functione ipsarum x, y, p, q, r, &c. sive determinata sive indeterminata. Functio autem determinata nobis est, quæ, si alicubi dentur valores litterarum x, y, p, q, r &c. ipsa assignari potest, sive algebraïce sive transcendenter. Functio autem indeterminata est, quæ per datos istarum litterarum valores, quos uno in loco obtinent, assignari nequit, sed omnes valores præcedentes simul involvit, quemadmodum hoc evenit, si signa integralia occurrant. In Capite igitur secundo Methodum tradidimus omnia Problemata resolvendi, in quibus Z est functio determinata; in tertio vero hoc Capite persecuti sumus eas formulas, in quibus Z, vel ipsa est functio indefinita, vel talium unam pluresve involvit; simulque Methodum exhibuimus pro iis casibus, quibus functio illa indefinita nequidem per formulas integrales repræsentari potest, verum resolutionem æquationis differentialis requirit. Nunc igitur eos casus evolvamus, in quibus expressio, quæ maximum minimumve esse debet, non simplex est formula integralis, uti hactenus posuimus, sed ex pluribus ejusmodi formulis utcunque composita: atque simul Methodum aperiemus plura alia Problemata, quæ non ad coordinatas orthogonales spectant, expedite resolvendi.

CAPUT IV.

De Usu Methodi hactenus traditæ in resolutione varii generis quæstionum.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

1. *Invenire æquationem inter binas variabiles* x *&* y, *ita ut, pro dato ipsius* x *valore, puta posito* $x = a$, *formula* $\int Z dx$ *obtineat maximum minimumve valorem, existente* Z *functione ipsarum* x, y, p, q, r, *&c. sive determinata sive indeterminata.*

SOLUTIO.

Ex quacunque consideratione variabiles x & y sint natæ, ex

 semper

ſemper tanquam coordinatæ orthogonales cujuſpiam curvæ conſiderari poſſunt: atque hanc ob rem quæſtio propoſita huc revocatur, ut determinetur curva abſciſſam habens $= x$ & applicatam $= y$, in qua valor $\int Z dx$, ſi ad abſciſſam datæ magnitudinis, puta $x = a$, applicetur, fiat omnium maximus vel minimus. Quod ſi autem Problema hoc modo proponatur, tum ejus ſolutio in præcedentibus Capitibus ſatis ſuperque eſt tradita. Quamobrem formulæ propoſitæ $\int Z dx$, ſecundum Methodos ante expoſitas, capi oportet valorem differentialem, qui datæ abſciſſæ $x = a$ conveniat, iſque nihilo æqualis poſitus dabit æquationem inter x & y deſideratam, quæ pro data abſciſſa $x = a$, producet formulæ $\int Z dx$ maximum minimumve valorem. Q. E. I.

COROLL. I.

2. Methodus ergo ante tradita multo latius patet; quam ad æquationes inter coordinatas curvarum inveniendas, ut quæpiam expreſſio $\int Z dx$ fiat maximum minimumve. Extenditur ſcilicet ad binas quaſcunque variabiles, ſive eæ ad curvam aliquam pertineant quomodocunque, ſive in ſola analytica abſtractione verſentur.

COROLL. II.

3. Inter binas autem variabiles propoſitas diſcrimen ingens intercedit, eo quod propoſita formula $\int Z dx$ pro determinato quodam alterius variabilis valore maximum minimumve obtinere debeat. Iſthanc ergo variabilem conſtanter litera x, alteram vero littera y denotari convenit.

COROLL. III.

4. Litteris igitur x & y debito modo binis quantitatibus variabilibus impoſitis, erit $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, $r = \frac{dq}{dx}$,

$s =$

$s = \frac{dr}{dx}$ &c. His ſcilicet litteris differentialia cujuſcunque gradus, quæ forte in maximi minimive formula inſint, tolli poterunt, ita ut Z futura ſit functio litterarum x, y, p, q, r, &c.

COROLL. IV.

5. Cum ergo maximi minimive formula ad talem formam $\int Z dx$ fuerit reducta, in qua Z ſit functio ipſarum x, y, p, q, r, &c. ſive definita ſive indefinita, tum ex ſuperioribus præceptis formulæ $\int Z dx$ valor differentialis, reſpondens toti abſciſſæ propoſitæ $x = a$, debet inveſtigari, qui nihilo æqualis poſitus præbebit æquationem inter x & y quæſitam.

COROLL. V.

6. Si Z eſt functio definita ipſarum x, y, p, q, r, &c. tum valor differentialis formulæ $\int Z dx$ non pendet a præſcripto abſciſſæ valore $x = a$; & hanc ob rem æquatio inter x & y inventa pro qualibet abſciſſa præbebit maximum vel minimum formulæ $\int Z dx$.

SCHOLION I.

7. Quia in hoc negotio valores differentiales, quos ante pro omni genere formularum ſparſim eruimus, in promtu eſſe oportet, eos hic conjunctim in conſpectum producemus, ut ſit unde, quovis caſu oblato, valores differentiales, quibus opus fuerit, conquiri ac depromi queant. Exhibebimus igitur formulæ $\int Z dx$ pro varia functionis Z indole valorem differentialem, qui perpetuo determinatæ variabilis x quantitati, puta $x = a$, reſpondeat.

I.

Maximi minimive formula

$$\int Z\,dx.$$

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c.$$

Valor differentialis erit

$$n\nu.\,dx\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \&c.\right)$$

qui valor differentialis pro omni variabilis x magnitudine æque valet.

II.

Maximi minimive formula

$$\int Z\,dx.$$

$$dZ = L\,d\Pi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + \&c.$$

$$\& \ \Pi = \int [Z]\,dx$$

existente

$$d[Z] = [M]\,dx + [N]\,dy + [P]\,dp + [Q]\,dq + [R]\,dr + \&c.$$

Jam posito post integrationem $x = a$, sit $\int L\,dx = H$, ponaturque $H - \int L\,dx = V$,

Valor differentialis erit

$$n\nu.\,dx\left(N + [N]V - \frac{d.(P + [P]V)}{dx} + \frac{dd.(Q + [Q]V)}{dx^2} - \frac{d^3.(R + [R]V)}{dx^3} + \frac{d^4.(S + [S]V)}{dx^4} - \&c.\right)$$

III.

Maximi minimive formula

$$\int Z\,dx.$$

$$dZ = L\,d\Pi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + \&c.$$

$$\& \ \Pi = \int [Z]\,dx$$

$$d[Z] = [L]\,d\pi + [M]\,dx + [N]\,dy + [P]\,dp + [Q]\,dq + \&c.$$

$$\& \ \pi = \int [z]\,dx$$

$$d[z] = [m]\,dx + [n]\,dy + [p]\,dp + [q]\,dq + [r]\,dr + \&c.$$

Sit iterum, posito post integrationem $x = a$ ut ante, $\int L\,dx = H$

$= H$, ac ponatur $H - \int L\,dx = V$. Jam integretur $\int [L]\,V\,dx$, sitque integrale, eo casu quo $x = a$ ponitur, $= G$, ac ponatur $G - \int [L]\,V\,dx = [V] = G - \int [L]\,dx\,(H - \int L\,dx)$; His positis, Valor differentialis erit

$$nv.\,dx\left(N + [N]\,V + [n]\,[V] - \frac{d.(P + [P]\,V + [p]\,[V])}{dx} + \frac{dd\,(Q + [Q]\,V + [q]\,[V])}{dx^2} - \frac{d^3.(R + [R]\,V + [r]\,[V])}{dx^3} + \frac{d^4.(S + [S]\,V + [s]\,[V])}{dx^4} - \&c.\right)$$

unde simul lex progressionis patet, si adhuc plura integralia involvantur.

IV.

Maximi minimive formula

$$\int Z\,dx.$$

$$dZ = L\,d\Pi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + \&c.$$

$$\& \ \Pi = \int Z\,dx$$

Abeat, posito $x = a$, hæc expressio $e^{\int L\,dx}$ in H, denotante e numerum cujus logarithmus est $= 1$, sitque $H\,e^{-\int L\,dx} = V$:

Valor differentialis erit

$$nv.\,dx\left(NV - \frac{d.\,PV}{dx} + \frac{dd.\,QV}{dx^2} - \frac{d^3\,RV}{dx^3} + \frac{d^4\,SV}{dx^4} - \&c.\right)$$

V.

Maximi minimive formula

$$\int Z\,dx.$$

$$dZ = L\,d\Pi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c.$$

$$\& \ \Pi = \int [Z]\,dx$$

$$d[Z] = [L]\,d\Pi + [M]\,dx + [N]\,dy + [P]\,dp + [Q]\,dq + [R]\,dr + \&c.$$

Sit, si ponatur $x = a$, post integrationem

$$\int e^{\int [L]\,dx}\,L\,dx = H$$

atque ponatur

$$e^{-\int [L] dx} (H - \int e^{\int [L] dx} L dx) = V$$

Valor differentialis erit

$$nv. dx (N + [N] V - \frac{d. (P + [P] V)}{dx} + \frac{dd. (Q + [Q] V)}{dx^2} - \frac{d^3. (R + [R] V)}{dx^3} + \frac{d^4. (S + [S] V)}{dx^4} - \&c.).$$

In his igitur quinque casibus continentur omnes regulæ, quas in Capitibus præcedentibus invenimus. Iique tam late patent, ut omnes casus qui quidem occurrere queant, in iis vel actu contineantur, vel saltem per eos non difficulter resolvi possint. Iis igitur hic in compendium redactis, eorum usum monstrabimus, in resolvendis quæstionibus, in quibus x & y non denotant coordinatas orthogonales.

Exemplum I.

Fig. 7. 8. *Ex dato centro* C *ductis radiis* CA, CM, *invenire lineam* AM, *quæ inter omnes alias lineas intra angulum* ACM *contentas sit brevissima.*

Patet quidem hanc lineam quæsitam esse rectam: interim tamen hanc quæstionem secundum præcepta data resolvi conveniet, ut consensus Methodi cum veritate luculentius perspiciatur. Cum igitur longitudo lineæ AM pro dato angulo ACM debeat esse minima; ponamus angulum hunc ACM esse $= x$; seu centro C, radio CB $= 1$, describamus circulum, sitque arcus BS $= x$. Tum sit radius CM altera variabilis $= y$, æquatione enim inter has variabiles x & y inventa, innotescet natura lineæ quæsitæ AM. Jam autem ducto radio proximo Cm erit Ss $= dx$, & mn $= dy$, sumto Cn $=$ CM: ob triangula vero similia CSs & CMn erit $1 : dx =$ CM$[y]$: Mn$[y dx]$. Ex his itaque erit Mm $= \sqrt{(dy^2 + y^2 dx^2)}$; & quia perpetuo ponimus $dy = p dx$, erit Mm $= dx \sqrt{(yy + pp)}$; unde lineæ AM longitudo erit $= \int dx \sqrt{(yy + pp)}$, quæ debet esse minima pro dato ipsius x valore, puta $x = a$. At quia hæc formula

mula ad casum primum pertinet, linea satisfaciens erit pro quovis valore ipsius x minima. Cum igitur sit $Z = \surd(yy + pp)$, erit $dZ = \frac{y\,dy}{\surd(yy+pp)} + \frac{p\,dp}{\surd(yy+pp)}$, & in casu primo fiet $M = 0$, $N = \frac{y}{\surd(yy+pp)}$, $P = \frac{p}{\surd(yy+pp)}$, $Q = 0$, $R = 0$, &c. ideoque $dZ = Ndy + Pdp$. Habebitur ergo iste valor differentialis $nv.dx(N - \frac{dP}{dx})$, indeque pro solutione ista æquatio, $0 = N - \frac{dP}{dx}$: quæ, multiplicata per $pdx = dy$, dat $Ndy = pdP$; quo in æquatione $dZ = Ndy + Pdp$ substituto, prodibit $dZ = Pdp + pdP$, & integrando $Z + C = Pp$, seu $C + \surd(yy+pp) = \frac{pp}{\surd(yy+pp)}$. Quocirca erit $\frac{yy}{\surd(yy+pp)} = Const. = b$. At est Mm $[dx\surd(yy+pp)]$: Mn $[ydx]$ = MC $[y]$: $\frac{yy}{\surd(yy+pp)}$; quæ quarta proportionalis præbet perpendiculum CP, quod ex C in tangentem lineæ quæsitæ MP demittitur. Cum igitur hoc perpendiculum CP sit constans, intelligitur lineam quæsitam esse rectam: & quia, in æquatione inventa prima $Ndx = dP$, duæ insunt potentia constantes arbitrariæ, conditio hæc quæstioni est addenda, ut linea quæsita per data duo puncta transeat; tum igitur linea recta per illa duo puncta ducta quæsito satisfaciet.

EXEMPLUM II.

9. *Super axe* AP *construere lineam* BM, *ita comparatam, ut, abscissa area* ABMP *datæ magnitudinis, arcus curvæ* BM *illi areæ respondens sit omnium minimus.* Fig. 8.

Quia pro data area ABMP minima longitudo arcus BM requiritur, area ABMP nobis designanda erit variabili x: altera variabili y autem indicemus applicatam curvæ PM. Jam sit abscissa AP $= t$, erit $x = \int y\,dt$, ideoque $dt = \frac{dx}{y}$: atque

arcus

arcus BM longitudo erit $= \int \surd (dy^2 + \frac{dx^2}{yy})$. Posito ergo $dy = pdx$, minimum esse debet hæc formula $\int dx \surd (\frac{1}{yy} + pp)$ $= \int \frac{dx \surd (1 + yypp)}{y}$. Erit itaque $Z = \frac{\surd (1 + yypp)}{y}$, & $dZ = - \frac{dy}{yy \surd (1 + y^2 p^2)} + \frac{yypdp}{y \surd (1 + y^2 p^2)}$: unde $M = 0$ $N = \frac{-1}{yy \surd (1 + y^2 p^2)}$; $P = \frac{yp}{\surd (1 + y^2 p^2)}$, $Q = 0$ &c. Pertinet ergo hæc quæstio ad casum primum, ac solutio præbebit lineam curvam, quæ pro area quacunque APMB abscissæ erit brevissima. Pervenietur autem, uti in præcedente Exemplo, ad æquationem hanc $Z = C + Pp$, atque curva quæsita per data duo puncta describi poterit. Erit itaque $\frac{\surd (1 + yypp)}{y}$ $= C + \frac{ypp}{\surd (1 + yypp)}$, seu $1 = Cy \surd (1 + yypp)$: vel $b = y \surd (1 + yypp)$; hinc fit $bb = yy + y^4 pp$, & $p = \frac{\surd (bb - yy)}{yy} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ydt}$, ob $dx = ydt$. Erit igitur $dt = \frac{ydy}{\surd (bb - yy)}$, & $t = c \pm \surd (bb - yy)$. Quare linea quæsita erit Circulus, centro alicubi in axe AP, puta in C, assumto: isque inter omnes alias curvas per eadem duo quæcunque puncta ductas, pro data resecta area ABMP, habebit arcum BM brevissimum.

EXEMPLUM III.

Fig. 9. 10. *Eductis ex puncto fixo* C *radiis* CA, CM; *intra eos describere curvam* AM, *quæ pro dato spatio* ACM *habeat arcum* AM *brevissimum.*

Quia arcus AM minimus esse debet, si spatium ACM datæ magnitudinis abscindatur; ponatur area hæc $ACM = x$, atque radius CM designetur altera variabili y. Jam ponatur arcus

arcus BS, radio CB $= 1$ descriptus, $= t$; erit, ut ante vidimus, Mn $= y\,dt$, & area MCm $= \frac{1}{2}yy\,dt = dx$, unde fit $dt = \frac{2dx}{yy}$. Quia porro est Mm $= \sqrt{(dy^2 + y^2dt^2)} = \sqrt{(dy^2 + \frac{4dx^2}{yy})}$; sit $dy = p\,dx$, minimumque esse debet $\int \frac{dx}{y}\sqrt{(4+ppyy)}$. Cum igitur sit $Z = \frac{\sqrt{(4+y^2p^2)}}{y}$, erit $M = 0$, $N = -\frac{4}{yy\sqrt{(4+y^2p^2)}}$, & $P = \frac{yp}{\sqrt{(4+y^2p^2)}}$, $Q = 0$, &c. Hinc resultat ista æquatio $Z = C + Pp$; propterea quod sit $M = 0$: ideoque $\frac{\sqrt{(4+y^2p^2)}}{y} = C + \frac{ypp}{\sqrt{(4+y^2p^2)}}$, seu $4 = Cy\sqrt{(4+yypp)}$ vel $2b = y\sqrt{(4+yypp)}$; hincque $p = \frac{2\sqrt{(bb-yy)}}{yy} = \frac{dy}{dx} = \frac{2dy}{yy\,dt}$; ac $dt = \frac{dy}{\sqrt{(bb-yy)}}$: itemque integrando $t =$ A sin. $\frac{y}{b}$ + A sin. $\frac{c}{b}$ = A sin. $\frac{y\sqrt{(bb-cc)}+c\sqrt{(bb-yy)}}{bb}$. In AC ex S demittatur perpendiculum QS = sin. At, erit QS $= \frac{y\sqrt{(bb-cc)}+c\sqrt{(bb-yy)}}{bb}$. At ex æquatione $t + Const. =$ A sin. $\frac{y}{b}$ colligitur curva quæsita esse Circulus AME per punctum fixum C transiens. Describatur enim super diametro quacunque CE in C terminata Circulus CAME, arcus AM interceptus inter radios ACM pro data area ACM erit minimus. Scilicet si alia quæcunque curva per duo quæcunque puncta in hoc Circulo sita describatur, binisque radiis ex C ductis area æqualis areæ ACM abscindatur, arcus illius curvæ respondens perpetuo major erit quam arcus AM. Quod ut appareat, ducatur ex C ad CE normalis CD, in eamque ex S perpendiculum SQ demittatur: erit triangulum SCQ simile triangulo CEM, hincque CE : CM [y] = CS [1] : SQ seu SQ $= \frac{y}{CE}$ = sin. A. DBS, vel DBS Fig. 9.

$= A \sin. \frac{y}{CE}$. Posita ergo diametro $CE = b$, & quia est $DBS = BS + BD = t + Const.$ erit $t + Const. = A \sin. \frac{y}{b}$: quæ est ipsa illa proprietas, qua curvam quæsitam præditam esse oportere invenimus.

EXEMPLUM IV.

Fig. 10. 11. *In superficie quacunque, sive convexa sive concava, ducere lineam, quæ sit intra suos terminos omnium brevissima.*

Sumatur planum quodcunque ad quod superficies referatur, APQ, in eoque capiatur recta AP pro axe. Jam ex lineæ quæsitæ singulis punctis concipiantur perpendicula in hoc planum demitti, quibus describatur linea AQ, quæ erit projectio lineæ brevissimæ in hoc planum; qua cognita, simul ipsa linea brevissima in superficie proposita innotescet. Vocetur $AP = x$, $PQ = y$; atque cum natura superficiei detur, ex datis $AP = x$ & $PM = y$ definiri poterit longitudo perpendicularis QM in planum APQ, donec superficiem in M secet. Quod si ergo ponatur $QM = z$, longitudo hujus lineæ z dabitur per x & y, ita ut z sit functio definita ipsarum x & y. Cum igitur sit z functio ipsarum x & y, quæ ex æquatione locali ad superficiem datur, ponamus esse $dz = Tdx + Vdy$; eruntque T & V ejusmodi functiones ipsarum x & y, ut $Tdx + Vdy$ sit formula differentialis definita: posito nempe $dT = Edx + Fdy$, erit $dV = Fdx + Gdy$, existente littera F utrique differentiali communi. Nunc elementum lineæ in superficie ductæ est $= \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + (Tdx + Vdy)^2)}$. Posito ergo $dy = pdx$, minimum esse debet hæc formula $\int dx \sqrt{(1 + p^2 + T^2 + 2TVp + V^2p^2)}$; ita ut sit $Z = \sqrt{(1 + p^2 + T^2 + 2TVp + V^2p^2)}$, unde fit

+

$$dZ = \left\{ \frac{\begin{array}{l} +TEdx + TFdy + pdp \\ +VEpdx + VFpdy + TVdp \\ +TFpdx + TGpdy + V^2pdp \\ +VFp^2dx + VGppdy \end{array}}{\sqrt{(1+pp+T^2+2TVp+V^2p^2)}} \right.$$

Quæ formula cum ad casum primum pertineat, proveniet ista æquatio inter x & y;
$\frac{TFdx + VFpdx + TGpdx + VGppdx}{\sqrt{(1+pp+T^2+2TVp+V^2p^2)}} =$
$d. \frac{p+TV+V^2p}{\sqrt{(1+pp+T^2+2TVp+V^2p^2)}}$. Est vero $Fdx + Gpdx$
$= Fdx + Gdy = dV$, unde erit $\frac{TdV + VpdV}{\sqrt{(1+pp(T+Vp)^2)}} =$
$d. \frac{p+TV+V^2p}{\sqrt{(1+pp+(T+Vp)^2)}}$

$$= \left\{ \frac{\begin{array}{l} +dp(1+T^2+V^2) \\ +dT(V-Tp) \\ +dV(T+T^3+3T^2Vp+3TV^2p^2+V^3p^3+2Vp+Vp^3) \end{array}}{(1+pp+(T+Vp)^2)^{3:2}} \right.$$

Æquatione autem ordinata, resultabit hæc $dp(1+T^2+V^2) + dT(V-Tp) + dV(Vp-Tpp) = 0$, seu $dp = \frac{(Tp-V)(dT+pdV)}{1+T^2+V^2}$. Cum vero sit $p = \frac{dy}{dx}$, erit $dp = \frac{ddy}{dx}$; hincque fiet $dx\,ddy = \frac{(Tdy - Vdx)(dxdT + dydV)}{1+T^2+V^2}$ quæ est æquatio differentio-differentialis pro projectione AQ lineæ brevissimæ in superficie quæsita; ideoque indicat, eam per duo quæque puncta duci posse. Æquatio hæc inventa in varias formas transmutari potest, quæ sæpius majore commodo usurpari poterunt. Ac primo quidem expediet eliminari differentialia dT & dV: cum enim sit $dz = Tdx + Vdy$, erit $ddz = dxdT + dydV + Vddy$; ideoque $dxdT + dydV =$

$ddz - Vddy$, quo valore substituto prodibit ista æquatio $dxddy + T^2 dxddy + V^2 dxddy = Tdyddz - Vdxddz - TVdyddy + V^2 dxddy$, seu $dxddy + Tdzddy = Tdyddz - Vdxddz$; hincque $ddy : ddz = Tdy - Vdx : dx + Tdz$. Multiplicetur æquatio inventa per dz, ac in primo termino scribatur $Tdx + Vdy$ loco dz, erit $Tdx^2 ddy + Vdxdyddy + Tdz^2 ddy = Tdydzddz - Vdxdzddz$. Addatur utrimque $Tdy^2 ddy - Vdxdyddy$, erit $Tddy (dx^2 + dy^2 + dz^2) = (dzddz + dyddy)(Tdy - Vdx)$ seu $\frac{dyddy + dzddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{Tddy}{Tdy - Vdx} = \frac{Tddz}{dx + Tdz}$. Vel multiplicetur æquatio per dx, ac loco Tdx scribatur $dz - Vdy$, obtinebitur $dx^2 ddy + dz^2 ddy - Vdydzddy = dydzddz - Vdy^2 ddz - Vdx^2 ddz$. Addatur utrimque $dy^2 ddy - Vdz^2 ddz$, erit $ddy(dx^2 + dy^2 + dz^2) - Vdz (dyddy + dzddz) = dy(dyddy + dzddz) - Vddz(dx^2 + dy^2 + dz^2)$; ideoque $\frac{dyddy + dzddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{ddy + Vddz}{dy + Vdz}$; quæ æquationes omnes in sequenti expressione continentur $\frac{dyddy + dzddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{Tddy}{Tdy - Vdx} = \frac{Tddz}{dx + Tdz} = \frac{ddy + Vddz}{dy + Vdz}$. Hic notandum est, quia quantitatum T & V differentialia nusquam occurrunt, perinde esse, sive in T & V contineatur z, sive minus. Quovis igitur casu oblato, conveniet eam æquationem assumere, quæ facillime integrationem admittat. Veluti si superficies proposita sit solidi rotundi conversione cujuscunque figuræ circa axem A P nati, erit $yy + zz =$ quadrato functionis ipsius x, quæ sit $= X$, estque applicata illius curvæ genitricis abscissæ x respondens. Erit itaque $zdz = XdX - ydy$, & $dz = \frac{XdX}{z} - \frac{ydy}{z}$ unde fiet $T = \frac{XdX}{zdx}$, & $V = -\frac{y}{z}$. Sumatur jam, commodi ergo, æquatio in qua T non occur-

occurrit, hæc $\frac{dyddy + dzddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{ddy + Vddz}{dy + Vdz}$, quæ, ob $V = \frac{-y}{z}$, transit in hanc $\frac{dyddy + dzddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{zddy - yddz}{zdy - ydz}$, cujus integrale est $l\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = l\frac{zdy - ydz}{b}$, seu $zdy - ydz = b\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$. Quoniam nunc est $z = \sqrt{(X^2 - y^2)}$, ponatur $dX = vdx$, erit $dz = \frac{Xvdx - ydy}{\sqrt{(X^2 - y^2)}}$, & $zdy - ydz = \frac{X^2dy - Xyvdx}{\sqrt{(X^2 - y^2)}}$, & $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$
$= \frac{\sqrt{(X^2dx^2 - y^2dx^2 + X^2dy^2 + X^2v^2dx^2 - 2Xyvdxdy)}}{\sqrt{(X^2 - y^2)}}$.
Ergo $X^4dy^2 - 2X^3yvdxdy + X^2y^2v^2dx^2 = bbX^2dx^2 - bby^2dx^2 + bbX^2dy^2 + b^2X^2v^2dx^2 - 2b^2Xyvdxdy$, seu dy^2
$= \frac{2(b^2 - X^2)Xyvdxdy + X^2y^2v^2dx^2 - b^2X^2dx^2 + b^2y^2dx^2 - b^2X^2v^2dx^2}{X^2(bb - XX)}$,
quæ, extracta radice, præbet $dy = \frac{yvdx}{X} \pm \frac{bdx\sqrt{(1+vv)(yy - XX)}}{X\sqrt{(bb - XX)}}$.
Quod si ponatur $y = Xt$, ut sit $dy = Xdt + tvdx$, fiet $\frac{dt}{\sqrt{(tt - 1)}} = \frac{bdx\sqrt{(1 + vv)}}{X\sqrt{(bb - XX)}}$; in qua æquatione, quia X & v sunt functiones ipsius x, variabiles t & x a se invicem sunt separatæ.

EXEMPLUM V.

12. *Super axe* APN *construere curvam* AM *ejusmodi, ut, abscissa per normalem* MN *area* ANM *datæ magnitudinis, arcus* AM *sit minimus.* Fig. 11.

Quia, pro definita areæ AMN magnitudine, arcus AM minimus esse debet, ponatur area AMN $= ax$, positoque $x = a$, quo casu area AMN fit $= aa$, fiat arcus AM minimus. Ponatur porro applicata orthogonalis MP $= y$, abscissa AP $= t$, & subnormalis PN $= u$; erit $ax = \int y\,dt + \frac{1}{2}uy$, & $u = \frac{ydy}{dt}$: elementum vero arcus AM erit $=$

$\frac{dy\sqrt{(yy+uu)}}{u}$. Porro cum sit $adx = ydt + \frac{1}{2}(udy + ydu)$ & $dt = \frac{ydy}{u}$, erit $audx = yydy + \frac{1}{2}uudy + \frac{1}{2}yudu$, & $du = \frac{2adx}{y} - \frac{2ydy}{u} - \frac{udy}{y}$. Jam ponatur $dy = pdx$, minimum esse debebit $\int \frac{pdx\sqrt{(yy+uu)}}{u}$, atque u est quantitas cujus valor ex hac æquatione $du = dx(\frac{2a}{y} - \frac{2yp}{u} - \frac{up}{y})$ definiri debet. Pertinet itaque hæc quæstio ad Casum quintum; cum quo si comparatio instituatur, fit $u = \Pi$ & $Z = \frac{p\sqrt{(yy+\Pi^2)}}{\Pi}$; unde $L = \frac{-pyy}{\Pi^2\sqrt{(yy+\Pi^2)}}$; $M = 0$, $N = \frac{yp}{\Pi\sqrt{(yy+\Pi^2)}}$, & $P = \frac{\sqrt{(yy+\Pi\Pi)}}{\Pi}$. Deinde cum sit $\Pi = \int dx(\frac{2a}{y} - \frac{2yp}{\Pi} - \frac{\Pi p}{y})$, fit $[Z] = \frac{2a}{y} - \frac{2yp}{\Pi} - \frac{\Pi p}{y}$, & differentiando erit $[L] = \frac{2yp}{\Pi^2} - \frac{p}{y}$; $[M] = 0$, $[N] = \frac{-2a}{yy} - \frac{2p}{\Pi} + \frac{\Pi p}{yy}$ & $[P] = \frac{-2y}{\Pi} - \frac{\Pi}{y}$. Jam erit $\int [L]dx = \int \frac{2ydy}{\Pi^2} - ly$, & $e^{\int [L]dx} = \frac{e^{\int 2ydy:\Pi\Pi}}{y}$; at est $Ldx = \frac{-yydy}{\Pi^2\sqrt{(yy+\Pi\Pi)}}$; unde fiet $\int e^{\int [L]dx} L\,dx = -\int \frac{e^{\int 2ydy:\Pi\Pi}\,ydy}{\Pi^2\sqrt{(yy+\Pi^2)}}$, cujus valor posito $x = a$, fiat $= H$, sitque $V = e^{-\int 2ydy:\Pi\Pi}\,y(H + \int \frac{e^{\int 2ydy:\Pi\Pi}\,ydy}{\Pi^2\sqrt{(yy+\Pi^2)}})$. His præparatis, erit æquatio satisfaciens $(N + [N]V)dx = d.(P + [P]V)$, sive substitutionibus factis, $\frac{ydy}{\Pi\sqrt{(yy+\Pi\Pi)}} - \frac{2aVdx}{yy} - \frac{2Vdy}{\Pi} - \frac{\Pi Vdy}{yy} = d.(\frac{\sqrt{(yy+\Pi\Pi)}}{\Pi} - \frac{2Vy}{\Pi} - \frac{\Pi V}{y})$. At est $2adx = yd\Pi$

+

$+ \frac{2yydy}{\Pi} + \Pi dy$; unde erit $\frac{ydy}{\Pi\sqrt{(yy+\Pi^2)}} - \frac{Vd\Pi}{y} - \frac{4Vdy}{\Pi}$ $= d.\left(\frac{\sqrt{(yy+\Pi^2)}}{\Pi} - \frac{2Vy}{\Pi} - \frac{\Pi V}{y}\right) = \frac{ydy}{\Pi\sqrt{(yy+\Pi^2)}} - \frac{yyd\Pi}{\Pi^2\sqrt{(yy+\Pi^2)}} - \frac{2Vdy}{\Pi} - \frac{2ydV}{\Pi} + \frac{2Vyd\Pi}{\Pi^2} - \frac{\Pi dV}{y} - \frac{Vd\Pi}{y}$ $+ \frac{\Pi Vdy}{yy})$; hincque $\frac{yyd\Pi}{\Pi^2\sqrt{(y^2+\Pi^2)}} - \frac{2Vdy}{\Pi} + \frac{2ydV}{\Pi} - \frac{2Vyd\Pi}{\Pi^2}$ $+ \frac{\Pi dV}{y} - \frac{\Pi Vdy}{yy} = 0$. Verum, est generaliter $dV = -Ldx$ $-V[L]dx$; unde erit $dV = \frac{yydy}{\Pi^2\sqrt{(yy+\Pi\Pi)}} - \frac{2Vydy}{\Pi^2}$ $+ \frac{Vdy}{y}$; hincque $\frac{yyd\Pi}{\Pi^2\sqrt{(yy+\Pi\Pi)}} = \frac{dVd\Pi}{dy} + \frac{2Vyd\Pi}{\Pi^2} -$ $\frac{Vd\Pi}{y}$; quo substituto oritur $\frac{dVd\Pi}{dy} - \frac{2Vdy}{\Pi} + \frac{2ydV}{\Pi} + \frac{\Pi dV}{y}$ $- \frac{Vd\Pi}{y} - \frac{\Pi Vdy}{yy} = 0$; hoc est $dV\left(\frac{d\Pi}{dy} + \frac{2y}{\Pi} + \frac{\Pi}{y}\right)$ $= V\left(\frac{d\Pi}{y} + \frac{2dy}{\Pi} + \frac{\Pi dy}{yy}\right) = \frac{ydV}{dy}\left(\frac{d\Pi}{y} + \frac{2dy}{\Pi} + \frac{\Pi dy}{yy}\right)$; quæ æquatio, cum sit divisibilis per $\frac{d\Pi}{y} + \frac{2dy}{\Pi} + \frac{\Pi dy}{yy}$, duplicem dat solutionem. Quarum prima erit $\frac{dV}{V} = \frac{dy}{y}$, quæ præbet $V = cy$: quoniam vero V evanescere debet in casu minimi, eodem casu erit $y = 0$; scilicet posito $x = a$ fiet $y = 0$. Cum nunc sit $V = cy$, facta substitutione in æquatione $dV = \frac{yydy}{\Pi^2\sqrt{(y^2+\Pi^2)}} - \frac{2Vydy}{\Pi^2} + \frac{Vdy}{y}$, erit $\frac{yydy}{\Pi^2\sqrt{(y^2+\Pi^2)}}$ $= \frac{2cyydy}{\Pi^2}$; hincque vel $y = 0$, vel $dy = 0$, quo casu prodit linea recta axi parallela; vel $\Pi = \infty$, quo casu prodit linea recta ad axem normalis: vel etiam $\sqrt{(yy+\Pi\Pi)} = MN =$ *Const.* quæ æquatio dat Circulum; atque integer semicirculus, ob $y = 0$ in casu minimi, quæsito satisfaciet. Secunda solutio prodit ex divisore $\frac{d\Pi}{y} + \frac{2dy}{\Pi} + \frac{\Pi dy}{yy} = 0$, seu $\Pi d\Pi + \frac{\Pi\Pi dy}{y}$

+

$+ 2y\,dy = 0$, quæ multiplicata per yy, fit $yy\Pi\, d\Pi + \Pi\Pi y\, dy + 2y^3 dy = 0$, cujus integrale eſt $\Pi^2 y^2 + y^4 = C$, hincque $\Pi = \frac{\sqrt{(b^4 - y^4)}}{y}$; quæ æquatio, quia non pendet ab V, pro quocunque valore ipſius x ſatisfaciet. Erit autem introducta abſciſſa AP $= t$, ob $u = \Pi = \frac{y\,dy}{dt}$, iſta æquatio $\frac{y\,dy}{dt} = \frac{\sqrt{(b^4 - y^4)}}{y}$, unde $dt = \frac{yy\,dy}{\sqrt{(b^4 - y^4)}}$, ex qua æquatione intelligitur Elaſticam rectangulam quæſito ſatisfacere; ita ut pro area ANM inter normales AN & MN arcus curvæ AM ſit breviſſimus. Hæc autem curva per data duo puncta, ſiquidem axis AP ſit poſitione datus, deſcribi poteſt.

SCHOLION II.

13. Ex his Exemplis eximius uſus, quem habet noſtra Methodus in Problematis etiam diverſi generis reſolvendis, abunde patet; inprimis autem ultimum Exemplum nonnullas notatu maxime dignas ſuppeditat circumſtantias, ex quibus natura ſolutionis illuſtrari poterit. Quoniam enim duplex æquatio ob factores duos nata eſt, duplex quoque ſolutio prodiit; quarum prior lineam ſatisfacientem abſolute determinat, ita ut ea per data duo puncta duci nequeat: dat enim vel lineam rectam, vel ſemicirculum. Linea recta duplici modo quæſtionem ſolvit, dum eſt vel normalis ad axem AP, vel eidem parallela; & quemadmodum utraque ſatisfaciat manifeſtum eſt: nam in ea, quæ eſt normalis ad axem, portio quæ cum axe & normali datum ſpatium comprehendit perpetuo eſt infinite parva, ideoque revera minima: altera recta axi parallela aliquanto latius patet, cum ea per datum punctum duci poſſit; & quia ipſæ applicatæ ad eam ſunt normales, ac ſpatium abſciſſum ſit ut ipſa abſciſſa, ejus reſpectu linea illa recta utique erit breviſſima. Semicirculus deinde, qui ex prima ſolutione prodiit, ita abſolute ſatisfacit, ut, propoſita ſpatii abſcindendi quantitate, ipſe ſemicirculus determinetur,

netur, ejus enim area esse debet $= aa$. Secunda autem solutio, quæ curvam Elasticam rectangulam præbuit, latius patet: nam per data duo quæcunque puncta ejusmodi curva traduci potest, eaque, inter omnes alias curvas per eadem puncta transeuntes, hac gaudebit prærogativa, ut si, in omnibus curvis, per normales, areæ æquales abscindantur, arcus Elasticæ futurus sit omnium minimus. His igitur expositis pergamus ad usum Methodi traditæ ostendendum, in iis maximi minimive investigationibus, in quibus maximi minimive formula non est talis expressio integralis simplex $\int Z dx$, qualem formam hactenus perpetuo tractavimus; verum est composita ex duabus pluribusve hujusmodi formulis quomodocunque. Ac primo quidem, si maximum minimumve esse debeat aggregatum duarum pluriumve formularum integralium, puta $\int Z dx + \int Y dx - \int X dx$, operatio nulla difficultate laborat: quia enim formula maximi minimive est $\int dx\,(Z + Y - X)$, hæc tanquam simplex formula integralis tractari, ejusque valor differentialis assignari poterit. Operatio autem eo redibit, ut pro singulis formulis $\int Z dx$, $\int Y dx$ & $\int X dx$, earum valores differentiales quærantur; earumque loco in formula $\int Z dx + \int Y dx - \int X dx$ substituantur; & quod oritur nihilo æquale ponatur: sicque habebitur æquatio quæsito satisfaciens.

PROPOSITIO II. PROBLEMA.

14. *Invenire æquationem inter* x *&* y, *ut, posito* $x = a$, *fiat hac expressio* $\int Z dx \times \int Y dx$, *quæ est productum ex duabus formulis integralibus* $\int Z dx$ *&* $\int Y dx$, *maximum vel minimum.*

SOLUTIO.

Ponamus istam æquationem inter x & y jam esse inventam, foreque ex ea, posito $x = a$, valorem Formulæ $\int Z dx = A$, & $\int Y dx = B$; erunt hæ quantitates A & B constantes; atque earum productum AB maximum vel minimum. Jam ponatur apud valorem indefinitum x variabilem y augeri particula

$n\nu$, ex ea utraque quantitas A & B incrementum accipiet, unaquæque ſcilicet augebitur valore differentiali ex præcedentibus definiendo. Sit igitur dA valor differentialis ipſius A, qui reſpondet formulæ integrali $\int Z\,dx$, poſito $x = a$, ſimilique modo ſit dB valor differentialis ipſius B oriundus ex formula $\int Y\,dx$, poſito $x = a$. Cum ergo, ex adjecta particula $n\nu$ variabili y, abeat A in $A + dA$, & B in $B + dB$, productum AB tranſmutabitur in $AB + AdB + BdA + dAdB$; quare cum AB eſſe debeat maximum vel minimum, oportebit eſſe $AB = AB + AdB + BdA + dAdB$. Ideoque $o = AdB + BdA$, ob evaneſcentem terminum $dAdB$ præ reliquis. Ex his itaque oritur ſequens Problematis ſolutio; Quæratur formulæ $\int Z\,dx$ valor differentialis qui ſit dA, ſitque A valor formulæ $\int Z\,dx$, quem obtinet poſito $x = a$. Deinde quæratur formulæ $\int Y\,dx$ valor differentialis, qui ſit dB, ac B denotet valorem formulæ $\int Y\,dx$, quem recipit poſito $x = a$: quibus factis habebitur iſta æquatio $o = AdB + BdA$, in qua relatio ſatisfaciens inter x & y continebitur. *Q. E. I.*

COROLL. I.

15. Quanquam in æquatione $o = AdB + BdA$ inſunt quantitates conſtantes A & B, tamen eæ non ſunt arbitrariæ, ſed utraque per ipſam hanc æquationem definietur. Scilicet ſi ex hac æquatione eliciantur valores $\int Z\,dx$ & $\int Y\,dx$, ponaturque $x = a$, prodire debent illæ quantitates A & B; unde hæ determinabuntur per a, & per reliquas conſtantes arbitrarias quæ per integrationem ingredientur.

COROLL. II.

16. Si Z & Y fuerint functiones determinatæ quantitatum $x, y, p, q, r,$ &c. tum valores differentiales dA & dB non pendebunt ab a; interim tamen quantitas a ingreditur in æquationem $o = AdB + BdA$: ex quo curva inventa, tantum pro definito abſciſſæ x valore $x = a$, quæſito ſatisfaciet.

Co-

COROLL. III.

17. Ex æquatione autem $o = AdB + BdA$ particula $n\nu$ omnino egredietur : nam quia uterque valor differentialis dA & dB per $n\nu$ multiplicatus prodiit, iterum $n\nu$ per divisionem exterminabitur: hocque modo æquatio inter x & y atque constantes nascetur, qua Problemati satisfiet.

SCHOLION I.

18. Neminem hic forma æquationis $o = AdB + BdA$ inventæ offendat, eo quod speciem formulæ differentialis definitæ præ se ferat, neque hinc etiam quisquam concludat æquationis $o = AdB + BdA$ integralem sumi posse hanc, *Const.* $= AB$. Jam enim significationes explicavimus, quas tribuimus cum litteris A & B, tum etiam formis differentialibus dA & dB: ex quo intelligere licet, vulgarem notandi modum hic non locum habere. Ideo autem hunc notandi modum, etsi a consueto dissentientem, hic adhibere visum est, ut nexus æquationis $o = AdB + BdA$ cum formula maximi minimive $\int Zdx . \int Ydx$ melius perspiciatur. Cum enim maximum minimumve respondere debeat valori $x = a$; ponamus hoc casu abire $\int Zdx$ in A & $\int Ydx$ in B; quo facto, maximum minimumve erit AB. Hinc autem sponte nascitur æquatio inventa $o = AdB + BdA$, siquidem AB, litteris A & B tanquam variabilibus spectatis, differentietur. Quod cum fuerit factum, in memoriam revocari oportet, pro differentialibus dA & dB accipiendos esse valores differentiales eos, qui conveniunt formulis integralibus $\int Zdx$ & $\int Ydx$, ex quibus ipsæ quantitates A & B constantes prodiere. Hunc nexum ideo annotasse juvabit, quod infra eundem ad quemcunque compositionis modum, quo formula maximi minimive ex formulis integralibus composita fuerit, æque patere; similique modo ex ipsa maximi minimive expressione per differentiationem æquationem quæsitam obtineri ostendemus.

EXEMPLUM I.

19. *Invenire æquationem inter* x *&* y, *ut, posito* x $=$ a, *fiat ista expressio* $\int y\,dx \times \int x\,dy$ *maximum.*

Fiat $\int y\,dx = A$, & $\int x\,dy = B$, posito $x = a$, & quærantur formularum $\int y\,dx$ & $\int x\,dy$, seu $\int x\,p\,dx$, valores differentiales: ac formulæ $\int y\,dx$ valor differentialis est $nv.\,dx.\,1$, formulæ autem $\int x\,dy$, seu $\int x\,p\,dx$, est $nv.\,dx\,(-\frac{1}{dx}\ d.\,x) = -nv.\,dx$. Erit ergo $dA = nv.\,dx$, & $dB = -nv.\,dx$: unde æquatio $0 = AdB + BdA$ abibit in hanc $0 = -A.\ nv.\ dx + B.\ nv.\ dx$, seu $A = B$. Quæsito ergo omnes æquationes inter x & y æque satisfaciunt, dummodo, casu $x = a$, fuerit $\int y\,dx = \int x\,dy$; hoc est area curvæ $= \frac{1}{2}xy$.

EXEMPLUM II.

20. *Invenire æquationem inter* x *&* y, *ut, casu* x $=$ a, *fiat minimum hæc expressio* $\int y\,dx \times \int dx\,\sqrt{(1+pp)}$.

Casu $x = a$, fiat $\int y\,dx = A$, & $\int dx\,\sqrt{(1+pp)} = B$. Porro sumendis valoribus differentialibus erit $dA = nv.\,dx.\,1$, & $dB = nv.\,dx\,(-\frac{1}{dx}\ d.\ \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}) = -nv.\,d.\,\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$ Hinc prodit sequens æquatio $0 = -A.\,nv.\,d\,\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} + B.\,nv.\,dx$, seu $B\,dx = A\,d.\,\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Quæ integrata dat $x + b = \frac{Ap}{B\sqrt{(1+pp)}}$, ubi $\frac{A}{B}$ denotat rationem, quam tenet $\int y\,dx$ ad $\int dx\,\sqrt{(1+pp)}$ tum cum fit $x = a$. Sit brevitatis gratia $\frac{A}{B} = c$, erit $(x+b)\sqrt{(1+pp)} = cp$, & $p = \frac{x+b}{\sqrt{(cc-(x+b)^2)}} = \frac{dy}{dx}$. Integrata ergo hac æquatione,

tione, resultabit $y = f \pm \sqrt{(cc - (x+b)^2)}$, ita ut sit $(y-f)^2 + (x+b)^2 = c^2$, unde patet curvam satisfacientem esse Circulum, radio c descriptum, axe ubicunque accepto. Hujusmodi vero Circuli non quivis arcus satisfaciet, verum is tantum qui per c radium Circuli multiplicatus producit aream; est enim $A = Bc$. Ergo vel radius Circuli c pro lubitu accipi potest, ex eoque definietur illa abscissæ x magnitudo determinata a; vel si a detur, ut ponimus, inde vicissim radius c determinabitur. Perspicuum autem est arcum Circuli, qui satisfacit, convexitate sua axem respicere debere; hoc enim casu area fit minor, ideoque productum ex area in arcum minimum.

Exemplum III.

21. *Invenire curvam, in qua, pro data abscissa* x = a, *minimum fiat hæc expressio* $\int yx\,dx \times \int x\,dx\,\sqrt{(1+pp)}$.

Posito $x = a$, fiat $\int yx\,dx = A$, & $\int x\,dx\,\sqrt{(1+pp)} = B$. Erit autem $dA = nv.\,dx.\,x$ & $dB = -nv.\,dx.\,\frac{1}{dx}\,d.\,\frac{xp}{\sqrt{(1+pp)}}$; unde obtinebitur ista æquatio $Bx\,dx = A\,d.\,\frac{px}{\sqrt{(1+pp)}}$, quæ integrata dat $xx \pm bb = \frac{2Apx}{B\sqrt{(1+pp)}} = \frac{2cpx}{\sqrt{(1+pp)}}$, posito $\frac{A}{B} = c$. Hinc $p = \frac{xx \pm bb}{\sqrt{(4ccxx - (xx \pm bb)^2)}} = \frac{dy}{dx}$, ideoque pro curva habebitur hæc æquatio, $y = \int \frac{(xx \pm bb)\,dx}{\sqrt{(4ccxx - (xx \pm bb)^2)}}$. De qua notandum est, si fiat $b = 0$, tum prodire æquationem pro Circulo $y = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(4cc - xx)}}$ cujus radius sit $2c$.

SCHOLION II.

22. Eadem hæc Exempla omnia quoque resolvi possunt per Methodum supra jam traditam; quare cum utraque via eadem solutio obtineatur, juvabit solutionem per alteram viam uno Exemplo exhiberi. Sumamus igitur tertium Exemplum, in quo maximi minimive formula $\int yx\,dx \times \int x\,dx\,\surd(1+pp)$, differentiando iterumque integrando per partes, reducitur ad hanc formam $\int yx\,dx \int x\,dx\,\surd(1+pp) + \int x\,dx\,\surd(1+pp) \int yx\,dx$; cujus utrumque membrum in Casu secundo supra §. 7. exposito continetur. Quæratur itaque utriusque valor differentialis, eorum enim summa, posita $=0$, dabit æquationem pro curva quæsita. Formula autem $\int yx\,dx \int x\,dx\,\surd(1+pp)$ cum Casu secundo collata, dabit $\Pi = \int x\,dx\,\surd(1+pp)$ & $Z = yx\Pi$; unde fit $L = yx$; $M = y\Pi$, $N = x\Pi$, $P = 0$, &c. Deinde erit $[Z] = x\,\surd(1+pp)$; indeque $[M] = \surd(1+pp)$, $[N] = 0$, & $[P] = \frac{xp}{\surd(1+pp)}$. Porro est $\int L\,dx = \int yx\,dx$, cujus valor, posito $x = a$, quem generaliter posuimus H; hic in solutione Exempli est A; ita ut sit $V = A - \int yx\,dx$. Quare hujus formulæ valor differentialis erit $= nv.\,dx\,(x\Pi - \frac{1}{dx}\,d.\,\frac{xp(A - \int yx\,dx)}{\surd(1+pp)} = nv.\,dx\,(x\int x\,dx\,\surd(1+pp) - \frac{A}{dx}\,d.\,\frac{xp}{\surd(1+pp)} + \frac{1}{dx}\,d.\,\frac{xp\int yx\,dx}{\surd(1+pp)})$. Altera formula $\int x\,dx\,\surd(1+pp) \int yx\,dx$, cum Casu secundo §. 7. collata, dat $\Pi = \int yx\,dx$ & $Z = x\Pi\,\surd(1+pp)$, unde erit $L = x\,\surd(1+pp)$, $M = \Pi\,\surd(1+pp)$, $N = 0$, & $P = \frac{x\Pi p}{\surd(1+pp)}$; hincque $\int L\,dx = \int x\,dx\,\surd(1+pp)$: quare cum H sit valor ipsius $\int L\,dx$, posito $x = a$, erit $H = B$, & $V = B - \int x\,dx\,\surd(1+pp)$. Porro est $[Z] = yx$, hincque $[M] = y$, $[N] = x$, & $[P] = 0$. Ex his prodit valor differentialis $= nv.\,dx\,(Bx - x\int x\,dx\,\surd(1+pp) - \frac{1}{dx} \times$

d.

$\times d. \frac{xp\int yx\,dx}{\sqrt{(1+pp)}})$. His igitur valoribus differentialibus ambobus additis, emerget hujus expressionis compositæ $\int yx\,dx \int x\,dx \sqrt{(1+pp)} + \int x\,dx \sqrt{(1+pp)} \int yx\,dx$, seu hujus $\int yx\,dx \times \int x\,dx \sqrt{(1+pp)}$, quæ in Exemplo erat proposita, valor differentialis $= nv.\ dx\ (Bx - \frac{A}{dx}\ d.\ \frac{xp}{\sqrt{(1+pp)}})$, ex quo pro curva æquatio erit hæc $Bx\,dx = A\,d.\ \frac{xp}{\sqrt{(1+pp)}}$, quam eandem in solutione Exempli invenimus. Similis autem consensus in genere deprehendetur, si quis expressionem $\int Z\,dx \times \int Y\,dx$ eodem modo tractare voluerit.

PROPOSITIO III. PROBLEMA.

23. *Invenire æquationem inter* x *&* y *ejus conditionis, ut, posito* $x = a$, *ista fractio* $\frac{\int Z\,dx}{\int Y\,dx}$ *obtineat maximum minimumve valorem: existentibus* Z *&* Y *functionibus quibuscunque ipsarum* x, y, p, q, r, *&c. sive determinatis, sive indeterminatis.*

SOLUTIO.

Casu quo fit $x = a$, sit $\int Z\,dx = A$, atque $\int Y\,dx = B$: eritque $\frac{A}{B}$ maximum vel minimum, siquidem relatio inter x & y recte fuerit assignata. Erit igitur fractio $\frac{A}{B}$ æqualis eidem huic fractioni $\frac{\int Z\,dx}{\int Y\,dx}$, casu quo $x = a$, si alicubi una applicata y augeatur particula $n\nu$. Tum vero fiet $\int Z\,dx$ æqualis ipsi A, una cum valore differentiali formulæ $\int Z\,dx$, qui sit $= dA$; similique modo $\int Y\,dx$ abibit in B auctum valore differentiali formulæ $\int Y\,dx$, qui sit $= dB$; sicque ex adjecta particula $n\nu$ ad applicatam y, casu quo $x = a$, transibit fractio $\frac{\int Z\,dx}{\int Y\,dx}$ in hanc $\frac{A + dA}{B + dB}$; quæ æqualis esse debet fractioni

A

$\frac{A}{B}$; unde nascitur ista æquatio $BdA = AdB$; quæ præbebit æquationem inter x & y quæsitam. *Q. E. I.*

COROLL. I.

24. Ad hanc igitur æquationem inter x & y inveniendam, effici debet ut valores differentiales ipsarum $\int Zdx$ & $\int Ydx$ proportionales fiant ipsis harum formularum valoribus, quos obtinent posito $x = a$.

COROLL. II.

25. Quanquam, in hac æquatione inventa $BdA = AdB$, duæ inesse videantur constantes incognitæ A & B, tamen ambas in unam compingere licet. Posito enim $\frac{A}{B} = C$, erit $dA = CdB$; inventaque æquatione, ex valore a loco x substituto determinabitur valor ipsius C.

SCHOLION.

26. Si hujus & præcedentis Problematis solutiones inter se conferantur, ingens in iis deprehendetur consensus. Nam si maximum minimumve esse debeat factum $\int Zdx \times \int Ydx$, orta est ista æquatio $0 = AdB + BdA$; sin autem quotus $\frac{\int Zdx}{\int ydx}$ debeat esse vel maximus vel minimus, inventa est ista æquatio $0 = AdB - BdA$; utroque autem casu litteræ A, B & dA, dB eosdem retinent valores. Quare cum A & B sint quantitates constantes, ambæ æquationes tantum ratione signi constantis differunt; posito enim $\frac{A}{B} = C$, priore casu habetur $dA = -CdB$, posteriore vero $dA = +CdB$. Ex quo pro utroque casu etiam eadem fere prodibit solutio; quia totum discrimen tantum in signo quantitatis constantis C situm erit. Quod si ergo æquatio inter x & y fuerit inventa, quæ conti-

contineat, pro $x = a$, factum $\int Z dx \times \int Y dx$ maximum vel minimum; eadem æquatio, levi adhibita mutatione, simul continebit quotum $\frac{\int Z dx}{\int Y dx}$ maximum vel minimum. Perspicuum autem est, sive $\frac{\int Z dx}{\int Y dx}$ debeat esse maximum vel minimum, sive $\frac{\int Y dx}{\int Z dx}$, utroque casu eandem plane esse prodituram æquationem. Hanc vero convenientiam ipsa rei natura postulat: nam si $\frac{\int Z dx}{\int Y dx}$ est maximum, tum eo ipso erit $\frac{\int Y dx}{\int Z dx}$ minimum & vicissim; unde utrique quæstioni eandem solutionem satisfacere necesse est. Cæterum hunc quoque nexum observasse juvabit inter maximi minimive formulam $\frac{\int Z dx}{\int Y dx}$, quæ, posito $x = a$, abit in $\frac{A}{B}$, & inter æquationem inventam $BdA - AdB = 0$: hæc enim æquatio oritur ex differentiatione formulæ $\frac{A}{B}$, ponendo ejus differentiale $= 0$; istiusmodi autem nexum perpetuo locum habere in sequente Propositione demonstrabimus.

EXEMPLUM I.

27. *Invenire curvam, cujus area coordinatis orthogonalibus abscissa ad arcum curvæ maximam teneat rationem, si abscissæ datus valor* a *tribuatur.*

Posita curvæ quæsitæ abscissa $= x$, applicata $= y$; erit area $= \int y dx$, & arcus $= \int dx \sqrt{(1+pp)}$; posito $dy = p dx$: maximum ergo esse debet $\frac{\int y dx}{\int dx \sqrt{(1+pp)}}$, casu quo ponitur $x = a$. Sit igitur, casu $x = a$, valor formulæ $\int y dx$, seu area $= A$, & $\int dx \sqrt{(1+pp)}$ seu arcus abscissæ a respondens $= B$. Deinde formulæ $\int y dx$ valor differentialis dA erit $= nv. dx$, 1, & formulæ $\int dx\sqrt{(1+pp)}$ seu $dB = nv.\, dx\,(-\frac{1}{dx}$ $d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}) = -nv.\, d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Quibus valoribus in æquatione $BdA = AdB$ substitutis, prodibit pro curva quæsita sequens æquatio: $Bdx = -Ad.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Ponatur $\frac{A}{B} = c$, ita ut, pro abscissa $x = a$, area curvæ fiat æqualis producto ex arcu in hanc constantem c. Erit ergo $dx = -c\,d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$, & integrando $x = b -$ $\frac{cp}{\sqrt{(1+pp)}}$, seu $cp = (b-x)\sqrt{(1+pp)}$, hincque $p = \frac{b-x}{\sqrt{(c^2-(b-x)^2)}} = \frac{dy}{dx}$. Erit ergo $y = \ldots$ $\int\frac{(b-x)\,dx}{\sqrt{(c^2-(b-x)^2)}} = f \pm \sqrt{(c^2-(b-x)^2)}$ seu $(y-f)^2 + (b-x)^2 = cc$; unde constat curvam quæsitam esse Circulum radio c descriptum, ad rectam quamcunque tanquam axem relatum. Hujus autem Circuli ea tantum portio quæsito satisfacit, quæ respondet abscissæ $= a$, a quo valore pendet c, ita ut sumpta abscissa $= a$, area æqualis fiat producto ex arcu in radium Circuli multiplicato. Quod si ergo vicissim radius c detur, tanta in axe abscissa abscindi debet, ut arcus per radium multiplicatus præbeat aream. Infinitis igitur modis quæsito satisfieri potest; quæstio autem erit determinata, si duo præscribantur puncta, per quæ curva quæsita sit transeunda. Sumamus igitur radium c tanquam cognitum, eoque describamus Circulum BMD centro C. Porro sumatur

Fig. 12. linea quæcunque APD pro axe, in eaque A pro origine abscissarum. Hoc jam facto, quæstioni satisfiet si applicata PM tantum spatium ABMP abscindatur, ut id sit æquale producto ex arcu BM in radium Circuli BC. Quia autem sector BCM est $= \frac{1}{2}$ BM. BC, oportet aream ABMP esse duplo majorem sectore BCM. Apparet autem, sumto pro lubitu,

bitu, cum axe, tum ejus initio, sæpe-numero conditionem præscriptam nequidem impleri posse. Nam si axis AD per centrum transeat, tum area ABMP perpetuo minor erit quam duplum sectoris BCM; nisi, arcu BM infinite parvo, prima applicata BA simul per centrum transeat: sin autem axis AD supra centrum transiret, tum nullo modo conditioni inventæ satisfieri potest. Quare necesse est, ut axis AD infra centrum C ducatur, qua de re multæ egregiæ observationes geometricæ fieri possent, si ratio instituti id permitteret. Cæterum si hæc Solutio cum Exemplo secundo præced. Prop. §. 20 comparetur; apparebit eandem prorsus æquationem esse inventam, sive $\int y\,dx \times \int dx \sqrt{(1+pp)}$ debeat esse minimum, sive $\frac{\int y\,dx}{\int dx \sqrt{(1+pp)}}$ maximum. Discrimen tamen in hoc consistit; quod radius Circuli $c = \frac{A}{B}$ altero casu affirmative, altero negative debeat accipi. Scilicet si $\int y\,dx \times \int dx \sqrt{(1+pp)}$ debeat esse minimum, arcus BM convexitate sua spatium ABMP; altero autem casu, concavitate claudere debet.

EXEMPLUM II.

28. *Intra datum angulum* ACM, *curvam* AM *construere ita comparatam, ut area* ACM *per arcum* AM *divisa sit omnium maxima.* Fig. 7.

Ponatur angulus ACM, seu arcus circuli BS radio CB $= 1$ descriptus $= x$, qui in casu proposito fiat $= a$, quo $\frac{ACM}{AM}$ fieri debet maximum. Ponatur porro $CM = y$, sitque $dy = p\,dx$, erit $Mn = y\,dx$, & area $ACM = \frac{1}{2}\int yy\,dx$: arcus autem AM reperitur $= \int dx \sqrt{(yy+pp)}$: unde hæc fractio $\frac{\int yy\,dx}{2\int dx \sqrt{(yy+pp)}}$, seu ejus duplum $\frac{\int yy\,dx}{\int dx \sqrt{(yy+pp)}}$ debebit esse maximum. Sit, casu quo $x = a$

 est,

est, $\int yydx = A$, & $\int dx\sqrt{(yy+pp)} = B$; erit, si $x = a$, area ACM $= \frac{1}{2}A$, & arcus AM $= B$. Jam formulæ $\int yydx = A$ valor differentialis dA est $= nv.\ dx.\ 2y$, & formulæ $\int dx\sqrt{(yy+pp)}$ valor differentialis dB est $= nv.$ $dx\ (\frac{y}{\sqrt{(yy+pp)}} - \frac{1}{dx}d.\frac{p}{\sqrt{(yy+pp)}})$. Quare cum generaliter invenerimus pro curva hanc æquationem $BdA = AdB$, erit divisione per nv instituta, $2Bydx = \frac{Aydy}{\sqrt{(yy+pp)}} - Ad.\frac{p}{\sqrt{(yy+pp)}}$. Multiplicetur ea per p, ob $pdx = dy$, erit $2Bydy = A\ (\frac{ydy}{\sqrt{(yy+pp)}} - pd\frac{p}{\sqrt{(yy+pp)}})$. At est $d.\sqrt{(yy+pp)} = \frac{ydy}{\sqrt{(yy+pp)}} + \frac{pdp}{\sqrt{(yy+pp)}}$ & $\frac{ydy}{\sqrt{(yy+pp)}} = d.\sqrt{(yy+pp)} - \frac{p}{\sqrt{(yy+pp)}}.\ dp$; unde fiet $2Bydy = A\ (d.\sqrt{(yy+pp)} - d.\frac{pp}{\sqrt{(yy+pp)}})$, ob $pd\frac{p}{\sqrt{(yy+pp)}} + dp\frac{p}{\sqrt{(yy+pp)}} = d.p.\frac{p}{\sqrt{(yy+pp)}} = d.\frac{pp}{\sqrt{(yy+pp)}}$. Quare integrando habebitur, si $\frac{A}{B} = c$ ponatur, ista æquatio $yy \pm bb = c\sqrt{(yy+pp)} - \frac{cpp}{\sqrt{(yy+pp)}} = \frac{cyy}{\sqrt{(yy+pp)}}$ seu $p = \frac{y\sqrt{(c^2y^2 - (yy\pm bb)^2)}}{yy\pm bb} = \frac{dy}{dx}$; hincque $dx = \frac{(yy\pm bb)dy}{y\sqrt{(c^2y^2 - (yy\pm bb)^2)}}$: ex qua æquatione facile deduci potest, si sit $cc \mp 4bb$ quantitas positiva, constructionem per quadraturam Circuli absolvi posse. At idem facilius patebit, si loco dx, vel p, introducamus perpendiculum CP, ex C in tangentem MP demissum. Quod si autem hoc perpendiculum CP ponatur $= u$, erit $y : u = dx\sqrt{(yy+pp)} : ydx$, hincque $\frac{yy}{\sqrt{(yy+pp)}} = u$; quamobrem

brem cum esset $yy \pm bb = \frac{cyy}{\sqrt{(yy+pp)}}$ erit $yy \pm bb = cu$, quam constat esse aquationem ad ipsum Circulum. Hoc ut ostendamus, sumatur Circulus quicunque, centro O, radio OM $= g$ descriptus, punctumque C sumtum sit in C, ita ut sit OC $= b$. Jam ducta recta CM $= y$, & CP $= u$, perpendiculari in tangentem MP, erit CP parallela radio OM. Ex M ducatur diametro EF parallela MR, erit MR $=$ CO $= b$; CR $=$ OM $= g$, & PR $= u - g$: quia igitur est $MR^2 = MP^2 + PR^2 = CM^2 - CP^2 + PR^2$, erit $b^2 = y^2 - u^2 + (u-g)^2 = y^2 - 2gu + gg$: hincque $yy + gg - bb = 2gu$; quæ comparata cum inventa $yy \pm bb = cu$, fiet $g = \frac{1}{2}c$, & $\pm bb = \frac{1}{4}cc - bb$, seu $bb = \frac{1}{4}cc \mp bb$. Erit itaque curva quæsita Circulus, radio $= \frac{1}{2}c$ descriptus, puncto C ubi libuerit accepto. In tali Circulo quæsito satisfaciet arcus AM, si fuerit $\frac{ACM}{AM} = \frac{A}{2b} = \frac{1}{2}c =$ radio OM; hoc est si fuerit area ACM $=$ arc. AM. AO $=$ duplici sectori AOM. Hoc autem fieri nequit, nisi punctum C extra Circulum accipiatur; quo casu hæc conditio infinitis modis adimpleri potest; atque adeo effici ut curva satisfaciens per data duo puncta transeat. Fig. 13.

EXEMPLUM III.

29. *Invenire curvam* DAD *ad axem* AC *relatam, in qua pro data abscissa* AC $=$ a, *sit* $\frac{\int x dx \sqrt{(1+pp)}}{\int dx \sqrt{(1+pp)}}$ *minimum.* Fig. 14.

Si ponatur abscissa indefinita AP $= x$, applicata PM $= y$, & $dy = p\,dx$; exprimit $\frac{\int x dx \sqrt{(1+pp)}}{\int dx \sqrt{(1+pp)}}$ distantiam centri gravitatis curvæ MAM, tanquam uniformiter gravis spectatæ a puncto infimo A; quæ ergo distantia, translato P in C, debet esse minima. Ad hoc inveniendum, posito $x = a$, sit $\int x dx \sqrt{(1+pp)} = A$, & $\int dx \sqrt{(1+pp)} = B$: formulæ autem $\int x dx \sqrt{(1+pp)}$

 reperi-

reperitur valor differentialis $dA = - nv.d.\frac{xp}{\surd(1+pp)}$, & formulæ $\int dx\surd(1+pp)$ valor differentialis $dB = - nv.d.\frac{p}{\surd(1+pp)}$; quibus in æquatione $BdA = AdB$ substitutis, prodibit $Bd.\frac{xp}{\surd(1+pp)} = Ad.\frac{p}{\surd(1+pp)}$, & posito $\frac{A}{B} = c$, erit $d.\frac{xp}{\surd(1+pp)} = cd.\frac{p}{\surd(1+pp)}$; unde integrando oritur $\frac{xp}{\surd(1+pp)} = \frac{cp}{\surd(1+pp)} - b$, seu $b\surd(1+pp) = (c-x)p$; hincque elicitur $p = \frac{b}{\surd((c-x)^2 - bb)} = \frac{dy}{dx}$. Erit ergo $y = \int\frac{bdx}{\surd((c-x)^2 - b^2)}$; quæ æquatio indicat curvam quæsitam esse Catenariam, initio abscissarum pro x in loco axis AC quocunque accepto: quin etiam pro axe sumi potest recta quæcunque diametro Catenariæ AC parallela, in eaque punctum quodcunque pro axis initio. Quomodocunque autem axis, ejusque initium constituatur, quæstioni satisfiet ea tantum curvæ portio, ubi sit $\int xdx\surd(1+pp) = c\int dx\surd(1+pp)$. Ponamus pro axe ipsam diametrum AC, & verticem A pro initio abscissarum accipi. Quia in A, ubi est $x = 0$, fit $\frac{dy}{dx} = p = \infty$, necesse est ut sit $cc - bb = 0$, ideoque $b = c$. Verum hoc casu fit $y = \int\frac{cdx}{\surd(xx - 2cx)}$, quæ curva sursum directa fit imaginaria, donec fiat $x > 2c$. Sit ergo $x = 2c + t$, erit $t =$ abscissæ AP, & $y = PM = \int\frac{cdt}{\surd(2ct + tt)}$; curvaque DAD erit catenaria ordinaria. Quo autem appareat quanta ejus portio quæstioni satisfaciat, notandum est, ob $dx = dt$, esse $p = \frac{c}{\surd(2ct + tt)}$, & $\surd(1+pp) = \frac{c+t}{\surd(2ct+tt)}$; hincque $\int dx\surd(1+pp) = \int\frac{(c+t)dt}{\surd(2ct+tt)} = \surd(2ct+tt)$. At ipsa expressio $\frac{\int xdx\surd(1+pp)}{\int dx\surd(1+pp)}$ fit

fit $= 2c + \frac{\int t\,dt\,\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{(2ct+tt)}}$, quæ ipsi c æqualis fieri nullo modo potest. Ex quo concluditur nullam curvæ hujus portionem quæsito præ reliquis magis satisfacere.. Quamobrem initium abscissarum non sumi potest in vertice A. Sumatur ergo in alio quocunque puncto, positaque $AP = t$, fieri debet $2bt + tt = (c-x)^2 - bb$; unde fit, vel $b + t = x - c$, vel $b + t = c - x$. Prior æquatio $x = b + c + t$ locum habere nequit; quia, ob $dx = dt$, fieri non potest $\frac{\int x\,dt\,\sqrt{(1+pp)}}{\int dt\,\sqrt{(1+pp)}}$ seu $(b + c + \frac{\int t\,dt\,\sqrt{(1+pp)}}{\int dt\,\sqrt{(1+pp)}}) = c$. Ergo fiat $x = c - b - t$, quo casu abscissæ ab aliquo puncto axis AC superiori deorsum descendent: fierique deberet $\frac{\int x\,dx\,\sqrt{(1+pp)}}{\int dx\,\sqrt{(1+pp)}}$ seu $c - b - \frac{\int t\,dt\,\sqrt{(1+pp)}}{\int dt\,\sqrt{(1+pp)}} = c$, quod pariter fieri nequit; ex quo concludendum est, nullam portionem magis quam aliam quamvis satisfacere. Hoc autem inde venire videtur, quod Catenaria duas habet partes conjugatas veluti Hyperbola conica, hincque semper fieri potest $\frac{\int x\,dx\,\sqrt{(1+pp)}}{\int dx\,\sqrt{(1+pp)}} = 0$, qui est valor minimus. Hoc clarius confirmari potest ex valore invento $p = \frac{b}{\sqrt{((c-x)^2 - b^2)}}$; unde fit $\sqrt{(1+pp)} = \frac{c-x}{\sqrt{((c-x)^2 - b^2)}} = (c-x)r$, posito brevitatis gratia $r = \frac{1}{\sqrt{((c-x)^2 - b^2)}}$. Oporteret ergo in casu quæsito esse $\frac{\int (c-x)\,x\,r\,dx}{\int (c-x)\,r\,dx} = c$ seu $\int (c-x)^2\,r\,dx = 0$, quod cum casu $x = 0$ evanescere debeat, alio insuper casu evanescere deberet. At est $\int (c-x)^2 r\,dx = \int \frac{(c-x)^2\,dx}{\sqrt{((c-x)^2 - b^2)}}$ $= -\frac{1}{2}(c-x)\sqrt{((c-x)^2 - b^2)} - \frac{bb}{2}\,l\,\frac{c - x + \sqrt{((c-x)^2 - b^2)}}{c + \sqrt{(c^2 - b^2)}}$ $+ \frac{1}{2}c\,\sqrt{(c^2 - b^2)}$, quæ expressio, cum semel fuit $= 0$, post, ob $(c-x)^2$ perpetuo affirmativum, continuo crescet neque denuo

nuo fieri potest $= 0$. Quamobrem ambos terminos integrationis formulæ $\int \frac{(c - x)^2 dx}{\sqrt{((c-x)^2 - b^2)}}$ inter se congruere oportet; quod evenit si fuerit $x = c$: quo casu curva satisfaciens abit in lineam rectam axi normalem, quæ utique centrum suum gravitatis a se minime habet remotum.

EXEMPLUM IV.

30. *Invenire curvam, in qua, pro data abscissa* $x = a$, *sit hæc expressio* $\frac{\int yxdx}{\int dx \sqrt{(1+pp)}}$ *maximum vel minimum.*

Posito $x = a$, fiet $\int yxdx = A$, & $\int dx \sqrt{(1+pp)} = B$. Jam formulæ $\int yxdx$ valor differentialis est $dA = nv.dx.x = nv.xdx$, & formulæ $\int dx \sqrt{(1+pp)}$ valor differentialis est $dB = - nv.d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Quare cum sit $BdA = AdB$, habebitur ista æquatio $Bxdx = - d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$, seu $xdx = - ccd.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$, posito $A = Bc^2$. Unde integrando obtinebitur $xx = C - \frac{2ccp}{\sqrt{(1+pp)}}$, hincque $p = \frac{bc - xx}{\sqrt{(4c^4 - (bc - xx)^2)}} = \frac{dy}{dx}$; quæ præbet $y = \int \frac{(bc - xx)dx}{\sqrt{(4c^4 - (bc - xx)^2)}}$, quæ est æquatio generalis pro curva Elastica: cujus hæc proprietas, quod radius osculi ubique abscissæ x sit reciproce proportionalis: id quod patet ex æquatione $xdx = - ccd.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$, quæ abit in $\frac{-dx}{d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}} = \frac{cc}{x}$, estque $\frac{-dx}{d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}} = - \frac{dx(1+pp)^{3:2}}{dp}$ radius osculi in curva. Hujus autem curvæ tanta portio ab initio computando satisfacit, in qua erit $\int yxdx$

$=$

$= cc\int dx\sqrt{(1+pp)} = 2c^4\int\frac{dx}{\sqrt{(4c^4-(bc-xx)^2)}}$; quæ determinatio eo revocatur, ut effici debeat $\int dx\sqrt{(4c^4-(bc-xx)^2)}$ $= (aa-bc)\int\frac{dx(bc-xx)}{\sqrt{(4c^4-(bc-xx)^2)}}$, si post integrationem utramque ponatur $x = a$. Hoc itaque modo constans illa c per a determinabitur.

PROPOSITIO IV. PROBLEMA.

31. *Invenire æquationem inter binas variabiles* x *&* y *ita comparatam, ut, posita variabili* x = a, *maximum minimumve fiat expressio* W, *quæ sit functio quæcunque formularum integralium*, $\int Z dx$, $\int Y dx$, $\int X dx$, *&c. in quibus denotent* Z, Y, X *&c. functiones quascunque ipsarum* x, y, p, q, *&c. sive, determinatas, sive indeterminatas.*

S O L U T I O.

Ponamus idoneam æquationem inter x & y jam esse inventam, positoque $x = a$, fieri $\int Z dx = A$; $\int Y dx = B$; $\int X dx = C$ &c. hisque valoribus in expressione W substitutis, habebitur revera maximum vel minimum. Quod si igitur altera variabilis y in uno loco particula $n\nu$ augeri ponatur, atque nascentes hinc mutationes in singulis formulis $\int Z dx$, $\int Y dx$, $\int X dx$ &c. introducantur, idem pro W valor prodire debet. At ab illa particula $n\nu$ formulæ $\int Z dx$, $\int Y dx$, & $\int X dx$ &c. quæque suis valoribus differentialibus augebuntur. Si ergo ponatur formulæ $\int Z dx$ valor differentialis $= dA$, formulæ $\int Y dx = dB$, formulæ $\int X dx = dC$, &c. loco quantitatum A, B, C, &c. orientur a particula $n\nu$ istæ auctæ $A + dA$, $B + dB$, $C + dC$ &c. quæ in W substitutæ eundem valorem producere debent, quem ipsæ A, B, C, &c. Ponamus, $A + dA$, $B + dB$, $C + dC$ &c. loco $\int Z dx$, $\int Y dx$, $\int X dx$ &c. substitutis, prodire $W + dW$; eritque $W + dW = W$, ideoque $dW = 0$. Hic autem valor dW, ut ex differentiationis natura liquet, invenitur, si quantitas W, postquam in illa, loco formularum integralium, litteræ A, B, C &c. sunt substitutæ, differentietur, his ipsis litteris A, B, C, &c. tanquam variabilibus tractatis; in hocce differentiali, dA, dB, dC &c. valores differentiales formularum respondentium $\int Z dx$, $\int Y dx$, $\int X dx$ &c. designent. Hac igitur significatione sumptum differentiale quantitatis propositæ W, si id nihilo æquale ponatur, dabit æquationem inter x & y quæsitam. Q. E. I.

COROLL. I.

32. Si ergo proposita fuerit ejusmodi expressio W functio formularum integralium $\int Z dx$, $\int Y dx$, $\int X dx$ &c. quæ, pro determinato ipsius x valore $= a$, debeat esse maximum vel minimum: tum loco formularum $\int Z dx$, $\int Y dx$, $\int X dx$ &c. scribantur litteræ A, B, C, &c. quo facto, expressio W differentietur his litteris A, B, C, &c. solis tanquam variabilibus tractatis, atque differentiale ponatur $= 0$.

COROLL. II.

33. In hoc differentiali, in quo inerunt litteræ A, B, C; &c. cum suis differentialibus dA, dB, dC &c. litteræ A, B, C &c. denotabunt respective valores formularum $\int Z dx$, $\int Y dx$, $\int X dx$ &c. quos induunt posito $x = a$; at differentialia dA, dB, dC, &c. exprimunt valores differentiales earundem formularum integralium abscissæ $x = a$ respondentes.

COROLL. III.

34. Ex præcedentibus autem apparet, si Z, Y, X &c. fuerint functiones determinatæ quantitatum x, y, p, q, &c. tum valores differentiales dA, dB, dC, &c. non a valore a pendere: contra vero si Z, Y, X &c. fuerint functiones indefinitæ, tum valores differentiales dA, dB, dC &c. simul a valore a pendere debere.

CO-

COROLL. IV.

35. Cum igitur hoc modo W fiat functio litterarum A, B, C, &c. ejus differentiale hujusmodi habebit formam $FdA + GdB + HdC +$ &c. hincque æquatio quæsita erit $0 = FdA + GdB + HdC +$ &c. ubi F, G, H &c. erunt quantitates constantes, per A, B, C &c. determinatæ.

COROLL. V.

36. Æquatio ergo Problemati satisfaciens, constabit ex valoribus differentialibus singularum formularum integralium in maximi minimive expressione W contentarum, singulis per constantes quantitates determinatas multiplicatis: horum scilicet productorum aggregatum nihilo æquale positum dabit æquationem desideratam.

SCHOLION I.

37. Potuissemus hanc Problema propositum resolvendi methodum, ex solutionibus binorum Problematum præcedentium, per inductionem, jam concludere: quippe ex quibus jam patebat, si fuerit maximi minimive formula W, vel productum ex duabus formulis integralibus, vel quotus ex divisione unius per alteram ortus, tum differentiale expressionis W modo exposito sumtum præbere æquationem Problemati convenientem. Præstitit autem hoc Problema, ob summam ejus extensionem, singulari solutione munire. In hoc enim Problemate continentur omnes omnino Quæstiones, quæ inhoc genere, quo expressio quæpiam maxima minimave desideratur, unquam proponi atque excogitari possunt: ideoque per istam Propositionem penitus exhausta est methodus maximorum ac minimorum absoluta, quam primo pertractandam suscepimus. Præterea hic notandum est, si expressio W non tantum formulas integrales, uti posui-

mus, complectatur; verum etiam functiones determinatas ipsarum x, y, p, q, &c. tum solutionem nihilo difficiliorem reddi. Nam pari modo, loco harum functionum determinatarum, quantitates constantes poni debent, in quas scilicet abeunt posito $x = a$; at postmodum, in differentiatione ipsius W, has quantitates etiam tanquam constantes tractari oportet; eo quod functiones determinatæ nullos valores differentiales recipiunt. Quo autem clarius appareat, quomodo istiusmodi expressiones tractari conveniat; in sequentibus Exemplis nonnulla occurrent, quæ hoc argumentum penitus illustrabunt.

EXEMPLUM I.

38. *Invenire curvam coordinatis orthogonalibus contentam, in qua sit maximum vel minimum ista expressio* $(1 + pp)^{1:2} \int y dx + y \int dx \surd(1 + pp)$; *si ponatur abscissa* $x = a$.

Ponamus æquationem inter x & y quæsito satisfacientem jam esse inventam, atque posito $x = a$ fieri $y = f$ & $\surd(1 + pp) = g$: itemque $\int y\, dx = A$, & $\int dx \surd(1 + pp) = B$; erit $dA = nv.dx$, & $dB = - nv.d\frac{p}{\surd(1 + pp)}$. Expressio igitur, quæ maxima erit vel minima, hoc casu est $gA + fB$, cujus differentiale est $g\,dA + f\,dB$; quod positum $= 0$, dabit æquationem desideratam pro curva. Hic scilicet intelligitur litteras y & f, quæ ex functionibus determinatis sunt ortæ, in differentiatione tanquam quantitates constantes esse tractatas. Substitutis jam pro dA & dB valoribus debitis, divisioneque per nv facta, orietur ista æquatio pro curva quæsita $g\,dx = f d. \frac{p}{\surd(1 + pp)}$. Ponatur $\frac{f}{g} = c$, ita ut sit $\frac{y}{\surd(1 + pp)} = c$, casu quo est $x = a$; erit integrando $x + b = \frac{cp}{\surd(1 + pp)}$, atque $p =$

$\frac{x+b}{\surd(cc-(x+b)^2)} = \frac{dy}{dx}$; ex qua fit $y = h \pm \surd(c^2 - (x+b)^2)$. Curva igitur satisfaciens est Circulus, radio c descriptus, abscissis super recta quacunque assumptis, pariterque abscissarum initio ubicumque statuto. Quantitas autem c, quæ radium Circuli constituit, ex definita abscissa $x = a$ determinatur; quia esse debet $\frac{y}{\surd(1+pp)} = c$, casu quo $x = a$. Fit autem hoc casu $y = h \pm \surd(c^2 - (a+b)^2)$, & $\surd(1+pp) = \frac{c}{\surd(cc-(a+b)^2)}$: unde oritur $cc = h\surd(cc-(a+b)^2) \pm (cc-(a+b)^2)$, per quam, vel c per a, vel vicissim a per c determinari potest. Ponamus esse $h = 0$, $b = -c$, ita ut axis sit Circuli diameter, initiumque abscissarum in vertice constituatur; erit $y = \surd(2cx - xx)$, atque fiet $(a-c)^2 = 0$, seu $c = a$. Ex quo intelligitur, hoc casu quadrantem Circuli quæsito satisfacere. Sin autem initium abscissarum in loco diametri quocunque capiatur, fiet tantum $h = 0$, & si applicatæ positivæ sumantur fiet $(a+b)^2 = 0$, seu, $b = -a$. Diameter Circuli ergo manet indeterminatus: portioque Circuli hoc modo sumti quæstioni satisfaciet, quæ abscissæ a sua origine ad centrum Circuli usque productæ respondet.

EXEMPLUM II.

39. *Invenire æquationem inter* x *&* y, *ut pro valore definito* x $= a$, *hæc expressio* $y^{\int dx \surd(1+pp)} \int y dx$ *fiat maximum vel minimum.*

Posito $x = a$, fiat $y = f$, $\int dx \surd(1+pp) = A$, & $\int y dx = B$, erit $dA = -nv.\, d.\, \frac{p}{\surd(1+pp)}$ & $dB = nv.\, dx$.

Maximum ergo minimumve esse oportet hanc quantitatem $f^A B$, cujus differentiale est $f^A B\, dA\, lf + f^A\, dB$; quod positum $= 0$ dabit $B\, dA\, lf = -dB$. Pro æquatione quæsita igitur habetur:

betur $Blfd. \frac{p}{\surd(1+pp)} = dx$, & integrando $x+b = \frac{Bplf}{\surd(1+pp)} = \frac{cp}{\surd(1+pp)}$, posito $Blf = c$. Habetur ergo $p = \frac{b+x}{\surd(cc-(b+x)^2)}$ & $y = h \pm \surd(c^2 - (b+x)^2)$. Erit igitur $f = h \pm \surd(c^2 - (b+a)^2)$, posito $x = a$, atque $B = \int y\,dx = ha \pm \int dx \surd(c^2 - (b+x)^2)$, posito post integrationem $x = a$. Facto igitur $Blf = c$, innotescet valor a, cui si x æqualis capiatur in Circulo radii c, portio abscindetur Problemati satisfaciens. Cæterum ex his & Coroll. 5 colligere licet, quoties formula maximi minimive fuerit functio quæcunque binarum harum formularum $\int y\,dx$ & $\int dx \surd(1+pp)$, curvam satisfacientem perpetuo esse Circulum: tantum ex solutione quantitas portionis satisfacientis debet diligenter investigari ac determinari.

Exemplum III.

40. *Invenire æquationem inter* x *&* y, *ut, posito* x = a, *maximum minimumve fiat ista expressio* $e^{-n\int dx\surd(1+pp)} \int e^{n\int dx\surd(1+pp)}\,dx$.

Ponamus, casu proposito quo $x = a$, fieri $n\int dx \surd(1+pp) = A$, atque $\int e^{n\int dx\surd(1+pp)}\,dx = B$; ita ut maximum minimumve sit hæc quantitas $e^{-A} B$, cujus differentiale est $e^{-A} dB - e^{-A} B dA$; quod positum $= 0$ dabit æquationem hanc $dB = B dA$. At est dA valor differentialis formulæ $n\int dx \surd(1+pp)$, unde erit $dA = -$ n $\nu. d. \frac{np}{\surd(1+pp)}$: atque dB est valor differentialis formulæ $\int e^{n\int dx\surd(1+pp)}\,dx$, quæ continetur in Casu secundo §. 7, ubi est $Z = e^{n\int dx\surd(1+pp)}$ & $\Pi = \int dx \surd(1+pp)$, ita ut sit $Z = e^{n\Pi}$, & $dZ = e^{n\Pi} n\,d\Pi$, unde erit $L = e^{n\Pi} n$, & reliquæ litteræ M, N, P,

P, &c. fient $= 0$. Porro, ob $\Pi = \int dx \sqrt{(1+pp)}$, erit $[Z] = \sqrt{(1+pp)}$, & $d[Z] = \frac{p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}$, ex quo erit $[M] = 0$, $[N] = 0$, & $[P] = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Jam est $\int L\,dx = n\int e^{n\int dx\sqrt{(1+pp)}}\,dx$, cujus valor, posito $x = a$, erit $= nB$; hincque $V = n\,(B - \int e^{n\int dx\sqrt{(1+pp)}}\,dx)$. Per Regulam ergo datam fiet $dB = \text{n}\,\nu.\ dx\,(-\frac{d.\,[P]\,V}{dx}) = -\text{n}\,\nu.\ d.\,\frac{np\,(B - \int e^{n\int dx\sqrt{(1+pp)}}\,dx)}{\sqrt{(1+pp)}} = -\text{n}\,\nu.\ d.\,\frac{nBp}{\sqrt{(1+pp)}}$, ob $dB = B\,dA$. Integrando itaque erit

$$\frac{np\,(B - \int e^{n\int dx\sqrt{(1+pp)}}\,dx)}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{nBp}{\sqrt{(1+pp)}} - nb\,;$$

hincque $\frac{b\sqrt{(1+pp)}}{p} = \int e^{n\int dx\sqrt{(1+pp)}}\,dx$. Ex qua æquatione, quia valor determinatus a excessit, perspicuum est æquationem inventam pro quovis ipsius x valore æque valere. Ut autem hanc æquationem evolvamus, erit, differentialibus sumtis, $\frac{-b\,dp}{p^2\sqrt{(1+pp)}} = e^{n\int dx\sqrt{(1+pp)}}\,dx$: quæ, per $\sqrt{(1+pp)}$ multiplicata atque integrata, dat $\frac{nb}{p} + c = e^{n\int dx\sqrt{(1+pp)}}$, qui exponentialis quantitatis valor in illa æquatione substitutus, dabit $\frac{nb\,dx}{p} + c\,dx = -\frac{b\,dp}{p^2\sqrt{(1+pp)}}$, seu $dx = \frac{-b\,dp}{p(nb+cp)\sqrt{(1+pp)}}$. Commodior autem æquatio oritur, si ponatur $\int dx\sqrt{(1+pp)} = s$, eritque s arcus curvæ, si fuerint x & y coordinatæ normales. Quare habebitur ista æquatio $nb + cp = e^{ns}p$, quæ per dx multiplicata, ob $dy = p\,dx$, abit in hanc $nb\,dx + c\,dy = e^{ns}\,dy$.

Cum

Cum autem, posito, $x = 0$, arcus s evanescere debeat, necesse est ut sit hoc casu $\frac{nb}{p} + c = 0$; hinc itaque vel dato curvæ initio constans c determinabitur, vel vicissim ex c positio primæ tangentis innotescet. Cæterum si hanc quæstionem attentius contemplemur, deprehendemus eam jam contineri in Exemplo quodam Capitis præced. §. 45. Cum enim nostra expressio, quæ maximum minimumve esse debeat, sit $e^{-n\int dx\sqrt{(1+pp)}} \int e^{n\int dx\sqrt{(1+pp)}} dx$; ponatur ea $= W$, erit $e^{n\int dx\sqrt{(1+pp)}} W = \int e^{n\int dx\sqrt{(1+pp)}} dx$, atque differentiando fiet $dW + nW dx\sqrt{(1+pp)} = dx$. Maximi igitur minimive expressio W datur per æquationem differentialem, quæ in Casu quarto §. 7 continetur: atque methodo convenienti tractata ad eandem perducit æquationem, quam hîc invenimus. Quæstionem autem illam in se complectentem supra in Cap. præc. §. 45 tractavimus, in quo hunc ipsum casum adjunctum spectare licet. Comparatione autem instituta, summus perspicietur consensus solutionum variarum ejusdem Problematis, quæ quidem tentari queant.

EXEMPLUM IV.

41. *Invenire curvam in qua, pro data abcissa* $= a$, *fiat ista expressio* $\frac{\int dx \,\text{fin.}\, A.\, y.\, \sqrt{(1+pp)}}{\int dx \,\text{cof.}\, A\, y.\, \sqrt{(1+pp)}}$ *maximum vel minimum.*

Posito $x = a$, fiat $\int dx\,(1+pp)^{1:2}\,\text{fin.}\,Ay = A$, & $\int dx\,(1+pp)^{\frac{1}{2}}\,\text{cof.}\,Ay = B$; erit, per valores differentiales, $dA = nv.\, dx\left((1+pp)^{1:2}\,\text{cof.}\,Ay - \frac{1}{dx}\, d.\, \frac{p\,\text{fin.}\,A.\,y}{\sqrt{(1+pp)}}\right)$, & $dB = nv.\, dx\left(-(1+pp)^{1:2}\,\text{fin.}\,Ay - \frac{1}{dx}\, d.\, \frac{p\,\text{cof.}\,Ay}{\sqrt{(1+pp)}}\right)$. Cum igitur $\frac{A}{B}$ debeat esse maximum vel minimum, erit BdA

=

$= A\,dB$; posito ergo $\frac{A}{B} = m$, fiet $(1+pp)^{1:2} dx \operatorname{cof.} Ay - d.\frac{p \operatorname{fin.} Ay}{\sqrt{(1+pp)}} = -m(1+pp)^{\frac{1}{2}} dx \operatorname{fin.} Ay - md.\frac{p \operatorname{cof.} Ay}{\sqrt{(1+pp)}}$. Multiplicetur per p, erit [ob $d.(1+pp)^{1:2} \operatorname{fin.} Ay = dy(1+pp)^{1:2} \operatorname{cof.} Ay + \frac{p\,dp \operatorname{fin.} Ay}{\sqrt{(1+pp)}}$, & $d.(1+pp)^{1:2} \operatorname{cof.} Ay = -dy(1+pp)^{1:2} \operatorname{fin} A.y + \frac{p\,dp \operatorname{cof.} Ay}{\sqrt{(1+pp)}}$] $d.(1+pp)^{1:2} \operatorname{fin.} Ay - d.\frac{pp \operatorname{fin.} Ay}{\sqrt{(1+pp)}} = md.(1+pp)^{1:2} \operatorname{cof.} Ay - md.\frac{pp \operatorname{cof.} Ay}{\sqrt{(1+pp)}}$; quæ integrata & reducta præbet $\frac{\operatorname{fin.} Ay}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{m \operatorname{cof.} Ay}{\sqrt{(1+pp)}} + b$, five $b\sqrt{(1+pp)} = \operatorname{fin.} Ay - m \operatorname{cof.} Ay$; ubi notandum eft fieri debere, fi $x = a$ ponatur, $m = \frac{\int dx(1+pp)^{1:2} \operatorname{fin.} Ay}{\int dx(1+pp)^{1:2} \operatorname{cof.} Ay}$. Sit $m = \frac{\operatorname{fin.} An}{\operatorname{cof.} An} = \operatorname{tang.} An$; fiet $b\sqrt{(1+pp)} = \frac{\operatorname{fin} A(y-n)}{\operatorname{cof.} An}$, atque $y = n + A \operatorname{fin.} b(1+pp)^{1:2} \operatorname{cof.} An$. Quia vero eft $dy = pdx$, erit $dx = \frac{dy}{p}$. At eft $dy = \frac{cp\,dp}{\sqrt{(1+pp)(1-cc-ccpp)}}$, pofito $b \operatorname{cof.} An = c$. Ex quibus conficitur $x = \int \frac{c\,dp}{\sqrt{(1+pp)(1-cc-ccpp)}}$, atque $y = \int \frac{cp\,dp}{\sqrt{(1+pp)(1-cc-ccpp)}}$; longitudo autem curvæ erit $= \int \frac{c\,dp}{\sqrt{(1-cc-ccpp)}} = A \operatorname{fin.} \frac{cp}{\sqrt{(1-cc)}}$. Quare fi arcus curvæ dicatur s; habebitur ifta concinna æquatio $dx \operatorname{fin} As = \frac{c\,dy}{\sqrt{(1-cc)}}$: Conftructio vero ex anterioribus formulis fponte confequitur.

SCHOLION II.

42. His igitur Capitibus penitus absolvimus eam Methodi maximorum ac minimorum ad lineas curvas inveniendas accommodatæ partem, quam absolutam vocavimus: in qua semper linea curva requiri solet, quæ habeat, pro dato quodam abscissæ seu alterius variabilis x valore, expressionem quamcunque indeterminatam, maximum minimumve. Nam ista expressio, quæ maximum minimumve esse debet, vel erit una quædam formula integralis formæ $\int Z\,dx$, ita ut Z sit functio quæcunque ipsarum x, y, p, q, &c. sive definita sive indefinita; pro quibus casibus Methodum tradidimus in Capitibus præcedentibus: Vel maximi minimive expressio illa continebit in se plures ejusmodi formulas integrales, ita ut sit duarum pluriumve formularum integralium functio quæcunque; pro hocque casu Methodus idonea in isto Capite est exposita, atque Exemplis illustrata. Universa autem Methodus, quam hic dedimus, nititur inventione valorum differentialium, qui singulis formulis integralibus quæ vel ipsæ maximum minimumve esse debeant, vel in maximi minimive expressione contineantur, atque ideo tota solvendi Methodus reducitur ad Casus illos, quos §. 7 hujus Capitis conjunctim repræsentavimus. Qui igitur illos casus in memoria tenet, vel in promtu habet, is ad omnia hujus generis Problemata expedite resolvenda erit paratus. Neque vero solum Casus ibi enumerati Methodum maximorum ac minimorum absolutam constituunt; verum etiam Methodum alteram relativam, quam in sequentibus aggrediemur, absolvent; ex quo illorum Casuum summus usus in utraque Methodo abunde perspicietur. Hanc autem tractationem duobus Capitibus absolvemus, in quorum priori omnibus curvis, ex quibus quæsita debet erui, unam quandam proprietatem communem, in posteriori vero plures tribuemus.

CA-