niat. In has autem tractationes natura formulæ $\int Z\,dx$, quæ maximum minimumve esse debet, ingens discrimen infert, prout Z fuerit functio vel determinata vel indeterminata; quemadmodum jam observavimus.

CAPUT II.

De Methodo maximorum ac minimorum ad lineas curvas inveniendas absoluta.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

1. *SI in curva quacunque* amz *una applicata quævis* Nn *augeatur particula infinite parva* nν; *invenire incrementa vel decrementa, quæ singulæ quantitates determinatæ ad curvam pertinentes hinc accipient.* *Fig. 4.*

SOLUTIO.

Quantitates determinatæ ad curvam propositam pertinentes sunt, præter abscissam x, quæ non afficitur, hæ y, p, q, r, s, &c. cum suis derivatis valoribus, quos in locis vel sequentibus vel antecedentibus sortiuntur. Quod si nunc ponamus $AM = x$, & $Mm = y$, erit $Nn = y'$, hujusque valor per translationem puncti n in ν augebitur particula nν, reliquæ autem applicatæ y'', y''', y^{IV}, &c. pariter ac præcedentes $y_{,}$, $y_{,,}$, $y_{,,,}$, $y_{,IV}$ &c. non afficientur. Cum igitur sola applicata y' crescat particula nν; ex Cap. præc. §. §. 51 & seqq. colligetur quantum incrementum reliquæ quantitates omnes capiant ex incremento solius applicatæ y'. Omnes scilicet quantitates, quarum valor pendet ab y', mutationem subibunt, reliquæ vero, quæ ab y' non pendent, manebunt invariatæ. Ita cum sit $p = \frac{y' - y}{dx}$ hæc quantitas p crescet particula $\frac{n\nu}{dx}$; at cum sit $p' = \frac{y'' - y'}{dx}$, hæc quantitas

p' de-

p' decrefcet particula $\frac{nv}{dx}$. Similique modo reliquarum quantitatum incrementa vel decrementa reperientur, delendo in earum valoribus fupra exhibitis omnes valores ipfius y, præter hunc y', hujufque loco fcribendo $n\nu$. Hoc modo omnium quantitatum determinatarum, quæ quidem mutationem patiuntur, incrementa in fequenti Tabella congeffimus

Quant.	*Increm.*	*Quant.*	*Increm.*
y'	$+ n\nu$	$s_{\prime\prime\prime}$	$+\frac{n\nu}{dx^4}$
p	$+\frac{n\nu}{dx}$	$s_{\prime\prime}$	$-\frac{4n\nu}{dx^4}$
p'	$-\frac{n\nu}{dx}$	$s_{\prime}$	$+\frac{6n\nu}{dx^4}$
$q_{\prime}$	$+\frac{n\nu}{dx^2}$	s	$-\frac{4n\nu}{dx^4}$
q	$-\frac{2n\nu}{dx^2}$	s'	$+\frac{n\nu}{dx^4}$
q'	$+\frac{n\nu}{dx^2}$	t_{IV}	$+\frac{n\nu}{dx^5}$
$r_{\prime\prime}$	$+\frac{n\nu}{dx^3}$	$t_{\prime\prime\prime}$	$-\frac{5n\nu}{dx^5}$
$r_{\prime}$	$-\frac{3n\nu}{dx^3}$	$t_{\prime\prime}$	$+\frac{10n\nu}{dx^5}$
r	$+\frac{3n\nu}{dx^3}$	$t_{\prime}$	$-\frac{10n\nu}{dx^5}$
r'	$-\frac{n\nu}{dx^3}$	t	$+\frac{5n\nu}{dx^5}$
		t'	$-\frac{n\nu}{dx^5}$

Atque ex hac Tabella etiam ulteriorum quantitatum, fi quæ occurrunt, incrementa vel decrementa facile cognofci poterunt. *Q. E. I.*

Co-

COROLL. I.

2. Cognitis igitur incrementis harum quantitatum primariarum ad curvam pertinentium, inde omnium quantitatum ex iis compositarum incrementa, quæ oriuntur ex aucta applicata y', determinari poterunt, si ratio compositionis spectetur.

COROLL. II.

3. Harum scilicet quantitatum incrementa exhibita, considerari poterunt tanquam earum differentialia. Atque si proposita fuerit quantitas quæcunque ex illis composita, ejus conveniens incrementum ex translatione puncti n in ν ortum invenietur, differentiando illam quantitatem, & loco differentialium singularum quantitatum, scribendo ea incrementa, quæ his quantitatibus sunt adscripta.

COROLL. III.

4. Si igitur habeatur hæc functio $y'\sqrt{(1+pp)}$, cujus incrementum, quod ex translatione puncti n in ν oritur sit determinandum; ea functio primum differentietur; unde prodibit $dy'\sqrt{(1+pp)} + \frac{y' p\, dp}{\sqrt{(1+pp)}}$; hicque loco dy' & dp scribantur incrementa quantitatibus y' & p convenientia, nempe $+ n\nu$ & $+ \frac{n\nu}{dx}$; eritque functionis propositæ incrementum $= + n\nu . \sqrt{(1+pp)} + \frac{y' p . n\nu}{dx\sqrt{(1+pp)}}$.

COROLL. IV.

5. Expedite igitur per differentiationem functionis cujuscunque, incrementum, quod ex incremento $n\nu$ applicatæ y' oritur, assignari potest; id quod ex inspectione figuræ difficulter & minime generaliter fieri potest.

SCHOLION.

6. Probe notandum eſt hunc modum incrementa functionum ſeu quantitatum ex x, y, p, q, &c. harumque derivatis y', y'', p', p'', &c. datarum incrementa inveniendi, tantum ad functiones determinatas patere, minime vero ad indeterminatas extendi poſſe. Quod ſi enim functio propoſita fuerit indeterminata, ſeu formula integralis indefinita, integrationem neque algebraïce neque tranſcendenter admittens, tum differentiatione nihil conſequimur ad ejus incrementum inveniendum. In ſequentibus autem, ubi ejuſmodi maximi minimive formulas $\int Z dx$ ſumus contemplaturi, in quibus Z ſit functio talis indeterminata, in hujuſmodi functionum incrementa ſumus inquiſituri. Sin autem Z fuerit functio determinata, propoſiti Problematis ſolutio ſufficere poteſt ad ſolutiones Problematum huc pertinentium abſolvendas.

PROPOSITIO II. PROBLEMA.

Fig. 4. 7. *Si fuerit* Z *functio determinata ipſarum* x *&* y *tantum, invenire curvam* az, *in qua valor formulæ* $\int Z dx$ *ſit maximus vel minimus.*

SOLUTIO.

Concipiatur abſciſſa AZ, cui maximum minimumve formulæ $\int Z dx$ reſpondere debet, diviſa in innumerabilia elementa æqualia, ſingula per dx denotanda; poſitaque abſciſſa indefinita AM $= x$, & applicata Mm $= y$, ex formula $\int Z dx$ elemento MN reſpondebit $Z dx$; atque ſecundum receptum notandi modum, elemento ſequenti NO reſpondebit $Z' dx$, & ſequentibus elementis OP, PQ &c. reſpondebunt valores $Z'' dx$, $Z''' dx$, &c. antecedentibus vero elementis LM, KL, IK, reſpondebunt $Z_{,} dx$; $Z_{,,} dx$; $Z_{,,,} dx$, &c. Quare ſi curva az ſit ea ipſa quæ quæritur, debebit eſſe $Z dx + Z' dx + Z'' dx +$ &c. una cum

$Z_{,} dx$

$Z_{,}dx + Z_{,,}dx + Z_{,,,}dx +$ &c. maximum vel minimum. Quod si igitur una applicata $Nn = y'$ augeatur particula $n\nu$, illa expressio eundem valorem retinere, atque adeo valor differentialis formulæ $\int Zdx$, seu summæ terminorum $Zdx + Z'dx + Z''dx + Z'''dx +$ &c. una cum $Z_{,}dx + Z_{,,}dx + Z_{,,,}dx +$ &c. evanescere debet. Singulorum igitur horum terminorum valores differentiales, qui oriuntur ex translatione puncti n in ν, investigari debebunt; eorumque aggregatum erit valor differentialis formulæ $\int Zdx$ respondens, qui positus $= 0$ æquationem pro curva quæsita præbebit. Quoniam autem Z ponitur functio determinata ipsarum x & y; habebit ipsius differentiale dZ hujusmodi formam $Mdx + Ndy$; ita ut sit $dZ = Mdx + Ndy$. Valorum igitur derivatorum ipsius Z differentialia ita se habebunt.

$dZ' = M'dx + N'dy'$	$dZ_{,} = M_{,}dx + N_{,}dy_{,}$
$dZ'' = M''dx + N''dy''$	$dZ_{,,} = M_{,,}dx + N_{,,}dy_{,,}$
&c.	&c.

Cum nunc valores differentiales terminorum Zdx, $Z'dx$, $Z''dx$, &c. itemque ipsorum $Z_{,}dx$, $Z_{,,}dx$, &c. inveniantur, si hi termini differentientur, atque loco dy' in differentialibus scribatur $n\nu$, loco omnium reliquorum differentialium vero 0; manifestum est solum terminum $Z'dx$ habiturum esse valorem differentialem, quoniam in ejus solius differentiali occurrit dy'. Scripto itaque $n\nu$ loco dy', erit termini $Z'dx$ valor differentialis $= N'dx \cdot n\nu$, qui simul erit valor differentialis totius formulæ $\int Zdx$; quia reliqui termini præter $Z'dx$ nullam variationem patiuntur. Loco N' autem ponere poterimus N, quia est $N' = N + dN$, & dN præ N evanescit. Pro curva igitur quæsita, in qua sit $\int Zdx$ maximum vel minimum, ista habetur æquatio $Ndx \cdot n\nu = 0$ seu $N = 0$; existente $dZ = Mdx + Ndy$. Q. E. I.

COROLL. I.

8. Si igitur curva debeat definiri, in qua sit $\int Z\,dx$ maximum vel minimum, atque Z sit functio determinata ipsarum x & y tantum; tum quantitatem Z differentiari oportet; quod cum habiturum sit hujusmodi formam $dZ = M\,dx + N\,dy$, hinc formabitur æquatio pro curva quæsita, quæ erit $N = 0$.

COROLL. II.

9. Cum ergo N sit functio ipsarum x & y determinata, in æquatione pro curva $N = 0$ nulla inerit quantitas constans, quæ non fuit in formula maximi minimive $\int Z\,dx$; & hanc ob rem curva inventa erit unica & perfecte determinata.

COROLL. III.

10. In quæstionibus igitur sub hoc Problemate comprehensis, curva satisfaciens ex sola maximi minimive formula determinatur; neque licebit insuper puncta aliqua præscribere, per quæ curva quæsita transeat.

COROLL. IV.

11. Quod si Z fuerit functio tantum ipsius x, ita ut y non involvat; erit tum $\int Z\,dx$ functio determinata pariter ipsius x tantum; eique adeo omnes curvæ eidem abscissæ respondentes æque satisfacient. Idem vero hoc monstrat calculus; hoc enim casu, quo in Z non inest y, fiet $N = 0$; ideoque nulla prodit æquatio pro curva quæsita.

COROLL. V.

12. Statim etiam intelligi potest, utrum detur linea curva, in qua hujusmodi formula $\int Z\,dx$ sit maximum vel minimum. Si enim ex differentiatione ipsius Z ejusmodi valor pro N reperiatur,

tur, ut per æquationem $N = 0$ nulla curva exprimatur; tum etiam nulla curva extat in qua propoſita formula $\int Z\,dx$ ſit maximum vel minimum.

Coroll. VI.

13. Denique etiam perſpicitur, hanc maximi minimive proprietatem non uni alicui determinatæ abſciſſæ eſſe adſtrictam; ſed ſi curva pro una abſciſſa reddat formulam $\int Z\,dx$ maximum vel minimum, eandem pro quacunque alia abſciſſa, pariter maximum minimumve valorem eſſe habiturum.

Scholion I.

14. Nacti ergo ſumus methodum facilem, inter omnes curvas eidem abſciſſæ reſpondentes, eam determinandi, in qua conſtituat formula $\int Z\,dx$ valorem maximum vel minimum, ſiquidem Z eſt functio determinata ipſarum x & y tantum. Simul vero etiam patet curvam ſatisfacientem ſemper fore algebraïcam, ſiquidem Z fuerit functio algebraïca ipſarum x & y. Curvæ igitur hoc modo inventæ iſta erit proprietas, ut ſi ad eandem abſciſſam alia quæcunque conſtituatur linea curva, tum pro ea valor formulæ $\int Z\,dx$ certo vel minor vel major ſit prodíturus quam pro inventa; prout in inventa formula $\int Z\,dx$ vel fuerit maxima vel minima. Cum autem adhuc dubium ſit utrum in curva inventa valor formulæ $\int Z\,dx$ futurus ſit maximus an minimus; de eo in quovis caſu particulari facile fiet dijudicatio; in genere autem nihil omnino decidi poteſt. Interim hoc certum eſt, ſi unica prodit æquatio, tum tantum vel maximum vel mimum locum habere poſſe; hoc eſt, ſi curva inventa ſit pro maximo; tum minimum non dari, ſed valorem formulæ $\int Z\,dx$ in infinitum diminui poſſe. Pari modo, ſi unica inventa fuerit curva, in eaque formula $\int Z\,dx$ ſit minima, tum valorem $\int Z\,dx$ in infinitum augeri poſſe. Quod ſi autem ſolutio nullam prorſus præbeat curvam ſatisfacientem, id indicio erit valorem formulæ

$\int Z\,dx$ pro quacunque abſciſſa tam in infinitum creſcere quam decreſcere poſſe.

SCHOLION II.

15. Ex eadem etiam ſolutione reperiri poterunt illæ curvæ maximi minimive proprietate præditæ alterius generis ſupra memoratæ, ad quas non pervenitur per valores differentiales evaneſcentes, ſed infinite magnos; quod maximorum & minimorum genus ab illo maxime diſcrepat. Reperientur autem iſtæ curvæ, ſi valor differentialis $N\,dx.\,n\nu$ non nihilo, ſed infinito æqualis ponatur. Quoties igitur hæc æquatio $N = \infty$ lineam aliquam curvam ſuggerit; tum in ea pariter formula $\int Z\,dx$ maximum vel minimum obtinebit valorem: Hoc ſcilicet eveniet, quando pro N prodit fractio, cujus denominator nihilo æqualis poſitus, præbet æquationem pro aliqua linea curva. Hoc itaque pacto plures curvæ reperiri poſſunt, quæ eidem quæſtioni ſatisfaciant; quarum aliæ maxima continebunt, aliæ minima. Fieri etiam poteſt, ut plures quam duæ curvæ Problemati ſatisfacientes reperiantur, etiamſi binæ tantum oriri queant æquationes, ſcilicet $N = 0$ & $N = \infty$. Si enim N fuerit quantitas ex factoribus compoſita; tum quilibet factor, vel nihilo vel infinito æqualis poſitus, dabit æquationem pro curva ſatisfaciente; conſtat enim ſæpenumero plura maxima pluraque minima locum habere poſſe. Hæc autem omnia clarius enodabuntur in ſequentibus Exemplis in hoc Problemate contentis.

EXEMPLUM I.

16. *Invenire curvam, quæ, inter omnes omnino curvas eidem abſciſſæ reſpondentes, habeat* $\int XY\,dx$ *maximum vel minimum; denotante* X *functionem ipſius* y, *&* Y *ipſius* y *tantum.*

In hoc igitur caſu fiet $Z = XY$; ideoque $dZ = Y\,dX + X\,dY = M\,dx + N\,dy$. Erit ergo $M = \frac{Y\,dX}{dx}$ & $N = \frac{X\,dY}{dy}$;

&

ob X ipsius x & Y ipsius y functionem. Pro curva igitur quæsita erit $N = \frac{X\,dY}{dy} = 0$: quoniam autem Y est functio ipsius y, ponatur $dY = \Theta\,dy$; erit Θ pariter functio ipsius y; ideoque pro curva quæsita, si quæ satisfacit, habetur hæc aquatio $X\Theta = 0$, ideoque vel $X = 0$, vel $\Theta = 0$; quarum cum neutra lineam curvam præbeat, apparet huic quæstioni nullam omnino curvam satisfacere, sed valorem propositum $\int XY\,dx$ in infinitum cum augeri tum diminui posse. Ex æquatione autem $\Theta = 0$, quia Θ est functio ipsius y, sequitur $y =$ *Const.* quæ æquatio præbet lineam rectam parallelam abscissæ AZ, cujus distantia tanta est, ut fiat functio Y maxima vel minima. Patet enim, si quantitas Y maximum minimumve valorem admittat, tum etiam formulam $\int XY\,dx$ fieri maximum vel minimum. Altera autem æquatio $X = 0$, quia præbet $x =$ *Const.* nequidem lineam rectam quæstioni satisfacientem exhibet; quia præbet lineam rectam normalem ad abscissam, quæ propterea non datæ abscissæ cuipiam, sed tantum ejus uni puncto respondebit.

EXEMPLUM II.

17. *Invenire curvam, quæ, inter omnes eidem abscissæ respondentes curvas, habeat valorem formulæ* $\int (ax - yy)\,y\,dx$ *maximum vel minimum.*

Si hæc formula cum generali $\int Z\,dx$ comparetur, fiet $Z = axy - y^3$, ideoque $dZ = ay\,dx + (ax - 3yy)\,dy$; ita ut fiat $M = ay$ & $N = ax - 3yy$; unde pro curva quæsita habebitur ista æquatio $ax - 3yy = 0$, seu $yy = \frac{1}{3}ax$, quæ est pro Parabola verticem in A, axem AZ & parametrum $= \frac{1}{3}a$ habente. In hac igitur Parabola, erit valor formulæ $\int (ax - yy)\,y\,dx$ maximus vel minimus. Utrum autem sit maximus an minimus, reperietur, si aliam quamcunque lineam loco Parabolæ substituamus, atque inquiramus utrum pro ea valor formulæ propositæ major sit an minor quam pro Parabola. Sumamus

igitur

igitur lineam rectam cum ipso axe congruentem, pro qua erit $y = 0$. Pro hac itaque valor formulæ $\int(ax - yy)y\,dx$ fiet pariter $= 0$, pro Parabola autem idem valor erit affirmativus, ideoque > 0; ex quo sequitur in Parabola formulæ propositæ valorem non esse minimum, sed maximum. Poterimus autem algebraïce indicare quantus futurus sit valor formulæ propositæ pro Parabola: cum enim sit $yy = \frac{1}{3}ax$, abibit formula proposita in hanc $\int \frac{2}{3}ax\,dx\sqrt{\frac{1}{3}ax} = \frac{4}{15}ax^2\sqrt{\frac{1}{3}ax}$. Quod si autem ponamus aliam æquationem, puta $y = nx$; abibit formula proposita in hanc $\int dx(naxx - n^3x^3) = \frac{1}{3}nax^3 - \frac{1}{4}n^3x^4$, quæ semper est minor quam valor formulæ qui pro Parabola inventa prodiit: id quod quilibet facile, substituendis loco x definitis valoribus, experietur.

EXEMPLUM III.

18. *Invenire curvam, in qua sit, inter omnes omnino curvas ad eandem abscissam relatas, valor hujus formulæ* $\int(15a^2x^2y - 15a^3xy + 5a^2y^3 - 3y^5)\,dx$ *maximus vel minimus.*

Erit igitur $Z = 15a^2x^2y - 15a^3xy + 5a^2y^3 - 3y^5$, qui si differentietur, posito x constante, prodibit $N\,dy = 15a^2x^2\,dy - 15a^3x\,dy + 15a^2y^2\,dy - 15y^4\,dy$; hincque $N = 15(a^2x^2 - a^3x + a^2y^2 - y^4)$; qui valor, positus $= 0$, dabit æquationem pro curva quæsita: erit itaque $aaxx - a^3x + a^2y^2 - y^4 = 0 = (ax - yy)(ax + yy - aa)$. Ob binos hos factores, prodeunt binæ curvæ satisfacientes, quarum altera exprimetur hac æquatione $yy = ax$, altera hac $yy = aa - ax$; utraque pro Parabola. Ut nunc appareat utra sit pro maximo vel minimo, ponamus abscissam esse minimam, ac prior æquatio $yy = ax$ in formula substituta dabit $\int -10a^3x\,dx\sqrt{ax}$. Altera vero formula $yy = aa - ax$, seu $y = a$, substituta dabit $\int 2a^5\,dx$. Quod si autem ipsi y alius quicunque valor tribuatur, puta $y = 0$; tum formula proposita abit in $\int 0\,dx = 0$. Ex quo patet curvarum inventarum alteram $yy = aa - ax$ esse pro maximo, alteram autem $yy = ax$ pro minimo, scilicet pro maximo negativo.

tivo. Facillime autem perpetuo hæc dijudicatio, utrum maximum an minimum in curva inventa locum habeat, instituetur, si abscissa x ponatur infinite parva; tum enim integratione non erit opus, sed ipsa formula Zdx monstrabit valorem formulæ $\int Zdx$ hoc casu.

EXEMPLUM IV.

19. *Inter omnes curvas eidem abscissæ respondentes, definire eam in qua sit formulæ* $\int(3ax - 3xx - yy)(ax - xx - \frac{4}{3}xy + yy)\,dx$ *valor maximus vel minimus.*

Ex hac igitur formula prodibit sequens ipsius Z valor evolutus;

$$Z = \begin{array}{l} +3a^2x^2 - 4ax^2y + 2axyy + \frac{4}{3}xy^3 - y^4 \\ -6ax^3 + 4x^3y - 2xxyy \\ +3x^4 \end{array}$$

quæ differentiata, posito x constante, ac divisa per dy, sequentem præbebit valorem pro N:

$$N = \begin{array}{l} -4ax^2 + 4axy + 4xyy - 4y^3 \\ +4x^3 - 4xxy \end{array}$$

quæ expressio, nihilo æqualis posita, dabit æquationem pro curva quæsita. Erit itaque

$$\begin{array}{l} y^3 - xyy + xxy + axx = 0 \\ - axy - x^3 \end{array}$$

quæ duos habet factores, qui totidem præbent æquationes, hasce

I. $y - x = 0$, pro linea recta

II. $yy - ax + xx = 0$, pro circulo.

Ponatur x infinite parva, eritque ex æquatione $y = x$, valor ipsius $Z = 3a^2x^2$; at ex æquatione $yy = ax - xx$, seu $y = \sqrt{ax}$, erit $Z = 4aaxx$. Quod si autem ponatur $y = a$, prodit $Z = -a^4$, unde apparet utramque lineam inventam esse pro maximo.

SCHOLION

20. Problemata etiam resolvi possunt per Methodum maximorum & minimorum vulgarem. Quando enim curva quæritur pro qua valor ipsius $\int Z\,dx$ sit maximus vel minimus, idque pro qualibet abscissa; manifestum est siquidem Z sit functio determinata ipsarum x & y, formulam $\int Z\,dx$ maximum minimumve esse non posse, nisi elementum ejus $Z\,dx$ ac proinde ipsum Z tale sit. Quamobrem quæstioni satisfiet, si quantitas Z differentietur posito x constante, ejusque differentiale ponatur $= 0$. Tum enim perpetuo Z habebit valorem maximum vel minimum, ac proinde etiam $Z\,dx$ & ipsa formula $\int Z\,dx$. Quod si autem functio Z differentietur, posito x constante, prodibit $N\,dy$; quoniam generaliter differentiando posuimus $dZ = M\,dx + N\,dy$; satisfietque ponendo $N = 0$: quæ est eadem solutio, quam per Methodum traditam invenimus. Quamvis autem hinc videantur istæ quæstiones simili modo resolvi posse, quo in Methodo maximorum & minimorum vulgari; tamen hoc tantum evenit, si Z fuerit functio ipsarum x & y tantum; namque si in Z præterea insint quantitates ex differentialibus ortæ p, q, r, &c: tum vulgaris Methodus nullius amplius usus esse potest. Etsi enim tum differentietur functio Z posito x constante, tamen in differentiale etiam ingrederentur differentialia dp, dq, dr, &c. quorum relatio ad dy cum non constet, æquatio inde ad maximum minimumve determinandum apta deduci non poterit. His igitur casibus utilitas & necessitas nostræ Methodi maxime cernetur.

PROPOSITIO III. PROBLEMA.

Fig. 4. 21. *Si* Z *fuerit functio ipsarum* x, y, *&* p *determinata, ita ut sit* $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$; *invenire, inter omnes curvas eidem abscissæ respondentes, eam in qua sit* $\int Z\,dx$ *maximum vel minimum.*

SOLUTIO.

SOLUTIO.

Sit amz curva quæsito satisfaciens, atque concipiatur applicata quæcunque $Nn = y'$ augeri particula $n\nu$, debebit valor differentialis formulæ $\int Z\,dx$, seu quantitatis huic æquivalentis, puta $Z\,dx + Z'\,dx + Z''\,dx + Z'''\,dx +$ &c. una cum $Z_{,}dx + Z_{,,}dx + Z_{,,,}dx +$ &c. esse $= 0$. Totius igitur quantitatis $\int Z\,dx$ valor differentialis ex translatione puncti n in ν habebitur, si singulorum illorum terminorum, qui quidem hac translatione afficiuntur, valores differentiales quærantur & in unam summam addantur. Ex translatione autem puncti n in ν, illi tantum termini mutationem subeunt, in quibus insunt quantitates y', p & p'; ideoque tantum termini $Z\,dx$ & $Z'\,dx$; nam uti Z est functio ipsarum y & p præter x; ita Z' similis est functio ipsarum y' & p'. Quamobrem hi termini debebunt differentiari, atque in eorum differentialibus loco dy', dp, & dp' scribi oportet valores supra indicatos $+ n\nu$; $+ \frac{n\nu}{dx}$ & $- \frac{n\nu}{dx}$. Sicut autem est $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$, ita erit $dZ' = M'dx + N'dy' + P'dp'$. Hinc itaque valor differentialis ipsius Z erit $P.\frac{n\nu}{dx}$, & ipsius Z' erit $N'.n\nu - P'.\frac{n\nu}{dx}$; ex quo utriusque termini $Z\,dx + Z'\,dx$, ideoque integræ formulæ $\int Z\,dx$ valor differentialis erit $= n\nu.(P + N'dx - P')$. At est $P' - P = dP$, & loco N' scribi potest N; unde valor differentialis erit $= n\nu.(N\,dx - dP)$. Quare cum formulæ $\int Z\,dx$ valor differentialis nihilo æqualis factus præbeat æquationem pro curva quæsita, hæc erit $0 = N\,dx - dP$, vel $N - \frac{dP}{dx} = 0$, qua æquatione natura curvæ quæsitæ exprimetur. *Q. E. I.*

COROLL. I.

22. Quod si ergo fuerit Z functio quæcunque ipsarum x, y, itemque earum differentialium dx & dy, seu loco horum differentialium,

 ipsius

ipſius p; exiſtente $dy = p\,dx$; differentiale ipſius Z hujuſmodi habebit formam, ut ſit $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$. Atque hinc reperietur curva, in qua ſit $\int Z\,dx$ maximum vel minimum, formando hanc æquationem $N - \frac{dP}{dx} = 0$ ſeu $N\,dx = dP$.

COROLL. II.

23. Æquatio hæc igitur ſemper erit differentialis ſecundi gradus, niſi in P plane non inſit p. Nam ſi p continetur in P, tum in dP inerit dp; quod ob $p = \frac{dy}{dx}$ differentialia ſecundi gradus involvet.

COROLL. III.

24. Quando ergo in differentiali ipſius $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$ quantitas P adhuc in ſe complectitur p; tum, ob æquationem pro curva quæſita differentialem ſecundi gradus, duæ novæ conſtantes arbitrariæ per integrationem ingredientur. Ex quo ad harum conſtantium determinationem, duo curvæ puncta præſcribi poterunt; alias enim non una ſed innumerabiles curvæ reperirentur.

COROLL. IV.

25. Ut itaque hujuſmodi Problemata determinate proponantur, ita ſunt enuncianda, ut per data duo puncta curva duci debeat, quæ, inter omnes alias curvas per eadem puncta ductas, pro eadem abſciſſa x valorem $\int Z\,dx$ maximum minimumve complectatur.

COROLL. V.

26. In P autem quantitas p non inerit, ſi Z fuerit functio ipſarum x & y tantum, per p vel per $n+p$, denotante n numerum

rum constantem, multiplicata. Sit enim V functio ipsarum x & y tantum; ita ut sit $dV = Mdx + Ndy$; atque $Z = V(n+p)$, erit $dZ = (n+p)Mdx + (n+p)Ndy + Vdp$. Hincque æquatio pro curva quæsita erit $0 = (n+p)N - \frac{dV}{dx}$, seu $(n+p)Ndx = dV = Mdx + Ndy$.

COROLL. VI.

27. His igitur casibus, quibus est $Z = V(n+p)$, existente V functione ipsarum x & y tantum, non pervenitur ad æquationem differentialem secundi gradus: quia dp in ea prorsus non inest. Verum nequidem ad differentialem æquationem primi gradus pervenitur; sed adeo ad algebraïcam. Nam cum sit $pdx = dy$, erit $(n+p)Ndx = nNdx + Ndy$; quod ipsi $Mdx + Ndy$ æquale positum, dabit æquationem per dx divisibilem, adeoque algebraïcam, hanc $nN = M$, siquidem V fuerit functio algebraïca.

COROLL. VII.

28. Quoties autem hoc evenit, maximi minimive formula, quæ est $\int Zdx$, erit talis formæ, $\int(Vndx + Vdy)$, vel posito $n = 0$, talis $\int Vdy$. Hujusmodi igitur maximi minimive formulæ pariter ad æquationem determinatam pro curva quæsita deducunt, ita ut non liceat unum plurave puncta præscribere, per quæ curva transire debeat.

COROLL. VIII.

29. Posita igitur V functione ipsarum x & y, ista maximi minimive formula $\int Vdy$ pari modo tractatur, quo $\int Vdx$. Nam, posito $dV = Mdx + Ndy$, formulæ $\int Vdx$ respondet æquatio pro curva hæc $N = 0$, ita alteri formulæ, $\int Vdy$ respondet æquatio $M = 0$. Ex quo perspicuum est coordinatas x & y inter se commutari posse.

SCHOLION I.

30. Apparet itaque in ſolutione hujuſmodi Problematum, quibus quæritur curva valorem formulæ $\int Z\,dx$ maximum minimumve habens, exiſtente Z functione ipſarum x, y, & p, perveniri ad æquationem differentialem ſecundi gradus, niſi in Z quantitas p unicam tantum habeat dimenſionem. Sæpe numero autem iſta æquatio differentialis ſecundi gradus integrationem admittit, de quo in ſingulis caſibus erit videndum. Interim hic annotaſſe juvabit, generaliter integrationem ſuccedere, ſi in functione Z omnino non inſit x, hoc eſt, ſi in ejus differentiali $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$ valor M evaneſcat, ita ut ſit tantum $dZ = N\,dy + P\,dp$. Cum enim pro curva inventa ſit hæc æquatio $N - \frac{dP}{dx} = 0$; multiplicetur ea per dy, & quia eſt $dy = p\,dx$, ea abibit in hanc $N\,dy - p\,dP = 0$, cui æquivalet iſta $N\,dy + P\,dp = P\,dp + p\,dP = dZ$, cujus integrale eſt $Z + C = Pp$, quæ æquatio jam tantum eſt differentialis primi gradus. Quoties ergo inter omnes curvas eidem abſciſſæ reſpondentes ea quæritur, in qua ſit valor formulæ $\int Z\,dx$ maximus vel minimus, atque Z tantum ſit functio ipſarum y & p, ita ut ſit $dZ = N\,dy + P\,dp$; tum, pro curva ſatisfaciente, ſtatim exhiberi poterit æquatio differentialis primi gradus iſta $Z + C = Pp$. Deinde vero etiam, ſi Z fuerit functio ipſarum x & p tantum, atque $dZ = M\,dx + P\,dp$, evaneſcente termino $N\,dy$, tum pro curva prodibit æquatio differentialis primi gradus. Nam, ob $dP = 0$, erit $P = C$, quæ pro curva quæſita dabit æquationem differentialem primi gradus tantum. Quod ſi autem inſuper M evaneſcat, ſeu Z functio ſit ipſius p tantum, & $dZ = P\,dp$; æquatio inventa $P = C$ tranſmutabitur in iſtam $P\,dp = C\,dp = dZ$, quæ denuo integrata dat $Z + D = Cp$. Hoc autem caſu, quia Z & P ſunt functiones ipſius p tantum, utraque æquatio $P = C$ & $Z + D = Cp$, præbebit pro p valorem conſtantem; ideoque æquationem hujus formæ $dy = n\,dx$, quæ indicat hujuſmodi Problematis ſatisfa-

cere

cere lineas rectas, & quidem quascunque utlibet ductas. Nam in æquatione $P = C$, cum C sit constans arbitraria, valor ipsius p non solum constans, sed etiam arbitrarius evadet; ex quo linea recta quæcunque resultabit. Quamobrem si per data duo puncta curva duci debeat, in qua sit $\int Z\,dx$ maximum vel minimum, ac Z sit functio ipsius p tantum, tum satisfaciet linea recta per illa data duo puncta ducta.

SCHOLION II.

31. Quoniam supra jam vidimus in hujusmodi Problematis coordinatas x & y inter se commutari, atque, si commodum videatur, applicatam y tanquam abscissam tractari posse, idem hoc quoque casu confirmari juvabit. Sit igitur curva investiganda in qua sit $\int Z\,dy$ maximum vel minimum, existente Z functione ipsarum x, y & p, & $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$. Hæc autem formula $\int Z\,dy$ ad nostram formam reducta abit in $\int Zp\,dx$: in qua erit $d.Zp = Mp\,dx + Np\,dy + (Z + Pp)\,dp$: ex qua formulæ propositæ valor differentialis respondens erit $(Np\,dx - dZ - P\,dp - p\,dP)\,nv = (-M\,dx - 2P\,dp - p\,dP)\,nv$: & æquatio pro curva quæsita erit $0 = -M\,dx - 2P\,dp - p\,dP$; seu $0 = -M\,dy - d.Pp^2$. Quod si nunc ad similitudinem ostendendam, quia hîc y tanquam abscissam consideramus, ponamus $dx = \pi\,dy$, erit $p = \frac{1}{\pi}$ & $dp = -\frac{d\pi}{\pi\pi} = -pp\,d\pi$; erit $dZ = M\,dx + N\,dy - Ppp\,d\pi = M\,dx + N\,dy + \Pi\,d\pi$, ponendo $\Pi = -Ppp$; ut similitudo terminorum conservetur. Quapropter æquatio pro curva erit $0 = -M\,dy + d\Pi$; quæ eadem æquatio prodiisset, si in formula $\int Z\,dy$, applicata y in abscissam & vicissim abscissa in applicatam transmutetur. Proposita igitur quacunque formula indeterminata ex x & y horumque differentialibus composita, quæ debeat esse maxima vel minima, coordinatarum x & y utramlibet licebit tanquam abscissam tractare, ad eamque maximum minimumve accommodare.

EXEM-

EXEMPLUM I.

32. *Inter omnes curvas ad eandem abscissam relatas, eam determinare, in qua sit* $\int(Zdx + [Z]\,dy)$ *maximum vel minimum; existentibus* Z & $[Z]$ *functionibus quibuscunque ipsarum* x & y, *ita ut sit* $dZ = Mdx + Ndy$ & $d[Z] = [M]dx + [N]dy$.

Ut formula hæc $\int(Zdx + [Z]dy)$ ad formam receptam reducatur, ponatur pdx loco dy; habebiturque hæc formula $\int(Z + [Z]p)\,dx$ maxima minimave efficienda. Differentietur ergo valor $Z + [Z]p$; eritque ejus differentiale $= + Mdx + Ndy + [M]pdx + [N]pdy + [Z]dp$.

Jam per regulam inventam, hinc pro curva quæsita ista prodibit æquatio, $0 = (N + [N]p)\,dx - d[Z] = (N + [N]p)\,dx - [M]\,dx - [N]\,dy$: quæ, ob $[N]pdx = [N]\,dy$, per dx divisa dabit hanc æquationem pro curva quæsita algebraicam seu finitam $N - [M] = 0$. seu $N = [M]$. Hinc intelligitur si formula proposita $\int(Zdx + [Z]\,dy)$ fuerit determinata, seu differentiale $Zdx + [Z]\,dy$ ita comparatum, ut integrationem admittat; tum nullam lineam quæsito esse satisfacturam, seu potius omnes lineas æque satisfacere. Nam si $Zdx + [Z]\,dy$ integrationem admittit, per se erit $N = [M]$; uti alibi de formulis differentialibus duarum variabilium determinatis demonstravimus; ideoque his casibus prodit æquatio identica $0 = 0$. Hincque luculenter intelligitur, quod jam ante notavimus, maximi minimive formulam oportere esse formulam indeterminatam; alioquin enim omnes lineæ curvæ æque satisfacerent.

EXEMPLUM II.

33. *Inter omnes lineas ad eandem abscissam relatas, determinare eam, cujus longitudo sit minima; seu in qua sit* $\int dx\sqrt{(1+pp)}$ *minimum.*

Primum quidem apparet in hac quæstione maximum non dari, ri, cum linearum longitudo in infinitum augeri queat, manente abſciſſa eadem. Ita minimum tantum habebit locum, id quod ex ipſa Geometria elementari conſtat, in qua demonſtratur lineam rectam inter omnes alias lineas intra eoſdem terminos ſitas eſſe breviſſimam. Hoc igitur Exemplum ideo attuliſſe viſum eſt, cum ut conſenſus noſtræ Methodi cum veritate aliunde jam cognita intelligatur, tum etiam ut circumſtantia de duobus punctis arbitrariis, quæ ad hujus generis quæſtiones addi debet, melius percipiatur. Erit igitur, formula $\int dx\sqrt{(1+pp)}$ cum generali $\int Z\,dx$ comparata, $Z=\sqrt{(1+pp)}$, & $dZ=\frac{p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}$; unde fit $M=0$, $N=0$, & $P=\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Quare, cum in genere æquatio pro linea quæſita ſit $N-\frac{dP}{dx}=0$, habebimus hoc caſu $dP=0$; ideoque $P=\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}=Const.$ ex qua æquatione oritur $p=Const.=n$, ſeu $dy=n\,dx$, quæ denuo integrata dat $y=a+nx$. Non ſolum ergo patet lineam quæſitam eſſe rectam, ſed etiam, ob duas arbitrarias conſtantes a & n, rectam utcunque ductam. Quare ſi per data duo puncta linea duci jubeatur breviſſima, erit illa recta. Similiter autem intelligitur, ſi linea debeat inveniri, in qua ſit $\int Z\,dx$, ubi Z eſt functio ipſius p tantum, maximum vel minimum, tum lineam rectam tantum ſatisfacere; uti ante jam notavimus.

EXEMPLUM III.

34. *Inter omnes curvas ad eandem abſciſſam relatas, determinare eam, in qua ſit* $\int\frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{x}}$ *maximum vel minimum.*

Hæc formula oritur, ſi quæratur linea celerrimi deſcenſus, in hypotheſi gravitatis uniformis, ponendo axem in quo abſciſſæ capiuntur verticalem. Erit igitur $Z=\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{x}}$ & dZ =

$= \frac{-dx\sqrt{(1+pp)}}{2x\sqrt{x}} + \frac{p\,dp}{\sqrt{x(1+pp)}}$; unde fit $M = \frac{-\sqrt{(1+pp)}}{2x\sqrt{x}}$, $N = 0$, & $P = \frac{p}{\sqrt{x(1+pp)}}$. Cum jam curva quæsita exprimatur æquatione $N - \frac{dP}{dx} = 0$; erit $dP = 0$, & P ($= \frac{p}{\sqrt{x(1+pp)}}$) $= Const. = \frac{1}{\sqrt{a}}$; quæ reducta præbet $ap^2 = x + p^2 x$, & $p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{a-x}}$, seu $y = \int dx \sqrt{\frac{x}{a-x}}$, quæ æquatio indicat, curvam quæsitam esse Cycloidem super basi horizontali natam, & cuspidem in suprema axis regione habentem: quæ adeo per data duo quæcunque puncta duci poterit.

Exemplum IV.

35. *Inter omnes curvas eidem abscissæ respondentes, eam determinare in qua sit* $\int y^n dx \sqrt{(1+pp)}$ *maximum vel minimum.*

Pro hac ergo formula proposita erit $Z = y^n \sqrt{(1+pp)}$ & $dZ = ny^{n-1} dy\sqrt{(1+pp)} + \frac{y^n p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}$; ita ut fiat $M = 0$, & $N = ny^{n-1}\sqrt{(1+pp)}$ atque $P = \frac{y^n p}{\sqrt{(1+pp)}}$.

Quoniam igitur est $M = 0$; statim pro curva quæsita habebitur ista æquatio semel jam integrata $Z + C = Pp$ (30), quæ nostro casu fit $y^n \sqrt{(1+pp)} + ma^n = \frac{y^n pp}{\sqrt{(1+pp)}}$. Quod si ponatur constans $a = 0$, prodibit $1 + pp = pp$, seu $p = \infty$, satisfacietque linea recta normalis ad axem. Generatim vero lineæ satisfacientes reperientur ex æquatione, quæ abit in $y^n + ma^n \sqrt{(1+pp)} = 0$, seu $y^{2n} = m^2 a^{2n} + m^2 a^{2n} p^2$; quæ dat p ($= \frac{dy}{dx}$) $= \frac{\sqrt{(y^{2n} - m^2 a^{2n})}}{ma^n}$, & $x = \int \frac{ma^n dy}{\sqrt{(y^{2n} - m^2 a^{2n})}}$;

quæ

quæ linea per data duo puncta duci poteſt. Si fuerit $n = -\frac{1}{2}$, ita ut $\int \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{y}}$ debeat eſſe maximum vel minimum; pariter prodire debet linea brachyſtochrona ad axem horizontalem relata; eritque pro ea $x = \int dy \sqrt{\frac{y}{a-y}}$; quæ cum præcedente omnino congruit, dummodo coordinatæ x & y inter ſe commutentur. Erit ſcilicet, ut ante, curva ſatisfaciens Cyclois ſuper baſi horizontali rotando generata, qualem per data duo quæcunque puncta ducere licet.

Exemplum V.

36. *Inter omnes curvas eidem abſciſſæ reſpondentes eam determinare, in qua ſit* $\frac{\int y dy^3}{dx^2 + dy^2}$ *maximum vel minimum*

Formula hæc ad formam conſuetam, ope ſubſtitutionis $dy = pdx$, reducta, abit in hanc $\int \frac{yp^3 dx}{1+pp}$; eaque reperiri ſolet, ſi quæratur ſolidum rotundum rotatione curvæ circa axem ortum, quod ſecundum axis directionem in fluido motum minimam patiatur reſiſtentiam: reſiſtentia namque hoc caſu proportionalis cenſetur formulæ $\int \frac{y dy^3}{dx^2 + dy^2}$ ſeu $\int \frac{yp^3 dx}{1+pp}$. Erit ergo $Z = \frac{yp^3}{1+pp}$, & $dZ = \frac{p^3 dy}{1+pp} + \frac{y dp(3pp+p^4)}{(1+pp)^2}$; ita ut fiat $M = 0$, $N = \frac{p^3}{1+pp}$ & $P = \frac{p^2 y(3+pp)}{(1+pp)^2}$. Cum igitur ſit $M = 0$; una integratio generaliter ſuccedit, eritque æquatio pro curva quæſita $Z + C = Pp$, ſeu $\frac{yp^3}{1+pp} + a = \frac{p^3 y(3+pp)}{(1+pp)^2}$; quæ abit in hanc $a(1+pp)^2 = 2p^3 y$. Hujus æquationis autem evolutio non ita poteſt inſtitui ut eliminetur p; quare conveniet utramque coordinatam y & x per eandem variabilem p definiri. Ac primo quidem eſt $y = \frac{a(1+pp)^2}{2p^3}$. Deinde, ob $dy = p\,dx$;

erit $dx = \frac{dy}{p}$ & $x = \int \frac{dy}{p} = \frac{y}{p} + \int \frac{y\,dp}{pp}$. Quod si ergo loco y valor inventus substituatur, prodibit $x = \frac{a(1+pp)^2}{2p^4} + a\int \frac{dp(1+pp)^2}{2p^5} = \frac{a}{2}\left(\frac{3}{4p^4} + \frac{1}{pp} + 1 + lp\right)$: ex quibus curvæ constructio poterit confici, logarithmis in subsidium vocandis.

EXEMPLUM VI.

37. *Invenire curvam, in qua ista formula* $\int yx\,dx\sqrt{(1+pp)}$ *sit maximum minimumve.*

Erit ergo $Z = yx\sqrt{(1+pp)}$, atque $dZ = y\,dx\sqrt{(1+pp)} + x\,dy\sqrt{(1+pp)} + \frac{yxp\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}$. Hanc ob rem habebitur $M = y\sqrt{(1+pp)}$, $N = x\sqrt{(1+pp)}$ & $P = \frac{yxp}{\sqrt{(1+pp)}}$; unde æquatio pro curva formabitur hæc $N\,dx = dP$, quæ suggerit $x\,dx\sqrt{(1+pp)} = \frac{p^2x\,dx + yp\,dx}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{yx\,dp}{(1+pp)^{3:2}}$, seu $x\,dx - y\,dy = \frac{yx\,dp}{1+pp}$, ob $dy = p\,dx$. Hæc est æquatio differentialis secundi gradus, & quanquam, ope idonearum substitutionum ea ad formam simpliciter differentialem reduci potest, eo quod variabiles x & y ubique eundem dimensionum numerum constituunt; tamen æquatio ista differentialis ita est comparata ut neque integrari neque separari possit; deduci scilicet potest ad æquationem hujus formæ $\frac{du}{u^3} + \frac{dv}{v^3} = \frac{v\,dv(1+u^2)}{u^3}$. Quod cum ita sit, neque æquatio inventa $x\,dx - y\,dy = \frac{yx\,dp}{1+pp}$ ad formam vel simpliorem vel commodiorem revocari potest; hincque nihil admodum de natura curvæ inventæ judicare licet. Interim tamen illa æquatio potentiâ duas arbitrarias constantes involvit, ex quo curva satisfaciens per bina puncta data duci potest.

EXEM-

EXEMPLUM VII.

38. *Invenire curvam, in qua sit* $\int (xx+yy)^n dx \surd (1+pp)$ *maximum vel minimum.*

Cum hîc sit $Z = (xx+yy)^n \surd (1+pp)$, erit $dZ =$
$2n(xx+yy)^{n-1} (x\,dx + y\,dy) \surd (1+pp) + \frac{(xx+yy)^n p\,dp}{\surd (1+pp)}$,
ergo $N = 2n(xx+yy)^{n-1} y \surd (1+pp)$ & $P = \frac{(xx+yy)^n p}{\surd (1+pp)}$;
ex quo pro curva quæsita ista habebitur æquatio

$$2n(xx+yy)^{n-1} y\,dx \surd (1+pp) = d\,\frac{(xx+yy)^n p}{\surd (1+pp)} = \frac{2n(xx+yy)^{n-1} p(x\,dx+y\,dy)}{\surd (1+pp)} + \frac{dp(xx+yy)^n}{(1+pp)^{3:2}},$$

quæ per $(xx+yy)^{n-1}$ divisa, ac per $\surd (1+pp)$ multiplicata, abit in $2ny\,dx = 2nx\,dy + \frac{(xx+yy)\,dp}{1+pp}$ seu $\frac{2n(y\,dx - x\,dy)}{xx+yy} = \frac{dp}{1+pp}$. Hujus æquationis utrumque membrum integrabile est per quadraturam circuli, fitque integrale $2n\,A\,\mathrm{tang.}\,\frac{x}{y} = A\,\mathrm{tang.}\,p + A\,\mathrm{tang.}\,k = A\,\mathrm{tang.}\,\frac{p+k}{1-pk}$: unde fiet $\frac{x}{y} = \mathrm{tang.}\,\frac{1}{2n} A\,\mathrm{tang.}\,\frac{k+p}{1-kp} = T$; eritque T functio algebraïca ipsius p, dummodo sit $2n$ numerus rationalis. Cum ergo sit $x = Ty$, seu $y = \frac{x}{T}$, erit $dy = p\,dx = \frac{dx}{T} - \frac{x\,dT}{TT}$, sive $x\,dT = T\,dx - pTT\,dx$; ideoque $\frac{dx}{x} = \frac{dT}{T - pTT} + \frac{T\,dp}{1-pT} - \frac{T\,dp}{1-pT}$; unde prodit $l\,x = l\,\frac{T}{1-pT} - \int \frac{T\,dp}{1-pT}$, quæ quidem ad construendam curvam abunde satisfaciunt. Verum ut harum curvarum, quæ pro definitis exponentis n valoribus prodeunt, natura melius cognoscatur, Casus nonnullos contemplabimur.

I. Sit $n = \frac{1}{2}$, & $2n = 1$; erit $A\,\mathrm{tang.}\,\frac{x}{y} = A\,\mathrm{tang.}\,\frac{k+p}{1-kp}$;

ideoque $\frac{x}{y} = \frac{k+p}{1-kp} = \frac{kdx+dy}{dx-kdy}$, seu $xdx - kxdy = kydx + ydy$; quæ integrata præbet $x^2 - y^2 = 2kxy + C$; quæ est æquatio pro Hyperbola æquilatera.

II. Sit $n = 1$, & $2n = 2$; erit 2A tang. $\frac{x}{y}$ = A tang. $\frac{k+p}{1-kp}$, seu A tang. $\frac{2xy}{yy-xx}$ = A tang. $\frac{k+p}{1-kp}$; unde fit $\frac{2xy}{yy-xx} = \frac{kdx+dy}{dx-kdy}$, seu $2xydx - 2kxydy = kyydx - kxxdx + yydy - xxdy$; quæ integrata dat $yx^2 = ky^2x - \frac{1}{3}kx^3 + \frac{1}{3}y^3 + C$, sive $y^3 + 3ky^2x - 3yx^2 - kx^3 = C$.

III. Sit $n = \frac{3}{2}$, seu $2n = 3$; erit 3A tang. $\frac{x}{y}$ = A tang. $\frac{3y^2x - x^3}{y^3 - 3yx^2}$ = A tang. $\frac{kdx+dy}{dx-kdy}$; hincque $3y^2xdx - 3ky^2xdy - x^3dx + kx^3dy = ky^3dx + y^3dy - 3kyx^2dx - 3yx^2dy$; quæ integrata dat $\frac{3}{2}y^2x^2 - ky^3x - \frac{1}{4}x^4 + kyx^3 - \frac{1}{4}y^4 = C$, seu $y^4 + 4ky^3x - 6y^2x^2 - 4kyx^3 + x^4 = C$.

Ex his jam casibus colligi poterit æquatio integralis pro valore quocunque ipsius n. Cum enim sit $2n$A tang. $\frac{x}{y}$ = A tang.

$$\frac{2ny^{2n-1}x - \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.\ 2.\ 3.}y^{2n-3}x^3 + \&c.}{y^{2n} - \frac{2n(2n-1)}{1.\ 2.}y^{2n-2}x^2 + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}y^{2n-4}x^4 - \&c.}$$

$$= \frac{(y+x\sqrt{-1})^{2n} - (y-x\sqrt{-1})^{2n}}{(y+x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1} + (y-x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1}};$$ fiet $\frac{kdx+dy}{dx-kdy}$

$$\frac{(y+x\sqrt{-1})^{2n} - (y-x\sqrt{-1})^{2n}}{(y+x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1} + (y-x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1}};$$ quæ reducta præbet

$$kdx(y+x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1} + kdx(y-x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1} + kdy(y+x\sqrt{-1})^{2n} - kdy(y-x\sqrt{-1})^{2n}$$
$$= dy(y+x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1} + dy(y-x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1} - dx(y+x\sqrt{-1})^{2n} + dx(y-x\sqrt{-1})^{2n}$$ cujus integrale est

est $k(y+x\sqrt{-1})^{2n+1} - k(y-x\sqrt{-1})^{2n+1} = -\frac{1}{\sqrt{-1}}(y+x\sqrt{-1})^{2n+1} - \frac{1}{\sqrt{-1}}(y-x\sqrt{-1})^{2n+1} + C$, seu $C = (y+x\sqrt{-1})^{2n+1}(k\sqrt{-1}+1) + (y-x\sqrt{-1})^{2n+1}(1-k\sqrt{-1})$. At est generaliter $(y+x\sqrt{-1})^{2n+1} + (y-x\sqrt{-1})^{2n+1} = 2(yy+xx)^{(2n+1):2}$ cos. $2n$ A tang. $\frac{x}{y}$, atque . . . . . $\frac{(y+x\sqrt{-1})^{2n+1} - (y-x\sqrt{-1})^{2n+1}}{\sqrt{-1}} = 2(yy+xx)^{(2n+1):2}$ sin. $2n$ A tang. $\frac{x}{y}$. Quibus valoribus substitutis, prodibit æquatio integralis ab imaginariis libera hæc $2k(yy+xx)^{(2n+1):2}$ sin. $2n$ A tang. $\frac{x}{y} = 2(yy+xx)^{(2n+1):2}$ cos. $2n$ A tang. $\frac{x}{y} + C$: vel, ob constantes arbitrarias k & C, ista $C = (yy+xx)^{(2n+1):2}$ (k sin. $2n$ A tang. $\frac{x}{y} + h$ cos. $2n$ A tang. $\frac{x}{y}$), quæ æquatio semper est algebraïca, dummodo fuerit n numerus rationalis. Vel si arcus quidam circularis arbitrarius ponatur $= g$, curva quæsita hujusmodi æquatione $C = (yy+xx)^{(2n+1):2}$ sin $(g + 2n$ A tang. $\frac{x}{y})$ exprimi potest; posito radio circuli, quem hic contemplamur, $= 1$.

SCHOLION III.

39. Si ergo, inter omnes curvas eidem abscissæ respondentes, ea debeat inveniri, in qua sit $\int Zdx$ maximum vel minimum, existente Z functione ipsarum x, y & p, ita ut sit $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$; pro curva quæsita ista habebitur æquatio

N —

$N - \frac{dP}{dx} = 0$. Quoniam autem in Problemate præcedente annotavimus, si Z tantum fuerit functio ipsarum x & y, tum Methodo vulgari solutionem absolvi posse: nam ut $\int Z dx$ sit maximum minimumve, etiam $Z dx$, ac proinde Z tale esse oportet, respectu ad x habito; & hanc ob rem differentiale ipsius dZ, sumto x constante, nihilo æquale positum dabit æquationem pro curva quæsita. Similis Methodus succederet in præsente Problemate, si modo in differentiali ipsius Z, quod oritur posito x constante, atque est $N dy + P dp$, relatio inter differentialia dy & dp pateret, ut per dy divisio institui, atque valor finitus nihilo æquandus erui posset. Cum autem istam relationem inter dy & dp, sine qua Methodus maximorum & minimorum vulgaris adhiberi nequit, a priori definire etiamnum non liceat, poterimus eam a posteriori assignare: Quia enim inventa est æquatio pro curva quæsita hæc $N - \frac{dP}{dx} = 0$; intelligitur, hanc ex illa $N dy + P dp$, seu $N + \frac{P dp}{dy}$ oriri potuisse, si constitisset esse $-\frac{dP}{dx} = \frac{Pdp}{dy}$, seu $0 = dP + \frac{P dp}{p}$; ob $dy = p dx$. Quocirca relatio illa inter differentialia dy & dp ita erit comparata, ut contineatur æquatione $p dP + P dp = 0$; quæ proprietas ad hanc redit ut considerari debeat Pp tanquam constans. Hinc ad Problemata resolvenda, in quibus curva quæritur habens valorem formulæ $\int Z dx$ maximum vel minimum, existente $dZ = M dx + N dy + P dp$; valor ipsius Z debet differentiari, atque in differentiali $M dx + N dy + P dp$, loco $M dx$ poni debeat o, $N dy$ immutatum relinqui, tum vero loco $P dp$ scribi $- p dP$; & id quod emergit nihilo æquale poni. Hoc enim pacto obtinebitur $N dy - p dP = 0$; quæ æquatio, ob $dy = p dx$, transit in hanc $N - \frac{dP}{dx} = 0$, quæ est ea ipsa quam invenimus. Desideratur itaque Methodus a resolutione geometrica & lineari libera qua pateat in tali investigatione maximi minimive loco $P dp$ scribi debere $- p dP$.

PRO-

PROPOSITIO IV. PROBLEMA.

40. *Si* Z *fuerit functio ipsarum* x, y, p *&* q, *ita ut sit* $dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq$; *invenire, inter omnes curvas eidem abscissæ respondentes, eam in qua sit* $\int Zdx$ *maximum vel minimum.*

SOLUTIO.

Valor formulæ integralis $\int Zdx$ evolvitur in binas has series $Zdx + Z'dx + Z''dx + Z'''dx +$ &c. & $Z_{,}dx + Z_{,,}dx + Z_{,,,}dx +$ &c. quarum aggregatum maximum erit vel minimum, si singulorum terminorum valores differentiales, qui oriuntur augendo applicatam y' particula $n\nu$, colligantur, & nihilo æquentur. Tali autem applicatæ y' incremento mutationem patiuntur litteræ y'; p, p'; $q_{,}$, q, q'; adeoque ii tantum termini in quibus istæ litteræ insunt, hoc est termini $Z_{,}dx$, Zdx & $Z'dx$. Ad horum terminorum augmenta, ex translatione puncti n in ν orta, invenienda, differentientur ii, eritque

$$d.\,Z'dx = dx\,(M'dx + N'dy' + P'dp' + Q'dq')$$
$$d.\,Zdx = dx\,(Mdx + Ndy + Pdp + Qdq)$$
$$d.\,Z_{,}dx = dx\,(M_{,}dx + N_{,}dy_{,} + P_{,}dp_{,} + Q_{,}dq_{,})$$

Jam vero, quia abscissa x ab illa translatione non afficitur, ponendum est ubique $dx = 0$: deinde vero reliquorum differentialium valores ex translatione puncti n in ν orti, per primam hujus Capitis Propositionem ita se habebunt:

$dy' = +\,n\nu$	$dp' = -\frac{n\nu}{dx}$	$dq' = +\frac{n\nu}{dx^2}$
$dy = 0$	$dp = +\frac{n\nu}{dx}$	$dq = -\frac{2n\nu}{dx^2}$
$dy_{,} = 0$	$dp_{,} = 0$	$dq_{,} = +\frac{n\nu}{dx^2}$

His differentialium per $n\nu$ expressorum valoribus substitutis, prodibit sequens valor differentialis, $n\nu . dx (N - \frac{P'}{dx} + \frac{P}{dx} + \frac{Q'}{dx^2} - \frac{2Q}{dx^2} + \frac{Q_{,}}{dx^2}) = n\nu . dx (N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ_{,}}{dx^2}) = n\nu . dx (N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ_{,}}{dx^2})$ ob $ddQ_{,} = ddQ$. Quamobrem pro curva quaesita ista habebitur aequatio $N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = 0$. *Q. E. I.*

COROLL. I.

41. Quod si ergo in maximi minimive formula $\int Zdx$ insint etiam differentialia secundi gradus, seu, quod idem est, si Z fuerit functio ipsarum x, y, p & q; ita ut sit $dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq$; aequatio pro curva quaesita erit $N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = 0$; quae facile ex differentiali ipsius Z formabitur.

COROLL. II.

42. Si quantitas Q ipsa involvit q vel differentio-differentiale ipsius y; tum ddQ continebit differentialia quarti ordinis, in hocque genere erit aequatio pro curva inventa. Ex quo curva satisfaciens per quatuor data puncta traduci poterit.

COROLL. III.

43. Si igitur in Q contineatur q, tum Problema ita determinate proponendum erit, ut inter omnes curvas per quatuor data puncta ductas ea definiatur, in qua $\int Zdx$ sit maximum vel minimum.

SCHOLION I.

44. Ponamus in Q non contineri q, ut investigemus cujusnam

nam gradus futura ſit æquatio differentialis reſultans. Accidit autem hoc, ſi maximi minimive formula propoſita fuerit hujuſmodi $\int Zq\,dx$, exiſtente Z functione tantum ipſarum x, y & p: ita ut ſit $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$. Hinc igitur erit $d.\,Zq = Mqdx + Nqdy + Pqdp + Zdq$: unde pro curva quæſita orietur æquatio hæc $0 = Nq - \frac{Pdq + qdP}{dx}$ $+ \frac{dMdx + dNdy + Nddy + Pddp + dPdp}{dx^2}$, ſeu $0 = 2Nq$ $+ \frac{dM + pdN}{dx}$, vel $0 = 2Ndp + dM + pdN$: quæ æquipollet tantum æquationi differentialis ſecundi gradus, propter $dp = \frac{ddy}{dx}$ quod ineſt. Si igitur curva deſideretur, in qua ſit $\int Zq\,dx$ maximum vel minimum, exiſtente Z functione ipſarum x, y & p, atque $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$; pro curva quæſita habebitur æquatio $0 = dM + 2Ndp + pdN$.

COROLL. IV.

45. Ut revertamur ad æquationem inventam $N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2}$ $= 0$; patet eam fore generaliter integrabilem ſi ſit $N = 0$, hoc eſt ſi in Z non contineatur y; prodibit enim integrando $C - P + \frac{dQ}{dx} = 0$. Si inſuper ſit $P = 0$, altera integratio ſuccedit, qua prodit $Cx + D - Q = 0$.

COROLL. V.

46. Si ſit $M = 0$, pariter una integratio in genere ſuccedit: cum enim ſit $dZ = Ndy + Pdp + Qdq$; multiplicetur æquatio $N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = 0$ per dy, ſeu pdx, habebitur Ndy $- pdP + \frac{pddQ}{dx} = 0$. Addatur $dZ - Ndy - Pdp -$

$Qdq = 0$, orietur $dZ - pdP - Pdp + \frac{pddQ}{dx} - Qdq = 0$; cujus integrale est $Z - Pp + \frac{pdQ}{dx} - Qq = C$.

COROLL. VI.

47. Si fuerit & $M = 0$ & $N = 0$; erit primo, ob $N = 0$, ut supra, $C - P + \frac{dQ}{dx} = 0$. Deinde cum sit $dZ = Pdp + Qdq$, multiplicetur illa æquatio per dp, seu qdx, erit $Cdp - Pdp + qdQ = 0$: addatur $Pdp + Qdq - dZ = 0$; prodibit $Cdp + Qdq + qdQ - dZ = 0$, cujus integralis est $Cp + D + Qq - Z = 0$.

SCHOLION II.

48. Si nexum æquationis inventæ pro curva quæsita, quæ habeat $\int Z dx$ maximum minimumve, cum differentiali ipsius Z inspiciamus; determinare licebit relationem inter differentialia dy, dp & dq, ut differentiale ipsius Z nihilo æquale positum, præbeat æquationem pro curva quæsita. Cum enim sit $dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq$; comparetur cum hac forma æquatio pro curva, $N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = 0$, seu hæc per $dy = pdx$ multiplicata, quæ erit $Ndy - pdP + \frac{pddQ}{dx} = 0$; unde patet, in differentiali ipsius Z, loco Mdx scribi debere 0, at terminum Ndy invariatum relinqui, porro loco Pdp scribendum esse $-pdP$, ac loco Qdq poni debere $\frac{pddQ}{dx}$. Verum quoad hæc a priori pateant, præstabit formam æquationis inventæ retinere, quippe quæ facile memoria teneri potest. Cæterum notandum est Problemata huc pertinentia omnino esse nova, neque adhuc ab iis qui alias de hoc argumento scripserunt pertractata. Alias enim Scriptores maximi minimive formulas contemplari non consueverunt, nisi in quibus ad summum differen-

ferentialia coordinatarum primi gradus inessent. Quamobrem eo magis erit operæ pretium naturam hujusmodi Problematum accuratius indagare, atque inprimis ostendere, quomodo curvæ satisfacientes quatuor puncta, per quæ transeant, ad sui determinationem admittant. Hunc in finem sequentia Exempla adjicere visum est; atque in singulis indicare, quæ ad majorem illustrationem facere poterunt.

Exemplum I.

49. *Invenire curvam, in qua sit* $\int \frac{y^n\, ddy}{x^m\, dy}$ *maximum vel minimum.*

Ista maximi minimive formula, ope substitutionum $dy = p\,dx$, & $ddy = q\,dx^2$, abit in hanc $\int \frac{y^n q\, dx}{x^m p}$; quæ cum sit similis formulæ §. 44 tractatæ $\int Z q\, dx$, ubi in Z tantum x, y & p contineri posuimus, fiet, comparatione instituta, $Z = \frac{y^n}{x^m p}$, & $dZ = -\frac{m y^n\, dx}{x^{m+1} p} + \frac{n y^{n-1}\, dy}{x^m p} - \frac{y^n\, dp}{x^m p^2}$; unde erit $M = -\frac{m y^n}{x^{m+1} p}$, & $N = \frac{n y^{n-1}}{x^m p}$; hincque $Np = \frac{n y^{n-1}}{x^m}$.

Cum igitur pro curva quæsita, inventa sit hæc æquatio $0 = dM + 2 N dp + p dN = dM + N dp + d.Np$, habebimus pro nostro casu hanc æquationem $0 = \frac{m(m+1) y^n\, dx}{x^{m+2} p} - \frac{m n y^{n-1}\, dy}{x^{m+1} p} + \frac{m y^n\, dp}{x^{m+1} pp} + \frac{n y^{n-1}\, dp}{x^m p} + \frac{n(n-1) y^{n-2}\, dy}{x^m} -$

$-\frac{mny^{n-1}dx}{x^{m+1}}$: quæ multiplicata per $\frac{x^{m+2}p^2}{y^{n-1}}$ mutatur in hanc $0 = m(m+1)ydy - mnxpdy + mxydp + nx^2pdp + \frac{n(n-1)x^2p^2dy}{y} - mnxpdy$, seu $0 = m(m+1)y^2dy - 2mnxypdy + n(n-1)x^2p^2dy + mxy^2dp + nx^2ypdp$: quæ est æquatio differentialis secundi gradus, quæ, posito $y = e^{\int vdx}$ reducetur ad istam primi gradus $m(m+1)vdx + mxdv - m(2n-1)xv^2dx + nx^2vdv + n^2x^2v^3dx = 0$. Quod si autem ponamus $m = 0$, ita ut maximum minimumve esse debeat $\int\frac{y^n ddy}{dy}$; habebitur hæc æquatio $(n-1)pdy + ydp = 0$, quæ integrata dabit $y^{n-1}p = C$, seu $y^{n-1}dy = Cdx$; hæcque denuo integrata præbet $y^n = Cx + D$. Sin autem ponamus $n = 0$, ita ut maximum minimumve esse debeat hæc formula $\int\frac{ddy}{x^m dy}$; erit $(m+1)dy + xdp = 0$, seu $(m+1)pdx + xdp = 0$, cujus integrale est $x^{m+1}p = C$, seu $dy = Cx^{-m-1}dx$; quæ denuo integrata dat $y = -\frac{C}{x^m} + D$. Patet autem in his curvis inventis formulam propositam fieri maximum, non vero minimum; nam si sumatur linea recta, ob $ddy = 0$, manifestum est valorem formulæ propositæ minorem fore pro recta linea quam pro curvis inventis.

SCHOLION III.

50. Ratio hîc assignari potest, cur hujusmodi quæstiones, in quibus $\int Zqdx$ maximum minimumve esse debet, deducant tantum ad æquationem differentialem secundi gradus, ideoque quæstionibus præcedentis Problematis potius sint adnumerandæ, siquidem Z fuerit functio ipsarum x & y & p. Nam per reductio-

ductionem integralium formula $\int Zq\,dx$, seu $\int\frac{Z\,ddy}{dx}$, reduci potest ad talem formam $Y+\int V dx$, in qua Y & V sint functiones ipsarum x, y & p tantum, non amplius involventes q. Cum igitur Y sit quantitas absoluta, atque idcirco in maximi minimive inquisitionem non cadat, formula $\int Zq\,dx$ fiet maxima vel minima, si $\int V dx$ talis reddatur; adeo ut hujusmodi formulæ $\int Zq\,dx$ reduci queant ad præcedentis Problematis statum; unde mirum non est, quod pro curvis satisfacientibus æquatio differentialis secundi gradus duntaxat reperiatur. Quo autem memorata reductio formulæ $\int Zq\,dx$ seu $\int Z\,dp$ ad $Y+\int V dx$ melius percipiatur; ponamus, cum Y sit functio ipsarum x, y & p, esse $dY=\varrho\,dx+\sigma\,dy+\tau\,dp=(\varrho+\sigma p)dx+\tau\,dp$; & ex æqualitate $\int Z\,dp=Y+\int V dx$, erit $Z\,dp=(\varrho+\sigma p)dx+\tau\,dp+V dx$; unde concluditur $\tau=Z$ & $V=-\varrho-\sigma p$. Quamobrem ipsa hæc reductio sequenti modo instituetur; integretur formula $Z\,dp$ positis x & y constantibus, & integrale erit functio ipsarum x, y & p, quæ vocetur Y. Deinde differentietur hæc functio Y, ponendo p constans, & differentiale negative sumtum dabit $V dx$, eritque V functio ipsarum x, y & p non continens q. Quoties igitur reddi debet hujusmodi formula $\int Zq\,dx$ maximum minimumve, ac Z est functio ipsarum x & y & p; tum quæstio, etiamsi videatur ad præsens Problema pertinere, tamen statim ad Problema præcedens reducetur. Ita si sumamus formulam $\int\frac{y^n\,ddy}{dy}$, seu $\int\frac{y^n\,dp}{p}$; hæc facile transformatur in $y^n\,lp-n\int y^{n-1}dy\,lp$: unde maximum vel minimum esse debebit hæc formula $\int y^{n-1}dy\,lp$, seu $\int y^{n-1}p\,dx\,lp$, quæ per præcedens Problema tractata, dabit $Z=y^{n-1}p\,lp$, & $dZ=(n-1)y^{n-2}dy\,p\,lp+y^{n-1}dp(1+lp)$; eritque $M=0$, $N=(n-1)y^{n-2}p\,lp$ & $P=y^{n-1}(1+lp)$. At ob $M=0$, supra §. 30 pro curva quæsita inventa est hæc æquatio $Z+C=Pp$, quæ ad nostrum casum accommodata præbet ber $y^{n-1} plp + C = y^{n-1} p + y^{n-1} plp$, sive $y^{n-1} p = C$; quæ est ea ipsa æquatio, quam ante pro eodem casu in solutione Exempli invenimus. Hanc ob rem ad Exempla huic Problemati propria progrediamur.

EXEMPLUM II.

Fig. 5. 51. *Invenire curvam* A m, *quæ cum sua evoluta* AR *& radio osculi* m R *in quovis loco applicato, minimum spatium* A R m *includat.*

Positis abscissa A M $= x$, applicata M m $= y$; erit radius osculi m R $= -\frac{(1+pp)^{3:2}}{q}$; area autem A R m est $= \int \frac{1}{2}$ m R. $dx \sqrt{(1+pp)}$; ex qua minimum esse oportet hanc formulam $\int \frac{(1+pp)^2\, dx}{q}$. Erit itaque $Z = \frac{(1+pp)^2}{q}$, & $dZ = \frac{4(1+pp)\, p\, dp}{q} - \frac{(1+pp)^2\, dq}{qq}$; unde fit $M = 0$, $N = 0$, $P = \frac{4(1+pp)\, p}{q}$, & $Q = -\frac{(1+pp)^2}{qq}$. Cum nunc sit $M = 0$ & $Z = 0$; erit, per Coroll. 6, æquatio pro curva quæsita $Z = D + Cp + Qq$, seu $\frac{(1+pp)^2}{q} = D + Cp - \frac{(1+pp)^2}{q}$, hoc est $2(1+pp)^2 = Dq + Cpq$. Quoniam porro est $dp = q\, dx$, seu $q = \frac{dp}{dx}$, erit $2dx = \frac{(D+Cp)\, dp}{(1+pp)^2}$, cujus integrale est $x = \frac{a}{1+pp} + 2b\int \frac{dp}{(1+pp)^2} = \frac{a+bp}{1+pp} + b\int \frac{dp}{1+pp} + c$: mutatis pro lubitu constantibus, habebitur $x = \frac{a+bp+cpp}{1+pp} + b$ A tang. p. Deinde quia est $dy = p\, dx$, erit $y = \int p\, dx = px - \int x\, dp$; ideoque $y = \frac{ap+bp^2+cp^3}{1+pp} + bp$ A tang. $p - \int \frac{(a+bp+cpp)\, dp}{1+pp} - b\int dp$ A tang. p

$A \text{ tang.} p = \frac{ap + bp^2 + cp^3}{1 + pp} - \int \frac{(a + cpp)\,dp}{1 + pp}$, ob $b\int dp\, A \text{ tang.} p$ $= bp\, A \text{ tang.} p - b\int \frac{p\,dp}{1 + pp}$. Hinc erit $y = f + \frac{ap + bp^2 + cp^3}{1 + pp}$ $+ (c - a)\, A \text{ tang.} p - cp = \frac{f + (a - c)p + (b + f)pp}{1 + pp}$ $+ (c - a)\, A \text{ tang.} p$. Atque ex his quidem ipsarum x & y valoribus per p inventis, curva quæsita per data quatuor puncta duci atque construi potest. Verum ut ipsa curva qualis sit cognoscatur, eliminetur $A \text{ tang.} p$; eritque $A \text{ tang.} p = \frac{x}{b} - \frac{\frac{a}{b} - p - \frac{c}{b}pp}{1 + pp}$ $= \frac{y}{c - a} - \frac{\frac{f}{c - a} + p - \frac{(b + f)}{c - a}pp}{1 + pp}$; atque hinc $(c - a)x - by$ $= \frac{(ac - aa - bf) + 2b(c - a)p + (cc - ac - bb - bf)pp}{1 + pp}$.

Quoniam autem ipsa curva non mutatur, etiamsi coordinatæ constante quantitate vel augeantur vel diminuantur, erit $(c - a)x - by = \frac{bb - (c - a)^2 + 2b(c - a)p}{1 + pp}$; positoque a loco $c - a$, habebitur $ax - by = \frac{bb - aa + 2abp}{1 + pp}$; & subtracta constante bb, erit $ax - by = \frac{-aa + 2abp - bbpp}{1 + pp}$ hincque $\sqrt{(by - ax)} = \frac{bp - a}{\sqrt{(1 + pp)}}$. Ponatur arcus curvæ $= w$; erit $dw = dx\sqrt{(1 + pp)}$; unde emerget ista æquatio $dw = \frac{bdy - adx}{\sqrt{(by - ax)}}$; atque porro $w = 2\sqrt{(by - ax)}$. Exprimit autem $by - ax$ multiplum abscissæ super alio quodam axe fixo assumtæ, cui adeo quadratum arcus respondentis est proportionale. Ex quo intelligitur curvam quæsito respondentem esse Cycloïdem, quæ per quatuor data puncta determinatur, atque sic descripta inter omnes alias curvas per eadem quatuor puncta ductas, minimum cum sua evoluta concludit spatium.

Conclusio hæc ideo aliquantum difficilior facta est, quod Cycloïs pro recta quacunque instar axis assumpta quæsito satisfaciat, atque æquatio pro axe quocunque admodum fiat intricata. Si autem vel a vel b posuissemus $=0$, quo quidem extensio solutionis non fuisset restricta; æquatio pro Cycloïde statim prodiisset.

EXEMPLUM III.

52. *Invenire curvam, in qua sit* $\int \varrho^n\, dW$, *denotante* ϱ *radium osculi, &* dW *elementum curvæ, maximum vel minimum.*

Per positiones ante factas est $dw = dx\sqrt{(1+pp)}$ & $\varrho = \frac{(1+pp)^{3:2}}{q}$; unde maximi minimive formula erit $\int \frac{(1+pp)^{(3n+1):2}dx}{q^n}$; hincque fit $Z = \frac{(1+pp)^{(3n+1):2}}{q^n}$ & $dZ =$

$$\frac{(3n+1)(1+pp)^{(3n-1):2}pdp}{q^n} - \frac{n(1+pp)^{(3n+1):2}dq}{q^{n+1}}.$$

Quamobrem erit $M=0$, $N=0$, $P=\frac{(3n+1)(1+pp)^{(3n-1):2}p}{q^n}$, & $Q = \frac{-n(1+pp)^{(3n+1):2}}{q^{n+1}}$. Cum autem sit $M=0$ & $N=0$, erit, per §. 47, $Z = Cp + D + Qq$; ideoque $\frac{(1+pp)^{(3n+1):2}}{q^n} = Cp + D - \frac{n(1+pp)^{(3n+1):2}}{q^n}$, seu $(n+1)(1+pp)^{(3n+1):2} = (Cp+D)\,q^n$; atque hinc $q = \frac{(1+pp)^{(3n+1):2n}}{\sqrt[n]{(C+Dp)}} = \frac{dp}{dx}$; ergo $dx =$

$dp\sqrt[n]{}$

$dp\sqrt[n]{\frac{C+Dp}{(1+pp)^{(3n+1):2}}}$, atque $dy = p\,dp\sqrt[n]{\frac{C+Dp}{(1+pp)^{(3n+1):2}}}$. Hic autem merito suspicari licet, æquationem futuram esse simpliciorem, si alius axis accipiatur. Hanc ob rem concipiamus alium axem in quo abscissa sit $= t$, applicata $= v$; sitque $dv = s\,dt$; ac ponatur $x = \frac{\alpha t + \beta v}{\gamma}$ & $y = \frac{\beta t - \alpha v}{\gamma}$, posito $\gamma = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$. Erit ergo $dx = \frac{\alpha dt + \beta s dt}{\gamma}$ & $dy = \frac{\beta dt - \alpha s dt}{\gamma}$ atque $\frac{dy}{dx} = p = \frac{\beta - \alpha s}{\alpha + \beta s}$, & $(1+pp) = \frac{\gamma^2(1+ss)}{(\alpha+\beta s)^2}$, & $dp = -\frac{\gamma\gamma ds}{(\alpha+\beta s)^2}$. Porro autem erit $C + Dp = \frac{\alpha C + \beta D + s(\beta C - \alpha D)}{\alpha + [b]s}$, &

$$(1+pp)^{(3n+1):3n} = \frac{\gamma^{(3n+1):n}(1+ss)^{(3n+1):2n}}{(\alpha+\beta s)^{(3n+1):n}}.$$

His substitutis, erit $dx = \frac{\alpha dt + \beta dv}{\gamma} = \frac{\alpha(\alpha+\beta s)ds}{(1+ss)^{(3n+1):2n}}$, posito $\beta C = \alpha D$, & mutata constante. Porro autem fit $dy = \frac{\beta dt - \alpha dv}{\gamma} = \frac{a(\beta - \alpha s)ds}{(1+ss)^{(3n+1):2n}}$, & conjunctim prodit $dt = \frac{a\,ds}{(1+ss)^{(3n+1):2n}}$, & $dv = \frac{a\,s\,ds}{(1+ss)^{(3n+1):2n}}$. Cum nunc has coordinatas æque x & y appellare possimus ac præcedentes, fiet $s = p$, atque $dx = \frac{a\,dp}{(1+pp)^{(3n+1):2n}}$, & $dy = \frac{ap\,dp}{(1+pp)^{(3n+1):2n}}$, quæ ex præcedentibus oriuntur, si ibi ponatur $D = 0$: ex quo perspicuum est, latitudini solutionis superioris, in qua inerat $C + Dp$, nihil omnino decedere, etsi ponatur $D = 0$. Eadem scilicet prodit linea curva, quicunque

 valor

valor litteræ D tribuatur, etiamsi alia æquatio inter x & y proveniat; verumtamen ad alium axem relata. Notare interim convenit pluribus casibus curvam algebraïcam satisfacere; quorum quasi primus est si $n = \frac{1}{2}$, quo erit $x = \int \frac{a\,dp}{(1+pp)^{5:2}} = \frac{ap(1+\frac{2}{3}pp)}{(1+pp)^{3:2}}$, & $y = \int \frac{ap\,dp}{(1+pp)^{5:2}} = -\frac{\frac{1}{3}a}{(1+pp)^{3:2}}$; unde fiet $(1+pp)^{3:2} = -\frac{a}{3y}$ & $pp = \sqrt[3]{\frac{aa}{9yy}} - 1$, quibus substitutis resultat $x = (2\sqrt[3]{\frac{aay}{9}} + y)\sqrt{(\sqrt[3]{\frac{aa}{9yy}} - 1)}$, æquatio algebraïca pro curva, casu quo est $n = \frac{1}{2}$.

Exemplum IV.

53. *Invenire curvam, in qua sit valor hujus formulæ* $\int \frac{y\,dy\,dx^2}{ddy}$ *omnium minimus.*

Patet primo maximum locum habere non posse, quia in linea recta fit $ddy = 0$; ideoque valor formulæ propositæ infinite magnus. Quamobrem videndum est in quanam linea curva fiat valor formulæ $\int \frac{y\,dy\,dx^2}{ddy}$ minimus. Hæc autem formula per substitutiones nostras abit in hanc $\int \frac{yp\,dx}{q}$; eritque $Z = \frac{yp}{q}$, & $dZ = \frac{p\,dy}{q} + \frac{y\,dp}{q} - \frac{yp\,dq}{qq}$; erit ergo $M = 0$, $N = \frac{p}{q}$, & $P = \frac{y}{q}$, & $Q = -\frac{yp}{qq}$. Quoniam autem est $M = 0$; curva quæsita sequenti exprimetur æquatione $Z - Pp - Qq + \frac{p\,dQ}{dx} = C$, ut Coroll. 5 est ostensum. Quamobrem ista proveniet æquatio $\frac{yp}{q} - \frac{p}{dx} d.\frac{yp}{qq} = C$, seu $\frac{y\,dy}{pq} + \frac{a\,dx}{p} = \frac{p\,dy}{qq} + \frac{y\,dp}{qq} - \frac{2yp\,dq}{q^3}$, ob $dy = p\,dx$. Quia vero est $dp = q\,dx$,

erit

erit $\frac{y\,dp}{qq} = \frac{y\,dx}{q} = \frac{y\,dy}{pq}$; ideoque $\frac{a\,dx}{p} = \frac{p\,dy}{qq} - \frac{2yp\,dq}{q^3}$, vel $\frac{a\,dp}{pp} = \frac{dy}{q} - \frac{2y\,dq}{qq}$. Si ponatur conſtans $a = 0$, hæc æquatio fiet integrabilis, eritque $y = bqq$ & $q = \sqrt{\frac{y}{b}} = \frac{dp}{dx} = \frac{p\,dp}{dy}$, unde fit $p\,dp = dy\sqrt{\frac{y}{b}}$; atque integrando $\frac{pp}{2} = \frac{2}{3}y\sqrt{\frac{y}{b}} + c$, ſeu, mutatis conſtantibus, $pp = \frac{y\sqrt{y} + a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}}$, & $p = \sqrt{\frac{y^{3:2} + a^{3:2}}{b^{3:2}}} = \frac{dy}{dx}$; hincque $dx = dy\sqrt{\frac{b^{3:2}}{y^{3:2} + a^{3:2}}}$. Ponatur denuo $a = 0$, erit $x = \frac{b\sqrt{c}}{\sqrt{y}}$ & $xxy = b^2c$; quæ eſt æquatio maxime ſpecialis pro curva quæſtioni ſatisfaciente.

EXEMPLUM V.

54. *Invenire curvam, in qua ſit valor hujus formulæ* $\int q^n dx$, *ſeu* $\int \frac{ddy^n}{dx^{2n-1}}$, *maximus vel minimus.*

Habetur ergo $Z = q^n$, & $dZ = nq^{n-1}dq$; unde erit $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, & $Q = nq^{n-1}$. Cum igitur æquatio pro curva ſatisfaciente ſit hæc $\frac{ddQ}{dx^2} = 0$, erit $dQ = \alpha dx$ & $Q = q^{n-1} = \alpha x + \beta$; hincque $q = (\alpha x + \beta)^{1:(n-1)} = \frac{dp}{dx}$; ex quo fiet $p = (\alpha x + \beta)^{n:(n-1)} + \gamma = \frac{dy}{dx}$; & tandem $y = (\alpha x + \beta)^{(2n-1):(n-1)} + \gamma x + \delta$; ubi coefficientes per integrationes ingreſſos in conſtantibus ſumus complexi. Curvæ igitur ſatisfacientes perpetuo ſunt algebraicæ; excepto caſu, quo eſt $n = \frac{1}{2}$, tum enim poſtrema integra-

 tio

tio præbebit $y = \frac{1}{\alpha} l(\alpha x + \beta) + \gamma x + \delta$. Quod ad casum $n = 1$ attinet, ille in investigationem maximorum & minimorum nequidem incurrit; cum formula $\int q\,dx$ non sit indeterminata, sed determinatum valorem, puta p, ob $q\,dx = dp$, referat. Cæterum patet, evanescente termino $(\alpha x + \beta)^{(2n-1):(n-1)}$, lineam rectam quæsito satisfacere, ob $y = \gamma x + \delta$. Scilicet si quatuor puncta data, per quæ curva quæsita transire debeat, sint in directum posita; tum ipsa linea recta, præ omnibus reliquis lineis per eadem quatuor puncta transeuntibus, quæsito satisfaciet.

Exemplum VI.

55. *Invenire curvam, in qua sit* $\int \frac{xpdx}{yq}$ *maximum vel minimum.*

Quia est $Z = \frac{xp}{yq}$, erit $dZ = \frac{pdx}{yq} - \frac{xpdy}{y^2q} + \frac{xdp}{yq} - \frac{xpdq}{yqq}$; ideoque $M = \frac{p}{yq}$; $N = -\frac{xp}{y^2q}$; $P = \frac{x}{yq}$, & $Q = \frac{-xp}{yq^2}$. Quorum terminorum cum nullus evanescat, æquatio pro curva quæsita erit $\frac{-xp}{y^2q} - \frac{1}{dx} d. \frac{x}{yq} - \frac{1}{dx^2} d^2. \frac{xp}{yq^2} = 0$, seu $0 = \frac{xpdx^2}{y^2q} + \frac{dx^2}{yq} - \frac{xdxdy}{y^2q} - \frac{xdxdq}{yq^2} + d.\left(\frac{pdx}{yq^2} - \frac{xpdy}{y^2q^2} + \frac{xdp}{yq^2} - \frac{2xpdq}{yq^3}\right)$; vel $0 = q^2dx^2(3yq - 2p^2)(y - xp) - 4yqdxdq(xyq - xp^2 + yp) + 6xy^2pdq^2 - 2xy^2pqddq$. Quæ est æquatio differentialis quarti ordinis, quæ utrum integrari possit, an non, haud facile patet; neque etiam operæ pretium est in modum eam integrandi diligentius inquirere; quoniam hic casus non ex solutione Problematis alicujus utilis est natus,

natus, ſed fortuito excogitatus. Hoc autem Exemplum ideo adjicere viſum eſt, ut caſus habeatur, quo ſolutio non ſolum ad æquationem differentialem quarti ordinis aſcendit, ſed etiam neque per ſubſidia generalia ſupra allata ad gradum inferiorem perduci queat. Præcedentia enim Exempla cuncta ita ſunt comparata, ut per regulas generales in Corollariis expoſitas ſtatim æquatio pro curva quæſita inferioris gradus differentialis erui potuerit.

PROPOSITIO V. PROBLEMA.

56. *Invenire curvam, in qua ſit valor formulæ* $\int Z\,dx$ *maximus vel minimus, exiſtente* Z *ejuſmodi functione, quæ differentialia cujuſvis gradus involvat, ita ut ſit* $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + S\,ds + T\,dt +$ &c.

SOLUTIO.

Quoniam translatio puncti n in ν præcedentia elementa magis afficit, quam ſequentia; unicum enim ſequens elementum afficit, at in præcedentia eo ulterius extenditur, quo altiorum ordinum differentialia adſint; hanc ob rem expediet aliquam anteriorem applicatam, uti Hh, pro prima accipere, ita ut mutatio ex particula $n\nu$ applicatæ Nn adjecta non citra Hh porrigatur; id quod eveniet ſi in Z differentialia non ultra ſextum ordinem aſcendant. Sufficiet autem valorem ipſius dZ ad terminum Tdt uſque extendere, quia ex ipſa ſolutione modus facile colligetur eam ad quotcunque ulteriores terminos accommodandi. Præterea, quia in hoc Problemate præcedentia omnia continentur, conſtabit ſimul ſolutionem perpetuo eandem prodire, quæcunque applicata particula quadam infinite parva, uti $n\nu$, augeatur. Sit igitur $AH = x$, & $Hh = y$, reſpondebunt ſingulis punctis abſciſſæ H, I, K, L, M, N, O &c. valores litterarum p, q, r, s, t &c. ut ſequitur: *Fig. 4.*

H	y,	p,	q,	r,	s,	t
I	y',	p',	q',	r',	s',	t'
K	y'',	p'',	q'',	r'',	s'',	t''
L	y''',	p'''.	q''',	r''',	s'''	t'''
M	y^{IV},	p^{IV},	q^{IV}	r^{IV},	s^{IV},	t^{IV}
N	y^{V},	p^{V},	q^{V},	r^{V},	s^{V},	t^{V}.

Hi autem ſinguli valores a tranſlatione n in ν ſequentia augmenta accipient, quæ ex Propoſitione prima, debita mutatione ſignorum adhibita, ita ſe habebunt.

$dy = 0$	$dy' = 0$	$dy'' = 0$	$dy''' = 0$	$dy^{IV} = 0$	$dy^{V} = +n\nu$
$dp = 0$	$dp' = 0$	$dp'' = 0$	$dp''' = 0$	$dp^{IV} = +\frac{n\nu}{dx}$	$dp^{V} = -\frac{n\nu}{dx}$
$dq = 0$	$dq' = 0$	$dq'' = 0$	$dq''' = +\frac{n\nu}{dx^2}$	$dq^{IV} = -\frac{2n\nu}{dx^2}$	$dq^{V} = +\frac{n\nu}{dx^2}$
$dr = 0$	$dr' = 0$	$dr'' = +\frac{n\nu}{dx^3}$	$dr''' = -\frac{3n\nu}{dx^3}$	$dr^{IV} = +\frac{3n\nu}{dx^3}$	$dr^{V} = -\frac{n\nu}{dx^3}$
$ds = 0$	$ds' = +\frac{n}{dx}$	$ds'' = -\frac{4n\nu}{dx^4}$	$ds''' = +\frac{6n\nu}{dx^4}$	$ds^{IV} = -\frac{4n\nu}{dx^4}$	$ds^{V} = +\frac{n\nu}{dx^4}$
$dt = +\frac{n\nu}{dx^5}$	$dt' = -\frac{5n}{dx}$	$dt'' = +\frac{10n\nu}{dx^5}$	$dt''' = -\frac{10n\nu}{dx^5}$	$dt^{IV} = +\frac{5n\nu}{dx^5}$	$dt^{V} = -\frac{n\nu}{dx^5}$

Quoniam porro valor formulæ $\int Z\,dx$ abſciſſæ A H reſpondet, iſque a tranſlatione puncti n in ν non mutatur, ſequentibus abſciſſæ elementis valores formulæ $\int Z\,dx$ reſpondent, qui in hac Tabula exhibentur.

Elemento	reſpondet
HI	$Z\,dx$
IK	$Z'\,dx$
KL	$Z''\,dx$
LM	$Z'''\,dx$
MN	$Z^{IV}\,dx$
NO	$Z^{V}\,dx$

Adho-

Ad horum valorum incrementa, ex translatione puncti n in ν oriunda, invenienda, singulos hos valores differentiari, locoque differentialium dy, dp, dq, dr, ds, dt cum ipsorum derivativis valores supra assignatos & per n ν expressos substitui oportet; eritque ut sequitur:

$$d.Zdx = n\nu.dx\left(\frac{T}{dx^5}\right)$$

$$d.Z'dx = n\nu.dx\left(\frac{S'}{dx^4} - \frac{5T'}{dx^5}\right)$$

$$d.Z''dx = n\nu.dx\left(\frac{R''}{dx^3} - \frac{4S''}{dx^4} + \frac{10T''}{dx^5}\right)$$

$$d.Z'''dx = n\nu.dx\left(\frac{Q'''}{dx^2} - \frac{3R'''}{dx^3} + \frac{6S'''}{dx^4} - \frac{10T'''}{dx^5}\right)$$

$$d.Z^{IV}dx = n\nu.dx\left(\frac{P^{IV}}{dx} - \frac{2Q^{IV}}{dx^2} + \frac{3R^{IV}}{dx^3} - \frac{4S^{IV}}{dx^4} + \frac{5T^{IV}}{dx^5}\right)$$

$$d.Z^{V}dx = n\nu.dx\left(N^{V} - \frac{P^{V}}{dx} + \frac{Q^{V}}{dx^2} - \frac{R^{V}}{dx^3} + \frac{S^{V}}{dx^4} - \frac{T^{V}}{dx^5}\right)$$

Quia jam hæc sola elementa a transpositione puncti n in ν alterantur & incrementa capiunt, summa horum incrementorum dabit integrum valorem differentialem, quem formula $\int Zdx$ ad totam abscissam A Z extensa accipit; qui igitur erit

$$n\nu.dx\left\{\begin{array}{l} + N^{V} \\ - \dfrac{P^{V} + P^{IV}}{dx} \\ + \dfrac{Q^{V} - 2Q^{IV} + Q'''}{dx^2} \\ - \dfrac{R^{V} + 3R^{IV} - 3R''' + R''}{dx^2} \\ + \dfrac{S^{V} - 4S^{IV} + 6S''' - 4S'' + S'}{dx^4} \\ - \dfrac{T^{V} + 5T^{IV} - 10T''' + 10T'' - 5T' + T}{dx^5} \end{array}\right.$$

Singula autem hæc membra per differentialia commode & succincte exprimi poterunt: erit enim,

$$-P^{V}+P^{IV}=-dP^{IV}$$
$$+Q^{V}-2Q^{IV}+Q^{'''}=+ddQ^{'''}$$
$$-R^{V}+3R^{IV}-3R^{'''}+R^{''}=-d^3R^{''}$$
$$+S^{V}-4S^{IV}+6S^{'''}-4S^{''}+S^{'}=+d^4S^{'}$$
$$-T^{V}+5T^{IV}-10T^{'''}+10T^{''}-5T^{'}+T=-d^5T$$

Quamobrem formulæ $\int Z\,dx$ integer valor differentialis ex particula n ν ortus, erit $=$ n $\nu.\,dx\,(N^{V}-\frac{dP^{IV}}{dx}+\frac{ddQ^{'''}}{dx^2}-\frac{d^3R^{''}}{dx^3}+\frac{d^4S^{'}}{dx^4}-\frac{d^5T}{dx^5})$. Hîc autem, quia omnes termini sunt homogenei, signaturæ tuto omitti possunt, evanescit enim discrimen inter N^{V} & N, itemque inter dP^{IV} & dP, reliquaque. Quocirca habebitur formulæ $\int Z\,dx$ iste valor differentialis

$$n\,\nu.\,dx\,(N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\frac{d^4S}{dx^4}-\frac{d^5T}{dx^5}):$$

ex quo simul valor differentialis formulæ $\int Z\,dx$ colligi potest; si in Z altiora etiam differentialia inessent. Quare si curva quæratur, quæ habeat $\int Z\,dx$ maximum vel minimum pro data abscissa, fueritque $dZ=M\,dx+N\,dy+P\,dp+Q\,dq+R\,dr+S\,ds+T\,dt+$ &c. erit primum formulæ $\int Z\,dx$ valor differentialis hic:

$$n\,\nu.\,dx\,(N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\frac{d^4S}{dx^4}-\frac{d^5T}{dx^5}+\&c.)$$

Hincque pro curva quæsita orietur ista æquatio

$$0=N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\frac{d^4S}{dx^4}-\frac{d^5T}{dx^5}+\&c.\quad Q.E.I.$$

COROLL. I.

57. In formula $\int Z\,dx$, uti eam tractavimus, quantitas Z continet differentialia quinti gradus: si quidem in differentiali ipsius

ipsius $dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + Tdt$ terminus Tdt est ultimus. Cum igitur in T adhuc insint differentialia quinti gradus seu t, perspicuum est æquationem pro curva quæsita fore differentialem decimi gradus.

COROLL. II.

58. Hinc intelligitur perpetuo æquationem differentialem pro curva ad gradum duplo altiorem ascendere debere, quam fuerit ipsa formula maximi minimive. Ponimus enim, in ultimo termino Tdt, quantitatem T adhuc t in se complecti: nisi enim hoc esset, duobus gradibus æquatio deprimeretur, uti ex §. 50 colligere licet.

COROLL. III.

59. Si igitur in Z differentialia gradus n contineantur, tum æquatio pro curva differentialis erit gradus $2n$: & hanc ob rem totidem novas constantes arbitrarias potestate in se continet.

COROLL. IV.

60. Ob tot igitur constantes arbitrarias, totidem puncta ad Problema determinandum proposita esse oportet; ita scilicet Problema, ut sit determinatum, enuntiari debebit; Inter omnes curvas per data $2n$ puncta transeuntes, determinare eam in qua sit $\int Zdx$ maximum vel minimum, siquidem quantitas Z complectatur differentialia n gradus.

COROLL. V.

61. Ob n igitur numerum integrum, numerus punctorum, quo Problema determinabitur, semper erit par. Sic, vel nullum punctum, vel duo, vel quatuor, vel sex, vel octo puncta, & ita porro, ad Problematis determinationem requiruntur.

SCHOLION I.

62. Ex gradu *differentialitatis* igitur, ad quem æquatio pro curva inventa assurgit, vel ex numero punctorum per quæ curvam satisfacientem transire oportet, hujusmodi Problemata commode in Classes distribui poterunt. Ad primam igitur Classem ea referentur Problemata, in quibus absolute quæritur linea curva, quæ pro data abscissa habeat valorem $\int Z\,dx$ maximum vel minimum; talia Problemata cum in Propositione secunda continentur, tum etiam in tertia, iis casibus quos §. §. 26 & 27 exposuimus; his scilicet casibus solutio præbet curvam determinatam quæsito satisfacientem. Classis secunda ea complectitur Problemata, quorum solutio ad æquationem differentialem secundi gradus perducit: hæcque duo puncta ad sui determinationem poscunt; & ita proponi debent, ut inter omnes curvas per data duo puncta transeuntes ea definiatur, in qua sit $\int Z\,dx$ maximum vel minimum: cujusmodi Problemata in Propositione tertia soluta dedimus. Porro ad tertiam Classem pertinent Problemata in Propositione quarta tractata, quæ ita se habent; ut inter omnes curvas per quatuor data puncta transeuntes determinetur ea quæ habeat $\int Z\,dx$ maximum vel minimum. Simili modo quarta Classis postulat ad determinationem sex puncta, quinta octo, & ita porro, quas Classes omnes in præsente Problemate sumus complexi. Cæterum etsi æquatio inventa ad tantum differentialium gradum ascendit, tamen sæpius generaliter integrationem unam vel plures admittit, cujusmodi casus in præcedentibus Problematibus nonnullos exhibuimus. Hanc ob rem videamus etiam quibus casibus æquatio nostra generalis integrationem, vel unam vel plures, admittat; ut in allatis Exemplis statim videre liceat, utrum ea in his casibus contineantur an secus. Hujusmodi autem casus potissimum sunt duo, in quorum altero est $N = 0$, in altero $M = 0$, a quibus deinceps alii casus pendent, quos hic evolvemus.

CA-

CASUS I.

63. Sit in maximi minimive formula $\int Z\,dx$ terminus $N = 0$; ita ut sit $dZ = M\,dx + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + S\,ds +$ &c.

Hoc ergo casu æquatio pro curva erit hæc, $0 = -\frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \frac{d^5T}{dx^5} +$ &c. quæ, per dx multiplicata, fit integrabilis, prodibitque

$$0 = A - P + \frac{dQ}{dx} - \frac{ddR}{dx^2} + \frac{d^3S}{dx^3} - \frac{d^4T}{dx^4} + \&c.$$

CASUS II.

64. Sit & $N = 0$ & $P = 0$, ita ut sit $dZ = M\,dx + Q\,dq + R\,dr + S\,ds + T\,dt +$ &c.

Quoniam est $N = 0$, una integratio jam successit, habeturque pro curva quæsita ista æquatio modo inventa, posito etiam $P = 0$:

$$0 = A + \frac{dQ}{dx} - \frac{ddR}{dx^2} + \frac{d^3S}{dx^3} - \frac{d^4T}{dx^4} + \&c.$$

quæ per dx multiplicata denuo integrari poterit, eritque

$$0 = Ax - B + Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \frac{d^3T}{dx^3} + \&c.$$

CASUS III.

65. Si fuerit & $N = 0$ & $P = 0$ & $Q = 0$, ita ut sit $dZ = M\,dx + R\,dr + S\,ds + T\,dt +$ &c.

Bini valores N & P evanescentes jam præbuerunt hanc æquationem bis integratam $0 = Ax - B + Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \frac{d^3T}{dx^3} +$ &c. in qua si ponatur $Q = 0$, & multiplicetur per dx, obtinebitur sequens æquatio ter integrata:

$$0 = Ax^2 - Bx + C - R + \frac{dS}{dx} - \frac{ddT}{dx^2} + \&c.$$

Ex quo jam apparet, si insuper fuerit $R = 0$, tum etiam quartam integrationem locum habere, & ita porro.

Casus IV.

66. Si fuerit $M = 0$, ita ut sit $dZ = Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds +$ &c.

Æquatio pro curva quæsita ante prodiit $0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} -$ &c. quæ multiplicetur per $dy = pdx$, & tum addatur $dZ - Ndy - Pdp - Qdq - Rdr - Sds -$ &c. prodibit.

$$0 = dZ - pdP + \frac{pddQ}{dx} - \frac{pd^3R}{dx^2} + \frac{pd^4S}{dx^3} - \text{\&c.}$$
$$- Pdp - Qdq - Rdr - Sds - \text{\&c.}$$

cujus integrale assignari potest; erit enim

$$\begin{aligned} 0 = A + Z - Pp &+ \frac{pdQ}{dx} - \frac{pddR}{dx^2} + \frac{pd^3S}{dx^3} \text{ \&c.} \\ &- Qq + \frac{qdR}{dx} - \frac{qddS}{dx^2} \\ &- Rr + \frac{rdS}{dx} \\ &- Ss \end{aligned}$$

vel $0 = A + Z - Pp + \frac{pdQ - Qdp}{dx} - \frac{pddR - dpdR + Rddp}{dx^2} + \frac{pd^3S - dpddS + dSddp - Sd^3p}{dx^3} -$ &c. cujus termini, quomodo ulterius progrediantur, si in dZ insint sequentia differentialia Tdt, Udu &c. sponte patet.

Casus V.

67. Si sit & $M = 0$, & $N = 0$; ita ut sit $dZ = Pdp + Qdq + Rdr + Sds +$ &c.

Quia est $N = 0$, una integratio per casum primum instituatur,

tur, habebiturque $o = A - P + \frac{dQ}{dx} - \frac{ddR}{dx^2} + \frac{d^3S}{dx^3} -$ &c. quæ multiplicetur per $dp = qdx$, ad eamque addatur $o = - dZ + Pdp + Qdq + Rdr + Sds +$ &c. quo facto prodibit ista æquatio integrabilis

$$o = Adp - dZ + qdQ - \frac{qddR}{dx} + \frac{qd^3S}{dx^2} - \&c.$$
$$+ Qdq + Rdr + Sds + \&c.$$

cujus integrale erit

$$o = Ap - B - Z + Qq - \frac{qdR}{dx} + \frac{qddS}{dx^2} \&c.$$
$$+ Rr - \frac{rdS}{dx}$$
$$+ Ss$$

seu $o = Ap - B - Z + Qq - \frac{qdR - Rdq}{dx} + \frac{qddS - dqdS + Sddq}{dx^2} - \frac{qd^3T - dqddT + dTddq - Td^3q}{dx^3}$ &c.

Casus VI.

68. Sit & $M = o$ & $N = o$ & $P = o$, ita ut sit $dZ = Qdq + Rdr + Sds + Tdt +$ &c.

Ob $N = o$ & $P = o$, per Casum secundum, duæ integrationes locum habent, eritque æquatio, pro curva quæsita, hæc,

$$o = Ax - B + Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \frac{d^3T}{dx^3} + \&c.$$

ad quam per $dq = rdx$ multiplicatam si addatur $o = dZ - Qdq - Rdr - Sds - Tdt -$ &c. habebitur ista æquatio denuo integrabilis:

$$o = Axdq - Bdq + dZ - rdR + \frac{rddS}{dx} - \frac{rd^3T}{dx^2} + \&c.$$
$$- Rdr - Sds - Tdt - \&c.$$

cujus integrale est

o =

$$0 = Axq - Bq + C + Z - Rr + \frac{rdS}{dx} - \frac{rddT}{dx^2}$$
$$- Ap \qquad - Ss + \frac{sdT}{dx} \qquad \&c.$$
$$- Tt$$

seu $0 = A(xq - p) - Bq + C + Z - Rr + \frac{rdS - Sdr}{dx}$
$- \frac{rddT - drdT + Tddr}{dx^2} + \&c.$

Casus VII.

69. Si fuerit $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, & $Q = 0$, ita ut sit $dZ = Rdr + Sds + Tdt +$ &c.

Ob $N = 0$, & $Q = 0$, Casus tertius istam suppeditat æquationem pro curva jam ter integratam,

$$0 = Ax^2 - Bx + C - R + \frac{dS}{dx} - \frac{ddT}{dx^2} + \&c.$$

ad quam per $dr = sdx$ multiplicatam addatur $0 = -dZ + Rdr + Sds + Tdt +$ &c. quo facto prodibit ista æquatio,

$$0 = Ax^2 dr - Bxdr + Cdr - dZ + sdS - \frac{sddT}{dx} + \&c.$$
$$+ Sds + Tdt + \&c.$$

quæ integrata dabit hanc,

$$0 = Ax^2 r - Bxr + Cr - D - Z + Ss - \frac{sdT}{dx} + \&c.$$
$$- 2Axq + Bq \qquad + Tt$$
$$+ 2Ap$$

seu $0 = A(x^2 r - 2xq + 2p) - B(xr - q) + Cr - D$
$- Z + Ss - \frac{sdT - Tds}{dx} + \&c.$

SCHO-

SCHOLION II.

70. Horum casuum ope, quorum numerum ulterius augere liceret, si commodum videretur, sæpe-numero Problemata admodum expedite resolvi poterunt. Quod si enim Problema quodpiam contineatur in aliquo istorum Casuum, qui unam pluresve integrationes per se admittat, statim formari poterit æquatio pro curva, semel vel aliquoties jam integrata, quæ propterea ulterius facilius tractari poterit. Quod ut distinctius pateat, simulque usus hujus postremi Problematis, quo in maximi minimive formula $\int Z\,dx$ differentialia secundum gradum superantia insunt, declaretur, unicum Exemplum afferre juvabit.

EXEMPLUM.

71. *Inter omnes curvas eidem abscissæ respondentes, definire eam, cujus evoluta, cum sua ipsius evoluta, intra radios evolutæ maximum minimumve spatium complectatur.*

Positis, pro curva quæsita, abscissa $= x$ & applicata $= y$; sit elementum curvæ $= dw$, & ejus radius osculi $= \varrho$; erit elementum ipsius evolutæ $= d\varrho$, & hujus radius osculi $= \frac{\varrho\, d\varrho}{dw}$: unde area comprehensa inter evolutam curvæ quæsitæ, ipsiusque evolutam, erit $= \frac{1}{2}\int \frac{\varrho\, d\varrho^2}{dw}$; quæ ergo expressio maxima minimave est reddenda. Cum autem sit $dw = dx\sqrt{(1+pp)}$: & $\varrho = \frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{q}$; erit $d\varrho = 3(1+pp)^{\frac{1}{2}}\, p\,dx - \ldots\ldots$ $\frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}\, r\,dx}{qq}$, & $d\varrho^2 = (1+pp)\,dx^2\,(9pp - \frac{6(1+pp)r}{qq} + \frac{(1+pp)^2 rr}{q^4})$ atque $\frac{\varrho}{dw} = \frac{1+pp}{q\,dx}$. Maximi minimive formula itaque est $\int \frac{(1+pp)^2}{q}\,dx\,(9pp -$

$\frac{6(1+pp)r}{qq} + \frac{(1+pp)^2r^2}{q^4}) = \int dx\left(\frac{9pp(1+pp)^2}{q} - \frac{6(1+pp)^3r}{q^3}\right.$ $\left. + \frac{(1+pp)^4r^2}{q^5}\right)$, ex quo Z erit functio ipsarum p, q & r; unde differentiando prodibit:

$$dZ = \frac{18pdp(1+pp)(1+3pp)}{q} - \frac{9ppdq(1+pp)^2}{qq} - \frac{6dr(1+pp)^3}{q^3}$$
$$- \frac{36prdp(1+pp)^2}{q^3} + \frac{18rdq(1+pp)^3}{q^4} + \frac{2rdr(1+pp)^4}{q^5}$$
$$+ \frac{8rrpdp(1+pp)^3}{q^5} - \frac{5r^2dq(1+pp)^4}{q^6}$$

Comparatione ergo cum forma generali instituta, erit $M = 0$; $N = 0$;

$$Z = \frac{9pp(1+pp)^2}{q} - \frac{6(1+pp)^3r}{q^3} + \frac{(1+pp)^4r^2}{q^5}$$
$$P = \frac{18p(1+pp)(1+3pp)}{q} - \frac{36pr(1+pp)^2}{q^3} + \frac{8rrp(1+pp)^3}{q^5}$$
$$Q = -\frac{9pp(1+pp)^2}{qq} + \frac{18r(1+pp)^3}{q^4} - \frac{5rr(1+pp)^4}{q^6}$$
$$R = -\frac{6(1+pp)^3}{q^3} + \frac{2r(1+pp)^4}{q^5}$$

Cum nunc sit $M = 0$ & $N = 0$, solutio cadit in Casum quintum, eritque æquatio pro curva quæsita hæc,

$$0 = Ap - B - Z + Qq + Rr - \frac{qdR}{dx}$$

quæ, factis substitutionibus, transit in hanc

$$0 = Ap - B - \frac{18pp(1+pp)^2}{q} - \frac{16pr(1+pp)^3}{q^3} + \frac{6rr(1+pp)^4}{q^5}$$
$$- \frac{2dr(1+pp)^4}{q^4dx} + \frac{36p(1+pp)^2}{q};$$

quæ æquatio nimis est complicata, quam ut ejus ulteriores integrationes suscipi queant. Cæterum apparet hanc æquationem esse differentialem quarti ordinis, ita ut per quatuor residuas integrationes quatuor constantes adhuc ingrediantur: ex quo sex data oportebit esse puncta, per quæ curva transeat, ut Problema determinetur.

CAPUT