METHODVS COMPVTANDI AEQVATIONEM MERIDIEI.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Tabula IV. AD verum meridiei tempus inueniendum inter alia Aſtronomi vti ſolent binis obſeruationibus aequalium ſolis altitudinum, quarum altera ante altera poſt meridiem ſunt factae. Ex huiusmodi obſeruationibus facile quidem videtur verum meridiei tempus cognoſci ſumendo tempus medium inter tempora, quibus illae obſeruationes ſint factae; quemadmodum hoc modo tempus culminationis ſtellae fixae ex binis obſeruationibus aequalium altitudinum recte concluditur. Sed id, quod in ſtella fixa hanc concluſionem legitimam reddit, in ſole locum non habet, quippe qui perpetuo declinationem mutat. Si enim ſol, vti ſtella fixa, ſemper in eodem circulo parallelo verſaretur, tempus medium inter duas illas obſeruationes verum eſſet tempus meridiei, neque vlla correctione opus haberemus.

§. 2. Cum autem ſol continuo ex alio parallelo in alium progrediatur, facile perſpicitur tempus medium inter duo tempora, quibus aequales ſolis altitudines ſunt obſer-

Fig. 1.

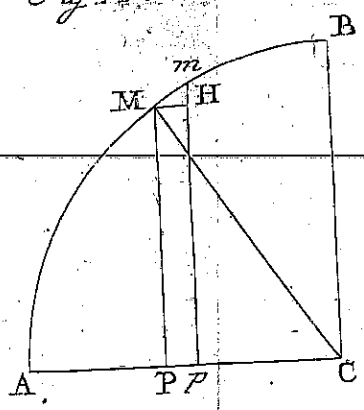


Fig. 2.

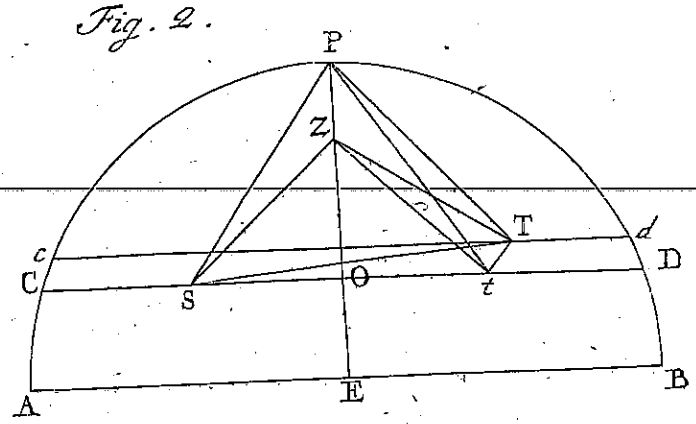


Fig. 3.

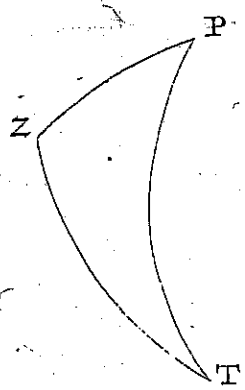
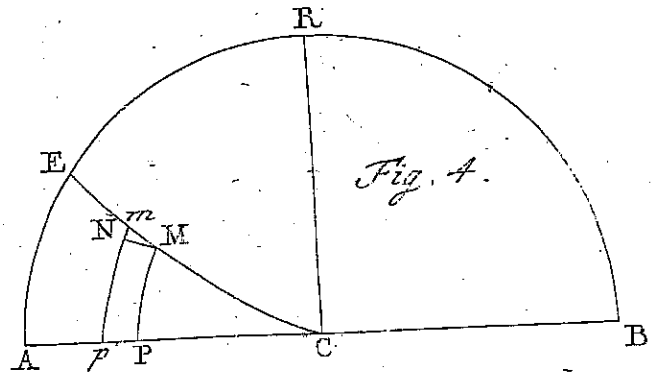


Fig. 4.



obſeruatae, a vero meridiei tempore discrepare debere. Si enim exempli gratia ſole ab ariete ad cancrum aſcendente hora nona antemeridiana altitudo ſolis fuerit 30°; hora tertia pomeridiana, inter quae tempora meridies in medio interiacet, altitudo ſolis maior erit, quam 30°; quia interea ſol propius ad polum et idcirco in noſtris regionibus propius quoque ad Zenith acceſſit. Quamobrem demum poſt horam tertiam ſol ad altitudinem 30° perueniet; ex quo perſpicitur, errorem commiſſum iri, ſi tempus medium inter tempora, quibus ſolis altitudo 30° eſt obſeruata, pro vero meridie haberetur. Tempus enim medium hoc caſu poſt meridiem incidet; et hanc ob rem, quo verum meridiei tempus obtineatur, oportet a tempore medio aliquid ſubtrahere, quod eſt id ipſum, quod hac diſſertatione determinare conſtitui.

§. 3. Simili modo intelligitur, ſi ſol a Borea ad Auſtrum deſcendat, contrarium accidere, et ad tempus aliquid addi debere. Atque haec temporis particula, quae ad tempus medium inter obſeruationum tempora vel adiici vel ob ipſo demi debet, vocatur aequatio meridiei. Tabula vero aequationis meridiei continet has aequationes pro ſingulis declinationis ſolis gradibus, et pro variis interuallis temporis inter obſeruationes ambas intercepti ad datam poli eleuationem computatas. Huiusmodi igitur tabula, aſtronomo valde eſt neceſſaria, quo ex ea verum meridiei tempus hac methodo, quae eſt facilis et a refractionibus non turbatur, cognoſcere, atque horologia corrigere queat.

§. 4. Pendet autem haec meridiei aequatio primo ab eleuatione poli eius loci, in quo est obseruator; tum etiam a differentia temporum, quibus obseruationes sunt factae; et denique a motu solis, quo variatio declinationis definitur. Pro variis igitur poli eleuationibus peculiares requiruntur tabulae aequationis meridiei; neque tabula pro hoc loco computata in aliis locis vsum habere potest, nisi quae sub eodem parallelo sunt sita. Praeterea eadem tabula ad datam poli eleuationem computata non perpetuo valere potest; quia motus solis verus ratione declinationis quotannis paululum variatur. Tam parum autem haec mutatio efficere valet, vt incrementum vel decrementum aequationis hinc ortum vix vnquam ad vnum minutum secundum saltem in locis, quae ab aequatore non vltra 60° distant, ascendere queat. Varietas autem eleuationis poli magnum discrimen aequationi meridiei inducit; cum aequationes ad hunc locum accommodatae, sint fere duplo maiores iis, quae pro Parisiis valent. Adhuc maiores fiunt in locis polis propioribus, et sub ipsis polis fiunt infinite magnae; eo quod ibi meridies non datur. Quo igitur propior polo alterutri est locus obseruatoris, eo magis haec correctio est necessaria; et pro Petropoli quidem sine hac correctione error in determinatione meridiei ad 50 minuta secunda ascendere posset.

§. 5. Huius correctionis mentio est facta in Edit. II. Tabularum Astronomicarum *Philippi de la Hire*, in quibus etiam methodus est tradita hanc meridiei aequationem inueniendi. Inserta est etiam eidem libro tabula aequa-

aequationis meridiei pro latitudine Lutetiae Parisiorum, quae vsque ad minuta tertia est computata: id quod necessarium est, nisi in minutis secundis errare velimus; etiamsi minuta tertia dignoscere non valeamus. Tabula ista pro singulis gradibus declinationis solis est computata: sed tantum ab interuallo inter obseruationes quatuor horarum vsque ad decem extenditur. Praeterea illa tabula hoc vitio laborat, quod eaedem aequationes pro signis ascendentibus et descendentibus valeant; cum tamen motus solis per signa ascendentia et descendentia non sit idem; id quod quidem in minutis tertiis tantum discrimen parit; sed ex eo differentia in minutis secundis oriri potest. Nam horum numerorum 20″, 35‴ et 20″, 25‴ differentia tantum est 10‴; interim tamen pro priore astronomi accipere solent 21″, pro posteriore autem tantum 20″, quod est discrimen vnius integri minuti secundi.

§. 6. Methodus autem LaHiriana computandi aequationem meridiei valde est prolixa et multum temporis requirit ad aequationem pro vnico casu inueniendam; ad completam autem tabulam aequationis meridiei conficiendam expeditissimus calculator pluribus mensibus opus haberet. Praeterea cum hae aequationes in minutis tertiis desiderentur, tabulae nostrae sinuum et tangentium non sufficiunt; sed perpetuo opus est interpolatione, quod incredibilem laborem parit. Cogitaui ergo, cum nuper huiusmodi tabula pro nostro obseruatorio desideraretur, de alia methodo aequationem meridiei inueniendi, quae breuis esset, et ad quam tabulae sinuum

et tangentium sufficerent. Perspexi autem statim, ad hoc obtinendum methodum ita comparatam esse oportere, vt aequatio non ex differentia angulorum, quorum sinus vel tangentes calculum ingrediuntur, sit determinanda, sed ex certo quodam angulo vel arcu; cuius sinus non in considerationem veniat. Angulorum seu arcuum enim, quorum differentia minuta temporis tertia producat, sinus in tabulis consuetis non reperiuntur, sed interpolatione inueniri deberent, id quod euitare statui.

§. 7. Ad huiusmodi methodum inueniendam coniunxi cum trigonometria sphaerica calculum infinitesimalem, cuius beneficio statim desideratae indolis methodum sum adeptus. Hoc autem modo calculum infinitesimalem ad vtilitatem meam conuerti: declinationis solis variationem diurnam tanquam infinite paruam quantitatem sum contemplatus; cum, quando maxima est 24″ non excedat; et quemadmodum arcus 24′ minutorum pro lineola recta haberi potest, ita eodem iure pro elemento infinite paruo haberi potest, respectu scilicet arcuum finitae magnitudinis seu potius totius peripheriae. Hoc pacto, dum calculum iuxta praecepta calculi infinitesimalis sum persecutus, obtinui, vt plures termini, qui tanquam differentialia secundi gradus considerari potuerunt, ex calculo excesserint, et tandem breuis et facilis formula aequationem meridiei exhibens prodierit. Ex hac igitur formula non solum facile erat tabulam pro hoc loco computare; sed etiam quoties vbique

vbique locorum duae obſeruationes aequalium ſolis altitudinum capiuntur, facili labore ſine tabula correctio meridiei computari poteſt.

§. 8. Ad operationes iam meas exponendas neceſſe mihi eſt ſequentia praemittere. Si anguli vel arcus cuiuſpiam AM ſinus PM fuerit $= A$, et coſinus $CP = a = \sqrt{(1 - A^2)}$ poſita pro ſinu toto AC vnitate; arcus vero AM augeatur elemento quam minimo Mm; erit arcus aucti ſinus $= A + a.Mm$, et coſinus $= a - A.Mm$. Eſt enim arcus AMm ſinus $= pm = PM(A) + mN$; et propter triangula ſimilia CPM, mNM eſt $CM(1) : CP(a) = Mm : Nm$, vnde fit $Nm = a.Mm$, ideoque $pm = A + a.Mm$. Simili modo reperitur $MN = Pp = A.Mm$; cum igitur arcus AMm coſinus ſit $= Cp = CP(a) - Pp$, erit coſinus arcus aucti $AMm = a - A.Mm$. Perſpicuum autem eſt haec tantum locum habere, quando arculus Mm tam eſt exiguus, vt ſine errore pro lineola recta poſſit haberi. Cum igitur in ſequentibus declinatio ſolis interuallo duarum obſeruationum nequidem dimidio gradu augeri queat, arcusque dimidii gradus a lineola recta non multum discrepet, hoc lemmate ad definiendos ſinus et coſinus declinationis ſolis auctae vel minutae tuto vti poterimus. Error ſaltem, qui ex curuatura tam parui arcus oriri poſſet, vix ad minuta tertia aſcendere poteſt; tantillum vero errorem, qui minuta ſecunda afficere nequit, merito non curamus. Figura 1.

§. 9. His praemiſſis concipiatur hemiſphaerium APBE, in quo punctum P repraeſentet polum terrae Figura 2.

et Z zenith loci, pro quo aequatio meridiei desideratur. Erit itaque recta AEB aequator et CD, *cd* circuli paralleli; PZE vero meridianus loci propositi. Porro PZ est complementum eleuationis poli, et hanc ob rem arcus meridiani ZE aequabitur ipsi poli eleuationi. Obseruetur iam sol ante meridiem in S, dabitur arcus ZS complementum scilicet altitudinis solis; PS vero est complementum declinationis solis, quod autem non datur, cum solis declinationes pro puncto meridiei inueniantur, in obseruatione autem distantia a meridie incognita ponatur. Ascendat sol ab aequatore versus boream; dum igitur perpetuo eius declinatio crescit, non in circulo parallelo CD mouebitur, sed oblique incedet via per lineam SOT repraesentatam. Post meridiem ergo, cum solis eadem altitudo obseruatur, sol non amplius erit in parallelo CD, sed in alio superiore proximo *cd*, et quidem in puncto T, cuius a zenith distantia ZT aequalis est distantiae ZS, quia altitudines solis in S et T sunt aequales positae, et ZS atque ZT harum altitudinum sunt complementa.

§. 10. Quando hae aequales solis altitudines obseruantur, momenta obseruationum ope boni horologii oscillatorii diligentissime notari debent. Vocatur autem bonum horologium, quod aequabiliter mouetur, et periodum in duodecim seu vigiati quatuor horis absoluit, etiamsi eius hora duodecima cum vero meridie non congruat; per has enim ipsas obseruationes indagatur discrimen inter horam duodecimam horologii et verum meridiem, quo pacto horologium perfecte corrigitur,

et

et ad ſolis motum accommodatur. Ope horologii igitur boni licet non correcti cognoſcitur interuallum temporis inter momenta duarum illarum obſeruationum, quod tempus in gradus aequatoris conuerſum dat angulum SPT. Quaeritur autem angulus SPZ; hic enim in tempus conuerſus dat interuallum inter tempus obſeruationis antemeridianae et verum meridiem; ex quo correctio horologii ſponte ſequitur. Datur vero porro arcus meridani PO, qui eſt complementum declinationis ſolis in ipſo meridiei momento, ex ephemeridibus; at arcus PS et PT propter angulos SPZ et TPZ incognitos non dantur.

§. 11. Si ſol declinationem non mutaret, ſed perpetuo in eodem parallelo CD permaneret, obſeruatio pomeridiana incideret ſole exiſtente in t, cuius puncti a Z diſtantia Zt aequalis foret diſtantiae SZ. Hoc igitur caſu cum quoque ſit $PS = Pt$, biſecabit meridianus PZE angulum SPt; atque cum hic angulus in tempus conuerſus ſit interuallum inter momenta obſeruationum, manifeſtum eſt, ſi hoc interuallum in duas partes aequales diuidatur verum meridiei tempus eſſe proditurum. Contra vero ex his intelligitur ſolis declinatione immutata tempus medium inter momenta obſeruationum in ipſum meridiem incidere non poſſe, cum angulus TPZ maior ſit angulo SPZ, differentia exiſtente angulo TPt. A tempore itaque medio inter duas obſeruationes quicquam ſubtrahi debet ad verum meridiei tempus inueniendum; atque ea temporis particula, quae ſubtrahi debet, in arcum aequatoris conuerſa aequalis erit dimidio angulo

angulo TPt. In id igitur nobis erit incumbendum, vt quantitatem anguli TPt eliciamus; quo facto habebimus meridiei aequationem. Huius enim anguli dimidium in tempus conuersum dat tempusculum a medio inter obseruationes tempore subtrahendum nostro casu, quo solem in signis ascendentibus ponimus. In signis vero descendentibus tempusculum eodem modo inuentum, addi debet ad tempus inter obseruationes medium.

§. 12. Quo igitur rem ad calculum deducam, sit sinus arcus PZ$=$A, eiusque cosinus $=a$, posito radio $=1$, sinus complementi declinationis solis seu sinus arcus PO$=$B, eiusque cosinus $=b$, ita vt sit $B^2+b^2=1$. Porro sit angulus SPT$=2$N grad. erit dimidium anguli SPT$=$N grad.; ponatur huius dimidii anguli sinus $=$C, eiusque cosinus $=c$, erit quoque $C^2+c^2=1$. Denique sit incrementum declinationis solis diurnum $=dt$; in signis descendentibus idem dt decrementum declinationis denotabit. Incrementum vero hoc vel decrementum in minutis secundis exactissime requiritur, siquidem aequatio meridiei in minutis tertiis temporis desideratur. Cum autem ephemerides declinationem solis in minutis primis tantum continere soleant, dabo deinceps modum ex motu solis diurno vero, qui potissimum in minutis secundis habetur variationem declinationis diurnam in minutis secundis quoque computandi, ita vt non opus sit vlla interpolatione in consuetis sinuum et tangentium tabulis. Anguli vero quaesiti TPt dimidium vocabo dx; dabit ergo dx in tempus conuersum aequationem meridiei quaesitam. Assumo

autem

autem pro variatione declinationis diurna et dimidio angulo TPt denominationes differentiales dt et dx, quia sunt quantitates tam paruae, vt respectu reliquorum arcuum pro infinite paruis haberi queant, et quia arcus ipsis dt et dx in aequatore respondentes a lineolis rectis non discrepant.

§. 13. Cum sol interuallo vnius diei declinationem aequabiliter mutare censendus sit, ex variatione declinationis solis diurna inuenitur variatio declinationis interuallo temporis inter momenta duarum obseruationum. Quemadmodum igitur se habet interuallum 24 horarum ad interuallum inter duas obseruationes, ita se habent 360 gradus ad ang. SPT qui est 2N; quamobrem fiat vt 360 ad 2N ita dt ad $\frac{Ndt}{180}$, quod erit incrementum declinationis, dum sol angulum SPT circa polum conficit. Huic ergo quantitati $\frac{Ndt}{180}$ aequalis est differentia inter PS seu Pt et PT; quare erit $PS-PT=Pt-PT=\frac{Ndt}{180}$. Cum deinde angulus TP$t$ positus sit $=2dx$; erit angulus SP$t=2N-2dx$, et hinc huius dimidium angulus SPO seu tPO$=N-dx$; atque angulus TPO$=N+dx$. Superiore ergo modo variatio declinationis, dum sol angulum SPO absoluit, inuenitur ex analogia $360:N-dx=dt:\frac{Ndt}{360}-\frac{dtdx}{360}$, vbi terminus $\frac{dtdx}{360}$, quia ad differentialia secundi gradus pertinet, tuto reiici potest; ita vt tam pro PS$-$PO, quam pro PO$-$PT accipi possit $\frac{Ndt}{360}$. Nihilo vero difficilior euadet formula, imo ne quidem immutabitur, si quis pro PS$-$PO voluerit sumere $\frac{Ndt-dtdx}{360}$ et pro PO$-$PT hunc valorem $\frac{Ndt+dtdx}{360}$.

§. 14. Cum iam sit arcus PO sinus $= B$ et cosinus $= b$, erit per lemma praemissum arcus PS seu $PO + \frac{Ndt - dtdx}{360}$ sinus $= B + \frac{bNdt - bdtdx}{360}$ et cosinus $= b - \frac{BNdt + Bdtdx}{360}$; qui sunt simul sinus et cosinus arcus Pt. Arcus vero PT seu $PO - \frac{Ndt - dtdx}{360}$ sinus erit $= B - \frac{bNdt - bdtdx}{360}$ et cosinus $= b + \frac{BNdt + Bdtdx}{360}$. Praeterea cum sit angulus SPO seu $tPO = N - dx$, anguli N vero sinus sit C cosinusque c, erit anguli SPO seu tPO sinus $= C - c\,dx$ et cos. $= c + Cdx$; similique modo erit anguli TPO sin. $= C + cdx$ et cosin. $= c - Cdx$. Quantitate ergo dx tanquam data considerata, in triangulo sphaerico tPZ data sunt latera PZ et Pt vna cum angulo ZPt; similiterque in triangulo sphaerico TPZ data sunt latera PZ et PT vna cum angulo TPZ. Ex his igitur triangulis, quia tria sunt data, inueniri poterunt latera Zt et ZT. Qui arcus cum sint aequales, dabunt aequationem, ex qua dx poterit determinari.

§. 15. Habemus ergo duo triangula sphaerica resoluenda, in quorum vtroque dantur duo latera cum angulo intercepto et tertium latus quaeritur. Ex his igitur datis, quomodo tertium latus sit inueniendum antea regulam exhibebo, in qua demissione perpendiculi non est opus. Si fuerint in triangulo sphaerico ZPT data latera ZP et TP vna cum angulo ZPT erit cos. ZT $=$ cos. ZPT. $\int$ZP. $\int$PT $+$ cos. ZP. cos. PT; cuius regulae demonstratio ex trigonometricis ab hic defuncto Prof. *Maiero* Tom. II. Comment. insertis facile deriuatur. Per hanc regulam igitur orietur cos. $Zt = ABc$

Figura 3.

$+ ab$

$+ab + ABCdx + \frac{AbcNdt - aBNdt + aBdtdx - Abcdtdx + AbCNdtdx}{360}$ atque ex altero triangulo erit cos. $ZT = ABc + ab - ABCdx - \frac{AbcNdt + aBNdt + aBdtdx - Abcdtdx + AbCNdtdx}{360}$. Cum autem sit $Zt = ZT$ erunt et cosinus aequales; quamobrem sequens habebitur aequatio: $ABCdx + \frac{AbcNdt - aBNdt}{360} = 0$, ex qua prodit $dx = \frac{Ndt}{360}\left(\frac{a}{AC} - \frac{bc}{BC}\right)$, in qua si arculus dt conuertatur in minuta tertia temporis habetitur statim dx in minutis tertiis temporis expressum; ideoque ipsa meridiei aequatio.

§. 16. Quo haec formula clarius perspiciatur loco symbolorum restituamus litteras figurae prodibitque aequatio meridiei $= \frac{\text{ang. SPT}.dt}{720^\circ}\left(\frac{1}{\text{tang. PZ}, \int \frac{1}{2}\text{SPT}} - \frac{1}{\text{tang. PO. tang. } \frac{1}{2}\text{SPT}}\right)$. Ad calculum autem ex hac regula instituendum notari oportet sinum totum hic esse positum $= 1$, qui vero in tabulis sinuum et tangentium poni solet $= 10000000$. Quare quo vniformitas conseruetur, loco numeratoris 1, in formula inuenta poni debet quadratum sinus totius. Ne autem hac cautela sit opus formulam immuto, ita vt in numeratore et denominatore idem habeatur dimensionum numerus. Existente enim sinu toto $= 1$ est $\frac{1}{\text{tang. PZ}} = \text{cot. PZ} = \text{tang. ZE}$ seu est tangens eleuationis poli; atque $\frac{1}{\text{tang PO}} = \text{cot. PO} = \text{tang. OE}$ seu est tangens declinationis solis. His igitur substitutis erit aequatio meridiei $= \frac{\text{ang. SPT}.dt}{720^\circ}$

$\left(\frac{\text{tang. ZE}}{\text{sin.}\frac{1}{2}\text{SPT}} - \frac{\text{tang. OE}}{\text{tang.}\frac{1}{2}\text{SPT}}\right)$. Ex hac formula ſtatim apparet ſub polo aequationem hanc fieri infinite magnam: fit enim ZE arcus 90°, cuius tangens eſt infinite magna. Sub ipſo aequatore autem euaneſcit tang. ZE, ideoque aequatio meridiei fit negatiua; ſeu addi debet, cum alias ſubtrahi deberet, niſi OE fiat negatiuum, ſeu ſol verſus Auſtrum declinet. Formula tandem inuenta ad declinationem ſolis borealem eſt accommodata; at ſi fuerit auſtralis ob OE negatiuum, erit aequatio meridiei $= \frac{\text{ang. SPT.}dt}{720°}\left(\frac{\text{tang. ZE}}{\text{sin.}\frac{1}{2}\text{SPT}} + \frac{\text{tang OE}}{\text{tang.}\frac{1}{2}\text{SPT}}\right)$ quae exigua discrepantia calculum admodum contrahit.

§. 17. Ipſe autem calculus ex hac formula ſequenti modo commodiſſime inſtituitur. Multiplicetur horarum inter obſeruationes elapſarum numerus per 15, quo habeatur numerus graduum anguli SPT, huiusque numeri ſumatur logarithmus. Deinde quaeratur modo poſt deſcribendo variatio declinationis diurna in minutis ſecundis, horumque numeri per 4 multiplicati logarithmus addatur ad priorem logarithmum et a ſumma ſubtrahatur logarithmus numeri 720; quo facto habebitur logarithmus ipſius $\frac{\text{ang. SPT.}dt}{720}$. Deinde a logarithmo tangentis eleuationis poli ſubtrahatur logarithmus ſinus dimidii anguli SPT et ex tabula logarithmorum numerorum naturalium quaeratur numerus reſiduo reſpondens, qui erit $= \frac{\text{tang. ZE}}{\text{sin.}\frac{1}{2}\text{SPT}}$. Simili modo a logarith-

mo

mo tangentis declinationis ſolis ſubtrahatur logarithmus tangentis dimidii anguli SPT, et ex tabula logarithmorum reſiduo quaeratur numerus reſpondens, qui erit $= \frac{\text{tang. OE}}{\text{tang.}\frac{1}{2}\text{SPT}}$. Tum in caſu declinationis borealis hic numerus ab illo ſubtrahatur, in caſu auſtralis vero declinationis hi numeri ad ſe inuicem addantur; numerique qui prodiit ſumatur iterum logarithmus, isque addatur ad logarithmum $\frac{\text{ang. SPT}.dt}{720^\circ}$ ante inuentum. Quo facto numerus aggregato illorum logarithmorum reſpondens erit numerus minutorum tertiorum aequationem meridiei conſtituentium.

§. 18. Videtur quidem haec regula ſatis prolixa, et multum temporis requirere ad tabulam aequationis meridiei computandam; ſed qui paulisper in calculando eſt exercitatus, ſtatim videbit non opus eſſe pro ſingulis aequationibus totam operationem repetere; ſed plures numeros vnius operationis in reliquis retineri. Deme ſaltem aſſeuerare poſſum, me haud quatuor dies integros ad totam tabulam huic loco inſeruientem impendiſſe; quae tamen tabula plusquam ſexies amplior eſt, quam ea quae pro latitudine Lutetiae in Tabulis Lahirianis extat. Peculiares enim tabulas confeci pro ſignis aſcendentibus et deſcendentibus, quo inſtituto labor fere erat duplicatus. Praeterea tabulam ab vnius horae interuallo inter obſeruationes ſucceſſiue vsque ad octodecim horas continuaui, cum Pariſienſis tantum a quatuor horis vsque ad decem procedat.

§. 19. Antequam regulam hanc exemplo illustrem necesse esse iudico methodum tradere, qua ex motu solis diurno in ecliptica incrementum vel decrementum diurnum declinationis inueniri queat; idque in minutis secundis; ad quod requiritur motus solis in eccliptica in minutis secundis quoque. Sit igitur in hemisphaerio ARBA, R polus, AB aequator et EC eccliptica cum aequatore angulum ACE 23°, 29′ constituens. Sit sol in M eiusque declinatio arcus PM; progrediatur sol vno die in eccliptica per arculum Mm quem vocemus dk; erit incrementum declinationis $= mp - MP = mN = dt$. Sit vt ante iam posuimus sinus arcus $PM = b$ et cosinus $= B$ erit sinus arcus $mp = b + B\,dt$. Vocetur sinus anguli $ACE = e$ fiatque vt $e : 1 = \int PM(b) : \int CM$. erit ergo sin. $CM = \frac{b}{e}$. Sit cosinus arcus CM $= f$ erit sin. $Cm = \frac{b}{e} + f\,dk$. Est vero $\int ACE(e)$: sin. tot. $(1) = \int pm(b + B\,dt) : \int Cm(= \frac{b}{e} + f\,dk)$ siue $e\,f\,dk = B\,dt$. Ex quo inuenitur $dt = \frac{e\,f\,dk}{B}$. Cum igitur sit $e =$ sin. 23°, 29′, $f =$ cos. distant. Solis ab aequinoctio et $B =$ cos. declin. solis; definitur dt per dk; et quia dk in minutis secundis ex ephemeridibus habetur, dt quoque in minutis secundis exprimetur.

Figura 4.

§. 20. Hoc exposito praescriptas operationes in sequente exemplo absoluemus. Sub eleuatione Poli 52°, 27′ obseruatur solis altitudo ante meridiem hora 8. min. 21. eademque solis altitudo post meridiem redibat hora 3. min. 49; quae momenta ope horologii boni etiamsi non correcti sunt notata. Ostendebant autem illo die ephe-

ephemerides Solem in ♉, 16°, 35′, 6″, eiusque declinationem 16°, 49′. Quaestio est vero, in quod tempus a horologio indicatum verus meridies inciderit. Reperitur autem motus solis diurnus verus ex ephemeridibus $= 57', 4'' = 3424''$; quare est $dk = 3424''$. Distantia porro solis ab aequinoctio proximo est 46°, 35′, cuius anguli cosinui aequatur f, atque est $e =$ sin. 23°, 29′ et $B =$ cos. 16°, 49′. Ex quibus inuenitur dt, vt sequitur:

$$
\begin{aligned}
le &= l \text{ sin. } 23°, 29' = 9,6004090 \\
lf &= l \text{ cos. } 46°, 35' = 9,8371456 \\
ldk &= l3424 = 3,5345338 \\
lefdk &= 22,9720884 \\
lB &= l\text{cos. } 16°, 49' = 9,9810187 \\
& 12,9910697
\end{aligned}
$$

Hic autem ob vniformitatem, quia in numeratore duo sunt sinus, vnicus vero in denominatore, log. sinus totius 10 subtrahi debet, eritque residuum

$$2,9910697 = ldt.$$

§. 21. Non opus est vt huius logarithmi numerus respondens quaeratur, cum in altera formula logarithmus ipsius dt sit adhibitus, interim tamen ex tabulis eruitur $dt = 979'' = 16', 19''$, quae est variatio declinationis diurna. Si 979″ per 4 multiplicetur, habebitur numerus minutorum temporis tertiorum ipsi dt respondens. Cum igitur ex hac formula dt prodeat in minut. secundis, multiplicetur altera formula per 4 eritque aequa-

Figura 2. aequatio meridiei $= \frac{\text{ang.}SPT.dt}{180}\left(\frac{\text{tang.}ZE}{\text{sin.}\frac{1}{2}SPT} - \frac{\text{tang.}OE}{\text{t.}\frac{1}{2}SPT}\right)$ min. tert. temporis. Nunc pro formula eſt $ZE = 52°, 27'$ et $OE = 16°, 49'$; atque cum interuallum duarum obſeruationum ſit 7 hor. 28′ erit angulus $SPT = 112°$; et $\frac{1}{2}SPT = 56°$. His praeparatis inſtituatur operatio vt ſequitur:

$$\begin{aligned}
&\text{l. ang. } SPT = l112 = 2,0492180\\
&\text{l. } dt \text{ - - - - - - } = 2,9910697\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 5,0402877\\
&\text{l. } 180 \text{ - - - - - - } 2,2552725\\
&\text{l.}\frac{\text{ang.}SPT.dt}{180} = 2,7850152
\end{aligned}$$

Alterum membrum hoc modo inuenietur:

$$\begin{aligned}
&\text{l. tang. } ZE = \text{l. tang. } 52°, 27' = 10,1142350\\
&\text{l. ſ. } \tfrac{1}{2}SPT = \text{l. ſ. } 56° = 9,9185742\\
&\text{l.}\frac{\text{tang.}ZE}{\text{ſ.}\frac{1}{2}SPT} = 0,1956608
\end{aligned}$$

Erit ergo

$$\frac{\text{tang.}ZE}{\text{ſin.}\frac{1}{2}SPT} = 1;569.$$

Porro eſt

$$\begin{aligned}
&\text{l. tang. } OE = \text{l. t. } 16°, 49' = 9,4803451\\
&\text{l. tang. } \tfrac{1}{2}SPT = \text{l. t. } 56° = 10,1210126\\
&\text{l.}\frac{\text{tang.}OE}{\text{tang.}\frac{1}{2}SPT} = 1,3593325
\end{aligned}$$

vbi

vbi notandum eſt ſignum ⌣ characteriſticam 1 tantum, non vero reliquos numeros afficere. Erit ergo

$$\frac{\text{tang. OE}}{\text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{SPT}} = 0,229;$$

ideoque

$$\frac{\text{tang. ZE}}{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\text{SPT}} = \frac{\text{tang. OE}}{\text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{SPT}} = 1,340,$$

cuius numeri logarithmus eſt $= 0,1271048$

qui additus ad $l.\frac{\text{ang. SPT}.dt}{180} = 2,7850152$

dat log. aequationis meridiei $= 2,9121200$.

Quare ipſa aequatio erit 817 minut. tert. ſeu aequatio meridiei huic caſui reſpondens eſt $13'',37'''$, quae minuta ſecunda et tertia tempus denotant.

§. 22. Quia in hac obſeruatione ſol in tauro verſatur, eius declinatio creſcit, et hanc ob rem aequatio inuenta a tempore medio inter tempora obſeruationum ſubtrahi debet, quo momentum meridiei proueniat. Inuenitur autem tempus medium addendis temporibus obſeruationum

	$8^h.\ 21'$
	$3^h.\ 49'$
vna cum 12 horis	$12^h.$
	$24^h.\ 10'$
ſumendoque huius dimidium	$12^h.\ 5'$

a quo tempore ſi ſubtrahatur $13'',37'''$, habebitur verum meridiei tempus hora 12, cum $4',46'',23'''$; vnde horologium exactiſſime corrigi poteſt.