quam primum autem $\frac{x}{c}$ valorem ſaltem mediocrem eſt adeptum; tum iſte terminus $Be^{\frac{x}{c}}$ tantopere creſcit, ut reliqui termini præ eo quaſi evaneſcant. Ob eandem rationem, quia curvæ in B radius oſculi non eſt $= \infty$; eſt enim $\frac{Ekk}{R} = \frac{M}{af} \int dx \int y\, dx$; curva in B non habebit punctum flexus contrarii, ideoque ad eandem axis AB partem ulterius progredietur; aucta autem abſciſſa x ultra $AB = a$, tum primus terminus $Ae^{\frac{x}{c}}$ mox tam fit magnus, ut reliqui præ eo pro nihilo reputari queant.

78. Hic igitur eſt primus oſcillationum modus inter illos innumerabiles, ad quos eadem lamina ſe componere poteſt. Secundus modus in figura repræſentatus quo lamina in B fixa axem AB in uno puncto O trajicit, deducetur ex æquatione $\frac{a}{c} =$ Fig. 21.

$\frac{1}{2}\pi + \Phi = l \text{ tang. } \frac{1}{2}\Phi$, ſeu hac $\frac{3}{2}\pi - \Phi = l \cot. \frac{1}{2}\Phi = \frac{a}{c}$. Hic per nonnulla tentamina inveni angulum Φ contineri intra hos limites, $1^\circ, 2', 40''$ & $1^\circ, 3', 0''$, ex quibus ut ante verus valor ipſius Φ eruetur.

Φ	=	$1^\circ, 2', 40''$	$1^\circ, 3', 0''$
in min. sec.	=	$3760''$	$3780''$
log.	=	3, 5751878450	3, 5774917998
subtr.	=	5, 3144251332	5, 3144251332
$l\Phi$	=	8, 2607627118	8, 2630666666
Φ	=	0, 0182289944	0, 0183259571
$\frac{3}{2}\pi$	=	4, 7123889804	4, 7123889804
$\frac{a}{c}$	=	4, 6941599860	4, 6940630233
$\frac{1}{2}\Phi$	=	$31', 20''$	$31', 30''$
l cot. $\frac{1}{2}\Phi$	=	2, 0402552577	2, 0379511745
lv	=	0, 3096845055	0, 3091937748
add.		0, 3622156886	0, 3622156886
lu	=	0, 6719001941	0, 6714094634
u	=	4, 6978613391	4, 6925559924
$\frac{a}{c}$	=	4, 6941599860	4, 6940630233
Error		+ 37013531	— 15070309

Ex his erroribus concluditur verus valor anguli $\Phi = 1^\circ, 2', 54'' \frac{213}{1000}$, & $\frac{a}{c} = 268^\circ, 57', 5'' \frac{787}{1000}$. Cum igitur sit $\Phi = 3774, 213''$ erit

$$
\begin{array}{rcl}
l\Phi & = & 3,5768264061 \\
\text{subtr.} & = & 5,3144251332 \\
 & & 8,2624012729 \\
\Phi & = & 0,0182979009 \\
a\,\frac{3}{2}\pi & = & 4,7123889804 \\
\frac{a}{c} & = & 4,6940910795
\end{array}
$$

Sonus ergo laminæ priori modo oscillantis erit ad sonum ejusdem laminæ hoc modo vibrantis, uti est quadratum numeri 1, 8751040813 ad quadratum numeri 4, 6940910795, hoc est ut ut 1 ad 6,266891, seu in minimis numeris ut 4 ad 25, seu ut 1 ad $6\frac{4}{15}$. Unde sonus posterior erit ad priorem duplex octava cum quinta & cum hemitonio fere.

79. Pro sequentibus oscillationum modis ejusdem laminæ elasticæ, quibus lamina inter oscillandum axem AB in duobus pluribusve punctis intersecat, fit angulus Φ multo minor. Sic pro tertio modo habetur hæc æquatio $\frac{5}{2}\pi + \Phi = l\ \text{cot.}\ \frac{1}{2}\Phi = \frac{a}{c}$. Cum ergo sit $e^{\frac{5}{2}\pi + \Phi} = \text{cot.}\ \frac{1}{2}\Phi$, ob Φ angulum vehementer parvum, erit $e^{\frac{5}{2}\pi + \Phi} = e^{\frac{5}{2}\pi}(1 + \Phi + \frac{1}{2}\Phi^2 + \frac{1}{6}\Phi^3 + \&c.)$ & $\text{cot.}\ \frac{1}{2}\Phi = \frac{1 - \frac{1}{8}\Phi\Phi}{\frac{1}{2}\Phi - \frac{1}{48}\Phi^3} = \frac{2}{\Phi} - \frac{\Phi}{6}$. Hinc erit proxime $e^{\frac{5}{2}\pi} = \frac{2}{\Phi}$; ideoque $\Phi = 2e^{-\frac{5}{2}\pi}$, & propius $\Phi = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{\frac{5}{2}\pi}}$; unde erit $\frac{a}{c} = \frac{5}{2}\pi + \frac{2}{e^{\frac{5}{2}\pi} + 2}$; qui posterior terminus est quam-minimus. Simili modo pro quarto oscillationum modo, erit proxime $\frac{a}{c} = \frac{7}{2}\pi - 2e^{-\frac{7}{2}\pi}$, & ita porro: ob hos alteros terminos evanescentes, ipsius $\frac{a}{c}$ valores erunt $\frac{9}{2}\pi$, $\frac{11}{2}\pi$, &c. qui eo minus a veritate aberrabunt, quo ulterius progredientur.

80. Consideremus jam laminam elasticam nusquam fixam, sed liberam vel plano politissimo incumbentem, vel remota gravitate, in spatio vacuo versantem. Facile autem patet hujusmodi laminam motum oscillatorium recipere posse, dum lamina acb sese incurvando alternatim cis & ultra statum quietis AB excurrit. Motus igitur iste oscillatorius simili modo, quo in casu præcedente, definiri poterit, dummodo calculus debito modo ad hunc casum accommodetur. Sit igitur acb figura laminæ incurvata quam inter oscillandum obtinet, at ACB sit situs ejusdem laminæ in statu æquilibrii, per quem in quavis oscillatione transit. Ponatur, ut ante, longitudo laminæ AB $= a$, ejus elasticitas absoluta $= Ekk$, atque pondus seu massa $= M$. *De oscillationibus laminæ elasticæ liberæ.* *Fig. 22.*

Deinde

Deinde ſit abſciſſa AP $= x$, applicata PM $= y$, arcus aM $= s$, qui cum abſciſſa x confundetur; ita ut ſtatui queat $ds = dx$; ex quo radius oſculi in M orietur $= \frac{dy^2}{ddy} = R$. Sit autem porro applicata prima Aa $= b$. His poſitis, ratiocinium ut ante inſtituendo, ad eandem pervenietur æquationem $\frac{Ekk}{R} = \frac{M}{af} \int dx \int y\,dx = \frac{Ekk\,ddy}{dx^2}$.

81. Si igitur ponamus $\frac{Ekk.\,af}{M} = c^4$, ubi f ut ante exprimit longitudinem penduli ſimplicis iſochroni; habebitur, integrando, pro curva hæc æquatio

$$y = Ae^{\frac{x}{c}} + Be^{-\frac{x}{c}} + C\,\text{ſin.}\,\frac{x}{c} + D\,\text{coſ.}\,\frac{x}{c};$$

quæ ad præſentem caſum ita accommodabitur. Primo, ſi ponatur $x = 0$; fieri debet $y = b$; unde fit

$$b = A + B + D.$$

Secundo, cum ſit $\frac{c^4\,ddy}{dx^2} = \int dx \int y\,dx$; poſito $x = 0$; fieri debet $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, unde prodit

$$0 = A + B - D.$$

Tertio, cum ſit $\frac{c^4 d^3y}{dx^3} = \int y\,dx$, poſito $x = 0$; fieri quoque debet $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$, unde naſcitur:

$$0 = A - B - D.$$

Quarto, ſi ponatur $x = a$, evaneſcere debet $\int y\,dx$, ſeu $\frac{d^3y}{dx^3}$; propterea quod $\int y\,dx$ exprimit ſummam omnium virium laminam in directione ad axem AB normali trahentium, quæ ſumma ſi non eſſet $= 0$, ipſa lamina motu locali promoveretur, contra inſtitutum; erit ergo, ob hanc rationem,

$$0 = Ae^{\frac{a}{c}} - Be^{-\frac{a}{c}} - C\,\text{coſ.}\,\frac{a}{c} + D\,\text{ſin.}\,\frac{a}{c}.$$

Quinto

Quinto, quia lamina in extremitate B est libera, ibi curvaturam nullam habere poterit; eritque ideo, posito $x = a$, quoque $\frac{ddy}{dx^2} = 0$; unde erit

$$0 = Ae^{\frac{a}{c}} + Be^{-\frac{a}{c}} - C\,\text{fin.}\,\frac{a}{c} - D\,\text{cof.}\,\frac{a}{c}.$$

His igitur quinque conditionibus in computum ductis, non solum quatuor constantes A, B, C & D determinabuntur; sed etiam fractionis $\frac{a}{c}$ valor reperietur; ex quo proinde longitudo penduli simplicis isochroni f innotescet.

82. Ex harum æquationum secunda & tertia, obtinetur $D = A + B$, & $C = A - B$, qui in sequentibus substituti præbebunt

$$0 = Ae^{\frac{a}{c}} - Be^{-\frac{a}{c}} - (A - B)\,\text{cof.}\,\frac{a}{c} + (A + B)\,\text{fin.}\,\frac{a}{c}$$

$$0 = Ae^{\frac{a}{c}} + Be^{-\frac{a}{c}} - (A - B)\,\text{fin.}\,\frac{a}{c} - (A + B)\,\text{cof.}\,\frac{a}{c};$$

ex quibus reperitur:

$$\frac{A}{B} = \frac{e^{-\frac{a}{c}} - \text{cof.}\,\frac{a}{c} - \text{fin.}\,\frac{a}{c}}{e^{\frac{a}{c}} - \text{cof.}\,\frac{a}{c} + \text{fin.}\,\frac{a}{c}} = \frac{-e^{-\frac{a}{c}} - \text{fin.}\,\frac{a}{c} + \text{cof.}\,\frac{a}{c}}{e^{\frac{a}{c}} - \text{fin.}\,\frac{a}{c} - \text{cof.}\,\frac{a}{c}};$$

ex qua æqualitate elicitur ista æquatio

$$0 = 2 - e^{\frac{a}{c}}\,\text{cof.}\,\frac{a}{c} - e^{-\frac{a}{c}}\,\text{cof.}\,\frac{a}{c};\ \text{feu}\ e^{\frac{a}{c}} = \frac{1 \pm \text{fin.}\,\frac{a}{c}}{\text{cof.}\,\frac{a}{c}}$$

unde sequentes formabuntur æquationes

$$\text{I. } \frac{a}{c} = \tfrac{1}{2}\pi - \phi = l \text{ tang. } \tfrac{1}{2}\phi, \text{ quæ dat } \frac{a}{c} = o$$
pro situ laminæ naturali

$$\text{II. } \frac{a}{c} = \tfrac{1}{2}\pi - \phi = l \text{ cot. } \tfrac{1}{2}\phi$$

$$\text{III. } \frac{a}{c} = \tfrac{3}{2}\pi + \phi = l \text{ cot. } \tfrac{1}{2}\phi$$

$$\text{IV. } \frac{a}{c} = \tfrac{5}{2}\pi - \phi = l \text{ cot. } \tfrac{1}{2}\phi$$

$$\text{V. } \frac{a}{c} = \tfrac{7}{2}\pi + \phi = l \text{ cot. } \tfrac{1}{2}\phi$$

$$\text{VI. } \frac{a}{c} = \tfrac{9}{2}\pi - \phi = l \text{ cot. } \tfrac{1}{2}\phi$$

&c.

83. Hæ æquationes iterum indicant innumerabiles oscillationum modos, in quorum secundo lamina semel tantum axem AB intersecabit, in tertio bis, in quarto ter, in quinto quater, & ita porro. Ex quibus intelligitur modos secundum, quartum, sextum &c. ad præsens institutum non esse accommodatos. Quoniam enim in his numerus intersectionum est impar; laminæ situs inter oscillandum in secundo foret talis, qualem Figura 23 repræsentat; in quo quamvis summa virium sollicitantium per totam laminam evanescat, tamen ab iis lamina circa punctum medium C motum rotatorium acquireret: quia vires utrique semissi aC & bC applicatæ ad eundem laminæ motum rotatorium inducendum conspirarent. Quam ob causam, cum omnino motus rotatorius excludi debeat, figura laminæ, quam inter oscillandum induit, ita debet esse comparata, ut non solum
Fig. 22. virium sollicitantium toti laminæ applicatarum sit $= o$, sed etiam ut earum summa momentorum evanescat; quod obtinetur si curva in puncto medio c, diametro cC sit prædita. Quod evenit si curva axem AB vel in duobus, vel in quatuor, vel generatim in punctorum numero pari secet; ex quo æquationes tertia, quinta, septima &c. Solutiones tantum convenientes præbebunt.

84. Hæc ipsa limitatio in ipsa Problematis propositione con-

contenta reperietur, si ejusmodi tantum curvas admittamus, quæ rectam C c habeant diametrum, seu in quibus valor ipsius y prodeat idem, si loco x scribatur $a - x$. Ponamus ergo in æquatione generali $a - x$ loco x: atque prodibit

$$y = Ae^{\frac{a}{c}}e^{-\frac{x}{c}} + Be^{-\frac{a}{c}}e^{\frac{x}{c}} + C\,\text{fin.}\,\frac{a}{c}.\text{cof.}\,\frac{x}{c} - C\,\text{cof.}\,\frac{a}{c}.\,\text{fin.}\,\frac{x}{c}$$
$$+ D\,\text{cof.}\,\frac{a}{c}.\text{cof.}\,\frac{x}{c} + D\,\text{fin.}\,\frac{a}{c}.\,\text{fin.}\,\frac{x}{c}$$

quæ cum congruere debeat cum æquatione

$$y = Ae^{\frac{x}{c}} + Be^{-\frac{x}{c}} + C\,\text{fin.}\,\frac{x}{c} + D\,\text{cof.}\,\frac{x}{c};$$

fiet $Ae^{\frac{a}{c}} = B$, $C(1 + \text{cof.}\,\frac{a}{c}) = D\,\text{fin.}\,\frac{a}{c}$, & $C\,\text{fin.}\,\frac{a}{c} = D(1 - \text{cof.}\,\frac{a}{c})$; quarum duæ posteriores congruunt. Cum ergo sit $\frac{A}{B} = e^{-\frac{a}{c}}$, hoc valore cum superioribus comparato prodibit:

$$e^{-\frac{a}{c}} - \text{cof.}\,\frac{a}{c} - \text{fin.}\,\frac{a}{c} = 1 - e^{-\frac{a}{c}}\,\text{cof.}\,\frac{a}{c} + e^{-\frac{a}{c}}\,\text{fin.}\,\frac{a}{c}$$

seu $e^{-\frac{a}{c}} = \dfrac{1 + \text{cof.}\,\frac{a}{c} + \text{fin.}\,\frac{a}{c}}{1 + \text{cof.}\,\frac{a}{c} - \text{fin.}\,\frac{a}{c}} = \dfrac{1 + \text{fin.}\,\frac{a}{c}}{\text{cof.}\,\frac{a}{c}} = \dfrac{\text{cof.}\,\frac{a}{c}}{1 - \text{fin.}\,\frac{a}{c}}$.

85. Erit ergo $e^{\frac{a}{c}} = \dfrac{1 - \text{fin.}\,\frac{a}{c}}{\text{cof.}\,\frac{a}{c}}$: sicque in æquatione prius inventa $e^{\frac{a}{c}} = \dfrac{1. \pm \text{fin.}\,\frac{a}{c}}{\text{cof.}\,\frac{a}{c}}$; semissis tantum *f* casuum supra exhibitorum, scilicet ii qui sunt numeris imparibus, præsens Problema resolvent. Quare cum prima æquatio contineat

 lami-

laminæ ſtatum naturalem, omnes oſcillationum modi in ſequentibus æquationibus continebuntur:

$$\text{I.}\ \frac{a}{c} = \tfrac{3}{2}\pi + \Phi = l\ \text{cot.}\ \tfrac{1}{2}\Phi$$

$$\text{II.}\ \frac{a}{c} = \tfrac{7}{2}\pi + \Phi = l\ \text{cot.}\ \tfrac{1}{2}\Phi$$

$$\text{III.}\ \frac{a}{c} = \tfrac{11}{2}\pi + \Phi = l\ \text{cot.}\ \tfrac{1}{2}\Phi$$

&c.

Æquationum ergo harum prima præbebit primum eumque principalem oſcillandi modum, pro quo valor anguli Φ ſimili modo, quo ſupra, per approximationem reperietur. Limites autem anguli Φ mox colliguntur eſſe 1°, 0′, 40″ & 1°, 1′, 0″, ex quibus per ſequentem calculum verus ipſius Φ valor eruitur.

$\Phi =$	1°, 0′, 40″	1°, 1′, 0″
ſeu	3640″	3660″
log. =	3,5611013836	3,5634810854
ſubtr. =	5,3144251332	5,3144251332
$l\Phi =$	8,2466762504	8,2490559522
$\Phi =$	0,0176472180	0,0177441807
$\frac{3}{2}\pi =$	4,7123889804	4,7123889804
$\frac{a}{c} =$	4,7300361984	4,7301331611
$\frac{1}{2}\Phi =$	30′, 20″	30′, 30″
$v =$	2,0543424742	2,0519626482
$lv =$	0,3126728453	0,3121694510
add.	0,3622156886	0,3622156886
$lu =$	0,6748885339	0,6743851396
$u =$	4,7302983543	4,7248186037
Error.	+ 636341	+ 53145574
		636341
	diff.	52509233

Hinc

Hinc intelligitur verum valorem ipſius Φ non intra iſtos limites contineri, ſed aliquantulum eſſe minorem quam $1°, 0', 40''$. Nihilo vero minus is ex his erroribus reperietur. Sit enim $\Phi = 1°, 0', 40'' - n''$; erit $20'' : 52509233 = n'' : 636341$; unde reperitur $n = \frac{2423}{10000}$, ita ut ſit

$$\Phi = 1°, 0', 39 \frac{7576''}{10000}.$$

Cum ergo ſit $\Phi = 3639, 7576''$ erit

$$\begin{array}{rl} l\Phi = & 3,5610724615 \\ \text{ſubtr.} & 5,3144251332 \\ \hline & 8,2466473283 \\ \Phi = & 0,0176460428 \\ \frac{3}{2}\pi = & 4,7123889804 \\ \hline \frac{a}{c} = & 4,7300350232. \end{array}$$

86. Sit hic numerus $= m$, erit, ob $c^4 = \frac{Ekk.\,af}{M}$, $a^4 = \frac{m^4.\,Ekk.\,af}{M}$, & $f = \frac{a^4}{m^4}.\,\frac{1}{Ekk}.\,\frac{M}{a}$. Unde pari modo numerus oſcillationum ab hac lamina uno minuto ſecundo editarum, erit $= \frac{mm}{aa} \sqrt{g.\,Ekk.\,\frac{a}{M}}$, exiſtente $g = 3,16625$ ped. Rhen. Quod ſi ergo eadem lamina, nunc altero termino B muro infixo, nunc libera ad ſonum edendum incitetur, erunt ſoni inter ſe ut nn ad mm, hoc eſt ut quadrata numerorum $1,8751040813$ & $4,7300350232$, hoc eſt ut 1 ad $6,363236$. Ratio ergo horum ſonorum erit proxime ut 11 ad 70: horum ergo ſonorum intervallum conſtituet duas octavas, cum quinta & hemitonio. Sin autem poſterior lamina libera duplo longior capiatur quam prior fixa, intervallum ſonorum erit fere ſexta minor.

87. Invento hoc valore fractionis $\frac{a}{c}$; æquatio pro curva,

 quam

quam lamina inter oscillandum format, hactenus indeterminata poterit determinari. Cum enim sit

$$e^{\frac{a}{c}} = \frac{1 - \text{sin.}\,\frac{a}{c}}{\text{cos.}\,\frac{a}{c}}, \text{ erit } B = \frac{1 - \text{sin.}\,\frac{a}{c}}{\text{cos.}\,\frac{a}{c}}\,A, \;\&\; C = A - B$$

$$= A\left(\text{cos.}\,\frac{a}{c} + \text{sin.}\,\frac{a}{6} - 1\right) : \text{cos.}\,\frac{a}{6}, \;\&\; D = A + B$$

$$= A\left(\text{cos.}\,\frac{a}{c} - \text{sin.}\,\frac{a}{c} + 1\right) : \text{cos.}\,\frac{a}{c}.$$ Jam est $b = A + B + D = 2D = 2A\left(\text{cos.}\,\frac{a}{c} - \text{sin.}\,\frac{a}{c} + 1\right) : \text{cos.}\,\frac{a}{c}$; unde fit

$$A = \frac{b\,\text{cos.}\,\frac{a}{c}}{2\left(\text{cos.}\,\frac{a}{c} - \text{sin.}\,\frac{a}{c} + 1\right)} = \frac{b\left(1 + \text{sin.}\,\frac{a}{c} - \text{cos.}\,\frac{a}{c}\right)}{4\,\text{sin.}\,\frac{a}{c}}$$

$$B = \frac{b\left(1 - \text{sin.}\,\frac{a}{c}\right)}{2\left(\text{cos.}\,\frac{a}{c} - \text{sin.}\,\frac{a}{c} + 1\right)} = \frac{b\left(-1 + \text{sin.}\,\frac{a}{c} + \text{cos.}\,\frac{a}{c}\right)}{4\,\text{sin.}\,\frac{a}{c}}$$

$$C = \frac{b\left(-1 + \text{sin.}\,\frac{a}{c} + \text{cos.}\,\frac{a}{c}\right)}{2\left(\text{cos.}\,\frac{a}{c} - \text{sin.}\,\frac{a}{c} + 1\right)} = \frac{b\left(1 - \text{cos.}\,\frac{a}{c}\right)}{2\,\text{sin.}\,\frac{a}{c}},$$

$$D = \frac{b}{2} = \frac{b\,\text{sin.}\,\frac{a}{c}}{2\,\text{sin.}\,\frac{a}{c}}.$$

His substitutis oritur haec aequatio: $\frac{y}{b} =$

$$\frac{e^{\frac{x}{c}}\,\text{cos.}\,\frac{a}{c} + e^{-\frac{x}{c}}\left(1 - \text{sin.}\,\frac{a}{c}\right)}{2\left(1 - \text{sin.}\,\frac{a}{c} + \text{cos.}\,\frac{a}{c}\right)} + \frac{\left(1 - \text{cos.}\,\frac{a}{c}\right)\text{sin.}\,\frac{x}{c} + \text{sin.}\,\frac{a}{c}\,\text{cos.}\,\frac{x}{c}}{2\,\text{sin.}\,\frac{a}{c}}.$$

88. Quia autem recta Cc est curvae diameter, ponatur abscissa a puncto medio C sumpta $CP = z$, erit $x = \frac{1}{2}a - z$.

Unde

Unde fit $e^{\frac{x}{c}} = e^{\frac{a}{2c}} e^{-\frac{z}{c}} = e^{-\frac{z}{c}} \sqrt{\frac{1 - \text{fin.}\, \frac{a}{c}}{\text{cof.}\, \frac{a}{c}}}$, &

$e^{-\frac{x}{c}} = e^{\frac{z}{c}} \sqrt{\frac{\text{cof.}\, \frac{a}{c}}{1 - \text{fin.}\, \frac{a}{c}}}$; ex quo erit $\frac{A e^{\frac{x}{c}} + B e^{-\frac{x}{c}}}{b} =$

$$\frac{(e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}}) \sqrt{\text{cof.}\, \frac{a}{c} (1 - \text{fin.}\, \frac{a}{c})}}{2(1 - \text{fin.}\, \frac{a}{c} + \text{cof.}\, \frac{a}{c})} = \frac{e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}}}{2(e^{\frac{a}{2c}} + e^{-\frac{a}{2c}})}.$$

Tum vero erit $(1 - \text{cof.}\, \frac{a}{c}) \text{fin.}\, \frac{x}{c} + \text{fin.}\, \frac{a}{c} \text{cof.}\, \frac{x}{c} =$ $\text{fin.}\, \frac{x}{c} + \text{fin.}\, \frac{a-x}{c} = \text{fin.}\, (\frac{a}{2c} - \frac{z}{c}) + \text{fin.}\, (\frac{a}{2c} + \frac{z}{c})$ $= 2\, \text{fin.}\, \frac{a}{2c} \text{cof.}\, \frac{z}{c}$; quibus fubftitutis, oritur hæc æquatio:

$\frac{2y}{b} = \frac{e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}}}{e^{\frac{a}{2c}} + e^{-\frac{a}{2c}}} + \frac{\text{cof.}\, \frac{z}{c}}{\text{cof.}\, \frac{a}{2c}}$; quæ eft forma fimpliciffima, qua natura curvæ aMcb exprimi poteft: manifeftum autem eft, five z fumatur affirmative, five negative, eundem effe proditurum valorem applicatæ y. Eft vero $e^{\frac{a}{2c}} + e^{-\frac{a}{2c}} = \frac{2\, \text{cof.}\, \frac{a}{2c}}{\sqrt{\text{cof.}\, \frac{a}{c}}}$. Invenimus autem angulum $\frac{a}{c} = 271°, 0', 39\frac{1}{4}''$.

89. Si jam ponatur $z = 0$; præbebit y valorem applicatæ Cc; erit ergo $\frac{2. Cc}{b} = \frac{2 \sqrt{\text{cof.}\, \frac{a}{c}}}{2\, \text{cof.}\, \frac{a}{2c}} + \frac{1}{\text{cof.}\, \frac{a}{2c}}$ feu $\frac{Cc}{Aa}$

=

$$= \frac{1 + \sqrt{\text{cos.}\,\frac{a}{c}}}{2\ \text{cos.}\,\frac{a}{2c}} = \tfrac{1}{2}\ \text{sec.}\,\frac{a}{2c} + \tfrac{1}{2}\ \text{sec.}\,\frac{a}{2c}\sqrt{\text{cos.}\,\frac{a}{c}}.$$ At est

$\text{cos.}\,\frac{a}{c} = \text{sin.}\ 1°,\ 0',\ 39\tfrac{3}{4}''$ & $\text{cos.}\,\frac{a}{2c} = \text{sin.}\ 45°,\ 30',\ 19\tfrac{7}{8}''$.

Hinc reperitur $\frac{Cc}{Aa} = 0,607815$. Deinde si ponatur $y = 0$, reperientur puncta E & F quibus curva axem intersecat. Erit ergo

$$e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}} = -\frac{\text{cos.}\,\frac{z}{c}}{\text{cos.}\,\frac{a}{2c}}\left(e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{2c}}\right) = \frac{2\ \text{cos.}\,\frac{z}{c}}{\sqrt{\text{cos.}\,\frac{a}{c}}},$$

ex qua per approximationes reperitur

$$\frac{CE}{CA} = 0,551685,\ \&\ \frac{AE}{AC} = 0,448315.$$

Dum ergo lamina oscillationes peragit, hæc puncta E & F restabunt immobilia; ex quo hujusmodi motus oscillatorius, qui alias vix actu produci posse videatur, facile produci poterit. Si enim lamina in punctis E & F hoc modo definitis figatur, tum perinde oscillabitur ac si penitus esset libera.

90. Si eodem modo tractetur æquationum supra inventarum secunda $\frac{a}{c} = \frac{7\pi}{2} + \Phi = l\ \text{cot.}\ \Phi$; quo quidem casu reperietur proxime $\Phi = 0$; tum prodibit secundus modus, quo lamina libera vibrationes absolvere potest, secando scilicet axem AB in quatuor punctis; ideoque lamina perinde oscillabitur, ac si in his quatuor punctis esset fixa. Vicissim ergo, si lamina in his quatuor punctis, vel eorum duobus tantum quibusvis figatur; tum, eodem modo oscillabitur ac si esset libera; sonum autem edet multo auctiorem; quippe qui ad sonum præcedentem modo editum rationem tenebit fere ut 7^2 ad 3^2, hoc est, intervallum erit duarum octavarum cum quarta & hemitonii semisse.

misse. Tertius oscillandi modus, quo est $\frac{a}{c} = \frac{11}{2}\pi + \Phi =$ l cot. Φ, habebit sex curvæ acb intersectiones cum axe AB; sonusque edetur plus una octava cum tertia minore acutior; huncque sonum lamina edet si in duobus illorum sex punctorum figatur. Hinc patet quam varii soni ab eadem lamina, prout in duobus punctis diversimode figitur, edi queant; & nisi puncta bina, quibus infigitur, congruant cum intersectionibus in modo primo, vel secundo, vel tertio, atque adeo oscillationes sese ad modorum aliquem sequentium, vel etiam ad infinitesimum componant, tum sonum fore tantopere acutum, ut percipi omnino nequeat, seu quod eodem redit, lamina motum oscillatorium prorsus recipere non poterit: vel saltem, instar cordæ vibrantis, cui ponticulus ita subjicitur ut partes nullam inter se teneant rationem rationalem, sonus minus distinctus producetur.

90. Infixa nunc sit lamina elastica in utroque termino A & B; ita tamen ut tangentes curvæ in his punctis non determinentur. Ad hunc scilicet casum in experimentis producendum, laminæ in utroque termino infigantur tenuissimi aculei Aα, Bβ, qui parieti infixi reddant laminæ extremos terminos A & B immobiles. Ad motum oscillatorium hujus laminæ elasticæ investigandum, ponatur, ut ante, elasticitas absoluta laminæ $= Ekk$, longitudo AB $= a$, & pondus $= M$, atque longitudo penduli simplicis isochroni $= f$. Sit AMB figura curvilinea, quam lamina inter oscillandum induit, ac ponatur abscissa AP $=$ AM $= x$, applicata PM $= y$, & radius osculi in M $= R$. Sit porro P vis, quam aculeus Aα sustinet in directione Aα, & quia vis, qua elementum Mm in directione Mμ urgeri debet quo lamina in hoc statu conservetur, est $= \frac{My\,dx}{af}$; erit, per Regulas supra descriptas, æquatio pro curva hæc

Fig. 24. De oscillationibus laminæ elasticæ utroque termino fixæ.

$$\frac{Ekk}{R} = Px - \frac{M}{af}\int dx \int y\,dx$$

Est vero $R = -\frac{dx^2}{ddy}$; quia curva versus axem est concava;

unde fit $\frac{Ekkddy}{dx^2} = \frac{M}{af}\int dx \int y dx - Px$.

Facto ergo $x = 0$, erit radius osculi R in A infinitus, ideoque $ddy = 0$.

91. Si hæc æquatio bis differentietur; prodibit eadem æquatio, quam pro casibus præcedentibus invenimus,

$$Ekk d^4 y = \frac{M}{af} y dx^4$$

Quod si ergo ponatur $\frac{Ekk\, af}{M} = c^4$, erit æquatio integralis

$$y = Ae^{\frac{x}{c}} + Be^{-\frac{x}{c}} + C \text{ fin. } \frac{x}{c} + D \text{ cof. } \frac{x}{c}.$$

Ad quam determinandam, ponatur $x = 0$, & quia simul y evanescere debet, erit $0 = A + B + D$.

Secundo, ponatur $x = a$, & quia pariter fieri debet $y = 0$, erit

$$0 = Ae^{\frac{a}{c}} + Be^{-\frac{a}{c}} + C \text{ fin. } \frac{a}{c} + D \text{ cof. } \frac{a}{c}.$$

Tertio, quia $\frac{ddy}{dx^2}$ evanescere debet, posito & $x = 0$ & $x = a$; fiet

$$0 = A + B - D, \text{ \& } 0 = Ae^{\frac{a}{c}} + Be^{-\frac{a}{c}} - C \text{ fin. } \frac{a}{c} - D \text{ cof. } \frac{a}{c}.$$

Jam æquationes $0 = A + B - D$ & $0 = A + B + D$ dant $D = 0$, & $B = -A$; qui valores in reliquis duabus æquationibus substituti præbent

$$0 = A(e^{\frac{a}{c}} - e^{-\frac{a}{c}}) + C \text{ fin. } \frac{a}{c}, \text{ \& } 0 = A(e^{\frac{a}{c}} - e^{-\frac{a}{c}}) - C \text{ fin. } \frac{a}{c};$$

quibus satisfieri nequit, nisi sit $A = 0$, quia non potest esse $e^{\frac{a}{c}} = e^{-\frac{a}{c}}$, præter casum $\frac{a}{c} = 0$; tum vero esse debet $C \text{ fin. } \frac{a}{c} = 0$. Hic cum nequeat poni $C = 0$, quia motus oscillatorius foret nullus, erit fin. $\frac{a}{c} = 0$, ideoque vel

$\frac{a}{c}$

$\frac{a}{c} = \pi$, vel $\frac{a}{c} = 2\pi$, &c. unde iterum infiniti diversi oscillationum oriuntur modi, prout curva AMB axem vel nusquam præter terminos A & B secat, vel in uno, vel in duobus, vel in pluribus punctis; uti colligitur ex æquatione $y = C$ sin. $\frac{x}{c}$. Puncta intersectionum autem quotcunque fuerint, æqualibus intervallis inter se distabunt.

93. Cum igitur pro primo ac principali oscillandi modo sit $\frac{a}{c} = \pi$, erit $a^4 = \pi^4 c^4 = \pi^4 \times Ekk \times \frac{a}{M} \times f$, unde fit $f = \frac{a^4}{\pi^4} \times \frac{1}{Ekk} \times \frac{M}{a}$; Quare ratione longitudinis laminæ, soni iterum tenebunt rationem reciprocam duplicatam longitudinum. Sonus autem hujus laminæ hoc modo editus se habebit ad sonum ejusdem laminæ, si altero termino B muro esset infixa, uti $\pi\pi$ ad quadratum numeri 1, 8751040813, hoc est ut 2, 807041 ad 1, seu in numeris minimis ut 57 ad 160, quod intervallum est octava cum tritono fere. Si oscillationes se ad secundum modum, quo est $\frac{a}{c} = 2\pi$, componant; sonus fiet duplici octava acutior; sin sit $\frac{a}{c} = 3\pi$, sonus acutior fiet tribus octavis cum tono majore, quam casu quo $\frac{a}{c} = \pi$; & ita porro. Quæ quo facilius ad experimenta revocari queant; notandum est oscillationes hic quam-minimas poni, ita ut nulla laminæ elongatione sit opus. Quare, ne tenacitas laminæ, qua etiam minimæ extensioni, sine qua oscillationes istæ peragi nequeunt, reluctatur, hic alterationem afferat; cuspides illæ ita debent constitui, ut tantilla extensio non impediatur: quod evenit si plano politissimo incumbant. Sic lamina elastica AB in A & B cuspidibus $A\alpha$ & $B\beta$ munita, si cuspides speculo imponantur, sonum calculo conformem edet.

De oscillationibus laminæ elasticæ utroque termino parieti infixæ. Fig. 25.

94. Hoc casu expedito; istam de laminis elasticis tractationem claudat motus oscillatorius laminæ elasticæ, utroque termino A & B muro infixæ, ita ut inter oscillandum puncta A & B non solum maneant immota, sed etiam recta AB perpetuo sit tangens curvæ AMB in punctis A & B. Hic ergo iterum cavendum est, ut obices terminos A & B comprehendentes non sint adeo firmi, sed tantillam extensionem quanta ad curvaturam requiritur, permittant. Quæcunque ergo sint vires in terminis A & B ad laminam continendam requisitæ; ad sequentem pervenietur æquationem differentialem quarti ordinis $Ekkd^4y = \frac{M}{af}ydx^4$; cujus, si ponatur $\frac{Ekk.af}{M} = c^4$, integralis erit ut supra,

$$y = Ae^{\frac{x}{c}} + Be^{-\frac{x}{c}} + C\,\text{fin.}\,\frac{x}{c} + D\,\text{cof.}\,\frac{x}{c}.$$

95. Constantes A, B, C, & D autem ita debent esse comparatæ, ut posito $x = 0$, non solum y evanescat, sed etiam fiat $dy = 0$, quia in A curva ab axe AB tangitur. Hoc idem utrumque vero evenire debet, si ponatur $x = a$; unde istæ quatuor æquationes nascentur.

$$\begin{array}{ll}
\text{I.} & 0 = A + B + D \\
\text{II.} & 0 = A - B + C \\
\text{III.} & 0 = Ae^{\frac{a}{c}} + Be^{-\frac{a}{c}} + C\,\text{fin.}\,\frac{a}{c} + D\,\text{cof.}\,\frac{a}{c} \\
\text{IV.} & 0 = Ae^{\frac{a}{c}} - Be^{-\frac{a}{c}} + C\,\text{cof.}\,\frac{a}{c} - D\,\text{fin.}\,\frac{a}{c}.
\end{array}$$

Ex harum æquationum prima & secunda oritur $C = -A + B$, & $D = -A - B$, qui valores in reliquis duabus substituti dabunt

$$0 = Ae^{\frac{a}{c}} + Be^{-\frac{a}{c}} - (A - B)\,\text{fin.}\,\frac{a}{c} - (A + B)\,\text{cof.}\,\frac{a}{c}$$

$$0 = Ae^{\frac{a}{c}} - Be^{-\frac{a}{c}} - (A - B)\,\text{cof.}\,\frac{a}{c} + (A + B)\,\text{fin.}\,\frac{a}{c}$$

quarum

quarum summa ac differentia est,

$$0 = Ae^{\frac{a}{c}} + B\,\text{fin.}\,\frac{a}{c} - A\,\text{cof.}\,\frac{a}{c},\ \text{feu}\ \frac{A}{B} = \frac{\text{fin.}\,\frac{a}{c}}{\text{cof.}\,\frac{a}{c} - e^{\frac{a}{c}}}$$

$$0 = Be^{-\frac{a}{c}} - A\,\text{fin.}\,\frac{a}{c} - B\,\text{cof.}\,\frac{a}{c},\ \text{feu}\ \frac{A}{B} = \frac{e^{-\frac{a}{c}} - \text{cof.}\,\frac{a}{c}}{\text{fin.}\,\frac{a}{c}}$$

unde fit $2 = (e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{c}})\,\text{cof.}\,\frac{a}{c}$, seu

$$e^{\frac{a}{c}} = \frac{1 \pm \text{fin.}\,\frac{a}{c}}{\text{cof.}\,\frac{a}{c}}.$$

Quæ æquatio, quia congruit cum ea, quam §. 81 invenimus, sequentes Solutiones numero infinitæ satisfacient:

I. $\frac{a}{c} = \frac{1}{2}\pi - \Phi = l\,\text{cot.}\,\frac{1}{2}\Phi$

II. $\frac{a}{c} = \frac{3}{2}\pi + \Phi = l\,\text{cot.}\,\frac{1}{2}\Phi$

III. $\frac{a}{c} = \frac{5}{2}\pi - \Phi = l\,\text{cot.}\,\frac{1}{2}\Phi$

&c.

96. Harum æquationum primæ satisfieri nequit, nisi sit $\Phi = 90^\circ$, ideoque $\frac{a}{c} = 0$; unde primus oscillandi modus oritur ex æquatione $\frac{a}{c} = \frac{3}{2}\pi + \Phi = l\,\text{cot.}\,\frac{1}{2}\Phi$; quæ cum jam supra sit tractata, erit $\frac{a}{c} = 4,7300350232$. Quamobrem lamina elastica, cujus uterque terminus parieti infixus tenetur, perinde vibrationes suas peraget, ac si esset omnino libera. Hæc

autem convenientia tantum ad primum oscillandi modum spectat; secundus enim oscillandi modus, quo est $\frac{a}{c} = \frac{5}{2}\pi - \Phi =$ log. cot. $\frac{1}{2}\Phi$, atque lamina axem AB inter oscillandum in uno puncto intersecat, in lamina libera sui parem non habet; tertius autem modus laminæ utrinque infixæ congruet cum modo secundo laminæ liberæ, atque ita porro.

97. Hæc duo postrema oscillationum genera, ob causam allatam, non congrue per experimenta explorari possunt: primum autem non solum ad experimenta instituenda maxime est aptum; sed etiam adhiberi potest ad elasticitatem absolutam cujusque laminæ propositæ, quam per Ekk indicavimus, investigandam. Quod si enim sonus notetur, quem hujusmodi lamina altero termino muro infixa edit, eique in corda consonus efficiatur, simul numerus oscillationum uno minuto secundarum editarum cognoscetur. Qui si æqualis ponatur expressioni $\frac{nn}{aa}\sqrt{g.Ekk.\frac{a}{M}}$, ob numerum n cognitum, & quantitates g, a, & M per dimensiones inventas, reperietur valor expressionis Ekk; sicque elasticitas absoluta innotescit; quæ cum ea quam supra ex incurvatione reperire docuimus, comparari potest.

AD-