

SOLVTIO PROBLEMATVM RECTIFICATIONEM ELLIPSIS

REQUIRENTIVM.

AVCTORE

Leonb. Eulero.

§. I.

Tabula VI.

Agitata iam superiori seculo inter Geometras sunt huiusmodi problemata, in quibus linea curva requirebatur, quae ab infinitis positione datis curuis arcus aequales abscinderet. Communicauerunt etiam illo tempore Cl. Cl. Geometrae elegantes solutiones pro casu, quo curuae positione datae inter se sunt similes, vti cum ab infinitis circulis, vel parabolis arcus aequales abscindendi essent. Nemo autem, quantum constat, vltterius est progressus, neque quisquam pro curuis dissimilibus problemati satisfecit, etiamsi iam tum quaestio de infinitis ellipsis proponeretur. Atque etiamnum, cum Insigni Geometrae per litteras significassem, meaequationem pro curva, quae ab infinitis ellipsis dissimilibus arcus aequales abscinderet, inuenisse; ille mihi respondit huius problematis solutionem in sua non esse potestate, meque simul rogauit, vt meam solutionem in non contemnendum analyseos augmentum communicarem.

§. 2. Huius autem quaestionis summa difficultas in hoc consistit, quod diuersarum et dissimilium ellipsium rectificationes a se mutuo non pendeant. Hanc enim
ob

Fig. 1.

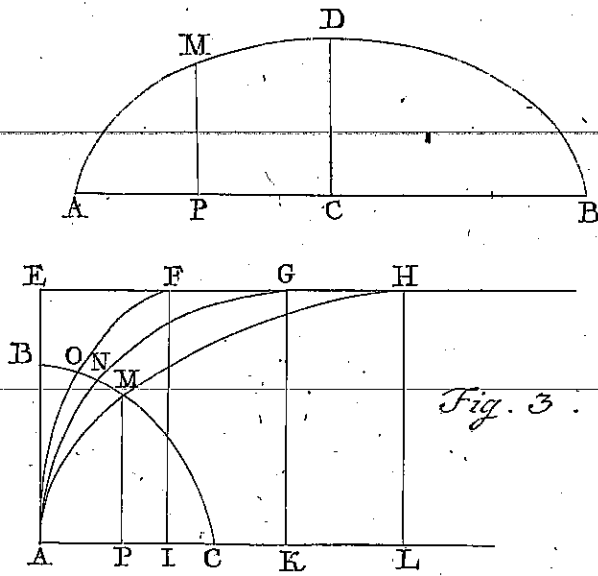


Fig. 2.

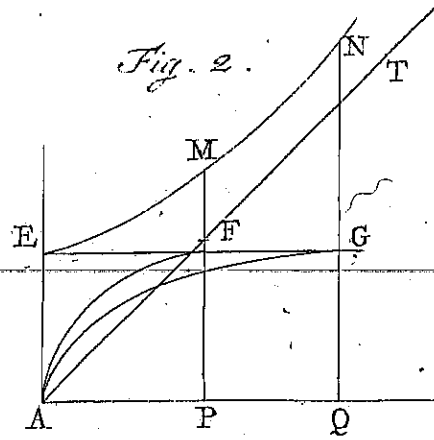


Fig. 3.

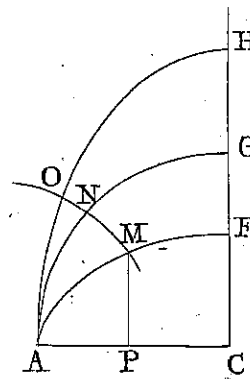


Fig. 4.

ob causam curuæ ab infinitis ellipsis arcus aequales abscindentis aequationem inuentu maxime difficilem esse oportet, eo quod etiam concessa vnius ellipsis rectificatione, reliquarum tamen omnium rectificatio ab ista non pendeat. Deinde methodus, qua in huiusmodi problematis vti solent, ita est comparata, vt tantum ad curuas similes accommodari possit; pro curuis dissimilibus autem nullam afferat vtilitatem.

§. 3. Quod autem mihi primum viam ad huiusmodi difficilia problemata patefecit, est praecipue vniuersalis mea series summandi methodus. Hac enim inuenta statim aequationem differentialem, in qua indeterminatae nullo pacto a se inuicem separari possunt, ope rectificationis ellipsium dissimilium confluxi; atque paulo post maxime agitatae aequationis Riccatianae constructionem et resolutionem communicavi.

§. 4. Postmodum autem, cum haec per series operandi methodus nimis operosa et non satis genuina videretur; in aliam magis naturalem methodum, et huiusmodi quaestionibus magis accommodatam inquisiui; atque tandem ex voto obtinui, ita vt eius beneficio non solum priora problemata, quae serierum ope resolveram, sed etiam innumera alia, ad quae tractanda series non sufficiunt, perficere potuerim. Methodum etiam hanc fuse exposui in dissertatione de infinitis curuis eiusdem generis anno praecedente proposita; quia vero ne nimis essem prolixus, nulla adieci exempla, non satis apparet, quam late ea pateat, quamque amplum in re analytica aperiat campum.

§. 5.

§. 5. Quo igitur huius methodi vis et utilitas melius percipiatur, hac dissertatione eam ad infinitas ellipses accommodabo, atque non solum monstrabo, quomodo ab infinitis ellipsis arcus aequales abscindi debeant, sed etiam innumerabilium tam primi quam secundi gradus aequationum differentialium resolutionem ope rectificationis ellipsium perficere docebo.

§. 6. Quod enim ad curuam, quae ab infinitis ellipsis arcus aequales abscindat, attinet, eius constructio eo ipso est facilis, quod ope rectificationis curuarum quae facillime describi possunt, perfici queat. Atque hanc ipsam constructionem longe anteferendam esse censeo aliis per quadraturas curuarum peractis constructionibus. Non igitur tam illius curuae constructio requiritur, quam eius aequatio, quo quales aequationes tam facile construi queant cognoscatur. Hanc ob rem analysis non parum augmenti accipiet, si illae aequationes proferantur, quae ope rectificationis ellipsium constructionem admittunt.

Figura 1. §. 7. Considero igitur primum infinitas ellipses $AMDB$, quae omnes alterum axem, cuius semiffis est CD , habeant eundem, axes vero transuersos AB diuersos. Si nunc vel ab his omnibus ellipsis vel arcus aequales sint abscindendi, vel in data ratione inaequales, vel curua fit inuenienda, cuius constructio ope harum ellipsium quomodocunque praescribitur; ad talia problemata omnia soluenda opus est, ut aequatio habeatur inter arcum AM , abscissam AP et axem AB , in qua haec tres quantitates insint tanquam variables.

§. 8.

§. 8. Huiusmodi ergo problematum solutio perficietur, si quaeratur aequatio modularis, quemadmodum in citata dissertatione de curvis infinitis eiusdem generis docui, inter arcum AM , et abscissam AP et axem AB quoque variabilem. Quo igitur ad huiusmodi aequationem modulare perueniam pono abscissam $AP = t$; applicatam $PM = u$; arcum $AM = z$; semiaxem variabilem $AC = a$; semiaxem constantem $CD = c$. His vero positis erit $u = \frac{c}{a} \sqrt{(2at - tt)}$ seu posito $t = ax$ erit $u = c \sqrt{(2x - xx)}$; atque $dt = adx$ et $du = \frac{c dx - cx dx}{\sqrt{(2x - xx)}}$. Ex his igitur fiet $dz = \frac{dx \sqrt{(2a^2x - a^2x^2 + c^2 - 2c^2x + c^2x^2)}}{\sqrt{(2x - xx)}}$, positoque $a^2 - c^2 = b^2$ erit $z = \int \frac{dx \sqrt{[c^2 + b^2(2x - xx)]}}{\sqrt{(2x - xx)}}$.

§. 9. Integrali huic inuento aequatur ergo z , si integratio fiat posito tantum x variabili, b vero et c constantibus. Praeterea in integratione talis addi debet constans, ut evanescat z posito $x = 0$. At quia aequatio desideratur in qua a seu eius loco b aequae tanquam variabilis insit ac x et z ; quaeritur aequatio differentialis quae proditura esset, si $\int \frac{dx \sqrt{[c^2 + b^2(2x - xx)]}}{\sqrt{(2x - xx)}}$ denuo differentietur, posito praeter x etiam b variabili.

§. 10. Ponatur nunc secundum methodum anno praeterito traditam x constans et differentietur quantitas $\frac{\sqrt{[cc + bb(2x - xx)]}}{\sqrt{(2x - xx)}}$ prodibit $\frac{b db \sqrt{(2x - xx)}}{\sqrt{[cc + bb(2x - xx)]}}$. Quamobrem posito quoque b variabili erit $dz = \frac{dx \sqrt{[cc + bb(2x - xx)]}}{\sqrt{(2x - xx)}} + db \int \frac{b dx \sqrt{(2x - xx)}}{\sqrt{[cc + bb(2x - xx)]}}$, quod postremum integrale ita debet accipi ut evanescat posito $x = 0$; in eo vero ite-

Tom. VIII. M rum

rum b tanquam constans inest. Ponatur breuitatis gratia $R = \frac{dx}{db} - \frac{dx\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}}{db\sqrt{(2x-xx)}}$, erit $R = \int \frac{bdx\sqrt{(2x-xx)}}{\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}}$.

§. 11. Si nunc integrale, cui R aequatur reduci posset ad integrationem formulae, cui z aequalis est, pro R inueniri posset valor finitus per z ; qui substitutus in altera aequatione daret aequationem modularem quaesitam. Sed hae duae integrationes a se inuicem non pendent, vt facile tentanti animaduertetur. Quamobrem vltterius progredi oportet, et vltimam aequationem de nouo differentiare, vti primam, ponendo quoque b variabilem. Inuenietur autem hoc modo $dR = \frac{bdx\sqrt{(2x-xx)}}{\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}} + db \int \frac{ccdx\sqrt{(2x-xx)}}{[cc+bb(2x-xx)]^{\frac{3}{2}}}$, quod integrale iterum ita accipi debet vt euanescat posito $x=0$.

§. 12. Ponatur iterum $S = \frac{dR}{db} - \frac{bdx\sqrt{(2x-xx)}}{db\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}}$, erit $S = \int \frac{ccdx\sqrt{(2x-xx)}}{[cc+bb(2x-xx)]^{\frac{3}{2}}}$; quae formula cum non sit integrabilis, videndum est, num eius integratio ab alterutra praecedentium vel ab vtraque pendeat. Quod quo appareat ponatur $S + \alpha R + \xi z = Q$, vbi α et ξ ab x et z sint quantitates liberae; Q vero vtcunque ex x et b et constantibus composita; debet autem Q talis esse quantitas vt euanescat posito $x=0$. Posito ergo b constante debet esse $dQ = dS + \alpha dR + \xi dz$; vbi in differentiali ipsius Q b tanquam constans considerari debet.

§. 13. At posito b constante est $dS = \frac{ccdx\sqrt{(2x-xx)}}{[cc+bb(2x-xx)]^{\frac{3}{2}}}$
er

RECTIFICATIONEM ELLIPSIS REQVIR. 91

et $dR = \frac{b dx \sqrt{(2x-xx)}}{\sqrt{cc+bb(2x-xx)}}$ et $dz = \frac{dx \sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}}{\sqrt{(2x-xx)}}$

Hanc ob rem erit $\frac{dQ}{dx} = [cc(2x-xx) + abcc(2x-xx) + ab^3(2x-xx)^2 + \xi c^4 + 2\xi b^2 c^2(2x-xx) + \xi b^4$

$(2x-xx)^2]: [cc+bb(2x-xx)]^{\frac{3}{2}} \sqrt{(2x-xx)}$. Ponatur ad similem formam obtinendam $Q = \frac{(\gamma x + \delta) \sqrt{(2x-xx)}}{\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}}$ qui valor per se evanescit posito $x = 0$.

§. 14. Differentietur nunc Q posito tantum x variabili erit $\frac{dQ}{dx} = [\gamma cc(2x-xx) + \gamma bb(2x-xx)^2 + \gamma ccx + \delta cc - \gamma ccx^2 - \delta ccx]: (cc+bb(cc+bb(2x-xx)))^{\frac{3}{2}} \sqrt{(2x-xx)}$. Quia ergo denominatores iam sunt inter se aequales, fiant numeratores quoque aequales, aequandis terminis in quibus ipsius x similes sunt dimensiones; erit

I. $\gamma bb = ab^3 + \xi b^4;$

II. $\gamma b^2 = ab^3 + \xi b^4;$

III. $4\gamma bb - 2\gamma cc = 4ab^3 + 4\xi b^4 - cc - abcc - 2\xi b^2 c^2;$

IV. $3\gamma cc - \delta cc = 2cc + 2abcc + 4\xi b^2 c^2;$ et

V. $\delta cc = \xi c^4.$

Hinc invenitur $\alpha = \frac{c}{b}; \xi = \frac{-1}{b^2+c^2}; \gamma = \frac{cc}{bb+cc}$ et $\delta = \frac{cc}{bb+cc}$.

§. 15. His ergo valoribus substitutis prodibit $\frac{cc(x-1)\sqrt{(2x-xx)}}{(bb+cc)\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}} = S + \frac{R}{b} - \frac{z}{b^2+c^2}$. Quia autem est $R = \frac{dz}{d\delta} = \frac{d \cdot \sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}}{db \sqrt{(2x-xx)}}$ et $S = \frac{dR}{db} = \frac{bdxy(2x-xx)}{db \sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}}$ atque

atque $x = \frac{t}{a}$ et $bb = a^2 - c^2$; atque ideo $bb + cc = a^2$;
 $dx = \frac{adt - tda}{a^2}$, et $db = \frac{ada}{b}$, erit $Q = \frac{cc(t-a)\sqrt{(2at-tt)}}$
 et $\frac{R}{b} = \frac{dz}{a da} - \frac{(adt da)\sqrt{[a^2 - c^2 + (a^2 - c^2)(2at-tt)]}}{a^2 da \sqrt{(2at-tt)}}$ atque $S = \frac{c^2 dz}{a^2 da}$
 $+ \frac{(a^2 - c^2) d \cdot dz}{a^2 da} - \frac{(a^2 - c^2) d \cdot dt}{a^2 da} \sqrt{\frac{a^2 c^2 + (a^2 - cc)(2at-tt)}{2at-tt}} + \frac{(2a^2 - c^2)(adt-tda)}{a^2 da}$
 $\sqrt{\frac{a^2 c^2 + (a^2 - cc)(2at-tt)}{2at-tt}} - \frac{(2aa - 2cc)(adt-tda)}{a^2 da} \sqrt{\frac{2at-tt}{a^2 c^2 + (a^2 - cc)(2at-tt)}}$
 $+ \frac{cc(a-t)(a^2 - c^2)(adt-tda)^2}{a^3 da^2 (2at-tt)^{\frac{3}{2}} \sqrt{[a^2 c^2 + (a^2 - cc)(2at-tt)]}}$

§. 16. Ne autem in nimis prolixos calculos inci-
damus, retineamus literas b , x , et z , erit $S = \frac{1}{db} d \cdot \frac{dz}{db} -$
 $\frac{1}{db} d \cdot \frac{dx}{db} \sqrt{\frac{cc + bb(2x-xx)}{2x-xx}} - \frac{2b dx}{db} \sqrt{\frac{cx-xx}{cc+bb(2x-xx)}} +$

$\frac{cc dx^2 (1-x)}{db^2 (2x-xx)^{\frac{3}{2}} \sqrt{[cc + bb(2x-xx)]}}$ His ergo loco S et R

substitutis habebitur aequatio modularis ista, $\frac{z}{bb+cc} =$
 $\frac{cc(1-x)\sqrt{(2x-xx)}}{(bb+cc)\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}} - \frac{dx}{b db} \sqrt{\frac{cc+bb(2x-xx)}{2x-xx}} - \frac{2b dx}{db} \sqrt{\frac{2x-xx}{cc+bb(2x-xx)}}$

$+ \frac{cc dx^2 (1-x)}{db^2 (2x-xx)^{\frac{3}{2}} \sqrt{[cc + bb(2x-xx)]}} + \frac{dz}{b db} + \frac{1}{db} d \cdot \frac{dz}{db}$

$- \frac{1}{db} d \cdot \frac{dx}{db} \sqrt{\frac{cc + bb(2x-xx)}{2x-xx}}$. Atque haec est ae-

quatio differentialis secundi gradus, in qua z , x et b aequae
variabiles sunt positae. Ex hac autem aequatione se-
quentia problemata solvuntur.

Problema I.

Figura 2. §. 17. Si curva EMN ad axem APQ ita con-
struatur, ut eius applicata quaeque PM aequalis sit qua-
dranti AF ellipsis, cuius semiaxium coniugatorum alter sit
ipsa

ipsa abscissa AP alter vero constans AE seu PF: inuenire aequationem inter abscissam AP et applicatam PM naturam huius curuae exprimentem.

Solutio.

Perpicuum est curuam EMN transire per punctum E, quoniam euanescente femiaxe ellipsis AP, quadrans ellipsis abit in alterum femiaxem constantem AE. Recta porro AT ad angulum femirectum cum AP inclinata erit asyrtotos curuae EMN, quia posito femiaxe AP infinite magno quadrans ellipticus huic ipsi femiaksi fit aequalis. Ad aequationem autem inueniendam fit $AE = c$; $AP = t$ et $PM = AF = z$; atque cum abscissa AP respectu ellipsis AF fit aequalis femiaksi eius, erit haec quaestio casus specialis aequationis inuentae, quo est $t = a$, seu $x = 1$. Posito ergo $x = 1$, abibit superior aequatio in hanc: $\frac{z}{bb+cc} = \frac{dz}{b db} + \frac{1}{db} d. \frac{dx}{db}$. At quia est $bb = a^2 - c^2 = t^2 - c^2$ erit $b db = t dt$, et $db = \frac{t dt}{\sqrt{(t^2 - c^2)}}$. Atque posito dt constante erit $d db = \frac{cc dt^2}{(t^2 - c^2)^{3/2}}$. Hinc ergo fit $d. \frac{dz}{db} = \frac{ddz \sqrt{(t^2 - c^2)}}{t dt} + \frac{cc dz}{t t \sqrt{(t^2 - c^2)}}$, vnde oritur haec aequatio $\frac{z}{t} = \frac{dz}{t dt} + \frac{ddz (t^2 - c^2)}{t t dt^2} + \frac{cc dz}{t^2 dt}$, seu $t z dt^2 = (t^2 - c^2) dt dz + t ddz (t^2 - c^2)$, quae est aequatio quaesita pro curua proposita. Q. E. I.

§. 18. Aequationem hanc sequenti modo ad differentialia primi gradus reduco ponendo $z = e^{fst}$ existente $le = 1$; erit ergo $dz = e^{fst} s dt$ et $adz = e^{fst} (ds dt + s s dt^2)$. Quibus valoribus substituendis oritur sequens aequatio $t dt = (t^2 + c^2) s dt + t (tt - cc) ds + t s^2 (t^2 - c^2) dt$; quae ita est comparata, vt nullis adhuc cognitis artificiis indeterminatae a se inuicem separari possint. Interim vero constructio huius aequationis ope rectificationis ellipsis constat.

§. 19. Ne vero cuiquam dubium oriatur quod posito $t = 0$ fieri debeat $z = c$; cum tamen superiores integrationes ita accipi debeant, vt posito $x = 0$ fiat quoque $z = 0$. Monendum est quod quidem in hoc casu quo $z = c$ fit $t = 0$, non vero est quoque $x = 0$; quia est $x = \frac{t}{a}$ et $t = a$, ideoque $x = 1$, ita vt in hoc casu nusquam fit $x = 0$, propterea z vsquam euanescere debeat.

§. 20. Quemadmodum in hoc problemate posuimus $t = a$; ita quoque quaecunque aequatio inter t et a et constantes potest accipi, et curua EMN definiri ita vt quacuis applicata PM aequalis sit respondenti arcui elliptico AF. Habebitur enim loco superioris aequationis haec aequatio $\frac{z}{tt} = \frac{(tt+cc)dz}{t^2 dt} + \frac{(t-cc)ddz}{tt dt^2} + T$, denotante T eam ipsius t functionem, quae ex terminis aequationis generalis, in quibus non inest z oritur, si loco x ponatur $\frac{t}{a}$ et loco b eius valor $\sqrt{a^2 - c^2}$ atque loco a eius valor in t ex aequatione inter a et t assumpta substituatur. Neque vero haec aequatio tractatu est difficilior

facilior quam praecedens, in qua terminus T deest; reduci enim potest haec aequatio ad illam, vti iam alibi ostendi.

Problema 2:

§. 21. Datis infinitis ellipsis AOF, ANG, AMH, quarum alter semiaxis AE sit constans, alter vero variabilis vt AI, AK, et AL; inuenire aequationem pro curva BONMC, quae ab his omnibus ellipsis arcus aequales AO, AN, AM abscindat. Figura 3.

Solutio.

Ducta ad axem AC quacumque applicata MP curuae quaesitae; sit AP = t, PM = u et AE = c; Ellipsis vero AMH semiaxis variabilis AI sit = a; et arcus abscissus AM qui est constantis quantitatis sit = f. Positis nunc $x = \frac{t}{a}$; et $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ erit $z = f$; et $u = c\sqrt{2x - xx}$. His igitur substitutis generalis aequatio

$$\frac{f}{bb + cc} = \frac{cc(1-x)\sqrt{2x-xx}}{(bb+cc)\sqrt{cc+bb(2x-xx)}}$$

$$- \frac{dx}{bdb} \sqrt{\frac{cc+bb(2x-xx)}{2x-xx}} - \frac{zbdx}{db} \sqrt{\frac{2x-xx}{cc+b(2x-xx)}}$$

$$+ \frac{ccdx^2(1-x)}{db^2(2x-xx)^{\frac{3}{2}}\sqrt{cc+bb(2x-xx)}} - \frac{x}{db} d. \frac{dx}{db}$$

$$\sqrt{\frac{cc+bb(2x-xx)}{2x-xx}}. \quad \text{Quia vero est } 2x-xx = \frac{u^2}{c^2}$$

multiplicetur vbique per $\sqrt{cc+bb(2x-xx)}$ = $\frac{\sqrt{c^4+bbuu}}{c}$ et prodibit $\frac{f\sqrt{c^4+bbuu}}{a^2c} = \frac{cu(1-x)}{a^2} - \frac{c^2dx}{bu^2db} - \frac{zbu dx}{cdb}$
 $+ \frac{c^2dx^2(1-x)}{u^2db^2} - \frac{(c^4+bbuu)}{cudb} d. \frac{dx}{db}$. In hac aequatione si loco b substi-

iffe-
ente
ls dt
uens
(t²
co-
pos-
ope

d po-
es in-
quo-
casu
; quia
c casu
re de-

posui-
r t et a
airi ita
cui el-
quatio-
deno-
nis ae-
, si lo-
) atque
assumta
est dif-
ficilior

substituatur $\frac{\sqrt{(t^2 - cctx)}}{x}$ et propter $x = \frac{c - \sqrt{(cc - uu)}}{c}$ prodibit tandem aequatio differentialis secundi gradus inter t et u , nempe coordinatas curvae quaesitae. Q. E. I.

Figura 4.

§. 22. At si infinitae ellipses AMF, ANG et AOH omnes habeant axem horizontalem communem ita vt C fit centrum omnium, pro hoc casu peculiarem aequationem modularem erui oportet, antequam curuam MNO definire licet, quae ab omnibus arcus aequales AM, AN, AO abscindat. Sit igitur AC = c, CF = a, AP = t, PM = u et arcus AM = z. His positis erit $u = \frac{a}{c}$ $\sqrt{(2ct - tt)}$ et $du = \frac{acdt - atdt}{c\sqrt{(2ct - tt)}}$ ideoque fiet $z = \int \frac{dt}{c} \sqrt{(2ct - tt)}$ $\frac{a^2c^2 + (cc - aa)(cct - tt)}{2ct - tt} = \int \frac{du}{da} \sqrt{\frac{aa - uu}{a^4 - a^2u^2 + ccuu}}$, atque posito $u = ay$ erit $z = \int dy \sqrt{(a^2 + \frac{ccyy}{1 - yy})}$, quod integrale ita debet accipi vt z euanescat posito $y = 0$.

§. 23. Si haec denuo differentietur posito praeter y et a variabili habebitur $dz = dy \sqrt{(a^2 + \frac{ccyy}{1 - yy})} + da \int \frac{ady}{\sqrt{(a^2 + \frac{ccyy}{1 - yy})}}$ atque posito $\frac{dz}{da} - \frac{dy}{da} \sqrt{(a^2 + \frac{ccyy}{1 - yy})} = R$

erit $R = \int \frac{ady}{\sqrt{(a^2 + \frac{ccyy}{1 - yy})}}$. Hinc eodem modo fiet

$$dR = \frac{ady}{\sqrt{(a^2 + \frac{ccyy}{1 - yy})}} + da \int \frac{ccyydy}{(1 - yy)(a^2 + \frac{ccyy}{1 - yy})^{\frac{3}{2}}} \text{ seu}$$

$\frac{dR}{da} - \frac{ady}{\sqrt{(a^2 + \frac{ccyy}{1 - yy})}} = \int \frac{ccyydy}{(1 - yy)(a^2 + \frac{ccyy}{1 - yy})^{\frac{3}{2}}} = S$ breuitatis gratia. Ponatur nunc $S + \alpha R + \xi z = Q$; vbi α et ξ sunt quantitates ab y liberae; Q vero functio ipsarum

ipfarum a et y quae euanescat posito $y=0$. Nunc ad α et ξ et Q inuenienda differentietur haec aequatio posito a constante, erit

$$\frac{ccyydy\sqrt{(1-yy)}}{[aa(1-yy)+ccyy]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\alpha ady\sqrt{(1-yy)}}{\xi dy\sqrt{[a^2(1-yy)+ccyy]}} + \frac{\sqrt{a^2(1-yy)+ccyy}}{\sqrt{(1-yy)}} = (ccyy - ccy^4 + aa^3 - 2aa^2y^2 + aa^2y^4 + aaccyy - aaccy^4 + \xi a^4 - 2\xi a^2y^2 + \xi a^4y^4 + \xi a^2c^2y^2 - 2\xi a^2c^2y^4 + \xi c^4y^4) dy : (a^2(1-yy) + ccyy)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(1-yy)} = dQ.$$

§. 24. Sit $Q = \frac{yy\sqrt{(1-yy)}}{\sqrt{a^2(1-yy)+ccyy}}$; sumtoque huius differentiali posito a constante, et aequatis terminis homologis erit $\alpha a + \xi a^2 = \gamma$; $\xi cc = -\gamma$; et $1 + \alpha a + 2\xi a^2 = 0$. Ex his fit $\alpha = \frac{a^2+c^2}{a(a^2-cc)}$; $\xi = \frac{-1}{a^2-cc}$ et $\gamma = \frac{cc}{aa-cc}$. Hisque valoribus substitutis peruenietur tandem ad hanc aequationem modularem:

$$\frac{z}{aa-cc} \frac{(a^2+c^2)dz}{ada(a^2-c^2)} + \frac{1}{da} d. \frac{dz}{da} - \frac{ccyy\sqrt{(1-yy)}}{(a^2-c^2)\sqrt{a^2(1-yy)+ccyy}} - \frac{(a^2+c^2)dy\sqrt{a^2(1-yy)+ccyy}}{a(a^2-c^2)da\sqrt{(1-yy)}} - \frac{2ady\sqrt{(1-yy)}}{ccydy^2} - \frac{da\sqrt{a^2(1-yy)+ccyy}}{da^2(1-yy)^{\frac{3}{2}}\sqrt{a^2(1-yy)+ccyy}} - \frac{1}{da} d. \frac{dy}{da} \sqrt{\frac{a^2(1-yy)+ccyy}{1-yy}},$$

in qua a aequae sumtum est variabile ac y et z , estque $y = \frac{z}{a}$.

§. 25. Si nunc ex infinitis ellipsis, quarum omnium alter axis est constans $2c$; alter variabilis $2a$; construatur curva EMN hac lege vt cuicumque abscissae AP= a respondeat applicata PM, quae aequalis est quadrantum elliptico sub semiaxibus a et c . Hoc ergo casu erit $u=a$ et $y=1$, atque PM= z . Quare posito da constanti

Tom. VIII. N ha-

Figure 2.

habebitur pro curua EMN haec aequatio: $axda^2 = (a^2 + c^2)dadz + a(aa - cc)ddz$. Quae aequatio est ea ipsa quam in solutione problematis I. (§. 17.) inuenimus; congruit enim hic casus cum illo problemate: atque quod ibi erat z hic est a .

Problema 3.

Figura 4. §. 26. Descriptis infinitis ellipsis AMF, ANG, AOH commune centrum C communemque verticem A habentibus; inuenire curuam MNO quae ab his omnibus ellipsis arcus aequales AM, AN, AO abscindat.

Solutio.

Posito omnium harum ellipsium femiaxe constante $AC = c$; ellipsisque cuiusuis AMF femiaxe altero variabili $CF = a$; atque curuae MNO abscissa $AP = t$; et applicata $PM = u$. Fiat $\frac{u}{a} = y$; sitque longitudo $= f$ cui omnes arcus AM, AN, aequales sumantur. His positis et cum antecedentibus collatis erit $z = f$; ideoque

$$\frac{f}{a^2 - c^2} + \frac{ccyy\sqrt{(1-yy)}}{(a^2 - c^2)\sqrt{(a^2(1-yy) + ccyy)}} + \frac{(a^2 + c^2)dy\sqrt{(a^2(1-yy) + ccyy)}}{a(a^2 - c^2)da\sqrt{(1-yy)}} + \frac{2ady\sqrt{(1-yy)}}{da\sqrt{(a^2(1-yy) + ccyy)}} + \frac{ccydy^2}{da^2(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(a^2(1-yy) + ccyy)}} + \frac{1}{da}d.\frac{dy}{da}\sqrt{\frac{a^2(1-yy) + ccyy}{1-yy}} = 0$$

seu $\frac{f\sqrt{(1-yy)}}{(a^2 - c^2)\sqrt{(a^2(1-yy) + ccyy)}} + \frac{ccyy(1-yy)}{(a^2 - c^2)(a^2(1-yy) + ccyy)} + \frac{(a^2 + c^2)dy}{a(a^2 - c^2)da} + \frac{2ady(1-yy)}{da(a^2(1-yy) + ccyy)} + \frac{ccdy^2}{da^2(1-yy)(a^2(1-yy) + ccyy)} + \frac{1}{da}d.\frac{dy}{da} = 0$. In qua aequatione si loco a ponatur $\frac{u}{y}$ et deinde loco y hic valor $\frac{\sqrt{(act - tt)}}{c}$; prodibit aequatio inter coordinatas t et u curuae quaesitae. Q. E. I.

DE