DE OSCILLATIONIBVS FILI FLEXILIS QVOTCVNQVE PONDVSCVLIS ONVSTI.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Tabb. II. III. IAm ante complures annos, cum *Cl. Bernoullius* hic commoraretur, quaestio inter nos incidebat, de curuatura catenae circa alterum terminum fixum oscillantis. Experientia autem nos docebat curuas maxime irregulares easque diuersissimas satisfacere, ex quo problema non solum difficillimum, sed etiam vires humanas, nisi restrictio adhibeatur, exsuperans indicauimus. Hanc ob rem nostras cogitationes ad oscillationes infinite paruas tantum aduertimus, quo casu solutionem multo minus laboris requirere facile praeuideramus. Neque vero has infinite paruas oscillationes omnes persequi idoneum visum est, sed eas duntaxat, in quibus singulae catenae partes simul ad lineam verticalem tanquam ad statum naturalem perueniunt. Obseruauimus enim saepius accidere, vt catena oscillans nunquam tota in directum extendatur, neque eius partes omnes simul per lineam verticalem transeant; facile autem praeuidebamus oscillationes initio ita temperari posse, vt singulae partes simul ad lineam verticalem sint peruenturae. Ex quibus sequens formauimus problema; Inuenire

nire

Fig. 1.

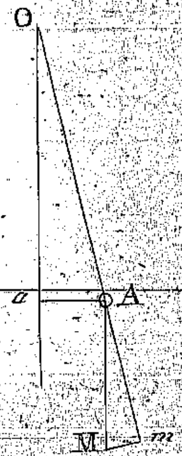


Fig. 2.

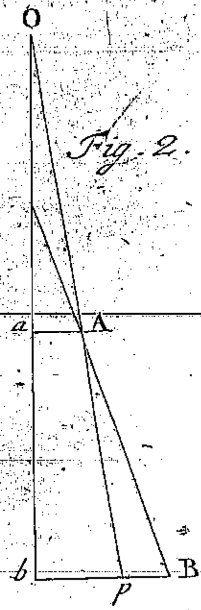


Fig. 3.

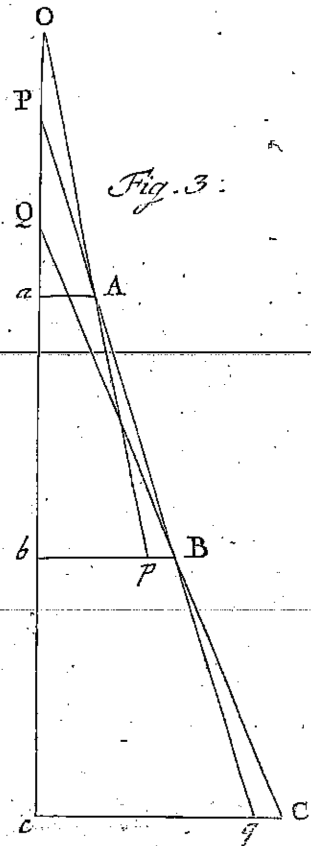


Fig. 4.

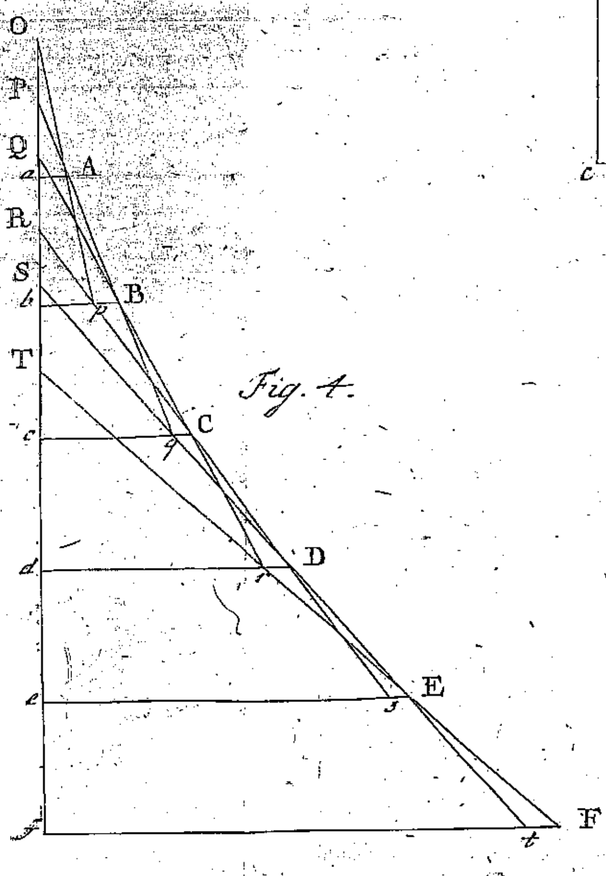
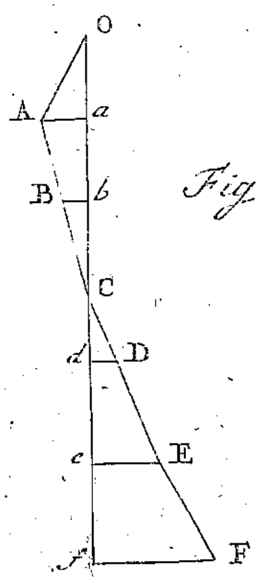


Fig. 5.



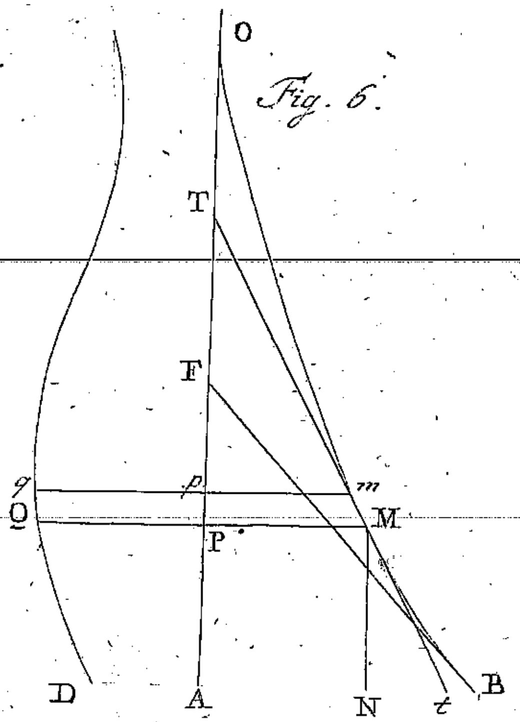


Fig. 6.

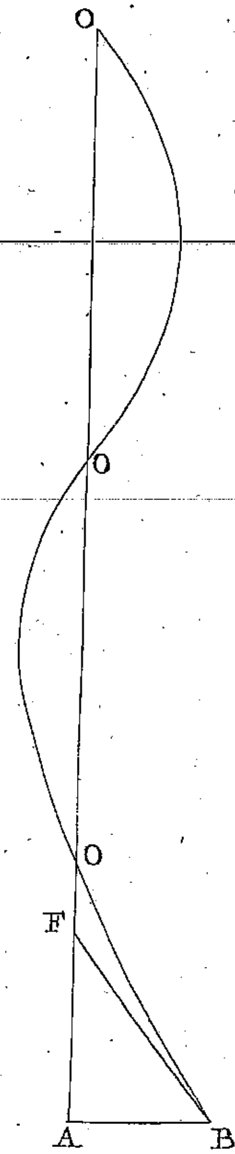


Fig. 7.

nire curuaturam catenae ita oscillantis, vt eius singulae partes simul ad lineam verticalem perueniant, atque longitudinem penduli simplicis eodem tempore suas oscillationes absoluentis.

§. 2. Ad hoc autem problema soluendum catena consideranda est tanquam filum perfecte flexile et grauitatis expers, infinitis ponduscculis oneratum. Eodem enim modo catena considerari solet, quando catenae in vtroque termino suspensae figura seu curua catenaria inquiritur. Quo igitur ad solutionem huius problematis via debito modo sternatur filum flexile et grauitatis expers est considerandum, quod primum vnico tum duobus, deinceps tribus, quatuor, etc. ponduscculis sit oneratum, quo ex his conclusio ad casum infinitorum ponduscculorum fieri queat. Hinc sequentes natae sunt quaestiones praeliminares: si filum perfecte flexile duobus, tribus, et deinde quotcunque ponduscculis in datis distantiis a se inuicem dispositis, fuerit oneratum, inuenire positionem ponduscculorum extra statum naturalem vt singula sibi permissa ad lineam verticalem seu in statum naturalem simul perueniant; atque hoc inuento determinare longitudinem penduli simplicis isochroni. In his vero semper oscillationes infinitae paruae tantum considerantur, quippe quae omnes, vt patebit, inter se sunt isochronae; quamobrem illa ponduscculorum positio infinite parum a linea verticali discrepabit.

§. 3. Atque hae sunt quaestiones, quas *Cl. Bernoullius* ante abitum solutas dedit sine demonstrationibus, nunc

nunc vero simul demonstratas huc misit. Cum vero iam illo tempore hae quaestiones Illum inter eiusque Patrem et me agitarentur, ipse quoque earum solutiones dedi cum hisce *Bernoullii* solutionibus egregie conspirantes. At cum nunc perspiciam eius methodum a mea prorsus differentem, ad augmentum scientiae non parum vtile fore iudicaui, si et meam methodum hac dissertatione exposuero. Cum enim huius modi quaestiones sint nouae et ad mechanicae partem adhuc nouam, et a nemine pertractatam pertineant, nihil magis ad excolendam hanc mechanicae partem est exoptandum, quam plures methodi, quibus idem problema solui queat.

Figura 1. §. 4. Quo igitur a simplicissimis exordiar, sit filum grauitatis expers OA vnico ponduscculo A oneratum, quod cum linea verticali Oa angulum infinite paruum AOα constituat. Hoc igitur pendulum sibi permissum oscillationes faciet eundo in situm Oa, tantumque vltra illum transiendo. Hoc nobis erit pendulum simplex, cum quo sequentia pendula composita comparabimus; Dum vero hoc pendulum ad Oa mouetur corpori A describenda est via Aa, reipsa quidem arcus circularis centro O descriptus, sed qui cum horizontali Aa propter angulum AOa infinite paruum congruet. Inuestigandum ergo est, quanta vi acceleratrice corpus A per Aa propellatur. Corpus vero A vi grauitatis, quae aequalis est ponderi corporis A, deorsum secundum directionem AM trahitur; haec ergo vis si resoluatur in duas laterales Am, et Mm, altera in directione

tione Am tota ad tendendum filum insumetur, altera vero in directione Mm corpus per Aa vrgebit. At ob triangula OAa, AMm similia erit vis filum AO tendens $= \frac{A.Om}{AO} = A$, et vis corpus per Aa trahens $= \frac{A.Aa}{AO}$; vis vero accelerans habebitur, diuisa vi absoluta $\frac{A.Aa}{AO}$ per massam A mouendam, vnde vis accelerans est $\frac{Aa}{AO}$. Perspicitur ex hoc si spatium percurrendum Aa diuidatur per vim accelerantem, prodituram esse longitudinem penduli AO, isochroni cum motu per Aa. Quare si in sequentibus casibus determinauerimus vim acceleratricem, qua quodque corpus ad verticalem sollicitatur, habebimus simul longitudinem penduli simplicis isochroni. Atque cum in casu plurium corporum, cuiusque singula simul peruenire debeant ad verticalem, cuiusque vis acceleratrix proportionalis esse debet distantiae a linea verticali Oa, ex quo positio corporum determinabitur.

§. 5. Sint filo OAB in O fixo duo annexa ponduscula A et B, et situs fili infinite parum a verticali Ob differens. Demittantur ex A et B in verticalem Ob perpendicula Aa, Bb, quae vt viae considerari poterunt a corpusculis absoluendae. Fili pars BA producatur vsque ad lineam verticalem in P, et OA in p vsque. Ex praecedentibus iam liquet vim grauitatis corporis B duplicem exerere effectum, alterum quo corpus B per Bb vrgetur, quae vis erit $= \frac{B.Bb}{BP}$, alterum vero, quo tenditur filum BA, quae vis est $= B$, ob ang. BPb infinite paruum. Hac vero vi cor- Figura 2.

corpus A afficietur ſecundum directionem AB, ad cuius effectum inueniendum reſoluatur ea in duas, alteram in directione $Ap = \frac{B.Ap}{AB} = B$, quae filum OA tendit: alteram in directione horizontali, quae erit $= \frac{B.Bp}{AB}$, atque pro negatiua eſt habenda, quia motum per Aa retardat. Atque in hoc conſiſtit effectus ponderis B. Pondus A vero vt ante vrgebit per Aa vi $= \frac{A.Aa}{AO}$, et filum OA tendet vi $= A$. Sollicitabitur ergo corpus A vi acceleratrice $\frac{Aa}{AO} - \frac{B.Bp}{A.AB}$, et corpus B vi acceleratrice $\frac{Bb}{BP}$. Quo igitur corpora A et B ſimul ad lineam verticalem perueniant, hae vires acceleratrices proportionales eſſe debebunt viis deſcribendis ſcilicet $\frac{Aa}{AO} - \frac{B.Bp}{A.AB} : Aa = \frac{Bb}{BP} : Bb$. Et longitudo penduli iſochroni erit $BP = \frac{A.AO.AB.Aa}{A.AB.Aa - B.AO.Bp}$.

§. 6. Eſt vero $BP = bP$ propter ang. bPB infinite paruum, atque ob $Bb - Aa : ab = Bb : bP$ erit $BP = \frac{Bb.ab}{Bb - Aa}$. Atque cum ſit $bp = \frac{Aa.Ob}{Oa}$, erit $Bp = Bb - \frac{Aa.Ob}{Oa}$. Deinde propter $OA = Oa$ et $AB = ab$ habebitur haec analogia $A.Aa.Ob - B.Bb.Oa + B.Aa.Ob : A.Aa.Oa = Bb - Aa : Bb$ Sit longitudo penduli iſochroni $= f$, habebuntur hae duae aequationes $\frac{Bb.ab}{f} = Bb - Aa$ atque $\frac{A.Aa.Oa.ab}{f} = A.Aa.ab - B.Bb.Oa + B.Aa.Ob$. Vel eliminata f prodibit iſta aequatio $A.Aa.Bb.Oa - A.Aa^2.Oa = A.Aa.Bb\,ab - B.Bb^2.Oa + B.Aa.Bb.Ob$. Quae aequatio cum duas habeat radices, duplicem dabit ſitum ponduſculorum A et B, et B, in quorum vtroque simul ad verticalem pertingunt. Motus vero erit huiusmodi, vt inter mouendum OA et AB maneant eiusdem longitudinis et punctum P in eodem loco restet.

§. 7. Si fili partes OA et AB fuerint inter se aequales, erit $Oa = ab$ et $Ob = 2Oa$, vnde sequentes duae oriuntur aequationes $\frac{Bb.Oa}{f} = Bb - Aa$ et $\frac{Aa.Oa}{f} = Aa - \frac{B.Bb}{A} + \frac{2B.Aa}{A}$; vel haec vnica $A.Aa^2 = B.Bb^2 - 2B.Aa.Bb$, vnde oritur $\frac{Bb}{Aa} = 1 \pm \sqrt{(1 + \frac{A}{B})}$, pro duplici ponduscolorum situ.

§. 8. Si praeterea ponduscula A et B fuerint inter se aequalia, erit $\frac{Bb.Oa}{f} = Bb - Aa$ et $\frac{Aa.Oa}{f} = 3Aa - Bb$. atque $\frac{Bb}{Aa} = 1 \pm \sqrt{2}$. Altero ergo situ Aa et Bb in eandem partem verticalis Ob cadunt, altero in diuersas.

§. 9. Sint nunc filo in O fixo tria ponduscula, A, B et C annexa infinite parum a verticali Oc dissita. Figura 3. Ducantur horizontales Aa, Bb, Cc, seu viae a corporibus simul describendae; et producantur BA in P; CB in Q; item OA in p et AB in q. His positis pondus C efficiet, vt partim corpus C secundum Cc vrgeatur vi $= \frac{C.Cc}{CQ} = \frac{C.Cc}{cQ}$ partim vero filum BC tendatur vi $= \frac{C.cQ}{CQ} = C$. Hac autem vi corpus B sollicitabitur in directione BC. Resoluatur haec vis in duas, quarum altera est horizontalis et corpus B a verticali Oc retrahat $= \frac{C.Cq}{BC} = \frac{C.Cq}{bc}$; altero vero tendat filum BA quae est $= \frac{C\,Bq}{BC} = C$. Nunc sumatur pondus B, quo partim

 vrge-

vrgebitur B verſus Bb vi $= \frac{B.Bb}{BQ} = \frac{B.Bb}{bQ}$ partim vero tenditur filum BA vi $= B$. Tota ergo vis qua filum BA tenditur eſt $B + C$, hac vi corpus A ſollicitabitur horizontaliter ab verticali Oc vi $= \frac{(B+C)Bp}{BA} = \frac{(B+C)Bp}{ab}$, atque filum AO tendetur vi $= B + C$. Pondus denique A efficiet vt corpus A ſecundum Aa ſollicitetur vi $= \frac{A.Aa}{AO} = \frac{A.Aa}{aO}$, ſimulque tendatur filum AO vi $= A$; ita vt tota vis, quae filum AO tenditur, ſit $= A + B + C$.

§. 10. His igitur colligendis corpus C per Cc vrgebitur vi $= \frac{C.Cc}{cQ}$; at corpus B per Bb vrgebitur vi $= \frac{B.Bb}{bP} - \frac{C.Cq}{bc}$, atque corpus A per Aa trahetur vi $= \frac{A.Aa}{aO} - \frac{(B+C)Bp}{ab}$. Cum igitur ſingula corpora ſimul ad lineam verticalem peruenire debeant, ſi ponatur longitudo penduli iſochroni $= f$, erit $\frac{C.Cc}{f} = \frac{C.Cc}{cQ}$ ſeu $f = cQ$, atque $\frac{B.Bb}{f} = \frac{B.Bb}{bP} - \frac{C.Cq}{bc}$; ac $\frac{A.Aa}{f} = \frac{A.Aa}{aO} - \frac{(B+C)Bp}{ab}$. Ex quibus tribus aequationibus dato ſitu corpusculi A, determinabitur ſitus ponduſculorum B et C, quo omnia tria corpora ſimul ad verticalem perueniant. Prodibit autem triplex ſitus propter aequationem cubicam reſoluendam. Motus vero ad verticalem ita fiet, vt fila OA, AB et BC eandem ſeruent longitudinem et puncta P et Q inuariata maneant.

§. 11. Si et corpora A, B et C fuerint inter ſe aequalia et diſtantiae aequales, erit ob $cQ = \frac{Cc.bc}{Cc - Bb}$, $bP = \frac{Bb.ab}{Bb - Aa}$ et $Cq = Cc - 2Bb + Aa$ et $Bp = Bb - 2Aa$;

[illegible] $\frac{Oa}{f} = \frac{Cc - Bb}{Cc}$ et $\frac{Oa}{f} = -\frac{Cc + 3Bb - 2Aa}{Bb}$ atque $\frac{Oa}{f} = \frac{5Aa - 2Bb}{2Aa}$. Hinc elicitur $Cc = \frac{Aa.Bb}{2Bb - 4Aa}$ et Bb inuenitur ex hac aequatione:

$$4Bb^3 = 12Aa.Bb^2 - 3Aa^2.Bb - 8Aa^3.$$

Hinc fit quam proxime:

$$\cancel{Bb = 2,295\,Aa \text{ vel}}$$
$$Bb = 1,348\,Aa \text{ vel}$$
$$Bb = -0,643\,Aa.$$

§. 12. Sit nunc filum quotcunque ponduscul is oneratum in punctis A, B, C, D etc. quorum vltimum fit F; ducantur per haec fingula puncta horizontales Aa, Bb, Cc, etc. et fingulae fili partes vtrinque producantur vt ante factum eft. Confideretur corpus quodcunque C, quod duplici vi follicitatur, vi propriae grauitatis fcilicet, et vi tendente fili portionem CD, tenditur vero hoc filum a vi, quae aequalis eft fummae omnium fequentium ponduſculorum D + E + F, vt in praecedentibus vidimus. Propria vero corporis C grauitas efficit, vt corpus per Cc vrgeatur vi $= \frac{C.Cc}{cQ}$. At vis tendens filum CD, refoluta retrahet corpus C a verticali vi $= \frac{(D+E+F)Dr}{cd}$. Quare tota vis, qua C fecundum Cc vrgetur erit $= \frac{C.Cc}{cQ} - \frac{(D+E+F)Dr}{cd}$. Si ergo tempus per Ca aequale effe debeat tempori, quo pendulum fimplex longitudinis f defcenfum abfoluit, erit $\frac{C.Cc}{f} = \frac{C.Cc}{cQ} - \frac{(D+E+F)Dr}{cd}$. Similis aequatio inuenitur pro fingulis corpufculis, ita vt prodeant tot aequationes, quot Figura 4.

 funt

ſunt corpuscula. Ex quibus aequationibus ſitus corpusculorum determinabitur, qui pro numero eorum variari poterit.

§. 13. Longitudo penduli iſochroni f ſemper aequalis eſt vltimae fili parti E F ad lineam verticalem Of vsque productae, nempe rectae FT. Atque figura OABC etc. in deſcenſu ita immutabitur vt puncta P, Q, R, S, T maneant inuariata. Ex quo perſpicitur diſtantias Aa, Bb, etc. in eadem ratione diminitum iri, id quod etiam ex hoc intelligitur, quod hae diſtantiae Aa, Bb, Cc etc. ſimul debeant confici; atque ſimiliter, quia vires acceleratrices his diſtantiis ſunt proportionales. Praeterea ex his elucet, ſi figura fili fuerit huiusmodi, vt alicubi tranſeat per lineam verticalem vt in C, in oſcillationibus huius fili punctum C perpetuo in eodem loco eſſe permanſurum. Pars igitur penduli CDEF circa punctum fixum C oſcillationes eodem tempore abſoluet, quo totum pendulum OABCDEF, ſimili modo intelligitur etiam ſupra O filum cum corpusculis continuari poſſe manente tempore oſcillationum. Ex parte ergo infima fili EF ſuperiores partes omnes in infinitum vsque poterunt determinari, vt totum filum perpetuo in oſcillando ad lineam verticalem peueniat.

Figura 5. §. 14. Sint nunc tam omnia corpuscula quam eorum inter ſe interualla aequalia, erunt EF, DE, CD etc. nec non ef, de, cd etc. inter ſe aequalia. Ponatur longitudo penduli ſimplicis iſochroni FT ſeu $f\mathrm{T}=f$, et F$f=a$, et diſtantia duorum corpusculorum proximorum

morum $= b$; ex his determinari poterit ſitus cuiusque corporis. Nam vis ſollicitans corpus E per Ee aequalis eſt $\frac{E.Ee}{eS} - \frac{F.Ft}{ef}$, quae aequalis eſſe debet $\frac{E.Ee}{f}$, vnde ob aequalia corpora erit $\frac{Ee}{f} = \frac{Ee}{eS} - \frac{Ft}{ef}$. Eſt vero $Ff - Ee : ef = a : f$ vnde $Ee = \frac{a(f-b)}{f}$. Porro eſt $Ee - Dd : b = Ee : eS$. et $Ft = Ff - 2Ee + Dd$. Vnde inuenitur $Dd = \frac{a(2ff - 4bf + b^2)}{2ff}$. Quia porro eſt $\frac{Dd}{f} = \frac{Dd}{dR} - \frac{2Es}{cd}$ et $\frac{Dd - Cc}{b} = \frac{Dd}{dR}$ et $Es = Ee - 2Dd + Cc$ prodibit $Cc = \frac{a(6f^3 - 18bf^2 + 9bbf - b^3)}{6f^3}$. Simili modo ob $\frac{Cc}{f} = \frac{Cc}{cQ} - \frac{3Dr}{b}$ et $\frac{Cc}{cQ} = \frac{Cc - Bb}{b}$ et $Dr = Dd - 2Cc + Bb$ obtinebitur $Bb = \frac{a(24f^4 - 96bf^3 + 72b^2ff - 16b^3f + b^4)}{24f^4}$. Quae eſt diſtantia quinti corpuſculi a linea verticali. Hinc concluditur diſtantia corpusculi $(n+1)$ indicis a linea verticali $= a\left(1 - \frac{nb}{1.f} + \frac{n.(n-1)b^2}{1.\ 4.\ f^2} - \frac{n(n-1)(n-2)b^3}{1.\ 4.\ 9.\ f^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)b^4}{1.\ 4.\ 9.\ 16.\ f^4} - \text{etc.}\right)$

§. 15. Si interualla OA, AB, BC etc. fuerint infinite parua, vt tanquam elementa curuae OABCD etc. conſiderari queant, innoteſcet hinc natura huius lineae curuae, quae oſcillans tota eodem momento ad lineam verticalem pertingit. Nam cum in quouis loco ſit $\frac{C.Cc}{f} = \frac{C.Cc}{cQ} - \frac{(D+E+F)Dr}{cd}$, ſi fc ſumatur pro abſciſſa et Cc pro applicata, erit CQ ſubtangens curuae in C, $(D+E+F)$ erit pondus omnium ponduſculorum, quibus pars fili infra C eſt onerata, cd eſt elementum abſciſſae et Dr per differentiale ſecundi gradus applicatae dabitur. Symbola ergo loco horum ſubſtituta expriment naturam

curuae

curuae quaesitae. Atque haec curua erit ipsa figura catenae oscillantis, quae in lineam rectam mutatur, quoties ad lineam verticalem peruenit. At siue catena vbique sit eiusdem crassitiei, siue secus, elementa curuae OA, AB, BC etc. nihilominus aequalia accipi possunt, dummodo ponduscula pro natura catenae recte assumantur. Sumtis autem elementis curuae aequalibus, elementa abscissae quoque erunt aequalia, atque Dr erit differentiale secundi gradus applicatae.

Figura 6. §. 16. Sit igitur OMB catena seu funis vtcunque crassus ex O suspensus, atque talem figuram habens OMB, vt figuram rectilineam OA induat, cum in situm verticalem peruenerit. Exprimat curua DQ crassitiem funis in singulis punctis, ita vt pondus portionis BM exponatur area APQD, et pondus elementi Mm areola PpqQ. Nunc ad naturam curuae OMB inueniendam ponatur $Op = t$, $pM = y$; et $AP = x$ atque $PQ = p$, erit $t + x$ quantitas constans, et $dt = -dx$. Pondus igitur funis BM erit $= \int p\,dx$, quod respondet in superiori aequatione ipsi $(D + E + F)$, atque quod ibi erat C hic nobis erit $p\,dx$, vel $p\,dt$ si ab O computamus; Cc vero erit y, et cQ subtangens $PT = \frac{y\,dt}{dy} = \frac{-y\,dx}{dy}$, atque $cd = dt$. Posito autem elemento dt constante huius respectu, quia y crescit, erit Dr in superiore casu $= ddy$. His ergo in aequatione superiore $\frac{C.Cc}{f} = \frac{C.Cc}{cQ} - \frac{(D+E+F)Dr}{cd}$ substitutis prodibit ista aequatio $\frac{yp\,dt}{f} = \frac{p\,dt\,dy}{dt} - \frac{ddy \int p\,dx}{dt}$, quae loco dt posito $-dx$ abit in hanc $\frac{yp\,dx^2}{f} = -ddy \int p\,dx - p\,dx\,dy$, vbi f denotat subtangentem AF in infimo

fimo catenae puncto B. Quare fi fit $x = 0$ debebit effe $\frac{-y\,dx}{dy} = f$, id quod aequatio iam indicat, facto enim $\int p\,dx = 0$ fit $\frac{y\,dx}{f} = -dy$.

§. 17. Ad hanc aequationem ad differentialem primi gradus reducendam pono $y = e^{\int z\,dx}$, erit $dy = e^{\int z\,dx} z\,dx$ et $ddy = e^{\int z\,dx}(dz\,dx + z^2\,dx^2)$ exiftente e numero, cuius log. eft $= 1$. His fubftitutis prodit $\frac{p\,dx}{f} = -dz\int p\,dx - z^2\,dx\int p\,dx - pz\,dx$, quae pofito $z = \frac{u}{\int p\,dx}$ tranfit in hanc $\frac{p\,dx}{f} = -du - \frac{u^2\,dx}{\int p\,dx}$, quae fi conftrui poterit, fimul habebitur curua quaefita. At per feries commodius definietur ex data abfciffa x applicata y. Hac quidem aequatione magnitudo ipfius applicatae y non determinatur, fed applicatarum inter fe relationes. Quare fi curua fuerit conftructa pro finito ipfius y valore, poftea applicatae n eadem ratione in infinitum diminuantur, quo prodeat curua quaefita.

§. 18. Si catena vbique fuerit eiusdem craffitiei ita vt p fit quantitas conftans; habebitur pro curuatura huius catenae quaefita haec aequatio $\frac{y\,dx^2}{f} = -x\,ddy - dx\,dy$, feu $\int y\,dx = -\frac{fx\,dy}{dx}$. Vnde fequens elegans huius curuae proprietas confequitur: aream APMB aequari facto ex conftante AF et portione Nt, quam tangens TM ad AB producta et verticalis MN abfcindunt, feu Nt femper proportionas eft areae APMB. Facta vero in hac aequatione fubftitutione $y = e^{\int z\,dx}$ prodibit $\frac{dx}{f} = -x\,dz - z^2 x\,dx - z\,dx$; atque facto $zx = u$ erit $\frac{dx}{f} = -du - \frac{u^2\,dx}{x}$. Quae aequatio, cum integrationem non admit-

admittat, ad ſeries eſt confugiendum. Dat autem aequatio $y\,dx^2 + fx\,ddy + f\,dx\,dy = 0$ ſequentem ſeriem, poſito a pro prima applicata AB; $y = a\left(1 - \frac{x}{1.f} + \frac{x^2}{1.4.f^2} - \frac{x^3}{1.4.9.f^3} + \frac{x^4}{1.4.9.16\,f^4} - \text{etc.}\right)$ eritque $dy = -\frac{a\,dx}{f}\left(1 - \frac{x}{1.2.f} + \frac{x^2}{1.4.3\,ff} - \frac{x^3}{1.4.9.4.f^3} + \text{etc.}\right)$. Ex quibus aequationibus omnia, quae de curua quaeſita requiri poſſunt, inuenire licet.

§. 19. Ex aequatione pro curua inuenta apparet facta x negatiua curuam infra B in infinitum quoque progredi, quae autem pars ad catenam repraeſentandam eſt inepta. Radius oſculi vero curuae in M eſt $\frac{dx^2}{-ddy}$, ob elementum curuae aequale elemento abſciſſae, eſt vero $\frac{dx^2}{ddy} = \frac{ff}{a\left(\frac{1}{1.2} - \frac{x}{1.2.3.f} + \frac{x^2}{1.4.3.4.f^2} - \frac{x^3}{1.4.9.4.5.f^3} + \frac{x^4}{1.4.9.16.5.6f^4} - \right)}$. Quare vbi haec ſeries in denominatore fit $= 0$, fit $ddy = 0$, ibique curua habebit punctum flexus contrarii.

§. 20. Tota autem curuae pars ſupra B, quae in infinitum aſcendit, ad catenam repraeſentandam erit accommodata; quare inueſtigari conuenit figuram portionis curuae ſupra B. Et quidem ſi $x = f$ ſeu $AP = AF$ fiet $y = 0,223892\,a$, ſi $x = 2f$ ſit $y = -0,19654\,a$ curua ergo in hac altitudine in alteram partem rectae OA vergit. Loca in quibus curua per verticalem OA tranſit inueniri debent ex hac aequatione $1 = \frac{x}{1.f} - \frac{x^2}{1.4.f^2} + \frac{x^4}{1.4.9.f^3} - \frac{x^4}{1.4.9.16.f^4} + \text{etc.}$ quae dabit infinitos valores loco x, ſeu pro diſtantiis interſectionum curuae et verticalis ab imo puncto A. Primae autem interſectionis

nis O inuenitur distantia $OA = 1,44 f$, ita vt FO ipsius FA sit fere dimidium. Reliqua puncta intersectionum magis distant. Simili modo curua in infinitis punctis habebit tangentem verticalem, atque etiam infinita puncta flexus contrarii; Figuram curuae exhibui in fig. 7. in qua tria intersectionum puncta O, O, O repraesentantur. Figura 7.

§. 21. Consideremus etiam catenas non aequaliter crassas, quarum tamen figura facilius possit determinari. Ad hoc igitur ponamus $p = x^n$ et $\int p\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, ex quibus conficitur haec aequatio; $\frac{y\,dx^2}{f} + \frac{x\,ddy}{n+1} + dx\,dy = 0$, quae reductione in §. 17 adhibita transit in hanc $\frac{x^n dx}{f} = -du - (n+1)u^2 x^{-n-1} dx$. Haec vero aequatio, quia conuenit cum ea, quam *Com. Riccati* proposuit, separationem admittit quoties $2n$ est numerus integer impar, siue affirmatiuus siue negatiuus. Sit $2n = -1$, seu $p = \frac{1}{\sqrt{x}}$, ita vt crassities catenae sit reciproce vt radix quadrata ex longitudine catenae a puncto infimo B sumta; aequatio differentio-differentialis adeo integrationem admittet, erit nimirum $\frac{y^2 dx^2}{2f} + 2x\,ddy + dx\,dy = 0$, quae in dy ducta et integrata dat $\frac{y^2 dx^2}{2f} + x\,dy^2 = \frac{a^2 dx^2}{2f}$ posita $AB = a$, seu $\frac{dx}{\sqrt{2fx}} = \frac{-dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$, cuius integralis est $\sqrt{\frac{2x}{f}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} =$ arcui circuli, cuius cosinus est $\frac{y}{a}$, existente radio $= 1$.

§. 22. In hac igitur curuatura puncta O, O, O, etc. in quibus curua verticalem A O ſecat, habentur ponendo $y = 0$. Poſita autem ratione diametri ad peripheriam $1 : \pi$, erit $-\int \frac{dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$ poſito $y = 0$ terminus ex hac ſerie $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ etc. horum enim arcuum coſinus ſunt $= 0$. Quare erit A O terminus quilibet ex hac ſerie $\frac{f\pi^2}{32}, \frac{9f\pi^2}{32}, \frac{25f\pi^2}{32}, \frac{49f\pi^2}{32}$, etc. Inter quosuis binos nodos applicata maxima eſt $= a$, vbi etiam tangens eſt verticalis. Facto autem $y = \pm a$ erit $\int \frac{-dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$ terminus ex hac ſerie $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}$, etc. Diſtantiae ergo horum punctorum ab infimo A conſtituent hanc ſeriem $\frac{f\pi^2}{8}, \frac{f\pi^2}{2}, \frac{9f\pi^2}{8}, 2f\pi^2, \frac{25f\pi^2}{8}$ etc. vbi terminis primo, tertio, quinto etc. reſpondet $= -a$, reliquis $y = a$. Puncta flexus contrarii huius curuae habebuntur faciendo $ddy = 0$. Eſt vero $ddy = \frac{-y\,dx^2}{2fx} - \frac{dx\,dy}{2x} = \frac{-y\,dx^2}{2fx} + \frac{dx^2\sqrt{(a^2 - y^2)}}{2x\sqrt{2fx}}$. Quare puncta flexus contrarii ibi erunt, vbi eſt $\frac{y}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} = \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{2x}}$, ſeu vbi eſt $\frac{\sqrt{(a^2 - y^2)}}{y} = -\int \frac{dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$. Ad ea igitur inuenienda quaerantur arcus, qui aequales ſint ſuis cotangentibus; ſint hae cotangentes $= t$ erit $\sqrt{\frac{2x}{f}} = t$ ſeu $x = \frac{ftt}{2}$. Hoc vero cum infinitis caſibus accidere poſſit, prodibunt infinita puncta flexus contrarii.

§. 23. Quicunque autem fuerit numerus n aequatio differentio-differentialis $\frac{y\,dx^2}{f} + \frac{x\,ddy}{n+1} + dx\,dy = 0$ in ſeriem converſa dabit $y = a\left(1 - \frac{x}{f} + \frac{(n+1)x^2}{1.2.(n+2)f^2} - \frac{(n+1)^2 x^3}{1.2.3.(n+2)(n+3)f^3} + \frac{(n+1)^3 x^4}{1.2.3.4.(n+2)(n+3)(n+4)f^4} - \text{etc.}\right)$. Ponatur $\frac{-(n+1)x}{f} = q$ erit $\frac{y}{a} = 1 + \frac{q}{1.(n+1)} + \frac{q^2}{1.2.(n+1)(n+2)} +$

q^2

$\frac{q^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot(n+1)(n+2)(n+3)}+$ etc. Ad huius feriei fummam methodo mea conftruendam pono eius fummam effe $\int R z^m dz(1-z^b)^k : H$ hoc integrali ita accepto vt euanefcat pofito $z=0$, et poftmodum pofito $z=1$. H vero eft $=\int z^m dz(1-z^b)^k$ fi poft integrationem ponatur $z=1$: at $m+1$ et $k+1$ et b debent effe numeri affirmatiui. Sit $R=1+Ag(1-z^b)+Bg^2(1-z^b)^2+Cg^3(1-z^b)^3+$ etc. quae feries talis debet accipi vt fummationem admittat. His pofitis $\frac{\int R z^m dz(1-z^b)^k}{H}$, ita acceptum vt euanefcat pofito $z=0$, aequabitur huic feriei $1+\frac{A(k+1)}{(m+b(k+1)+1)}bg+\frac{B(k+1)(k+2)}{(m+b(k+1)+1)(m+b)(k+2)+1)}b^2g^2+$ etc. Cui ergo feriei illa inuenta pro $\frac{y}{a}$ eft aequalis ponenda.

§. 24. Pono autem $A=\frac{r}{\pi(\pi+\rho)}$, $B=\frac{A}{(\pi+2\rho)(\pi+3\rho)}$, $C=\frac{B}{(\pi+4\rho)(\pi+5\rho)}$ etc. et fcripto s^2 loco $g(1-z^b)$ erit $R=1+\frac{r}{\varrho^2}e^{\frac{s}{\varrho}}s^{\frac{\rho-\pi}{\rho}}\int e^{\frac{-2s}{\varrho}}ds\int e^{\frac{s}{\rho}}s^{\frac{\pi-\rho}{\varrho}}ds$. Quae duplex integratio ita eft accipienda vt facto $s=0$, fiat $R=1$, et $dR=0$. Fiat nunc in hac ferie $bg=q$, vt quisque terminus huius feriei in terminum refpondentem illius transmutetur. Quo igitur termini indicis η fiant aequales, habebitur ifta aequatio $\eta(\eta+n)(\eta+k)=(2\eta\rho+\pi-2\varrho)(2\eta\varrho+\pi-\rho)(\eta k+m+1+bk)$, ex qua erit $1=4b\varrho^2$; $k+n=4\varrho^2(m+1+bk)+2\varrho b(2\pi-3\varrho)$; $nk=b(\pi-2\varrho)(\pi-\varrho)+2\varrho(2\pi-3\varrho)(m+1+bk)$, atque $0=(\pi-2\varrho)(\pi-\varrho)(m+1+bk)$. Vnde tres fequuntur folutiones. Prima eft $\pi=2\varrho$; hinc erit $k + n = 4\varrho^2(m + 1 + bk) + 2\varrho^2 b$; $kn = 2\varrho^2(m + 1 + bk)$ et $1 = 4\varrho^2 b$, ex quibus prodit $k = \frac{1}{2}$; $b = 2$, $m = 2n - 2$, $\varrho = \frac{\pm 1}{2\sqrt{2}}$ et $\pi = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$, quae ſolutio ſemper locum habet, ſi modo $2n > 1$. Secunda ſolutio habetur ponendo $\pi = \varrho$, tumque erit $\varrho^2 = \frac{1}{4b}$; $k + n = 2\varrho^2(2m + 2 + 2bk - b)$ et $nk = -2\varrho^2(m + 1 + bk)$, vnde ſequitur $k = -\frac{1}{2}$; $b = 2$; $m = 2n$; $\varrho = \frac{\pm 1}{2\sqrt{2}}$ et $\pi = \frac{\pm 1}{2\sqrt{2}}$ haec ſolutio valet ſi modo $2n + 1$ eſt numerus affirmatiuus. Tertia ſolutio dat $m + 1 + bk = 0$, quae quia $m + 1$, b et $k + 1$ debent eſſe numeri affirmatiui, k erit inter 0 et -1 interceptum, ſit $k = -\varkappa$, erit $m + 1 = b\varkappa$; $\varrho^2 = \frac{1}{4b}$; $n - \varkappa = 2\varrho b(2\pi - 3\varrho)$ et $-n\varkappa = b(\pi - 2\varrho)(\pi - \varrho)$, atque ex his duae naſcuntur ſolutiones, quarum altera eſt $\varrho = 1$; $\pi = 2n + 1$; $k = + n - \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{4}$; et $m + 1 = \frac{1}{8} - \frac{n}{4} = \frac{1 - 2n}{8}$. Altera ſolutio eſt $\varrho = \frac{1}{2}$; $\pi = 2n + 2$, $k = n + \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{1}$ et $m + 1 = -\frac{1 - 2n}{8}$; debet ergo n eſſe numerus negatiuus atque $-n < \frac{3}{2}$, et $-n > \frac{1}{2}$.

§. 25. Locum habeat ſecunda ſolutio vt maxime generalis, erit $s = \sqrt{\frac{q}{2}}(1 - z^2)$ et $R = 1 + 8 e^{2s\sqrt{2}} \int e^{-4s\sqrt{2}}$

$$ds \int e^{2s\sqrt{2}} ds = \frac{e^{2s\sqrt{2}} + e^{-2s\sqrt{2}}}{2} = \frac{e^{2\sqrt{q}(1 - zz)} + e^{-2\sqrt{q}(1 - zz)}}{2}.$$

Deinde inuenitur H ſi in $\int z^{2n} dz (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}}$ ita integrato, vt euaneſcat poſito $z = 0$, ponatur $z = 1$. Hoc inuento erit $\int \frac{z^{2n} dz (e^{2\sqrt{q}(1 - zz)} + e^{-2\sqrt{q}(1 - zz)})}{2H\sqrt{(1 - zz)}}$, ſi poſt integrationem ponatur $z = 1$, aequale ipſi $\frac{y}{a}$. Exibit enim z ex calculo et remanebit tantum q, cuius loco

ſi

ſi ſubſtituatur $\frac{-(n+1)x}{f}$ habebitur aequatio pro curua quaeſita in qua intederminatae x et y ſunt a ſe inuicem ſeparatae. Ponatur $\sqrt{(1-zz)}=t$, erit $z=\sqrt{(1-tt)}$ et $dz=\frac{-t\,dt}{\sqrt{(1-tt)}}$, quibus ſubſtitutis erit $\frac{y}{a}=+\int\frac{(1-tt)^{\frac{2n-1}{2}}dt}{2H}(e^{2t\sqrt{q}}+e^{-2t\sqrt{q}})$ ſi ita integretur, vt euaneſcat poſito $t=0$, et poſtmodum ponatur $t=1$. Quoties igitur $\frac{2n-1}{2}$ eſt numerus integer affirmatiuus ſeu $2n$ numerus integer affirmatiuus impar, hoc integrale re ipſa poteſt exhiberi. Hinc igitur quoque fluit conſtructio aequationis Riccatianae cum ea, quam ante aliquot annos dedi, congruens.

ME-