CVRVARVM MAXIMI MINIMIVE PROPRIETATE GAVDENTIVM INVENTIO NOVA ET FACILIS.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

QVanquam hoc problema, quod ſub initio huius ſeculi ab acutiſſimo Geometra *Iac. Bernoulli* cum erat propoſitum tum ſolutum, iam a pluribus eximiis viris tractatum atque diuerſas ſolutiones nactum, a me vero demum ante aliquot annos in latiore ſenſu prolatum eſt; atque methodo tam facili ſolutum, vt nihil amplius deſiderari poſſe videatur: tamen nuper in eiusmodi huius generis quaeſtiones incidi, ad quas ſoluendas formulae tum temporis a me exhibitae, non erant ſufficientes, adeo vt coactus fuerim nouas formulas latius patentes contemplari, atque pro iis ad problema ſoluendum idoneos valores inueſtigare. In hoc autem negotio occupatus non ſolum faciliorem quam ante detexi viam ad ſolutiones huiusmodi problematum perueniendi, ſed etiam omnes 24 formulas, quas ante tractaueram, in vnicam ſum complexus, atque praeterea ad alias adhuc latius patientes calculum accommodare licuit. Tabb. IX, X.

§. 2.

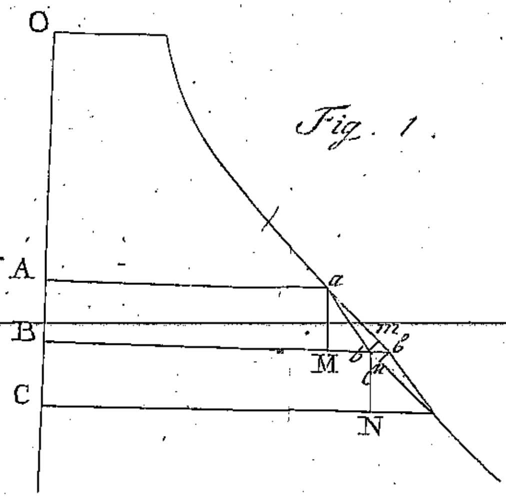

Fig. 1.

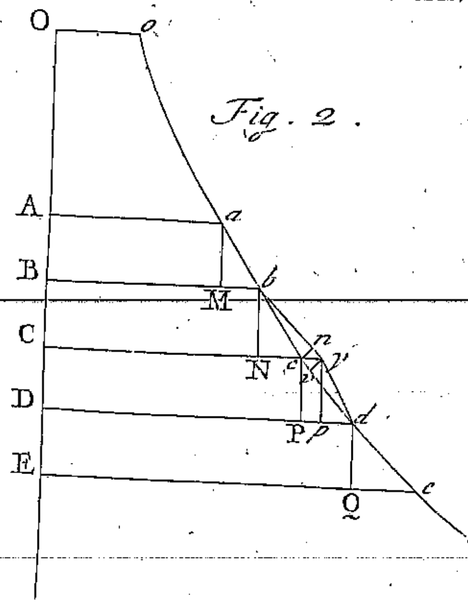

Fig. 2.

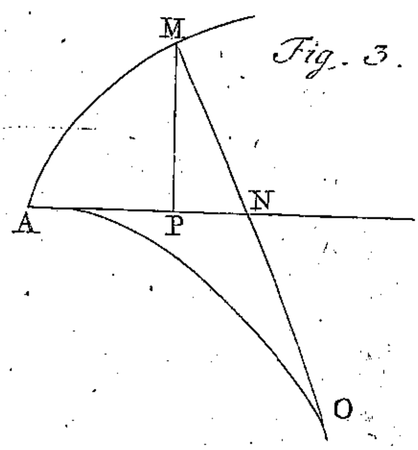

Fig. 3.

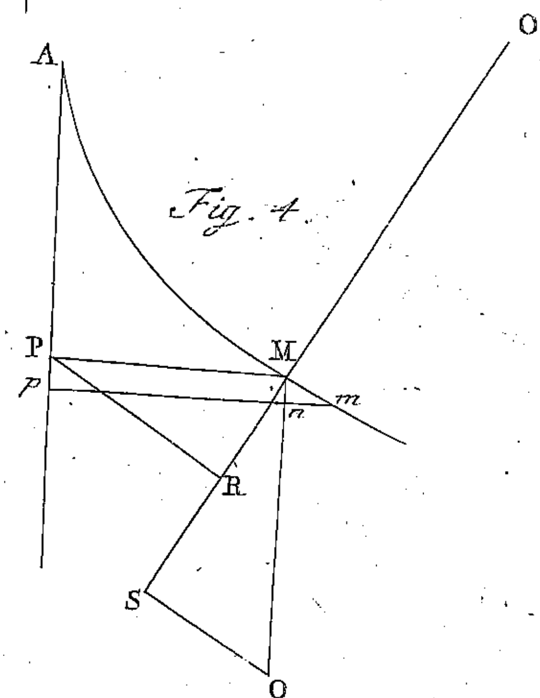

Fig. 4.

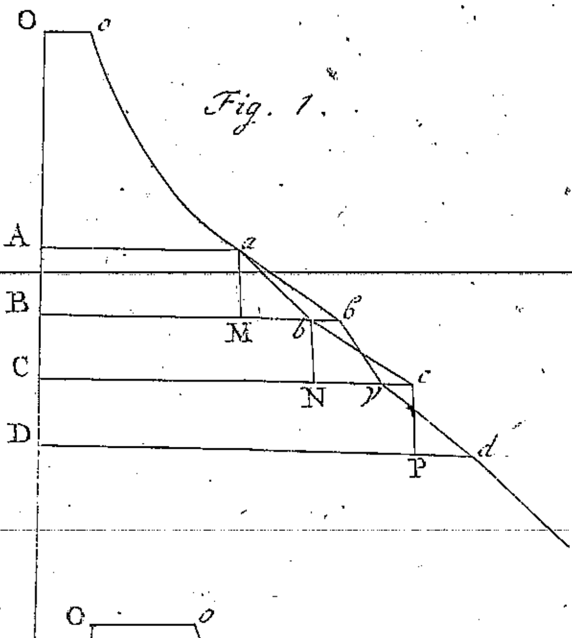

Fig. 1.

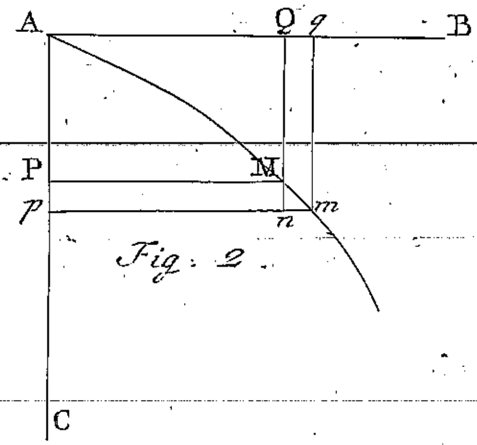

Fig. 2.

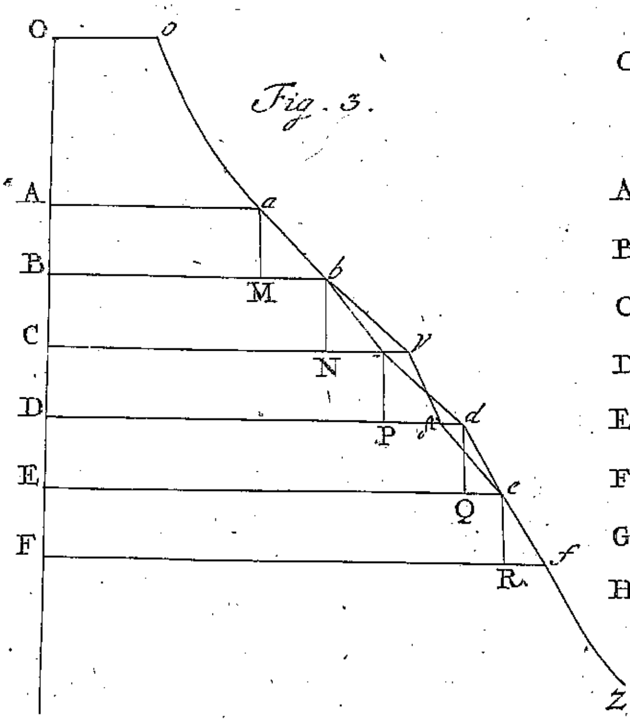

Fig. 3.

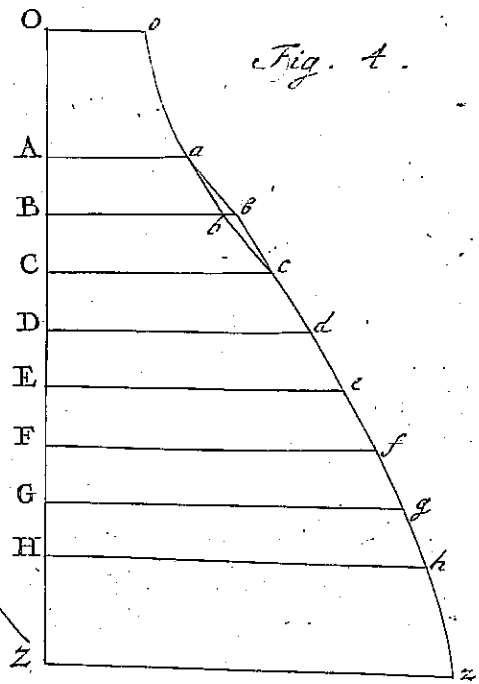

Fig. 4.

§. 2. Quo autem calculum, qui pro formulis tantopere compositis modo designandi consueto nimis fieret prolixus et taediosus, tractabiliorem redderem, visum est a recepto signandi modo aliquantum recedere, atque alia signa adhibere, quibus cum breuitati tum potissimum distinctioni consuleretur. Sic quantitatem variabilem y in situm proximum promotam ita designabo $\overset{\mathrm{I}}{y}$, hancque si denuo in situm proximum transferatur ita $\overset{\mathrm{II}}{y}$; et si vlterius in situm proximum promoueatur mihi indicabitur per $\overset{\mathrm{III}}{y}$ et ita porro, adeo vt mihi sit

$$\overset{\mathrm{I}}{y} = y + dy$$

$$\overset{\mathrm{II}}{y} = y + 2\,dy + ddy$$

$$\overset{\mathrm{III}}{y} = y + 3\,dy + 3\,ddy + d^3y \text{ etc.}$$

Simili igitur modo in sequentibus erit

$$d\overset{\mathrm{I}}{y} = dy + ddy$$

$$d\overset{\mathrm{II}}{y} = dy + 2\,ddy + d^3y$$

$$d\overset{\mathrm{III}}{y} = dy + 3\,ddy + 3\,d^3y + d^4y$$

atque similiter porro

$$dd\overset{\mathrm{I}}{y} = ddy + d^3y$$

$$dd\overset{\mathrm{II}}{y} = ddy + 2\,d^3y + d^4y$$

$$dd\overset{\mathrm{III}}{y} = ddy + 3\,d^3y + 3\,d^4y + d^5y \text{ etc.}$$

§. 3.

§. 3. His praemonitis problemata primae classis aggredior, in quibus quaeritur curua, quae inter omnes omnino curuas inter eosdem terminos sitas maximi vel minimi cuiusdam proprietate gaudeat. Sit igitur oa curua quaesita ad axem OA relata, ponaturque $OA = x$, $Aa = y$, et arcus $oa = s$. Tum sumtis duobus abscissae elementis aequalibus $AB = BC = dx$, ducantur applicatae Bb et Cc. Deinde concipiantur duo alia elementa curuae proxima $a\beta$, βc puncta a et c iungentia. Quibus factis manifestum est ex natura maximorum vel minimorum quantitatem, quae pro curua oa maxima vel minima esse debet, eam siue ad elementa abc siue ad elementa $a\beta c$ referatur in vtroque casu eundem valorem producere debere. Quamobrem differentia inter valores, qui prodeunt ex consideratione tum elementorum abc tum $a\beta c$, si nihilo aequalis ponatur, dabit aequationem, qua natura curuae exprimetur. Ista autem differentia semper ad huiusmodi formam reduci potest $P.b\beta$, in qua P per solas quantitates x, y, s, earumque differentialia vna cum constantibus determinatur. Quocirca ista aequatio $P = o$, exprimet naturam curuae quaesitae. Figura 1.

§. 4. Proposito ergo quocunque problemate, quod inter omnes omnino curuas intra eosdem terminos constitutas determinare iubet eam, quae maximi vel minimi proprietate gaudeat, ex formula, quae maximum vel minimum esse debet, elici oportet valorem ipsius P, qui nihilo aequalis positus dabit aequationem pro curua quaesita. Totum ergo hoc negotium absoluetur; si regula tradatur, cuius ope ex data expressione, quae maximum minimumue esse debet, inueniri queat valor P. Ad huiusmodi autem regulam inueniendam exprimat $\int Q\,dx$ eam quantitatem, quae in curua quaesita maxima esse debeat vel minima, sitque Q quantitas vtcunque composita ex x, y, et s, horumque differentialibus dx, dy, et ds. Seu posito $dy = p\,dx$, vt sit $ds = dx\sqrt{(1+pp)}$, sit quantitas vtcunque composita ex x, y, s et p; ita vt eius differentiale huiusmodi sit habiturum formam $dQ = L\,ds + M\,dy + N\,dx + V\,dp$. Quae formula vtique multo latius patet, quam omnes 16 priores formulae, quas in praecedente dissertatione exhibui.

§. 5. Considerentur ab et bc tanquam curuae inueniendae elementa genuina, dum altera $a\beta$ et βc tantum ad conceptum maximi minimiue formandum sint in subsidium vocata. Cum igitur $\int Q\,dx$ debeat esse maximum vel minimum in curua oa, ea expressio pro elemento ab dabit $Q\,dx$ et elemento bc vero $\overset{\mathrm{I}}{Q}\,dx$, adeo vt elemento ab respondeat expressio $Q\,dx$ et elemento bc haec $\overset{\mathrm{I}}{Q}\,dx$, vtrique autem elemento coniunctim $ab+bc$ ista formula $(Q+\overset{\mathrm{I}}{Q})dx$. Iam quaerantur expressiones, quae elementis assumtitiis $a\beta$ et βc respondeant; hae enim coniunctae et a $(Q+\overset{\mathrm{I}}{Q})dx$ subtractae dabunt residuum ipsi $P.b\beta$ aequale et propterea determinabunt valorem ipsius P, ex quo aequatio pro curua obtinebitur. Expressio autem $Q\,dx$, quae respondet elemento ab transibit in expressionem respondentem elemento $a\beta$, si loco p seu $\frac{bM}{aM}$ scribatur $p + \frac{b\beta}{dx}$ seu $\frac{\beta M}{aM}$, quanti-

quantitates enim x, y et s a puncto a, quod vtrique elemento ab et $a\beta$ commune est, pendent tantum, ideoque inuariatae manent.

§. 6. Differentia ergo inter expressiones, quae elementis ab et $a\beta$ respondent, obtinebitur si $Q\,dx$ differentietur, et loco ds, dy et dx scribatur o, loco dp vero $\frac{b\beta}{dx}$. Cum autem sit differentiale ipsius $Q\,dx = dQ\,dx = (L\,ds + M\,dy + N\,dx + V\,dp)\,dx$, erit illa differentia $= V.\,b\beta$. Porro ex expressione $\overset{I}{Q}\,dx$ elemento bc respondente, vbi $\overset{I}{Q}$ est talis functio ipsarum $\overset{I}{s}$, $\overset{I}{y}$, $\overset{I}{x}$, et $\overset{I}{p}$ qualis ante erat Q ipsarum s, y, x et p, inuenietur expressio respondens elemento βc, si loco $\overset{I}{y} = Bb$, scribatur $\overset{I}{y} + b\beta$, loco $\overset{I}{s} = oa + ab$ vero $\overset{I}{s} + \beta m = \overset{I}{s} + \frac{dy.\,b\beta}{ds}$ atque loco $\overset{I}{p} = \frac{cN}{bN}$ ponatur $\overset{I}{p} - \frac{b\beta}{dx}$. Quamobrem differentia inter expressiones elementis bc et βc habebitur, si $\overset{I}{Q}\,dx$ differentietur et loco $d\overset{I}{y}$ scribatur $b\beta$, loco $d\overset{I}{s}$ vero $\frac{dy.\,b\beta}{ds}$ atque loco $d\overset{I}{p}$ ponatur $-\frac{b\beta}{dx}$. Cum igitur sit $d\overset{I}{Q}\,dx = (\overset{I}{L}\,d\overset{I}{s} + \overset{I}{M}\,d\overset{I}{y} + \overset{I}{N}\,dx + \overset{I}{V}\,d\overset{I}{p})\,dx$, erit haec differentia $= \frac{\overset{I}{L}\,dx\,dy.\,b\beta}{ds} + \overset{I}{M}\,dx.\,b\beta - \overset{I}{V}.\,b\beta$. Differentia ergo inter expressiones elementis $ab + bc$ et elementis $a\beta + \beta c$ respondentes erit $(V + \frac{\overset{I}{L}\,dx\,dy}{ds} + \overset{I}{M}\,dx - \overset{I}{V})\,b\beta = (\frac{L\,dx\,dy}{ds} + M\,dx - dV)\,b\beta = P.\,b\beta$. Aequa-

tio

tio ergo pro curua quaesita erit haec $P = \frac{L\,dx\,dy}{ds} + M\,dx - dV = 0$, seu $L\,dx\,dy + M\,dx\,ds = ds\,dV$.

§. 7. Si ergo quaerenda sit curua oa, in qua $\int Q\,dx$ vel maius sit vel minus, quam inter omnes alias curuas intra eosdem terminos sitas, atque Q fuerit functio quaecunque ipsarum x, y, s et p posito $p = \frac{dy}{dx}$ sequens habebitur regula ad valorem ipsius P inueniendum. Differentietur primo Q et in differentiali ponatur $ds = 0$, $dy = 0$, $dx = 0$ atque $dp = 1$; deinde differentietur $\overset{\mathrm{I}}{Q}$ et in differentiali ponatur $d\overset{\mathrm{I}}{s} = \frac{dx\,dy}{ds}$, $d\overset{\mathrm{I}}{y} = dx$, $d\overset{\mathrm{I}}{x} = 0$, atque $d\overset{\mathrm{I}}{p} = -1$. His factis haec differentialia duo coniuncta dabunt valorem ipsius P. Ita casu quo posuimus $dQ = L\,ds + M\,dy + N\,dx + V\,ds$ prodibit per hanc regulam vt ante $P = \frac{L\,dx\,dy}{ds} + M\,dx - dV$. Sit exempli gratia propositum curuam inuenire, in qua $\int \frac{ds^2}{u\,dy + \sqrt{(c^2 ds^2 - u^2 dx^2)}}$ denotante u functionem quamcunque ipsius x, sit minimum. Posito ergo $dy = p\,dx$ erit $\int Q\,dx = \int \frac{(1+pp)\,dx}{pu + \sqrt{(c^2(1+pp) - u^2)}}$, et $Q = \frac{1+pp}{pu + \sqrt{(c^2(1+pp) - u^2)}}$. Erit ergo $L = 0$, $M = 0$, et $V = \frac{c^2(1+p^2)p - 2pu^2 + u(pp-1)\sqrt{(c^2(1+p^2) - u^2)}}{(pu + \sqrt{(c^2(1+p^2) - u^2)})^2 (c^2(1+p^2) - u^2)}$. Cum autem sit $dV = P = 0$, erit $V = $ const. atque $(au - u^2)(p^2 - 1) - c^2(p^2 + 1) = \frac{(2u-a)(1+pp)c^2 p + 2pu(au - u^2)}{\sqrt{(c^2 + c^2 p^2 - u^2)}}$ quae reducitur ad hanc $dy = \frac{(u^2 - au - cc)\,dx}{c\sqrt{((u-a)^2 - c^2)}}$.

§. 8. Ope huius regulae etiam facile erit pro aliis expressionibus valorem ipsius P inuenire, id quod exemplo

emplo formularum posteriorum dissertationis meae declarabo. Sit expressio, quae maximum minimumue esse debet, $\int Q\,dx \int R\,dx$, atque $dQ = L\,ds + M\,dy + N\,dx + V\,dp$ et $dR = E\,ds + F\,dy + G\,dx + I\,dp$ posito $dy = p\,dx$. Quod ergo ante erat Q nunc nobis est $Q\int R\,dx$, et quod erat $\overset{I}{Q}$ nunc erit $\overset{I}{Q}$ $\int R\,dx + \overset{I}{Q} R\,dx$. Prioris autem formulae differentiale est $(L\,ds + M\,dy + N\,dx + V\,dp)\int R\,dx + Q\,R\,dx$; vnde positis $ds = 0$, $dy = 0$, $dx = 0$ et $dp = 1$ resultat valor $V\int R\,dx$. Posterioris autem formulae differentiale est $(\overset{I}{L}\,d\overset{I}{s} + \overset{I}{M}\,d\overset{I}{y} + \overset{I}{N}\,dx + \overset{I}{V}\,d\overset{I}{p})(\int R\,dx + R\,dx) + \overset{I}{Q} R\,dx + \overset{I}{Q}\,dx\,(E\,ds + F\,dy + G\,dx + I\,dp)$, quod iuxta praecepta posito $ds = 0$, $dy = 0$, $dx = 0$, $dp = 1$, $d\overset{I}{s} = \frac{dx\,dy}{ds}$, $d\overset{I}{y} = dx$ et $d\overset{I}{p} = -1$, dabit hunc valorem $(\frac{\overset{I}{L}\,dx\,dy}{ds} + \overset{I}{M}\,dx - \overset{I}{V})(\int R\,dx + R\,dx) + \overset{I}{Q}\,I\,dx$. His coniunctis et neglectis negligendis fit $P = (\frac{L\,dx\,dy}{ds} + M\,dx)$ $\int R\,dx - dV\int R\,dx - RV\,dx + QI\,dx = -d.V\int R\,dx + dx(\frac{L\,dy}{ds} + M)\int R\,dx + QI\,dx = 0$. Quae est aequatio pro curua quaesita.

§. 9. Si aliae etiam expressiones in his non contentae fuerint propositae, quae maximum minimumue esse debeant, semper per regulam datam, qua poni debet $ds = 0$, $dy = 0$, $dx = 0$, $dp = 1$, $d\overset{I}{s} = \frac{dx\,dy}{ds}$, $d\overset{II}{y}$ $= dx$, et $d\overset{I}{p} = -1$, valor ipsius P, et inde simul aequatio

quatio pro curua inuenta reperietur. Vt inuenienda fit curua, in qua $\frac{\int s\,dx}{\int y\,dx}$ debeat esse maximum vel minimum, erit $\underset{\text{I}}{Q} = \frac{s}{\int y\,dx} - \frac{y\int dx}{(\int y\,dx)^2}$, atque $\overset{\text{I}}{Q} = \frac{s}{\int y dx} - \frac{s\,y\,dx}{(\int y\,dx)^2} - \frac{y\int s\,dx}{(\int y\,dx)^2} - \frac{y\,s\,dx}{(\int y\,dx)^2} + \frac{2yy\,dx\int s\,dx}{(\int y\,dx)^3}$. Hinc differentiando ex Q oritur 0, atque ex $\overset{\text{I}}{Q}$ oritur $\frac{dx\,dy}{ds\int y\,dx} - \frac{y\,dx^2\,dy}{ds(\int y\,dx)^2} - \frac{dx\int s\,dx}{(\int y\,dx)^2} - \frac{s\,dx^2}{(\int y\,dx)^2} + \frac{2y\,dx^2\int s\,dx}{(\int y\,dx)^3} = P$. Neglectis ergo negligendis fiet $P = \frac{dx\,dy\int y\,dx - ds\,dx\int s\,dx}{ds(\int y\,dx)^2}$. Posito itaque hoc pro P inuento valore $= 0$ prodibit aequatio pro curua quaesita $dy\int y\,dx = ds\int s\,dx$. Ponatur $dy = q\,ds$, erit $dq\int y\,dx = s\,dx$ seu $\int y\,dx = \frac{s\,dx - q\,y\,dx}{dq}$. Quae denuo differentiata posito dx constante dat $y\,dq^2 = ds\,dq - y\,dq^2 - q\,dy\,dq - s\,ddq + qy\,ddq$ seu $2y\,dq^2 + q\,dy\,dq - qy\,ddq = ds\,dq - s\,ddq$ vel restituto $q\,s\,ds^2\,dds^2 + 2s\,dy^2\,dds^2 = 3y\,ds\,dy\,dds^2 + s\,ds\,dy^2\,d^3s - y\,dy^3\,d^3s$.

§. 10. Ex his praeceptis iam satis intelligitur, si expressio, quae maximum vel minimum esse debeat, sit non solum ipsarum x, y, s et p functio quaecunque, sed etiam praeter ea integrales formulas contineat; quemadmodum eam tractari, atque tandem ad aequationem naturam curuae exprimentem perueniri oporteat. Valet itaque ista methodus pro omnibus expressionibus, quae partim ex integralibus, partim denique ex harum differentialibus sunt conflatae; adeo vt ad omnes omnino quaestiones soluendas sufficere videatur. Interim tamen incidi nuper in quaestionem quae ad hanc methodum referri non poterat, sed peculiarem solutionem requirebat,

bat. Ita autem illa quaestio erat comparata, vt in formula $\int Q dx$, quae maximum minimumue esse debet, praeter x, y, s eorumque differentialia etiam differentialia secundi gradus essent contenta. Facile autem intelligitur, quoties differentialia secundi gradus occurrant, tum hactenus tradita praecepta non valere, sed nouam omnino methodum requiri.

§. 11. Cum autem differentialia secundi gradus bina elementa afficiant, ita vt translatio puncti b in β, differentialia secundi gradus elementi ante ab siti immutent, non difficulter perspicietur, ad huiusmodi quaestiones soluendas praeter elementa ab et bc insuper praecedens et sequens in computum duci debere. Sint igitur $a\,b\,c\,d\,e$ quatuor elementa curuae inueniendae, quorum bina tantum media bcd, vt ante fecimus, in situm proximum $b\gamma d$ transferantur. Ponatur $OA = x$, $Aa = y$, et $oa = s$, atque elementis abscissae x aequalibus sumtis, erit $Bb = \overset{I}{y}$, $Cc = \overset{II}{y}$, $Dd = \overset{III}{y}$ et $Ee = \overset{IV}{y}$. Posito praeterea $dy = p\,dx$, erit $\frac{cM}{dx} = p$, $\frac{cN}{dx} = \overset{I}{p}$, $\frac{dP}{dx} = \overset{II}{p}$ atque $\frac{eQ}{dx} = \overset{III}{p}$. Quia denique differentialia secundi gradus in formula proposita inesse ponuntur fiat $dp = r\,dx$ ita vt sit $ddy = r\,dx^2$, et $dds = \frac{p\,r\,dx^2}{\sqrt{(1+pp)}}$. His positis erit $r = \frac{ddy}{dx^2} = \frac{cN - bM}{dx^2}$ atque $\overset{I}{r} = \frac{dP - cN}{dx^2}$ et $\overset{II}{r} = \frac{eQ - dP}{dx^2}$. Figura 2.

§. 12. Si iam elementa $abcde$ in elementa $ab\gamma de$ transire concipiantur, valores ante inuenti incrementa vel decrementa accipient. Fient autem incrementa haec vt vt ex inſpectione figurae apparet, ſequentia: $ds = 0$, $dy = 0$, $dx = 0$, $dp = 0$; denotant enim ds, dy, dx, dp, incrementa ipſarum s, y, x, et p, dum punctum c in γ transfertur, haec vero mutatio has quantitates non afficit, ſed translato c in γ abibit r in $\frac{\gamma N - bM}{dx^2}$, erit itaque incrementum quod r interea capit ſeu $dr = \frac{c\gamma}{dx^2}$. Porro erit $\overset{\mathrm{I}}{ds} = 0$, $\overset{\mathrm{I}}{dy} = 0$, $\overset{\mathrm{I}}{dp} = \frac{c\gamma}{dx}$ et $\overset{\mathrm{I}}{dr} = \frac{dp - \gamma N}{dx^2} - \frac{dp + cN}{dx^2} = \frac{-2c\gamma}{dx^2}$. Deinceps autem fiet $\overset{\mathrm{II}}{ds} = \gamma n = \frac{cN \cdot \gamma e}{bc} = \frac{\overset{\mathrm{I}}{dy} \cdot c\gamma}{\overset{\mathrm{I}}{ds}}$; $\overset{\mathrm{II}}{dy} = c\gamma$; $\overset{\mathrm{II}}{dp} = \frac{-c\gamma}{dx} = \overset{\mathrm{II}}{dr} = \frac{c\gamma}{dx^2}$. Denique erit $\overset{\mathrm{III}}{ds} = \frac{\overset{\mathrm{I}}{dy} \cdot c\gamma}{\overset{\mathrm{I}}{ds}} - \frac{\overset{\mathrm{II}}{dy} \cdot c\gamma}{\overset{\mathrm{II}}{ds}} = -c\gamma \, \mathrm{d}. \frac{\overset{\mathrm{I}}{dy}}{\overset{\mathrm{I}}{ds}}$; atque $\overset{\mathrm{III}}{dy} = 0$, $\overset{\mathrm{III}}{dp} = 0$, $\overset{\mathrm{III}}{dr} = 0$; haec enim elementa non amplius a mutatione puncti c afficiuntur.

§. 13. Sit nunc curua inuenienda, in qua debeat eſſe maximum vel minimum $\int Q dx$, in qua expreſſione Q ſit compoſitum quomodocunque ex x, y, s, harumque quantitatum differentialibus tam primi quam ſecundi gradus; ita vt Q futura ſit functio quaecunque ipſarum x, y, s, p et r. Iam quia $\int Q dx$ pro omni curuae portione ab o incipiente debet eſſe maximum vel minimum, neceſſe eſt, vt tale quoque ſit pro elementis $abcde$. Quare $\int Q dx$ eundem valorem habere debebit tam in elementis $abcde$ quam in $ab\gamma de$. Pro elementis autem $abcde$ dat iſta formula hunc valorem $Qdx + \overset{\mathrm{I}}{Q}dx + \overset{\mathrm{II}}{Q}dx + \overset{\mathrm{III}}{Q}dx$, huius ergo differentiale

ex

ex translatione puncti c in γ ortum debet esse $=0$, vel dabit valorem ipsius $P.c\gamma$. Posito autem $dQ = L\,ds + M\,dy + N\,dx + V\,dp + W\,dr$, erit pro differentialibus valoribus exhibitis substituendis vt sequitur:

$$\mathrm{d}.\,Q\,dx = \frac{W.c\gamma}{dx}$$

$$\mathrm{d}.\,\overset{\mathrm{I}}{Q}\,dx = \overset{\mathrm{I}}{V}.c\gamma - \frac{2\overset{\mathrm{I}}{W}.c\gamma}{dx}$$

$$\mathrm{d}.\,\overset{\mathrm{II}}{Q}\,dx = \frac{\overset{\mathrm{II}}{L}\,dx\,\overset{\mathrm{I}}{dy}\,c\gamma}{\overset{\mathrm{I}}{ds}} + \overset{\mathrm{II}}{M}\,dx.\,c\gamma - \overset{\mathrm{II}}{V}.\,c\gamma + \frac{\overset{\mathrm{II}}{W}.c\gamma}{dx}$$

$$\mathrm{d}.\,\overset{\mathrm{III}}{Q}\,dx = -\overset{\mathrm{III}}{L}\,dx\,\mathrm{d}.\frac{\overset{\mathrm{I}}{dy}}{\overset{\mathrm{I}}{ds}}.\,c\gamma$$

Quorum valorum summa dabit hanc expressionem $P = \frac{ddW}{dx} - dV + \frac{L\,dx\,dy}{ds} + M\,dx$ neglectis negligendis. Pro curua quaesita ergo habebitur ista aequatio

$$ddW - dV\,dx + \frac{L\,dx^2\,dy}{ds} + M\,dx^2 = 0,$$

posito perpetuo dx constante.

§. 14. Quo hanc regulam exemplo illustremus sit nobis propositum inter omnes curuas per puncta A et M transeuntes eam determinare, quae cum sua euoluta AO minimum spatium AOM comprehendat. Positis ergo $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$, erit radius osculi $MO = -\frac{ds^3}{dx\,ddy}$ posito dx constante. Facto ergo $dy = p\,dx$ erit $ds = dx\sqrt{(1+pp)}$ et $ddy = dp\,dx$, vnde fiet radius osculi $MO = \frac{-dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$. Atque posito dp Figura 3.

 $= r\,dx$

$= r dx$ erit is $= -\frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{r}$. Hinc area AMO erit $= -\frac{1}{2}\int\frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}ds}{r} = -\frac{1}{2}\int\frac{(1+pp)^2 dx}{r}$; oportet ergo vt ſit $\int\frac{(1+pp)^2 dx}{r}$ minimum; quare habebimus $Q = \frac{(1+pp)^2}{r}$ et $dQ = \frac{4pdp(1+pp)}{r} - \frac{(1+pp)^2 dr}{r^2}$. Erit itaque $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, $V = \frac{4p(1+pp)}{r}$ et $W = -\frac{(1+pp)^2}{r^2}$. Quocirca cum ſit $ddW = dVdx$; erit $dW = Vdx + Adx$. Erit autem $W = \frac{-ds^4}{dx^2dp^2} = \frac{-ds^4}{ddy^2}$ et $V = \frac{4dyds^2}{dx^2dp} = \frac{4dyds^2}{dxddy}$. Hanc ob rem erit $-\frac{4ds^2dy}{ddy} + \frac{2ds^4d^3y}{ddy^3} = \frac{4dyds^2}{ddy} + Adx$ ſeu $\frac{ds^4d^3y}{ddy^3} = \frac{4dyds^2}{ddy} + Adx$ ſiue $(1+pp)^2 dxddp = 4p(1+pp)dxdp^2 + Adp^3$. Ponatur $dx = \frac{dp}{r}$ vt ſit $ddp = \frac{dpdr}{r}$, erit $\frac{(1+pp)^2dp^2dr}{r^2} = \frac{4p(1+pp)dp^3}{r} + Adp^3$, ſeu $\frac{(1+pp)^2dr - 4(1+pp)rpdp}{r^2} = Adp$, cuius integrale eſt $B - Ap = \frac{(1+pp)^2}{r}$ ſeu $\frac{Bdp - Apdp}{(1+pp)^2} = dx$. Si ponatur $B = 0$, fiet $x = \frac{a}{1+pp} = \frac{adx^2}{ds^2}$ atque $xdx^2 + xdy^2 = adx^2$, vnde erit $dy = dx\sqrt{\frac{a-x}{x}}$, quae eſt aequatio pro cycloide in A maximum radium oſculi habente. At ſi $A = 0$ erit $\frac{Bdp}{(1+pp)^2} = dx$ ſeu $\frac{Bpdp}{(1+pp)^2} = dy$ erit ergo $y = \frac{a}{1+pp}$ ſeu $y = \frac{adx^2}{ds^2}$ vnde fit $x = \int\frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(a-y)}}$, quae eſt pro cyclode in A cuſpidem habente. Generatim vero erit $ds = \frac{Bdp - Apdp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$, cuius integralis eſt $s = \frac{ap+b}{\sqrt{(1+pp)}}$ ſeu $sds = ady + bdx$, quae integrata dat $s^2 = 2ay + 2bx$, et

$\sqrt{(2ay}$

$s = \sqrt{(2ay + 2bx)}$, quae itidem eſt pro cycloide ad ad axem oblique ductum. Ex quibus perſpicitur quaeſtioni propoſitae aliam curuam non ſatisfacere praeter cycloidem; ita vt inter omnes curuas per puncta A et M transeuntes nulla ſit niſi cyclois, quae cum ſua euoluta tam exiguum ſpatium comprehendat.

§. 15. Sit nunc propoſitum inter omnes curuas AM determinare eam in qua $\int \frac{ddy}{ds}$ ſit maximum vel minimum. Ponatur ergo $dy = p\,dx$ et $dp = r\,dx$ erit $\int \frac{ddy}{ds} = \int \frac{r\,dx}{\sqrt{(1+pp)}}$ ideoque $Q = \frac{r}{\sqrt{(1+pp)}}$ et $dQ = \frac{dr}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{rp\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$. Quare erit $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, $V = -\frac{rp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$ et $W = \frac{1}{\sqrt{(1+pp)}}$. Cum igitur ſit $ddW = dV\,dx$ erit $dW = V\,dx + A\,dx$, hoc eſt $\frac{-p\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-rp\,dx}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} + A\,dx = \frac{-p\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} + \frac{A\,dp}{r}$. Erit itaque $dp = 0$ et $y = \alpha x$ ſeu linea quaeſita recta; quae terminorum deſtructio inde oritur, quod ſit $\int Q\,dx = \int \frac{dp}{\sqrt{(1+pp)}}$ integrabile. At ſi quaeratur curua in qua $\int \frac{ddy}{y\,ds}$ ſit maximum vel minimum, fiet $Q = \frac{r}{y\sqrt{(1+pp)}}$ et $dQ = \frac{dr}{y\sqrt{(1+pp)}} - \frac{rp\,dp}{y(1+pp)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r\,dy}{y^2\sqrt{(1+pp)}}$, ita vt ſit $L = 0$, $M = \frac{-r}{y^2\sqrt{(1+p)}}$, $V = \frac{-rp}{y(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$ et $W =$

$\frac{1}{y\sqrt{(1+pp)}}$. Hinc erit $ddW - dV\,dx + M\,dx^2 = 0$; quae euoluta dat hanc aequationem $\frac{2dp + ppdp}{p + p^3} = \frac{2dy}{y}$ cuius integralis est $y^2 = \frac{a^2 p^2}{\sqrt{(1+p^2)}} = \frac{a^2 dy^2}{dx\,ds}$; quae reducta dat $dx\sqrt{2} = \frac{dy}{y}\sqrt{[-y^2 \pm \sqrt{(y^4 + 4a^4)}]}$ cuius integratio a circuli et hyberbolae quadraturis pendet.

§. 16. Quanquam in his exemplis posuimus quantitatem Q absolute dari, tamen regula data aeque locum habet, eodemque modo potest vsurpari, si Q tantum per aequationem differentialem detur, ita vt valor ipsius Q per integrationem assignari nequeat. Huiusmodi casum quidem iam tractaui, cum curuam brachystochronam in quocunque medio resistente determinarem. Eundem igitur casum ad vsum regulae §. 6. datae plenius ostendendum hic euoluere conueniet. Propositum ergo sit curuam AM inuestigare, super qua corpus a quibuscunque potentiis sollicitatum in medio quocunque resistente celerrime descendat. Ad hoc problema soluendum ponatur $AP = x$, $PM = y$ et $AM = s$; trahaturque corpus in M a vi P in directione applicatae MP, et ab alia vi Q in directione MQ parallela axi AP; constat enim ad has duas vires potentias quascunque reduci posse. Posito ergo $dy = pdx$ et $ds = dx\sqrt{(1+pp)}$ erit vis tangentialis accelerans ex iis orta $= \frac{Q - Pp}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{Qdx - Pdy}{ds}$ vis normalis vero erit $= \frac{Qp + P}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{Qdy + Pdx}{ds}$.

Figura 4.

§. 17. Sit nunc celeritas in M debita altitudini v et resistentia aequalis sit R functioni cuicunque ipsius v. His

His positis erit $dv = Q\,dx - P\,dy - R\,ds$. Tempus vero, quo corpus arcum AM absoluit, erit $= \int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \int \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{v}}$, quod debet esse minimum. Quae formula cum superiore $\int Q\,dx$ comparata dat $Q = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{v}}$; ex qua erit $dQ = \frac{p\,dp}{\sqrt{v(1+pp)}} - \frac{dv\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}$ et loco dv valore substituto erit $dQ = \frac{R\,ds\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}} + \frac{P\,dy\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}} - \frac{Q\,dx\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}} + \frac{p\,dp}{\sqrt{v(1+pp)}}$. Fit igitur $L = \frac{R\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}$, $M = \frac{P\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}$, $N = \frac{-Q\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}$ atque $V = \frac{p}{\sqrt{v(1+pp)}}$. Cum autem sit per regulam datam $L\,dx\,dy + M\,dx\,ds = dV\,ds$ seu $L\,p\,dx + M\,dx\sqrt{(1+pp)} = dV\sqrt{(1+pp)}$ erit substitutis valoribus inuentis et per $\sqrt{(1+pp)}$ diuisione facta

$$\frac{R\,p\,dx + P\,dx\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}} = d.\frac{p}{\sqrt{v(1+pp)}} = \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}\sqrt{v}} - \frac{p\,dv}{2v\sqrt{v(1+pp)}} = \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}\sqrt{v}} - \frac{Q\,p\,dx + P\,p^2\,dx + R\,p\,dx\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v(1+pp)}}$$

substitutis loco dv et in eius expressione loco dy et ds valoribus assumtis.

§. 18. Si nunc haec aequatio reducatur prodibit sequens $\frac{P\,dx + Q\,p\,dx}{2v\sqrt{(1+pp)}} = \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$; in qua ergo aequatione non amplius inest resistentia R. Ad indolem igitur huius aequationis inuestigandam duco curuae radium osculi MO quem pono z, exprimet $\frac{2v}{z}$ vim centrifugam, qua corpus curuam iuxta normalem MS premit. Erit autem ob dx constans assumtum $z = \frac{ds^3}{dx\,ddy}$

 =

$= \frac{dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$, ita vt ſit $\frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dx}{z}$. Hoc ergo valore ſubſtituto et per dx diuiſo fiet $\frac{1}{z} = \frac{P+Qp}{2v\surd(1+pp)}$ ſeu $\frac{2v}{z} = \frac{P+Qp}{\surd(1+pp)}$. Exprimit autem vt modo meminimus $\frac{2v}{z}$ vim centrifugam, cuius directio eſt normalis MS, atque vt ante notauimus $\frac{P+Qp}{\surd(1+pp)}$ exhibet vim normalem ex reſolutione potentiarum ſollicitantium P et Q ortam et in directione MS curuam prementem. Quocirca in hypotheſi potentiarum quarumcunque ſollicitantium et reſiſtentiae cuiuscunque ea curua eſt brachyſtochrona, quae premitur a corpore ſuper ea moto vi duplo maiore, quam a ſola vi centrifuga.

§. 19. His igitur ſufficienter expoſitis, quae tum ad methodum hanc inter omnes curuas eam determinandi, quae maximi minimiue cuiusdam proprietate gaudeat, intelligendam, tum etiam ad eius vſum in quibusque huius generis problematis declarandum neceſſaria viſa ſunt; progredior ad ſequentem huius generis quaeſtionum claſſem, quae proprie ſub problematis iſoperimetrici nomine eſt nota, in qua non ex omnibus curuis intra datos terminos ſitis, ſed iis tantum, quae vel aeque ſunt longae vel aliam quamcunque proprietatem communem habent, inueniri debet ea curua, quae maximi vel minimi cuiusdam proprietate gaudeat. Hocque eſt problema tanti in re analytica vſus, tantaeque dignitatis, in quo enodando acutiſſimi Viri *Bernoullii*, *Taylorus* atque *Hermannus* ingentem collocauerunt operam; cuiusque ego etiam in diſſertatione ante aliquot annos de prob-

problemate isoperimetrico solutionem satis breuem atque facilem tradidi, ope formularum, quibus cuiusque generis quaestiones admodum expedite resolui possunt.

§. 20. Quod hae duae proprietates, quarum altera omnium curuarum communis esse debet, altera vero in quaesita maximum minimumue, inter se commutari et altera in alterius locum collocari queant, iam satis constat; atque ego etiam pro plurimis huiusmodi proprietatibus exhibui formulas sub littera P consignatas, quae nulla facta distinctione inter binas proprietates propositas vsurpari atque statim ad aequationem pro curua quaesita deduci possunt. Hic quidem eodem vtar modo, et per huiusmodi formulas P totum negotium absoluam; sed triplici ratione illam priorem methodum ad maiorem perfectionis gradum sum euecturus. Primum enim exponam methodum magis genuinam, cuius ope eiusmodi formulae multo facilius elici possunt. Deinde ingentem formularum ibi traditarum numerum contraham, ita vt omnes illae coniunctae in vnica vel duabus contineantur. Tertio etiam eiusmodi proprietates, quae vel curuis communes vel in quaesita maximum minimumue esse debent, euoluam et ad formulas deducam, ad quas inueniendas prior mea methodus vel nimis difficulter vel omnino non sufficiebat.

§. 21. Sit igitur $\int Q dx$ quantitas seu proprietas quae vel omnibus curuis puncta o et a iungentibus communis vel in quaesita maxima minimaue esse debeat; constat eam in vtroque casu in elementa $a\,b\,c\,d$ aeque competere debere ac in elementa $a\,\beta\,\gamma\,c$. Quare si illa quantitas $\int Q dx$ ad elementa $abcd$ applicetur, et tum Tabula X. Figura 1.

tum eius valor quaeratur translatis punctis b et c in proxima β et γ, oportebit vt differentia inter hos duos valores fit $=0$. Differentia autem ista statim habebitur, si valor ipsius $\int Q\,dx$, qui respondet elementis $ab\,cd$ ita differentietur, vt puncta tantum b et c variari ponantur; quare et hoc ipsum differentiale debebit esse $=0$. Hoc autem differentiale huiusmodi habebit formam $A.b\beta - B.c\gamma = 0$, quae cum forma in priori dissertatione stabilita $P.b\beta - (P + dP).c\gamma = 0$ comparata dabit $\frac{dP}{P} = \frac{B-A}{A}$ ex qua aequatione valor ipsius P respondens quantitati $\int Q\,dx$ inuenietur. Hoc autem facto problema quodque propositum facile resoluetur per hanc regulam: si inter omnes curuas, in quibus $\int S\,dx$ eundem habeat valorem, quaeratur ea, in qua $\int T\,dx$ sit maximum vel minimum; tum quaeratur valor ipsius P respondens vtrique formulae $\int S dx$ et $\int T dx$, atque alter alteri per constantem quamcunque multiplicato aequalis ponatur, ac resultans aequatio exprimet naturam curuae quaesitae.

§. 22. Quemadmodum autem, si proposita fuerit quaecunque formula $\int Q\,dx$, differentiam inter valores huius formulae elementis $abcd$ et $a\beta\gamma d$ inueniri oporteat, sequenti modo patebit. Positis vt ante $OA = x$, $Aa = y$, $oa = s$ et elemento dx constante, itemque $dy = p\,dx$; erit $Bb = \overset{I}{y}$, $Cc = \overset{II}{y}$ et $Dd = \overset{III}{y}$, item $oab = \overset{I}{s}$, $oabc = \overset{II}{s}$, $oabcd = \overset{III}{s}$, denique $\frac{bM}{dx} = p$, $\frac{cN}{dx} = \overset{I}{p}$, et $\frac{dP}{dx} = \overset{II}{p}$. Translatis nunc punctis b et c in β et γ quanti-

quantitates iſtae accipient ſequentia incrementa, poſito breuitatis gratia $q = \frac{dy}{ds}$.

$ds = 0$	$\overset{\mathrm{I}}{d}s = q.b\beta$	$\overset{\mathrm{II}}{d}s = -dq.b\beta - \overset{\mathrm{I}}{q}.c\gamma$
$dy = 0$	$\overset{\mathrm{I}}{d}y = b\beta$	$\overset{\mathrm{II}}{d}y = -c\gamma$
$dx = 0$	$\overset{\mathrm{I}}{d}x = 0$	$\overset{\mathrm{II}}{d}x = 0$
$dp = \frac{b\beta}{dx}$	$\overset{\mathrm{I}}{d}p = \frac{-b\beta - c\gamma}{dx}$	$\overset{\mathrm{II}}{d}p = \frac{c\gamma}{dx}$.

§. 23. Sit iam propoſita formula $\int Q\,dx$, quae vel communis vel maxima minimaue eſſe debeat, ideoque aequaliter expreſſa tam pro elementis $abcd$ quam $a\beta\gamma d$; ſit autem Q functio quaecunque ipſarum x, y, s et p poſito $dy = p\,dx$; ita vt dQ habiturum ſit huiusmodi formam $L\,ds + M\,dy + N\,dx + V\,dp$. Elementis autem $abcd$ reſpondebit iſte valor $Q\,dx + \overset{\mathrm{I}}{Q}\,dx + \overset{\mathrm{II}}{Q}\,dx$, qui ſecundum translationem punctorum b et c in β et γ differentiatus differentialibus ipſarum $s, y, p, \overset{\mathrm{I}}{s}, \overset{\mathrm{I}}{y}, \overset{\mathrm{I}}{p}, \overset{\mathrm{II}}{s}, \overset{\mathrm{II}}{y}, \overset{\mathrm{II}}{p}$ ſumtis vti eſt praeceptum, dabit ſequens differentiale.

$$dQ\,dx = V.b\beta$$

$$d\overset{\mathrm{I}}{Q}\,dx = \overset{\mathrm{I}}{L}\,q\,dx.b\beta + \overset{\mathrm{I}}{M}\,dx.b\beta - \overset{\mathrm{I}}{V}.b\beta - \overset{\mathrm{I}}{V}.c\gamma$$

$$d\overset{\mathrm{II}}{Q}\,dx = -\overset{\mathrm{II}}{L}\,dx\,dq.b\beta - \overset{\mathrm{II}}{L}\,\overset{\mathrm{I}}{q}\,dx.c\gamma - \overset{\mathrm{II}}{M}\,dx.c\gamma + \overset{\mathrm{II}}{V}.c\gamma$$

quod poſitum $= 0$ dat

$$(-dV + \overset{\mathrm{I}}{L}q\,dx + \overset{\mathrm{I}}{M}dx - \overset{\mathrm{II}}{L}dx\,dq)b\beta = (-d\overset{\mathrm{I}}{V} + \overset{\mathrm{II}}{L}\overset{\mathrm{I}}{q}dx + \overset{\mathrm{II}}{M}dx)c\gamma$$

Erit ergo

$$\frac{dP}{P} = \frac{-ddV + \overset{I}{L}\,dx\,dq + dx\,d(\overset{I}{L}q + \overset{I}{M})}{-dV + dx(\overset{I}{L}q + \overset{I}{M})}$$

Ex qua aequatione integrata prodibit valor

$$P = e^{\int \frac{L\,dx\,dq}{-dV + dx(Lq+M)}} (-dV + dx(Lq + M))$$

denotante e numerum cuius log. eſt 1.

§. 24. Pro quaeſtionibus autem ad primam claſſem pertinentibus eidem formulae $\int Q\,dx$ reſpondere inuenimus ſupra §. 6. hunc valorem $P = -dV + dx(LQ+M)$, qui valor a nunc inuento pro quaeſtionibus ſecundae claſſis tantum differt quantitate exponentiali. Quare ſi L euaneſcat, quod accidit quando Q non ab s, ſed tantum ab x, y et p pendet, tum vtraque formula in eandem recidit $P = -dV + M\,dx$, quae ergo pro quaeſtionibus ſecundae claſſis aeque valet ac pro quaeſtionibus primae claſſis. Ex praecedente autem mea diſſertatione aeque ac ex iſta intelligitur eandem formulam $P = -dV + M\,dx$, quae reſpondet quantitati $\int Q\,dx$ exiſtente $dQ = M\,dy + N\,dx + V\,dp$, quoque ad quaeſtiones claſſis tertiae atque omnium ſequentium ſufficere; in quibus quaeri ſolet inter omnes curuas duas pluresue proprietates communes habentes ea curua, quae maximi minimiue proprietate gaudeat; ita vt his caſibus pro ſequentibus claſſibus nouos pro P valores eruere non ſit opus.

§. 25.

§. 25. Valor autem ipsius $P = e^{\int \frac{L\,dx\,dq}{-dV + (Lq+M)dx}}$ $[-dV + dx(Lq+M)]$, quem pro quantitate $\int Q\,dx$ existente Q functione quacunque ipsarum x, y, s harumque differentialibus, ita vt sit $dQ = L\,ds + M\,dy + N\,dx + V\,dp$, tam late patet, vt non solum 16 priores formulas omnes in praecedente mea dissertatione exhibita complectatur, sed insuper innumerabilibus aliis quaestionibus soluendis inseruiat; ad quas illae formulae sunt insufficientes; quorum vtrumque exemplo declarari conueniet. Propositum igitur sit inter omnes curuas AM, quae ad axem AB aequales constituunt areas AMQ, eam determinare, quae in fluido secundum axis AB directionem mota minimam patiatur resistentiam. Sumtis abscissis AP in recta AC ad axem AB normali, ponaturque $AP = x = QM$, $PM = y = AQ$, et $AM = s$, erit area $AQM = \int x\,dy$, quae omnibus curuis per A et M transeuntibus communis esse debet. Deinde resistentia, quam elementum Mm in fluido motum patitur, est vt Mm ductum in quadratum sinus ang incidentiae Mmn hoc est vt $\frac{dx^2}{ds}$, impediet ergo motum vi $\frac{dx^3}{ds^2}$, ita vt tota resistentia, quae minima esse debet, futura sit $= \int \frac{dx^3}{ds^2}$. Tabula X. Figura 2.

§. 26. Formulae igitur, pro quibus valores ipsius P quaerere debemus, sunt $\int x\,dy$ et $\int \frac{dx^3}{ds^2}$. Consideremus primo hanc $\int x\,dy$, quae posito $dy = p\,dx$, abit in $\int xp\,dx$, haecque cum $\int Q\,dx$ comparata dat $Q = xp$ et $dQ = p\,dx + x\,dp$. Erit itaque $L = 0$, $M = 0$, $N = p$ et

Z 2 $V = x$

$V = x$, vnde fiet $P = -dx$. Altera forma $\int \frac{dx^3}{ds^2}$ transit in hanc $\int \frac{dx}{1+pp}$, ita vt ſit $Q = \frac{1}{1+pp}$ et $dQ = \frac{-2pdp}{(1+pp)^2}$ Fiet ergo pro hac formula $L = o$, $M = o$, $N = o$ atque $V = \frac{-p}{(1+pp)^2}$, cui reſpondebit conſequenter $P = \frac{dp}{(1+pp)^2} - \frac{4p^2dp}{(1+pp)^3} = \frac{dp - 3ppdp}{(1+pp)^3}$. His inuentis ponatur alter ipſius P valor aequalis multiplo alterius, et prodibit $dx = \frac{adp - 3ap^2dp}{(1+pp)^3}$ atque $x = \frac{ap}{(1+pp)^2}$. Cum autem ſit $dy = pdx$, erit $y = px - \int x\,dp = \frac{ap^2}{(1+pp)^2} - \int \frac{apdp}{(1+pp)^2} = \frac{a+3app}{2(1+pp)^2}$. Curua ergo quaeſita erit algebraica, atque eliminata p inuenietur ſequens inter x et y pro curua aequatio

$$y^4 - 2y^2x^2 + x^4 = 18cx^2y + 2cy^3 - 27c^2x^2$$

mutato pro arbitrio conſtantis a valore.

Tabula IX. Figura 4. §. 27. Nunc ad exemplum proferendum, ad quod formulae prius datae non ſufficiunt, ſit in hypotheſi potentiarum corpus ſollicitantium et reſiſtentia quacunque inter omnes curuas AM ſuper quibus corpus ex A deſcendens in M eandem acquirit velocitatem, inuenienda ea curua AM, ſuper qua corpus ex A in M citiſſime perueniet. Poſito ergo vt ante §. 16. 17. $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$, et potentia corpus ſecundum MP ſollicitante $= P$, potentia corpus ſecundum MQ trahente $= Q$, celeritate in M debita altitudini v et reſiſtentia $= R$, erit $dv = Qdx - Pdy - Rds$. Duae igitur formulae, quae ſunt propoſitae, erunt $\int dv = \int [Q - Pp - R\sqrt{(1+pp)}]dx$ atque $\int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \int \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{v}}$. Pro prima igitur formula erit $Q = Q - Pp - R\sqrt{(1+pp)}$; ponatur $dQ = Sdy + Xdx$ et $dP = Tdy + Ydx$ (ab x enim et y tantum pendebunt Q et P) atque $dR = Zdv$

$= ZQ$

$= Z Q dx - Z P dy - Z R ds$; erit itaque noſtrum $dQ =$ $S dy + X dx - P dp - T p dy - Y p dx - \frac{R p dp}{\sqrt{(1+pp)}} - Z Q dx$ $\sqrt{(1+pp)} + Z P dy \sqrt{(1+pp)} + Z R ds \sqrt{(1+pp)}$. Hanc ob rem fiet $L = ZR\sqrt{(1+pp)}$, $M = S - Tp + ZP\sqrt{(1+pp)}$ $V = -P - \frac{Rp}{\sqrt{(1+pp)}}$. Ex his ob $q = \frac{dy}{ds} = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$ atque dq $= \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$ ſequens eruetur valor ipſius $P =$

$$e^{\int \frac{ZR\,dx\,dp}{(S+Y)dx(1+pp) + Z(Pdx+Qdy)\sqrt{(1+pp)} + \frac{Rdp}{\sqrt{(1+pp)}}}} [(S+Y)\,dx\,(1+pp) + Z(Pdx+Qdy)\sqrt{(1+pp)} + \frac{Rdp}{\sqrt{(1+pp)}}].$$

Altera vero formula $\int \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{v}}$ modo vt ſupra tractata dabit $L = \frac{R\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}$, $M = \frac{P\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}$ et $V = \frac{p}{\sqrt{v(1+pp)}}$ atque $dV = \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}\sqrt{v}} - \frac{p\,dv}{2v\sqrt{v(1+pp)}}$ adeo vt fiat $P =$

$$e^{\int \frac{R\,dx\,dp}{(Pdx+Qdy)\sqrt{(1+pp)} - \frac{2v\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}}} [(Pdx+Qdy)\sqrt{(1+pp)} - \frac{2v\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}].$$

Duorum horum valorum ipſius P multipla quaecunque ſibi aequalia poſita dabunt aequationem pro curua quaeſita, quam autem vlterius perſequi calculi prolixitas non permittit.

§. 28. Sit nunc formula, quae vel omnibus curuis communis eſſe debet vel in quaeſita curua maximum minimumue, haec $\int Q dx \int R dx$; ſit autem $dQ = L ds$ $+ M dy + N dx + V dp$ et $dR = E ds + F dy + G dx$ $+ I dp$. Dabit ergo haec formula pro elementis $abcd$ hanc expreſſionem $Q dx \int R dx + \overset{I}{Q} dx \int \overset{I}{R} dx + \overset{II}{Q} dx$ $\int \overset{II}{R} dx$. Huius differentiale ſecundum data praecepta dabit vt ſequitur: Tabula IX. Figura 1.

 d. Q dx

$$\mathrm{d.}\,Q\,dx\int R\,dx = V.\,b\beta\int R\,dx$$

$$\mathrm{d.}\,\overset{I}{Q}\,dx\int \overset{I}{R}\,dx = \overset{I}{L}\,q\,dx.\,b\beta\int \overset{I}{R}\,dx + \overset{I}{M}\,dx\,b\beta\int \overset{I}{R}\,dx - \overset{I}{V}\,(b\beta + c\gamma)\int \overset{I}{R}\,dx + \overset{I}{Q}I\,dx.\,b\beta$$

$$\mathrm{d.}\,\overset{II}{Q}\,dx\int \overset{II}{R}\,dx = -\overset{II}{L}\,dx\,dq.\,b\beta\int \overset{II}{R}\,dx - \overset{II}{L}\overset{I}{q}\,dx.\,c\gamma\int \overset{II}{R}\,dx - \overset{II}{M}\,dx.\,c\gamma\int \overset{II}{R}\,dx + \overset{II}{V}.\,c\gamma\int \overset{II}{R}\,dx + \overset{II}{Q}I\,dx.\,b\beta + \overset{II}{Q}(\overset{I}{E}q + \overset{I}{F})\,dx^2.\,b\beta - \overset{II}{Q}\overset{I}{I}\,dx\,(b\beta + c\gamma)$$

Haec differentialia si ponantur $= 0$ prodibit $b\beta(-\mathrm{d.}\,V\int R\,dx + (\overset{I}{L}q + \overset{I}{M})\,dx\int \overset{I}{R}\,dx - \overset{II}{L}\,dx\,dq\int \overset{II}{R}\,dx + \overset{II}{Q}I\,dx + \overset{II}{Q}(Eq + F)\,dx^2 - \mathrm{d.}\,\overset{I}{Q}I\,dx) = c\gamma(-\mathrm{d.}\,\overset{I}{V}\int \overset{I}{R}\,dx + (\overset{II}{L}\overset{I}{q} + \overset{II}{M})\,dx\int \overset{II}{R}\,dx + \overset{II}{Q}\overset{I}{I}\,dx$. Ex hac aequatione orietur $\frac{dP}{P} =$

$$\frac{-\mathrm{dd.}\,V\int R\,dx + dx\,\mathrm{d}\,(\overset{I}{L}q + \overset{I}{M})\int \overset{I}{R}\,dx - \overset{II}{Q}(Eq + F)\,dx^2}{-\mathrm{d.}\,V\int R\,dx + (\overset{I}{L}q + \overset{I}{M})\,dx\int \overset{I}{R}\,dx +}$$

$$\frac{+\overset{II}{L}\,dx\,dq\int \overset{II}{R}\,dx + \overset{II}{Q}\,dI\,dx + \mathrm{d.}\,\overset{I}{Q}I\,dx}{\overset{II}{Q}I\,dx - \overset{II}{L}\,dx\,dq\int \overset{II}{R}\,dx - \mathrm{d.}\,\overset{I}{Q}I\,dx}.$$ Hincque erit

$P = e^{\int \frac{Q\,dI\,dx + L\,dx\,dq\int R\,dx - Q(Eq + F)\,dx^2}{-d.\,V\int R\,dx + (Lq + M)\,dx\int R\,dx + QI\,dx}}(-\mathrm{d.}\,V\int R\,dx + (Lq + M)\,dx\int R\,dx + QI\,dx)$; qui ergo valor ipsius P respondet quantitati $\int Q\,dx\int R\,dx$, quae non solum omnes formulas 24 ante a me prolatas comprehendit, sed etiam longe latius patet.

§. 29. Ex his intelligitur methodo exposita etiam alias formulas $\int Q\,dx$, in quibus Q non solum per x, y, s et p,

s et p, ſed praeterea a quibuscunque integrationibus quin etiam á conſtructione aequationum quarumcunque differentialium pendet, ad valorem ipſius P inueniendum reduci poſſe. Tantum autem peculiari modo eſt opus, ſi in Q differentialia ſecundi altiorumue graduum contineantur, pro quibus caſibus plura quam tria elementa conſiderari debent. Contineat igitur Q in $\int Q dx$ praeter x, y et s, eorumque differentialia etiam differentialia ſecundi gradus in ſe, ita vt poſito $dy = p dx$ et $dp = r dx$ futurum ſit $dQ = L ds + M dy + N dx + V dp + W dr$. Ex qua expreſſione vt valor ipſius P eruatur, neceſſe eſt quinque elementa $abcdef$ conſiderare, quorum quidem duo duntaxat puncta c et d in loca proxima γ et δ transferantur. Hac igitur translatione per differentiationem repraeſentata fiet Tabula X. Figura 3.

$$\begin{array}{l|l|l|l}
ds = 0 & \overset{\mathrm{I}}{d}s = 0 & \overset{\mathrm{II}}{d}s = q.c\gamma & \overset{\mathrm{III}}{d}s = -dq.c\gamma - \overset{\mathrm{I}}{q}.d\delta \\
dy = 0 & \overset{\mathrm{I}}{d}y = 0 & \overset{\mathrm{II}}{d}y = c\gamma & \overset{\mathrm{III}}{d}y = -d\delta \\
dx = 0 & \overset{\mathrm{I}}{d}x = 0 & \overset{\mathrm{II}}{d}x = 0 & \overset{\mathrm{III}}{d}x = 0 \\
dp = 0 & \overset{\mathrm{I}}{d}p = \frac{c\gamma}{dx} & \overset{\mathrm{II}}{d}p = \frac{-c\gamma - d\delta}{dx} & \overset{\mathrm{II}}{d}p = \frac{d\delta}{dx} \\
dr = \frac{c\gamma}{dx^2} & \overset{\mathrm{I}}{d}r = \frac{-2c\gamma - d\delta}{dx^2} & \overset{\mathrm{II}}{d}r = \frac{c\gamma + 2d\delta}{dx^2} & \overset{\mathrm{III}}{d}r = \frac{-d\delta}{dx^2}.
\end{array}$$

$\overset{\mathrm{IV}}{d}s = -dq.c\gamma + \overset{\mathrm{I}}{d}q.d\delta$, reliqua euaneſcunt. Quocirca ſi valor elementis $abcdef$ reſpondens differentietur, et loco differentialium valores aſſignati ſubſtituantur, prodibit differentia inter illum valorem et eundem elementis $ab\gamma\delta ef$ reſpondentem.

§. 30.

§. 30. Quo igitur hanc differentiam pro valore qui ex $\int Q dx$ oritur et elementis $abcdef$ reſpondet, inueniamus, differentiare oportet hanc formulam $Qdx + \overset{I}{Q}dx + \overset{II}{Q}dx + \overset{III}{Q}dx + \overset{IV}{Q}dx$ ſecundum regulam datam prodibitque

$$dQdx = \frac{W.c\gamma}{dx}$$

$$d\overset{I}{Q}dx = \overset{I}{V}.c\gamma - \frac{2\overset{I}{W}.c\gamma}{dx} - \frac{\overset{I}{W}.d\delta}{dx}$$

$$d\overset{II}{Q}dx = \overset{II}{L}qdx.c\gamma + \overset{II}{M}dx.c\gamma - \overset{II}{V}.c\gamma - \overset{II}{V}.d\delta + \frac{\overset{II}{W}.c\gamma}{dx} + \frac{2\overset{II}{W}.d\delta}{dx}$$

$$d\overset{III}{Q}dx = -\overset{III}{L}dxdq.c\gamma - \overset{III}{L}\overset{I}{q}dxd\delta - \overset{III}{M}dx.d\delta + \overset{III}{V}.d\delta - \frac{\overset{III}{W}.d\delta}{dx}$$

$$d\overset{IV}{Q}dx = -\overset{IV}{L}.dxdq.c\gamma + \overset{IV}{L}dxd\overset{I}{q}.d\delta.$$

Haec differentia nihilo aequalis poſita dabit $c\gamma(\frac{ddW}{dx} - d\overset{I}{V} + (\overset{II}{L}q + \overset{II}{M})dx - (\overset{III}{L} + \overset{IV}{L})dxdq) = d\delta(\frac{dd\overset{I}{W}}{dx} - d\overset{II}{V} + (\overset{III}{L}\overset{I}{q} + \overset{III}{M})dx) - \overset{IV}{L}dxd\overset{I}{q})$, quae aequatio comparata cum canonica $P.c\gamma = (P + dP)d\delta$ dat

$$\frac{dP}{P} = \frac{d^3W - dd\overset{I}{V}dx + dx^2.d(\overset{II}{L}q + \overset{I}{M}) - dx^2d.\overset{III}{L}dq + \overset{IV}{L}dx^2dq}{ddW - dxd\overset{I}{V} + dx^2(\overset{II}{L}q + \overset{II}{M}) - (\overset{III}{L} + \overset{IV}{L})dx^2\cancel{dq}}$$

Hinc ergo integrando prodibit ſequens valor ipſius

$$P = e^{\int \frac{Ldx^2dq}{ddW - dVdx + dx^2(Lq + M)}}[ddW - dVdx + dx^2(Lq + M)]$$

poſito vt hactenus $q = \frac{dy}{ds}$.

§. 31. Perſpicuum igitur eſt hunc valorem ipſius P facto $L = 0$ fore $ddW - dVdx + Mdx^2$, ideoque non

diuer-

diuersum ab eo, quem pro prima classe eiusdem formulae $\int Q dx$ respondentem inuenimus §. 13. Atque generalius etiam valet pro omnibus sequentibus classibus, si in $\int Q dx$, Q pendeat quomodocunque ab x, y eorumque differentialibus tam primi gradus quam secundi, non vero ab s perpetuo ipsi eandem formulam $P = ddW - dVx + M dx^2$ respondere, ex hacque omnes omnino quaestiones posse resolui. Similiter etiam colligere licet, si Q praeter x, y et eorum differentialia tum primi tum secundi gradus quoque differentialia tertii et altiorum graduum inuoluat, eundem valorem pro P inuentum omnibus classibus inseruire. Scilicet si ponatur $dy = p dx$, $dp = r dx$, $dr = t dx$, $dt = u dx$ etc. fueritque $dQ = N dx + M dy + V dp + W dr + X dt + Y du$ etc. tum ipsi $\int Q dx$ respondebit sequens valor ipsius $P = M - \frac{dV}{dx} + \frac{ddW}{dx^2} - \frac{d^3X}{dx^3} + \frac{d^4Y}{dx^4} -$ etc. qui ipsius P valor locum habet in omnibus classibus.

§. 22. Ad vsum huius formulae monstrandum quaerenda sit inter omnes omnino curuas ea, in qua $\int \frac{d^3y}{dx\,dy}$ sit maximum vel minimum. Ponatur ergo $dy = p dx$, $dp = r dx$, $dr = t dx$, quibus substitutis debebit ista formula $\int \frac{t dx}{p}$ esse maximum vel minimum. Fiet igitur $Q = \frac{t}{p}$ atque $dQ = -\frac{t dp}{p^2} + \frac{dt}{p}$, quare erit $N = 0, M = 0$, $V = -\frac{t}{p^2}$, $W = 0$, $X = \frac{1}{p}$, Y etc. $= 0$. Hinc prodit valor ipsius $P = \frac{-dV}{dx} - \frac{d^3X}{dx^3}$, qui posito aequalis nihilo et integratus dat $V dx^2 + ddX = A dx^2$. Substitutis autem loco V et X valoribus inuentis prodibit $-\frac{t dx^2}{p^2}$ —

$-\frac{ddp}{p^2} + \frac{2dp^2}{p^3} = A\,dx^2$. Eſt autem $t = \frac{dr}{dx} = \frac{ddp}{dx^2}$, vnde erit $-\frac{2ddp}{p^2} + \frac{2dp^2}{p^3} = A\,dx^2$. Cum porro ſit $dx = \frac{dp}{r}$ atque $ddx = 0$, erit $ddp = \frac{dp\,dr}{r}$, quibus ſurrogatis habebitur $-\frac{2dr}{rp^2} + \frac{2dp}{p^3} = \frac{A\,dp}{r^2}$ quae tranſit in hanc $\frac{-2prdr + 2r^2dp}{p^3} = A\,dp$, cuius integralis eſt $B - \frac{r^2}{p^2} = A\,p$. Hinc fiet $r = \frac{dp}{dx} = \surd(Bp^2 - Ap^3)$ ſeu $dx = \frac{dp}{\surd(Bp^2 - Ap^3)}$. Poſito nunc $B = 0$ et mutata conſtante erit $dx = \frac{-a\,dp}{2p\surd p}$ ſeu $x = \frac{a}{\surd p}$, atque $p = \frac{a^2}{x^2} = \frac{dy}{dx}$, ex qua ſit $y = b - \frac{a^2}{x}$, quae eſt pro hyperbola intra aſymtotos. Poſito vero $A = 0$ fit $x = lp$ et $\frac{dy}{dx} = p = e^{\frac{x}{a}}$. Vnde oritur $y = ae^{\frac{x}{a}}$ et $x = al\frac{y}{a}$; quae eſt pro curua logarithmica.

§. 33. In formula autem generali $\int Q\,dx$ ſi in Q ingrediatur vel arcus s vel alia quantitas integralis vt $\int R\,dx$, tum valor ipſius P magis erit compoſitus pro quaeſtionibus ſecundae quam primae claſſis, accedente ſcilicet quantitate exponentiali. Pro ſequentibus autem claſſibus valor ipſius P nequidem exhiberi poteſt, ſed tum in ſolutione problematum, in quibus huiusmodi formulae occurrunt, ad modum confugiendum eſt quem in praecedente diſſertatione expoſui. Interim tamen haec regula ſemper poteſt magna cum vtilitate adhiberi. *Si Q pendeat ab s ita vt in eius differentiali inſit terminus L ds, et in quaeſtionibus ſecundae ſequentiumue claſſium vna conditio ſit vt omnes curuae ſint aeque longae, i. e. ſi $\int ds$ fuerit vna proprietatum, quae vel omnibus curuis communis vel in quaeſita maximum minimumue*

eſſe

esse debeat, tum tuto vsurpari poterit valor ipsius P ad primam classem pertinens. Simili modo etiam si in $\int Q\,dx$ pendeat Q ab alia quantitate integrali vt $\int R\,dx$, tum quoque valor ipsius P ad primam classem pertinens potest vsurpari, si quidem $\int R\,dx$ etiam inter proprietates, quae omnibus curuis communes esse debent, reperiatur. Hoc itaque artificio quaestiones alias difficillimae solutu admodum faciles redduntur.

§. 34. Quod autem, si Q in $\int Q\,dx$ contineat in se vel arcum s vel aliam quantitatem integralem, tum valor ipsius P pro classe secunda magis fiat compositus, quam pro prima, atque in sequentibus classibus plane non exhiberi queat, nisi vel s vel aliae omnes quantitates integrales, quae in Q continentur, simul inter quantitates propositas reperiantur, quae omnibus iis curuis communes esse debent, ex quibus quaesita debet determinari, eius difficultatis ratio in hoc consistit; quod translato b in β, haec mutatio non tantum expressionem ad elementa abc pertinentem afficiat et immutet, sed insuper ipsius $\int Q\,dx$ valorem, qui omnibus sequentibus elementis post c competit, afficiat atque immutet; quemadmodum si re ipsa ad sequentia elementa hunc ipsius $\int Q\,dx$ valorem applicemus, statim elucebit. Sed si Q in $\int Q\,dx$ tantum ab x et y horumque differentialibus cuiusque ordinis pendeat, tum hoc incommodum locum non habet, sed quomodocunque punctum b varietur, tamen haec variatio in sequentia post c elementa nullum omnino habet influxum, vti ex allatis facile intelligitur. Tabula IX. Figura 1.

Tabula IX. Figura 4.

§. 35. Si inter omnes curuas puncta o et z iungentes ea debeat determinari, in qua formula Q neque ab s neque alia quantitate integrali pendeat, debeat esse maximum vel minimum, tum curua oz vtique hanc habebit proprietatem, si eius quaeuis portio oa eadem praerogatiua gaudeat. At si Q pendeat vel ab s vel ab alia quantitate integrali, tum curua oz habere poterit $\int Q\,dx$ maximum vel minimum, etiamsi eius nulla portio hac praerogatiua gaudeat, cum translato b in β tota curuae portio cz alium induat valorem ex $\int Q\,dx$, qui valor forte maior vel minor esse potest, etiamsi valor elementis abc competens non sit maximus vel minimus. Quamobrem si quaeratur inter omnes curuas puncta definita o et z iungentes ea, in qua $\int Q\,dx$ inuoluente Q vel s vel aliam quantitatem integralem, debeat esse maximum minimumue, tum positio elementorum abc non ex eo debet determinari, quo valor $\int Q\,dx$ ad ea applicatus fiat maximus minimusue, sed potius illa positio est quaerenda, quae pro omnibus sequentibus elementis $cdefg$ etc. atque adeo pro tota portione az generet maximum minimumue valorem ipsius $\int Q\,dx$.

§. 36. Haec autem determinatio positionis elementorum abc sequenti modo debet institui. Translato b in β effici debet, vt eadem quantitas $\int Q\,dx$ tam in curuam $abc---z$ quam in $a\beta c---z$ redundet. Posito autem Q ab s pendere vt sit $dQ = L\,ds + M\,dy + N\,dx + V\,dp$ posito $dy = p\,dx$, erit differentia inter valores curuae $abc----z$ et curuae $a\beta c---z$ respondentes,

dentes, quae aequalis eſſe debet o, ſequens (poſito $q = \frac{dy}{ds}$) $V.b\beta + \overset{I}{L}q\,dx.b\beta + \overset{I}{M}dx.b\beta - \overset{I}{V}.b\beta - \overset{II}{L}dx\,dq.b\beta - \overset{III}{L}dx\,dq.b\beta - \overset{IV}{L}dx\,dq.b\beta$ etc. donec ad punctum z erit peruentum. Abſciſſae autem OC reſpondet valor $\overset{II}{L}$; quare ſi punctum z in c incideret haberetur praeter terminos $V.b\beta + \overset{I}{L}q\,dx.b\beta + \overset{I}{M}dx.b\beta - \overset{I}{V}.b\beta$ tantum $-\overset{II}{L}dx\,dq.b\beta$. Sin autem in d incideret haberetur $-dx\,dq.b\beta(\overset{II}{L} + \overset{III}{L})$ et reſponderet abſciſſae $AC + dx$. Sumto autem in ipſo puncto z, et poſito abſciſſae interuallo $CZ = n\,dx$ erit terminus adiiciendus et reſpondens abſciſſae $OZ = OC + n\,dx$ iſte $-dx\,dq.b\beta(\overset{II}{L} + \overset{III}{L} + \overset{IV}{L} - - - - - - - + L^{n \cdot II})$. At cum ſit n numerus infinitus, erit iſte terminus $= -dx\,dq.b\beta\left(n\overset{II}{L} + \frac{n^2\,dL^{II}}{1.2} + \frac{n^3\,ddL^{II}}{1.2.3} + \frac{n^4\,dL^{II}}{1.2.3.4}\right.$ etc.$\left.\right)$.

§. 37. Cum autem diſtantia OZ ſit data ideoque conſtans, ponatur ea $= a$, erit $x + n\,dx = a$, hincque $n = \frac{a-x}{dx}$. Quo ſubſtituto erit terminus iſte ab $V.b\beta + \overset{|}{L}.q\,dx.b\beta + \overset{|}{M}dx.b\beta - \overset{|}{V}.b\beta$ auferendus ſequens:

$$dq.b\beta\left[(a-x)L + \frac{(a-x)^2\,dL}{1.2\,dx} + \frac{(a-x)^3\,ddL}{1.2.3\,dx^2}\text{ etc.}\right]$$

At $\int L\,dx$ ſi poſt integrationem ponatur a loco x, abit in hanc expreſſionem:

 $\int L\,dx$

$$\int L\,dx + (a-x)L + \frac{(a-x)^2\,dL}{1.2\,dx} + \frac{(a-x)^3\,ddL}{1.2.3.\,dx} + \text{etc.}$$

quae expreſſio cum ſit conſtans, ponatur $=A$ erit ergo

$$A - \int L\,dx = (a-x)L + \frac{(a-x)^2\,dL}{1.2.\,dx} + \text{etc.}$$

quare quantitas ſubtrahenda illa erit haec

$$dq.\,b\mathfrak{E}(A - \int L\,dx).$$

Hanc ob rem habebitur pro curua quaeſita iſta aequatio

$$-dV + dx(Lq + M) = A\,dq - dq\int L\,dx.$$

Atque valor ipſius P tam pro quaeſtionibus primae claſſis quam ſequentium erit ſemper idem ſcilicet

$$P = -dV + dx(Lq + M) + dq\int L\,dx,$$

vbi $\int L\,dx$ ita ponitur eſſe integratum, vt euaneſcat ſumto puncto indefinito a in puncto fixo z ſeu poſito $x = a$. Simili quoque modo erit progrediendum ſi Q ab alia quantitate integrali pendeat.

CLAS-