METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,

SIVE

SOLUTIO

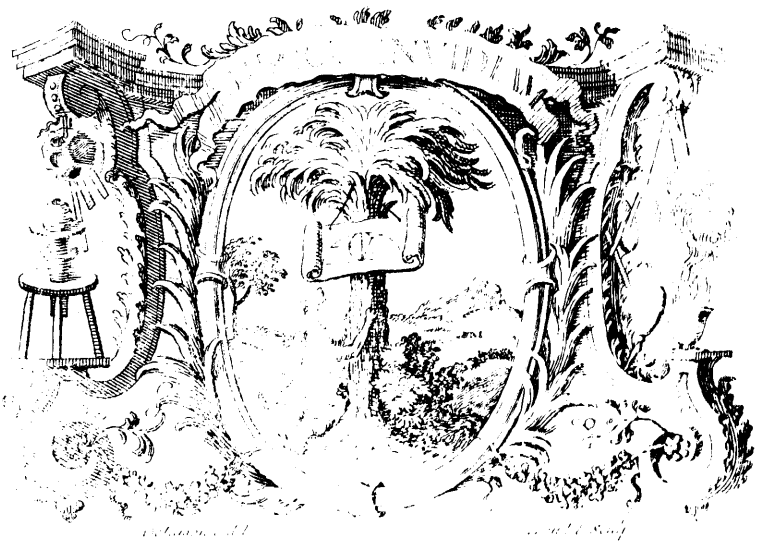
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI

LATISSIMO SENSU ACCEPTI.

AUCTORE

LEONHARDO EULERO,

Professore Regio, & Academiæ Imperialis Scientiarum PETROPOLITANÆ *Socio.*



LAUSANNÆ & GENEVÆ,

Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCXLIV.

METHODUS
INVENIENDI CURVAS
MAXIMI MINIMIVE PROPRIETATE GAUDENTES.

CAPUT PRIMUM.

De Methodo maximorum & minimorum ad lineas curvas inveniendas applicata in genere.

Definitio I.

1. METHODUS *maximorum & minimorum ad lineas curvas applicata*, est methodus inveniendi lineas curvas, quæ maximi minimive proprietate quapiam proposita gaudeant.

Corollarium I.

2. Reperiuntur igitur per hanc methodum lineæ curvæ, in quibus proposita quæpiam quantitas maximum vel minimum obtineat valorem.

COROLL. II.

3. Cum autem eadem curva infinitis modis sui similis effici queat, Problema, nisi quædam restrictio adhibeatur, maxime esset indeterminatum, atque adeo nullum. Quæcunque enim curva præbeatur maximi minimive proprietate prædita, semper alia, illi quidem vel similis vel dissimilis, exhiberi posset, quæ illam proprietatem, vel majorem, vel minorem, in se contineret.

COROLL. III.

4. Quoniam igitur adæquata curvarum cognitio postulat, ut eæ ad axem aliquem positione datum, ejusque portiones quascunque quæ abscissæ vocantur, referantur: prima eaque præcipua restrictio ex quantitate abscissæ petenda erit.

COROLL. IV.

5. Problemata ergo ad methodum hanc pertinentia ita proponi debent, ut quærantur lineæ curvæ ad axem positione datum relatæ, quæ inter omnes alias curvas eidem abscissæ respondentes maximi minimive proprietate sint præditæ.

SCHOLION.

6. Hæc itaque Methodus maximorum & minimorum maxime discrepat ab illa, quam alibi exposuimus. Ibi enim, pro data ac determinata linea curva, locum determinavimus, ubi proposita quædam quantitas variabilis ad curvam pertinens fiat maxima vel minima. Hic autem ipsa linea curva quæritur, in qua quantitas quædam proposita fiat maxima vel minima. Methodus hæc jam superiori Seculo, mox post inventam Analysin infinitorum, excoli cœpit a Celeb. Fratribus BERNOULLIIS, atque ex eo tempore maxima cepit incrementa. Primum quidem Problema, quod ex hoc genere est tractatum, ad Mechanicam respiciebat, eoque quærebatur linea curva super qua grave descendens citissime delabatur; cui *Curvæ brachystochronæ* seu *Lineæ celerrimi descensus* nomen erat impositum. In hoc Problemate jam

jam manifestum est, id, sine adjuncta conditione, nequidem nomen quæstionis retinere posse: perspicuum enim est, quo brevior magisque ad situm verticalem accedens linea capiatur, eo fore tempus descensus super ea brevius. Quamobrem non absolute quæri potest linea, super qua grave descendens celerrime seu brevissimo tempore delabatur; sed abscissæ quantitas, cui curva invenienda respondeat, simul debuit definiri; ita ut, inter omnes curvas eidem abscissæ in axe positione dato sumtæ respondentes, quæreretur ea super qua corpus grave citissime delaberetur. Neque vero in hoc Problemate ista conditio sufficiebat ad id determinatum efficiendum: sed insuper istam conditionem adjicere oportuit, ut curva invenienda per data duo puncta transeat; atque istud Problema his conditionibus adstringi debuit, ut fieret determinatum, inter omnes, scilicet, lineas curvas per data duo puncta transeuntes eam determinare super qua corpus descendens arcum datæ abscissæ respondentem brevissimo tempore absolvat. Interim tamen hic notandum est, conditionem transitus per duo puncta non esse absolute necessariam, sed in hoc Problemate per ipsam solutionem esse illatam. In solutione enim hujus Problematis immediate pervenitur ad æquationem differentialem secundi gradus, quæ bis integrata duas recipit constantes arbitrarias, ad quas determinandas duobus opus est punctis per quæ curva traducatur, vel aliis similibus proprietatibus: atque hæc eadem conditio, quasi sua sponte, ad omnia istiusmodi Problemata accedit, quarum solutio immediate ad æquationem differentialem secundi gradus deducit. In Problematibus autem quæ resolvuntur per æquationem differentialem quarti vel altioris ordinis, nequidem duo puncta ad curvam determinandam sufficiunt, sed tot opus est punctis, quot gradus differentialia obtinent. Contra vero, si solutio statim ad æquationem algebraïcam perducat, tum sine hujusmodi conditione Problema perfecte erit determinatum; dummodo abscissæ longitudo definiatur. Verum hæc omnia clarius perspicientur, quando infra ad solutiones Problematum perveniemus: ibique has notationes fusius explicabimus. Hic enim in principio ista tantum commemorare visum est, ut perversas ideas circa determinationem hujusmodi Problematum tollamus.

Definitio II.

7. *Methodus maximorum ac minimorum absoluta*, docet inter omnes omnino curvas, ad eandem abscissam relatas, determinare eam, in qua proposita quædam quantitas variabilis maximum minimumve obtineat valorem.

Corollarium.

8. In Problematibus igitur ad hanc methodum pertinentibus, datur axis positione; atque, inter omnes curvas quæ ad hunc axem ejusque determinatam portionem referri possunt, determinatur ea in qua quantitas quædam variabilis fit maxima vel minima.

Scholion.

9. Aliam conditionem ad maximi minimive determinationem, præter abscissæ quantitatem, hic in genere non adjicimus. Dantur enim Problemata, quæ hoc modo perfecte determinantur; quemadmodum infra distinctius patebit. Etsi enim etiam ejusmodi Problemata occurrunt, ad quæ determinanda insuper duo plurave puncta præscribi possunt, per quæ quæsita curva transeat; tamen hoc demum ex ipsa cujuscunque Problematis solutione perspicietur. Namque si ad ejusmodi æquationem pro curva quæsita perveniatur, in qua per integrationem novæ quantitates constantes sint ingressæ, quæ in ipsa quæstione non inerant; tum solutio censenda erit ambigua, atque vaga; eo quod innumerabiles lineas curvas, quæ ex determinatione illarum quantitatum constantium & arbitrariarum oriri possunt, in se complectitur. His igitur in casibus erit concludendum, Problema ex sua natura non penitus esse determinatum: sed ad ejus plenam determinationem, præter abscissæ quantitatem, tot novas conditiones adjungi oportere, quibus illæ arbitrariæ constantes ad determinatos valores revocentur. Pro hujusmodi autem conditionibus commodissime assumuntur puncta, per quæ curvæ quæsitæ

quæſitæ ſit tranſeundum ; totidem vero puncta , quot inſunt in æquatione inventa quantitates arbitrariæ, ipſam æquationem determinatam reddent. Loco punctorum autem , ad curvam quæſitam perfecte determinandam, adhiberi etiam poſſunt totidem tangentes quæ curvam quæſitam tangant, & , ſi contactus debeat fieri in dato tangentis puncto , hæc conditio duobus punctis æquivalebit. Quin etiam in locum punctorum, aliæ quæcunque conditiones ſubſtitui poſſunt ; dummodo eæ ita ſint comparatæ , ut per eas quantitates arbitrariæ in æquatione inventa contentæ determinentur. Neque vero ante opus eſt ſolutionem ad finem perducere, quam iſta dijudicatio ſuſcipiatur ; ſed infra tradentur certa criteria, quorum ope, ſtatim, ex illa quantitate variabili quæ maximum minimumve eſſe debet , dignoſci poterit quæ novæ conſtantes in æquationem pro curva ingrediantur, quæ in quæſtione non continebantur. Oriuntur autem iſtæ conſtantes arbitrariæ ex gradu differentialium , ad quem æquatio pro curva quæſita exſurgit ; quoti enim gradus prodit æquatio differentialis pro curva quæſita , tot quantitates arbitrariæ in illa cenſendæ ſunt poteſtate ineſſe ; hincque totidem conditionibus opus erit ad curvam determinandam. Idem vero etiam uſu venit in ſolutione omnium Problematum , quando æquatio differentialis vel primi vel altioris gradus invenitur ; ita ut hinc in præſenti inſtituto nulla peculiaris difficultas ineſſe cenſenda ſit.

DEFINITIO III.

10. *Methodus maximorum ac minimorum relativa* docet, non inter omnes omnino curvas eidem abſciſſæ reſpondentes , ſed inter eas tantum quæ præſcriptam quandam proprietatem communem habeant, eam determinare quæ maximi minimive proprietate gaudeat.

COROLL. I.

11. Ad hujuſmodi igitur Problemata ſolvenda, primum, ex omnibus omnino curvis eidem abſciſſæ reſpondentibus eæ ſunt

segregandæ, in quas eadem præscripta proprietas competat; atque tum demum ex his segregatis ea quæ quæritur debebit definiri.

Coroll. II.

12. Quanquam autem tali conditione numerus curvarum omnium ad eandem abscissam relatarum vehementer restringitur; tamen is etiamnum manebit infinitus. Quin etiam, si non una, sed plures proprietates præscribantur, quibus omnes curvæ ex quibus quæsita est determinanda debeant esse præditæ; tamen usque numerus curvarum manebit infinitus.

Coroll. III.

13. Quo plures itaque proponuntur proprietates; quæ iis curvis ex quibus quæsitam definiri oportet communes esse debeant; eo magis numerus curvarum inter quas electio quæsitæ est instituenda restringetur, etiamsi maneat infinitus.

Scholion I.

14. Ex hoc genere, in quo Methodum maximorum & minimorum relativam constituimus, initio hujus Seculi, primum a *Jacobo* Bernoullio in medium prolatum est famosum illud *Problema Isoperimetricum*; in quo quærebatur curva maximi minimive proprietate prædita, non inter omnes curvas ad eandem abscissam relatas, sed inter eas tantum quæ ejusdem essent longitudinis; ex quo istæ curvæ, ex quibus quæsitam erui oportebat, *isoperimetræ* sunt appellatæ. Ita si, inter omnes curvas eidem abscissæ respondentes & longitudine æquales, quæratur ea quæ cum abscissa & applicata maximum spatium includat; reperitur quæsito linea circularis satisfacere: quod quidem jam diu ante inventam hanc methodum Geometris innotuerat, ac demonstratum erat. At, hoc casu iterum, ex ipsa Problematum natura, novæ conditiones accedunt; uti in iis, quæ ad Methodum maximorum ac minimorum absolutam pertinent;

quæ

quæ ex constantibus arbitrariis, quas solutio inducit, sunt æstimandæ. Ita in solutione Problematis, quo curva quæritur quæ inter omnes ejusdem longitudinis maximam comprehendat aream cum abscissa, duæ constantes novæ ingrediuntur; ex quo, ad Problema determinatum efficiendum, id ita est proponendum, ut inter omnes curvas ejusdem longitudinis, quæ non solum eidem abscissæ respondeant, sed etiam per data duo puncta transeant, quæratur ea quæ ad datam abscissam maximam aream referat. Atque simili modo evenire potest, ut quatuor puncta, & plura etiam interdum, pro arbitrio assumi debeant, quo Problema fiat determinatum: cujus rei dijudicatio ex ipsa Problematum natura est petenda. Quemadmodum autem, in Problemate isoperimetrico, omnes curvæ ex quibus quæsitam determinari oportet ejusdem longitudinis ponuntur; ita loco hujus proprietatis alia quæcunque proponi potest, quæ omnibus communis esse debeat. Sic jam quæsitæ sunt curvæ maximi minimive proprietate præditæ, inter omnes eas curvas ad eandem abscissam relatas tantum, quæ circa eam abscissam conversæ omnes æquales superficies generent; atque simili modo aliæ quæcunque proprietates proponi possunt. Deinde etiam, non una, sed plures hujusmodi proprietates præscribi possunt, quæ omnibus curvis inter quas ea quæ maximum minimumve aliquod contineat definienda sit communes esse debeant. Ita si quæreretur curva maximi vel minimi proprietate quapiam prædita, inter omnes curvas eidem abscissæ respondentes, quæ tam essent omnes inter se longitudine æquales, quam etiam areas æquales concluderent.

SCHOLION II.

15. Propter hoc discrimen inter Methodum maximorum & minimorum absolutam ac relativam, tractatio nostra erit bipartita. Primum scilicet methodum trademus, inter omnes omnino curvas eidem abscissæ respondentes, eam determinandi quæ maximi minimive proprietate sit prædita. Deinde vero progrediemur ad ejusmodi Problemata, in quibus curva maximi minimive proprietate

prietate gaudens postulatur, inter omnes curvas quæ unam pluresve propositas proprietates communes habeant; atque ex numero harum proprietatum istius tractationis denuo subdivisio orietur. Interim tamen non opus erit in hac subdivisione longius progredi; cum mox reperiatur methodus, quotcunque etiam propositæ fuerint proprietates, Problemata facile resolvendi. Solutiones enim Problematum prima fronte maxime intricatorum præter opinionem fient perquam expeditæ, ac levi calculo absolvendæ.

HYPOTHESIS I.

16. *In hac tractatione abscissam, ad quam omnes curvas referemus, perpetuo littera* x, *applicatam vero littera* y *designabimus. Tum vero, sumptis elementis abscissæ æqualibus, semper erit* $dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx$; $dr = sdx$; *&c.*

COROLL. I.

17. His igitur substitutionibus omnia differentialia ipsius *y* cujuscunque gradus ex expressionibus tollentur, atque præter differentiale dx nulla alia differentialia relinquentur. Quanquam autem hoc modo omnia differentialia, præter dx, specie tantum, non revera tolluntur; tamen hæ substitutiones ingens nobis in præsenti instituto afferent subsidium.

COROLL. II.

18. Quin etiam hujusmodi substitutionibus differentialis constantis assumtio penitus de calculo tollitur: quodcunque enim differentiale aliud constans assumatur, post istas substitutiones perpetuo eadem formula emergere debet. Interim tamen, ob methodum infra adhibendam, necesse erit differentiale dx tanquam constans assumere.

COROL-

COROLL. III.

19. Ut autem facilius appareat, quomodo per has substitutiones differentialia cujusque gradus ipsius y evanescant; juvabit sequentem Tabellam adjecisse.

$$\begin{array}{lll} dy = & pdx & \\ ddy = & dpdx & = qdx^2 \\ d^3y = & dqdx^2 & = rdx^3 \\ d^4y = & drdx^3 & = sdx^4 \\ d^5y = & dsdx^4 & = tdx^5 \\ \&c. & \&c. & \&c. \end{array}$$

COROLL. IV.

20. Quod si etiam arcus curvæ abscissæ x respondens, cum suis differentialibus cujuscunque gradus occurrat; ea omnia per istas litteras ita exprimi poterunt, ut nulla alia differentialia præter dx adsint. Posito enim arcu $= w$ erit.

$$w = \int\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \int dx\sqrt{(1+pp)}$$
$$dw = dx\sqrt{(1+pp)}$$
$$ddw = \frac{pqdx^2}{\sqrt{(1+pp)}}$$
$$d^3w = \frac{prdx^3}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{qqdx^3}{(1+pp)^{3:2}}$$
$$\&c.$$

COROLL. V.

21. Simili modo, ex his radius osculi seu curvedinis curvæ, in quovis loco, per quantitates specie saltem finitas poterit exprimi. Cum enim, posito elemento dx constante, sit longitudo radii osculi $= \frac{-dw^3}{dxddy}$; fiet ea $= \frac{-(1+pp)^{3:2}}{q}$

COROLL. VI.

22. Porro ex iisdem substitutionibus erit, ut sequitur.

$$\text{Subtangens} = \frac{y\,dx}{dy} = \frac{y}{p}$$

$$\text{Subnormalis} = \frac{y\,dy}{dx} = py$$

$$\text{Tangens} = \frac{y\,dw}{dy} = \frac{y\sqrt{(1+pp)}}{p}$$

$$\text{Normalis} = \frac{y\,dw}{dx} = y\sqrt{(1+pp)}$$

Atque, pari modo, omnes quantitates finitæ ad curvam pertinentes, nisi integralia involvant, per hujusmodi quantitates finitas ita exprimi poterunt, ut nulla differentialia amplius inesse videantur.

DEFINITIO IV.

23. *Maximi minimive Formula*, pro quovis Problemate, nobis erit ea quantitas, quæ in curva quæsita maximum minimumve valorem obtinere debet.

COROLL. I.

24. Quoniam in omnibus Problematibus ad quæ hæc Methodus est accommodata, curva quæritur quæ, vel inter omnes, vel tantum inter innumeras curvas certo modo determinatas, maximi minimive proprietate gaudeat; hæc ipsa proprietas, quæ in curva quæsita maxima vel minima esse debet, erit quantitas; eaque exprimetur Formula, quam maximi minimive Formulam hîc appellamus.

Coroll. II.

25. Cum autem maximi minimive proprietas ita proponi debeat, ut ad datam ac determinatam abſciſſam referatur; Formula maximi minimive quoque ad illam definitam abſciſſam debet referri.

Coroll. III.

26. Erit igitur maximi minimive Formula, quantitas variabilis a longitudine abſciſſæ cujuſcunque cui reſpondet pendens. Atque in quovis Problemate quæretur curva, pro qua, ad definitam abſciſſam, illa maximi minimive Formula maximum minimumve obtineat valorem.

Coroll. IV.

27. Neque vero maximi minimive Formula a ſola abſciſſa pendere poteſt: hoc enim ſi eſſet, pro omnibus curvis eidem abſciſſæ reſpondentibus eundem obtineret valorem, atque idcirco omnes æqualiter ſatisfacerent.

Coroll. V.

28. Hanc ob rem quoque maximi minimive Formula, præter abſciſſam omnibus curvis quæ in conſiderationem veniunt communem, a qualibet curva peculiariter debet pendere; ita ut una ſit, pro qua maximum minimumve valorem induere queat.

Scholion I.

29. Quo hæc omnia clarius intelligantur, atque ſtatus Quæſtionum in ſequenti pertractandarum melius comprehendatur; ponamus, vel inter omnes omnino curvas, vel tantum inter innumerabiles certam quamdam proprietatem communem habentes, quæ eidem abſciſſæ AZ reſpondeant, eam determinari debere, *Fig. 1.*

 pro

Fig. 1. pro qua valor formulæ W ſit maximus vel minimus. Ponamus huic Quæſtioni ſatisfacere curvam a m z, ita ut, quæcunque alia curva ad abſciſſam definitam A Z referatur, valor formulæ W vel fiat minor quam pro hac curva, vel major : prout in curva ſatisfaciente, W vel maximum eſſe debet vel minimum. In hac igitur quæſtione latiſſime patente, habemus primo abſciſſam determinatæ longitudinis A Z : deinde curva eſt quærenda, vel inter omnes ommino curvas ad eandem hanc abſciſſam relatas, vel tantum inter innumerabiles quibus una pluresve proprietates ſint communes, prout quæſtio ad methodum maximorum & minimorum vel abſolutam vel relativam eſt accommodata : tertiò habemus eam quantitatem W, cujus valor in curva quæſita a m z maximus eſſe debet vel minimus ; eritque igitur quantitas W maximi minimive formula, ſicut ea eſt definita. Nunc igitur ſtatim apparet hanc formulam W ita eſſe debere comparatam, ut ad omnes curvas quæ quidem concipi poſſunt accommodari queat. Primo ſcilicet a quantitate abſciſſæ definitæ A Z debebit pendere ; ita ut ea mutetur, valore ipſius A Z mutato. Deinde etiam a natura cujuſvis curvæ quæ quidem concipi poteſt peculiari modo debet pendere : niſi enim ita eſſet comparata, pro omnibus curvis eundem valorem ſortiretur, quæſtioque foret nulla. Quamobrem quantitas W, præter abſciſſam, in ſe quoque complecti debebit quantitates ad curvam ipſam pertinentes. Cum igitur omnis curva determinetur per relationem inter abſciſſam & applicatam, quantitas W debet eſſe conflata ex abſciſſa & applicata, & quantitatibus inde pendentibus. Hoc eſt, ſi abſciſſa indefinita ponatur $= x$, & applicata reſpondens indefinita $= y$; quantitas W eſſe debet functio binarum variabilium x & y. Quod cum ita ſit, ſi curva quæcunque determinata concipiatur, atque ex ejus natura relatio inter y & x in formula W ſubſtituatur, ea definitum impetrabit valorem ad datam illam curvam atque ejus definitam abſciſſam pertinentem. Quoniam jam, pro aliis atque aliis curvis, formula W diverſos valores induit, etiamſi in omnibus abſciſſa eadem capiatur ; manifeſtum eſt inter innumerabiles illas curvas

unam

unam esse debere in qua valor formulæ W maximus fiat vel minimus; atque ad hanc curvam pro data quacunque determinata quæstione inveniendam, Methodus tradenda est comparata.

COROLL. VI.

30. Erit igitur maximi minimive formula W, functio quædam binarum variabilium x & y: quarum altera x abscissam, altera y applicatam denotat. In W inesse igitur poterunt, non solum ipsæ variabiles x & y, sed etiam omnes quantitates ab iis pendentes, cujusmodi sunt p, q, r, s, &c. quarum significationes supra tradidimus. Quinetiam formulæ integrales ex his ortæ quæcunque in W inesse possunt: imo etiam debent; siquidem quæstio debeat esse determinata, uti mox ostendemus.

COROLL. VII.

31. Proposita igitur ejusmodi formula W, seu functione ipsarum x & y, si quæstio ad methodum maximorum & minimorum absolutam pertineat, ejusmodi æquatio inter x & y desideratur, ut, si in W valor ipsius y per x determinatus substituatur, atque ipsi x valor definitus tribuatur; major prodeat quantitas pro W, vel minor, quam si ulla alia æquatio inter x & y assumta fuisset.

COROLL. VIII.

32. Hoc ergo pacto, quæstiones ad doctrinam linearum curvarum pertinentes ad Analysin puram revocari possunt. Atque vicissim, si hujus generis quæstio in Analysi pura sit proposita, ea ad doctrinam de lineis curvis poterit referri ac resolvi.

SCHOLION II.

33. Quanquam hujus generis quæstiones ad puram Analysin

 redu-

reduci possunt, tamen expedit eas cum doctrina linearum curvarum conjungere. Quod si enim animum a lineis curvis abducere, atque ad solas quantitates absolutas firmare velimus; quæstiones primum ipsæ admodum fierent abstrusæ & inelegantes, ususque earum ac dignitas minus conspiceretur: Deinde etiam methodus resolvendi hujusmodi quæstiones, si in solis quantitatibus abstractis proponeretur, nimium foret abstrusa & molesta; cum tamen eadem, per inspectionem figurarum & quantitatum repræsentationem linearem, mirifice adjuvetur atque intellectu facilis reddatur. Hanc ob causam, etsi hujus generis quæstiones, cum ad quantitates abstractas, tum concretas applicari possunt, tamen eas ad lineas curvas commodissime traducemus & resolvemus. Scilicet quoties æquatio ejusmodi inter x & y quæritur, ut formula quædam proposita & composita ex x & y, si ex illa æquatione quæsita valor ipsius y subrogetur, & ipsi x determinatus valor tribuatur, maxima fiat vel minima: tum semper quæstionem transferemus ad inventionem lineæ curvæ, cujus abscissa sit x, & applicata y, pro qua illa formula W fiat maxima vel minima, si abscissa x datæ magnitudinis capiatur. His igitur notatis, natura hujusmodi quæstionum satis luculenter perspicitur: nisi forte cuiquam adhuc dubium creat ambigua locutio de maximo & minimo simul. Verum ne hîc quidem ulla adest ambiguitas; nam etsi methodus ipsa æque monstrat maxima & minima, tamen in quovis casu facile erit discernere, utrum solutio præbeat maximum an minimum. Sæpe numero autem evenire potest, ut in data quæstione tam maximum quam minimum locum obtineat, atque his casibus solutio erit duplex, altera monstrante maximum, altera minimum. Plerumque autem alterutrum, scilicet vel maximum vel minimum solet esse impossibile; quod evenit, si maximi minimive formula in infinitum vel crescere vel decrescere potest; his enim casibus, vel non dabitur maximum, vel non minimum. Usu venire etiam potest, ut formula proposita W in infinitum tam crescere quam decrescere queat, atque his casibus nulla prorsus solutio locum habe-

habebit. Hæc autem discrimina cuncta ipse calculus post solutionem perpetuo monstrabit.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

34. *Ut per maximi minimive formulam* W *curva determinetur* amz, *quæ præ omnibus reliquis satisfaciat, formula* W *debet esse quantitas integralis indefinita, quæ, nisi data assumatur relatio inter* x *&* y, *integrari nequeat.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim formulam W integralia indefinita non involvere; erit ea functio quantitatum x & y, indeque pendentium p, q, r, s, &c. vel algebraïca, vel talis transcendens quæ sine assumta relatione inter x & y exhiberi possit; quod evenit, si vel logarithmi harum quantitatum, vel arcus circulares, vel aliæ hujusmodi quantitates transcendentes definitæ ingrediantur, quæ algebraïcis æquivalentes sunt censendæ. Quod si jam W ponatur functio talis ipsarum x & y tantum, manifestum est valorem formulæ W, quem pro data curva amz ad datam abscissam AZ relata obtinet, tantum ab ultima applicata Zz pendere; atque pro omnibus curvis in Z eandem applicatam Zz habentibus fore eundem; atque adeo tali formula W indoles totius curvæ non determinabitur, sed tantum positio extremi ejus puncti z; si in W præter x & y etiam quantitas p insit, tum præter longitudinem applicatæ Zz positio tangentis curvæ in z, seu positio ultimi elementi in z determinabitur. Sin autem insuper q ingrediatur, tum positio binorum elementorum curvæ contiguorum in z determinabitur, & ita porro. Ex quibus sequitur, si fuerit W functio determinata ipsarum x, y, p, q, r, &c. tum per illam tantum curvæ portionem infinite parvam circa extremitatem z determinari: atque pro omnibus curvis in eandem extremitatem desinentibus eundem valorem ipsius W esse proditurum. Ut itaque per formulam W tota curva amz, quatenus toti abscissæ AZ respondet, definiatur, formulam W ita oportet esse comparatam, ut ejus valor ad determinatam curvam a m z applicatus, a positione singulorum elementorum hujus curvæ intra terminos a & z sitorum pendeat. Hoc autem evenire non potest, nisi quantitas W sit formula integralis indefinita, quæ generatim sine assumta æquatione inter x & y integrationem non admittat. *Q. E. D.*

Coroll. I.

35. Nisi igitur maximi minimive formula W sit quantitas integralis indefinita, nequidem linea curva in qua valor ipsius W sit maximus vel minimus determinabitur; atque adeo quæstio de invenienda curva, in qua esset W maximum vel minimum erit nulla.

Coroll. II.

36. Ut igitur curva assignari possit, in qua valor ipsius W præ aliis sit maximus vel minimus, formula W talem formam $\int Z\,dx$ habere debet; atque quantitatem Z ita comparatam esse oportet ut differentiale $Z\,dx$, nisi æquatio statuatur inter x & y, integrari nequeat.

Scholion.

37. Quoniam maximi minimive formula W debet esse integrale formulæ differentialis indefinitæ primi gradus; hoc est cujus integrale fiat quantitas finita; ea formula differentialis semper ad hujusmodi formam $Z\,dx$ poterit reduci, ope litterarum p, q, r, &c. Et hanc ob rem in sequentibus maximi minimive formula perpetuo per $\int Z\,dx$ nobis indicabitur. Erit autem Z functio non solum quantitatum x & y, sed etiam continebit litteras p, q, r, &c. Ita si area AazZ debeat esse maxima vel minima, formula W abibit in $\int y\,dx$; &, si superficies solidi rotundi quod generatur rotatione curvæ a m z circa axem AZ debeat esse maxima vel minima, erit $W = \int y\,dx\,\surd(1+pp)$;

atque

atque ita porro quæcunque formula debeat in curva quæsita esse maxima vel minima, ea semper erit hujus formæ $\int Z\,dx$, scilicet integrale quantitatis finitæ cujusdam Z in differentiale dx ductæ. Debet autem Z ejusmodi esse quantitas, ut si æquatio statuatur inter x & y, integrale $\int Z\,dx$ determinatum obtineat valorem: ex quo Z erit functio quantitatum x, y, & independentium p, q, r, &c. vel algebraïca sive determinata, vel præterea ipsa in se complectetur formulas integrales indeterminatas; quod discrimen probe est tenendum. Ita si maximi minimive formula W fuerit $\int y\,dx$, vel $\int y\,dx\sqrt{(1+pp)}$; quantitas Z erit algebraïca, at si sit $W=\int yx\,dx\int y\,dx$, tum erit $Z=yx\int y\,dx$, hoc est ipsa quantitas Z erit indeterminata, cujus valor nisi relatio inter x & y detur, exhiberi nequit. Quin etiam evenire potest, ut valor ipsius Z hujusmodi formula evoluta exprimi nequeat, sed tantum per æquationem differentialem demum erui debeat, ut si fuerit $dZ=y\,dx+ZZ\,dx$; ex qua æquatione valor ipsius Z per x & y nequidem exhiberi potest. Hinc igitur tria nascuntur genera formularum $\int Z\,dx$, quæ in curvis quæsitis maxima vel minima fieri debent. Quorum primum eas complectitur formulas, in quibus Z est functio algebraïca seu determinata ipsarum x, y, & p, q, r, &c. Ad secundum genus referimus eas formulas, in quibus quantitas Z ipsa insuper formulas integrales involvit. In tertio autem genere continentur eæ formulæ, in quibus valor ipsius Z per æquationem differentialem cujus integratio non constat determinatur.

PROPOSITIO II. THEOREMA.

38. *Si fuerit* amz *curva, in qua valor formulæ* $\int Z\,dx$ *sit maximus vel minimus, atque* Z *sit functio algebraïca seu determinata ipsarum* x, y, p, q, r, &c. *tum ejusdem curvæ quæcunque portio* mn *eadem gaudebit prærogativa, ut pro ea ad suam abscissam* MN *relata, valor ipsius* $\int Z\,dx$ *sit pariter maximus vel minimus.*

DEMONSTRATIO.

Valor formulæ $\int Z\,dx$ pro abſciſſa AZ eſt aggregatum omnium valorum ejuſdem formulæ, qui ſingulis abſciſſæ AZ portionibus reſpondent. Quod ſi ergo abſciſſa AZ in parter quotcunque, quarum una ſit MN, diviſa concipiatur, atque ad ſingulas partes haſce valor formulæ $\int Z\,dx$ exhibeatur; ſumma omnium horum valorum præbebit valorem formulæ $\int Z\,dx$, qui toti abſciſſæ AZ convenit; & qui erit maximus vel minimus. Quoniam autem Z ponitur functio algebraïca ipſarum x, y, p, q, &c. valor formulæ $\int Z\,dx$ reſpondens abſciſſæ portioni MN, a ſola portionis curvæ reſpondentis mn indole pendebit, idemque manebit, utcunque reliquæ partes am & nz varientur; ſingularum enim litterarum x, y, p, q, &c. valores per ſolam curvæ portionem mn determinantur. Si ergo formulæ $\int Z\,dx$ valores, qui conveniunt abſciſſæ portionibus AM, MN, NZ, ponantur P, Q & R, quantitates hæ P, Q, & R, a ſe mutuo non pendebunt. Quare cum earum aggregatum $P+Q+R$ ſit maximum vel minimum, etiam unaquaque maximi minimive proprietate prædita ſit neceſſe eſt. Hanc ob rem, ſi in curva amz formula $\int Z\,dx$ maximum minimumve habeat valorem, & quantitas Z ſit functio algebraïca ipſarum x, y, p, q, &c. tum etiam, pro qualibet illius curvæ portione, eadem formula $\int Z\,dx$ maximi minimive proprietate gaudebit. *Q. E. D.*

COROLL. I.

39. Quod ſi ergo curva fuerit inventa amz, quæ pro abſciſſa data AZ, habeat valorem formulæ $\int Z\,dx$ maximum vel minimum, atque Z ſit functio algebraïca ſeu determinata, tum etiam ejuſdem curvæ quælibet portio, reſpectu abſciſſæ ſuæ reſpondentis, eadem maximi minimive proprietate gaudebit.

COROLL. II.

40. In hujusmodi igitur Problematibus, ubi tale maximum minimumve quæritur, non opus est quantitatem abscissæ, cui maximum minimumve respondeat, definire; sed si, pro una quacunque abscissa, formula $\int Z dx$ sit maximum vel minimum, tum eadem pro quacunque alia abscissa eadem proprietate gaudebit.

COROLL. III.

41. Hujusmodi igitur Problemata resolventur, si singulæ curvæ quæsitæ particulæ ita determinentur, ut pro iis valor formulæ $\int Z dx$ fiat maximus vel minimus. Tum enim simul tota curva, & quæcunque ejus portio, pariter eadem maximi minimive proprietate erit instructa.

SCHOLION.

42. Proprietas hæc, qua gaudent curvæ in quibus istius modi formulæ $\int Z dx$, ubi Z est functio algebraïca seu determinata ipsarum x, y, p, q, &c. sunt maximum vel minimum, est maximi momenti; ea enim innititur universa methodus hujus generis Problemata resolvendi. Ideo autem potissimum hanc Propositionem afferre visum est, ne ea proprietas, quæ his tantum formulis $\int Z dx$, ubi Z est functio vel algebraïca vel determinata, est propria, omnium omnino formularum quæ proponi possunt communis esse putetur: in sequente enim Propositione demonstrabimus, si in Z insint formulæ integrales; tum eandem proprietatem non amplius locum habere: ex quo simul natura hujusmodi quæstionum clarius intelligetur. Hujus autem præsentis Propositionis demonstratio ex eo petita est fundamento, quod valor formulæ $\int Z dx$, siquidem Z est functio vel algebraïca vel determinata ipsarum x, y, p, q, r, &c. qui convenit cuicunque abscissæ portioni MN, a sola curvæ portione respondente mn pendeat, neque a reliqua curva, vel anteriore am, vel posteriore nz afficiatur: quæ ratio cessat, si in Z insint for-

mulæ integrales indeterminatæ. Valores enim quantitatum x, y, p, q, r, &c. qui pro arcu curvæ m n obtinent, tantum a positione elementorum hujus arcus m n, atque elementis aliquot contiguis quæ arcum finitæ quantitatis non constituunt pendent; ex quo etiam quantitas ex iis litteris utcunque composita per solam arcus m n indolem determinabitur, nisi adfuerint quantitates integrales, cujusmodi sunt $\int y\,dx$, quæ totam aream anteriorem A a m M introduceret, vel $\int dx\sqrt{(1+pp)}$, quæ totum arcum præcedentem a m involveret. Hinc igitur distinctius intelligitur, quid per functionem determinatam ipsarum x, y, p, q, r, &c. denotare velimus: Functio scilicet determinata ita est comparata, ut, pro quovis loco, a præsentibus valoribus litterarum x, y, p, q, &c. tantum pendeat, neque valores earum anteriores in se complectatur. Functio autem indeterminata est talis, cujus valor in quovis loco, non ex solis valoribus quos hæ litteræ x, y, p, q, &c. in isto loco obtinent determinari potest, sed insuper omnes valores ad sui determinationem requirit, quos istæ litteræ in omnibus locis anterioribus obtinuerunt. Ita patet, omnes functiones algebraïcas esse simul determinatas; præterea vero etiam omnes functiones transcendentes, quæ a relatione inter x & y non pendent sunt determinatæ, cujusmodi sunt, $l\sqrt{(xx+yy)}$, e^{py}, $A\sin.\frac{py}{q}$; quarum valores in quovis loco ex valoribus litterarum, quos in hoc solo loco obtinent, assignari possunt. Quando autem in functione quapiam insunt formulæ integrales indeterminatæ, quæ a mutua relatione inter x & y, quam ubique tenent, pendent, tum earum valor, in dato loco, non ex valoribus, quos hæ litteræ in isto loco habent, cognosci potest, sed insuper omnes valores in locis quibusque anterioribus nosse oportet, hoc est generalem relationem inter coordinatas x & y: talesque functiones vocamus indeterminatas; quippe quæ toto cœlo diversæ sunt ab iis, quas determinatas appellavimus.

PROPOSITIO III. THEOREMA.

43. *Si fuerit* amz *curva abſciſſæ* AZ *reſpondens, in qua* $\int Z\,dx$ *ſit maximum vel minimum; in* Z *autem contineantur formulæ integrales indeterminatæ; tum eadem maximi minimive proprietas non cadit in quamlibet curvæ portionem, ſed toti tantum curvæ abſciſſæ* AZ *reſpondenti propria erit.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur tota curva amz, pro qua $\int Z\,dx$ eſt maximum vel minimum, in duas partes quaſque diviſa per applicatam Mm; ſitque formulæ $\int Z\,dx$ valor conveniens portioni am $= P$, ejuſdem autem formulæ valor pro altera portione mz ſit $= Q$: pro tota igitur curva amz valor formulæ $\int Z\,dx$ erit $= P + Q$, quem ponimus eſſe maximum vel minimum. Quo autem omnem ambiguitatem tollamus, totamque rem diſtinctius proponere queamus; ponamus $P + Q$ eſſe maximum: quod enim de maximo demonſtrabitur, idem de minimo facile intelligetur. Quod ſi jam valor ipſius Q a valore ipſius P non penderet, tum aggregatum $P + Q$ maximum eſſe non poſſet, niſi ſimul uterque valor P & Q ſeorſim ſit maximus. At noſtro caſu, quo quantitas Z in ſe continet formulas integrales indeterminatas, valor ipſius Q non tantum a curvæ portione mz ad quam refertur pendebit, ſed ſimul a tota curva anteriore am; atque adeo a valore ipſius P. Nunc dicimus, ad id ut $P + Q$ ſit maximum, non requiri, ut valor ipſius P ſit maximus. Ponamus enim portionem curvæ am ita eſſe comparatam, ut pro ea P ſit maximum, & aliquantillum mutari concipiatur portio curvæ am, ita ut valor formulæ $\int Z\,dx$ minor evadat, puta $= P - p$: fieri utique poterit ut ex hac mutatione valor ipſius Q creſcat, quod incrementum ponatur q: eritque, mutata aliquantillum portione am, ita ut pro ea $\int Z\,dx$ non amplius ſit maximum, valor formulæ $\int Z\,dx$ pro tota curva amz $= P - p + Q + q$. Cum igitur evenire queat ut ſit $q > p$, intelligitur formulam $\int Zdx$ pro tota curva amz maximam esse posse, etiamsi maxima non sit pro qualibet portione am. *Q. E. D.*

COROLL. I.

44. Quando ergo curva fuerit inventa, quæ, pro data abscissa AZ, habeat valorem formulæ $\int Zdx$ maximum vel minimum, & Z sit functio indeterminata; tum non sequitur quamlibet curvæ inventæ portionem eadem maximi minimive proprietate fore præditam.

COROLL. II.

45. In resolutione igitur hujusmodi Problematum, in quibus curva quæritur, quæ pro data abscissa AZ habeat $\int Zdx$ maximum vel minimum, perpetuo ad totius abscissæ propositæ quantitatem erit respiciendum, atque maximum vel minimum ad eam tantum, non vero ad ejus quamlibet portionem, accommodari debebit.

COROLL. III.

46. Maximum igitur hinc patet discrimen, quod inter formulas $\int Zdx$, in quibus Z functio est determinata vel indeterminata, intercedit; simulque autem Methodorum diversitas intelligitur, quibus ad resolutiones quæstionum, in quibus hujusmodi formularum maximi minimive valores requiruntur, uti oportebit.

SCHOLION.

47. Ex demonstratione hujus Propositionis non quidem necessario sequitur, si pro data abscissa AZ curva habeat formulam $\int Zdx$ maximam vel minimam, tum singulas ejus portiones eadem hac prærogativa gaudere; verumtamen satis intelligitur, quoties eadem proprietas in singulas portiones competat, id casu

su evenire. Hincque nihilominus summe necessarium est, solutionem perpetuo ad totam propositam abscissam accommodare. Interim tamen, in Problematibus ad methodum relativam pertinentibus evenire potest, ut formulas $\int Z\,dx$, in quibus Z sit functio indeterminata, quasi determinata esset tractare liceat. Hoc scilicet accidit, si inter omnes tantum curvas in quibus formulæ illæ integrales indeterminatæ quæ in Z insunt æquales obtinent valores, ea desideretur, in qua $\int Z\,dx$ sit maximum vel minimum: hoc enim casu formulæ illæ integrales indeterminatæ fieri censendæ sunt determinatæ. Ita si, inter omnes curvas ejusdem longitudinis, determinanda sit ea in qua sit $\int Z\,dx$ maximum vel minimum, atque in Z præter quantitates determinatas, insit arcus curvæ $\int dx\,\sqrt{(1+pp)}$; hic, quia in omnibus curvis ex quibus quæsitam definire oportet, eundem obtinet valorem, instar functionis determinatæ tractari poterit: Hæc autem cuncta in sequentibus clarius explicabuntur.

HYPOTHESIS II.

48. *Si curvæ abscissa* AZ *in elementa innumerabilia infinite parva & inter se æqualia dissecetur, cujusmodi sunt* IK, KL, LM, *&c. atque portio quæcunque* AM *vocetur* x, *cui respondeat functio quæcunque variabilis* F, *eandem functionem* F, *quatenus referetur ad puncta abscissæ vel sequentia* N, O, P, Q, *&c. vel antecedentia* L, K, I, *&c. ita denotabimus, ut sit valor istius functionis, qui pro puncto* M *est* $=$ F, *ut sequitur.* Fig. 2.

$$\left.\begin{array}{l} \textit{pro } N = F' \\ \textit{pro } O = F'' \\ \textit{pro } P = F''' \\ \textit{pro } Q = F^{IV} \\ \textit{pro } R = F^{V} \end{array}\right\} \textit{pro punctis abscissæ sequentibus}$$

&c.

pro

$$\left.\begin{array}{l} \textit{pro}\ L = F_{,} \\ \textit{pro}\ K = F_{,,} \\ \textit{pro}\ I = F_{,,,} \\ \textit{pro}\ H = F_{IV} \\ \quad \&c. \end{array}\right\}\ \textit{pro punctis abscissæ antecedentibus.}$$

Atque hoc pacto, sine prolixa differentialium scriptione, valor functionis cujuscunque variabilis, qui in quovis abscissæ puncto locum obtinet, commode indicabitur.

COROLL. I.

49. Cum igitur functionis cujusque valor, in loco quocunque, sit æqualis suo valori in loco antecedente differentiali suo aucto, erit

$$\begin{array}{l|l} F' = F + dF & F = F_{,} + dF_{,} \\ F'' = F' + dF' & F_{,} = F_{,,} + dF_{,,} \\ F''' = F'' + dF'' & F_{,,} = F_{,,,} + dF_{,,,} \\ F^{IV} = F''' + dF''' & F_{,,,} = F_{IV} + dF_{IV} \\ \&c. & \&c. \end{array}$$

COROLL. II.

50. Si ex singulis abscissæ divisionibus applicatæ ducantur, atque ea quæ abscissæ $AM = x$ respondet, nempe Mm, ponatur $= y$, reliquæ tam sequentes quam antecedentes, ita denotabuntur

$$\begin{array}{l|l} Mm = y & Mm = y \\ Nn = y' & Ll = y_{,} \\ Oo = y'' & Kk = y_{,,} \\ Pp = y''' & Ii = y_{,,,} \\ Qq = y^{IV} & Hh = y_{IV} \\ \&c. & \&c. \end{array}$$

CO-

COROLL. III.

51. Cum deinde valor ipſius p ſit $= \frac{dy}{dx} = \frac{Nn - Mm}{dx}$; erit $p = \frac{y' - y}{dx}$; ſequentes autem pariter ac antecedentes ipſius p valores ita ſe habebunt:

$$p = \frac{y' - y}{dx} \qquad p = \frac{y' - y}{dx}$$
$$p' = \frac{y'' - y'}{dx} \qquad p_{,} = \frac{y - y_{,}}{dx}$$
$$p'' = \frac{y''' - y''}{dx} \qquad p_{,,} = \frac{y_{,} - y_{,,}}{dx}$$
$$p''' = \frac{y^{IV} - y'''}{dx} \qquad p_{,,,} = \frac{y_{,,} - y_{,,,}}{dx}$$
&c. &c.

COROLL. IV.

52. Deinde, quia eſt $q = \frac{dp}{dx} = \frac{p' - p}{dx}$ erit $q = \frac{y'' - 2y' + y}{dx^2}$; ex quo quantitatis q valores, cum ſequentes tum antecedentes, ita ſe habebunt:

$$q = \frac{y'' - 2y' + y}{dx^2} \qquad q = \frac{y'' - 2y' + y}{dx^2}$$
$$q' = \frac{y''' - 2y'' + y'}{dx^2} \qquad q_{,} = \frac{y' - 2y + y_{,}}{dx^2}$$
$$q'' = \frac{y^{IV} - 2y''' + y''}{dx^2} \qquad q_{,,} = \frac{y - 2y_{,} + y_{,,}}{dx^2}$$
&c. &c.

COROLL. V.

53. Simili igitur modo per iſta applicatarum ſigna poterunt

valores quantitatum r, s, t, &c. ut has supra assumsimus, determinari, atque ex figura definiri. Erit scilicet

$$r = \frac{y''' - 3y'' + 3y' - y}{dx^3}$$

$$s = \frac{y^{IV} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y}{dx^4}$$

$$t = \frac{y^{V} - 5y^{IV} + 10y''' - 10y'' + 5y' - y}{dx^5}$$

&c.

unde harum litterarum valores tam præcedentes quam antecedentes formari possunt.

COROLL. VI.

54. Quod si autem formula $\int Z dx$ ad abscissam $AM = x$ fuerit relata; erit ejus valor sequenti abscissæ elemento $MN = dx$ respondens $= Zdx$. Hincque simili modo formulæ $\int Z dx$ valores singulis abscissæ elementis respondentes denotabuntur ut sequitur:

pro $MN = Z dx$	pro $MN = Z dx$
pro $NO = Z' dx$	pro $LM = Z_{,} dx$
pro $OP = Z'' dx$	pro $KL = Z_{,,} dx$
pro $PQ = Z''' dx$	pro $IK = Z_{,,,} dx$
&c.	&c.

COROLL. VII.

55. Si ergo expressio $\int Z dx$ ad abscissam curvæ $AM = x$ pertineat; ejusdem expressionis valor, qui conveniet abscissæ propositæ AZ, erit $= \int Z dx + Z dx + Z' dx + Z'' dx + Z''' dx$ + &c. in infinitum, donec perveniatur ad ultimum punctum Z.

COROLL. VIII.

56. Si igitur curva inveniri debeat, quæ pro data abscissa AZ valo-

valorem formulæ $\int Z\,dx$ habeat maximum minimumve; tum, posita abscissa quacunque indefinita $AM = x$, efficiendum est ut hæc expressio $\int Z\,dx + Z\,dx + Z'\,dx + Z''\,dx + Z'''dx +$ &c. usque in Z fiat maxima vel minima.

SCHOLION.

57. Quanquam hæc hypothesis tantum pro arbitrio est facta; tamen ista signa maximam afferent utilitatem ad Problemata, quæ ad hanc methodum maximorum & minimorum pertinent, succincte resolvenda. Plurimum enim valet in hujusmodi negotiis commoda signorum electio, ejusque ope calculus non solum contrahi, sed etiam multo facilior & expeditior reddi potest. Præstabit autem iste signandi modus longe alteri recepto, quo per differentialia valores functionum variabilium proxime sequentes exprimi solent; eo quod in ipsa resolvendi methodo alius generis differentialia occurrent, quæ cum naturalibus quantitatum variabilium differentialibus facile confundi possent, nisi, ista assumta signandi methodo o naturalia differentialia notatione saltem tollerentur.

PROPOSITIO IV. THEOREMA.

58. *Si* amnoz *fuerit curva ad abscissam datam* AZ *relata, in qua formula* $\int Z\,dx$ *maximum minimumve obtineat valorem; atque alia concipiatur curva* amνoz *ab ista infinite parum discrepans, tum valor formulæ* $\int Z\,dx$ *pro utraque curva erit idem.* Fig. 3.

DEMONSTRATIO.

Quando in Analysi formula quæpiam variabilis fit maxima, tum primo crescendo continuo magis ad maximum valorem accedit, deinde vero cum hunc attigit, iterum decrescendo ab eo recedit. Iste autem accessus ad maximum valorem atque recessus ab eodem ita fit, ut dum quantitas proxime ad maximum valorem versatur, tum ejus incrementa ac decrementa momentanea evanescant; hocque idem de minimo est intelligendum. Dantur quidem etiam ejusmodi maxima & minima, circa quæ incrementa & decrementa sint infinite magna; verum hujus generis maxima & minima in præsenti instituto raro locum inveniunt, & si inveniunt, facile erit ea determinare. Sufficiat igitur notasse circa maximum & minimum mutationes momentaneas non dari posse finitas. Quod si ergo in curva a m n o z expressio $\int Z dx$ maximum minimumve habeat valorem; pro alia curva ejusdem expressionis valor eo magis a maximo minimove recedet, quo magis hæc alia curva ab illa discrepet. Sin autem alia curva infinite parum differat ab illa satisfaciente, tum, pro utraque, formula $\int Z dx$ eundem obtinebit valorem. Hujusmodi autem curvam minime discrepantem concipiemus, si arcum tantum infinite parvum m n o infinite parum variari, ejusque loco arcum m ν o substitui ponamus. Quamobrem ex curva a z, pro qua $\int Z dx$ maximum est vel minimum, portionem infinite parvam m n o exscindi, ejusque loco aliam m ν o infinite parum ab illa discrepantem inseri intelligamus; tum valor formulæ $\int Z dx$ qui convenit curvæ a m n o z æqualis erit valori, qui convenit curvæ a m ν o z. *Q. E. D.*

COROLL. I.

59. Quoniam mutatio debet poni quamminima; non sufficiet arcum m n o, qui immutari ponitur, accipere infinite parvum, sed etiam deviatio n ν, præ arcus longitudine m n o, debet esse infinite parva.

COROLL. II.

60. Posita igitur tali mutatione in curva, mutatio inde etiam in valore formulæ $\int Z dx$ orietur; quæ autem per demonstrationem erit evanescens. Atque hoc modo ex tali assumta mutatione orietur æquatio, quæ simul curvæ quæsitæ naturam præbebit.

SCHO-

SCHOLION.

61. In hac Propositione continetur universa methodus resolvendi Problemata, quibus curva desideratur in qua valor formulæ cujusdam indeterminatæ ut $\int Z\,dx$ sit maximus vel minimus. Semper enim concipitur portio curvæ infinite parva, uti mno, aliquantillum variari in $m\nu o$, atque tum quæritur differentia valorum quos formula $\int Z\,dx$, cum pro curva vera $amnoz$, tum pro ficta $am\nu oz$, sortitur, eaque differentia nihilo æqualis posita dat naturam curvæ quæsitæ. Mutatio autem ista in loco indefinito fieri debet, ut ad totam curvam pertineat, atque ad singula loca pateat. Potest autem ista mutatio utcunque institui, dummodo sit infinite parva, atque vel ad duo vel plura curvæ elementa extendi; semper enim eadem resultare debet æquatio finalis. Interim tamen calculi commoditas postulat, ut mutatio in tam paucis elementis instituatur, quæ sufficiat ad solutionem absolvendam. Ita si, inter omnes omnino curvas eidem abscissæ respondentes, ea determinari debeat, in qua sit $\int Z\,dx$ maximum vel minimum; tum sufficiet bina tantum curvæ elementa mutata concipere. At si non inter omnes curvas, sed eas tantum quæ unam pluresve expressiones communes habeant, ea definiri debeat in qua quæpiam quantitas sit maxima vel minima; tum mutationem non quamcunque $m\nu o$ accipere licet, sed talem statui oportet, ut illæ proprietates omnibus curvis communes conserventur. His igitur casibus, duo elementa non sufficient, sed plura accipi debebunt, ut omnibus conditionibus satisfieri queat.

DEFINITIO V.

62. *Valor Differentialis* datæ maximi minimive formulæ respondens est differentia inter valores, quos hæc formula, cum in ipsa curva quæsita, tum in eadem infinite parum immutata, obtinet.

COROLL. I.

63. In curva igitur, pro qua data formula, puta $\int Z dx$, maximum minimumve esse debet, hujus formulæ valor differentialis respondens evanescet. Atque hanc ob rem si valor differentialis nihilo æqualis ponatur; habebitur æquatio, qua curvæ quæsitæ natura exprimetur.

COROLL. II.

64. Ex invento igitur valere differentiali, qui propositæ maximi minimive formulæ respondeat, statim habebitur æquatio exprimens naturam ejus curvæ, in qua formula illa proposita maximum minimumve habeat valorem.

COROLL. III.

65. Totum igitur negotium ad curvas inveniendas, quæ maximi minimive proprietate gaudeant, eo est reductum, ut pro quaque maximi minimive formula ejus conveniens valor differentialis investigetur.

SCHOLION.

66. Cum igitur in genere tradita sit idea non solum naturæ quæstionum, quibus curvæ maximi minimive proprietate præditæ quæruntur, sed etiam methodi, qua ad eas resolvendas uti oporteat, ad ipsam tractationem progrediemur. Ac primo quidem Methodum absolutam, qua curvæ quæruntur quæ inter omnes omnino curvas ad eandem abscissam relatas maximi minimive proprietate quapiam sint præditæ, trademus. Deinde pergemus ad Methodum maximorum ac minimorum relativam, ad quam tales pertinent quæstiones, quæ non inter omnes curvas datæ abscissæ respondentes, sed eas tantum quæ data quadam communi proprietate una pluribusve gaudent, eam determinari jubent, cui maximi minimive prærogativa quæpiam conveniat.

niat. In has autem tractationes natura formulæ $\int Z\,dx$, quæ maximum minimumve esse debet, ingens discrimen infert, prout Z fuerit functio vel determinata vel indeterminata; quemadmodum jam observavimus.

CAPUT II.

De Methodo maximorum ac minimorum ad lineas curvas inveniendas absoluta.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

1. *Si in curva quacunque* amz *una applicata quævis* Nn *augeatur particula infinite parva* nν; *invenire incrementa vel decrementa, quæ singulæ quantitates determinatæ ad curvam pertinentes hinc accipient.* *Fig. 4.*

SOLUTIO.

Quantitates determinatæ ad curvam propositam pertinentes sunt, præter abscissam x, quæ non afficitur, hæ y, p, q, r, s, &c. cum suis derivatis valoribus, quos in locis vel sequentibus vel antecedentibus sortiuntur. Quod si nunc ponamus AM $= x$, & Mm $= y$, erit Nn $= y'$, hujusque valor per translationem puncti n in ν augebitur particula nν, reliquæ autem applicatæ y'', y''', y^{IV}, &c. pariter ac præcedentes $y_{,}$, $y_{,,}$, $y_{,,,}$, $y_{,\text{IV}}$ &c. non afficientur. Cum igitur sola applicata y' crescat particula nν; ex Cap. præc. §. §. 51 & seqq. colligetur quantum incrementum reliquæ quantitates omnes capiant ex incremento solius applicatæ y'. Omnes scilicet quantitates, quarum valor pendet ab y', mutationem subibunt, reliquæ vero, quæ ab y' non pendent, manebunt invariatæ. Ita cum sit $p = \frac{y' - y}{dx}$ hæc quantitas p crescet particula $\frac{n\nu}{dx}$; at cum sit $p' = \frac{y'' - y'}{dx}$, hæc quantitas

p' de-