INVESTIGATIO BINARVM CVRVARVM, QVARVM ARCVS EIDEM ABSCISSAE RESPONDENTES SVMMAM ALGEBRAICAM CONSTITVANT.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Problema, cuius ſolutionem hac diſſertatione exponere conſtitui, ſequentes continet conditiones. Requiruntur in eo I. duae curuae algebraicae, quarum II. neutra ſit rectificabilis, quae tamen ita debent eſſe comparatae, vt duo arcus III. eidem abſciſſae reſpondentes IV. ſummam conſtituant algebraicam. Harum quatuor conditionum quacunque omiſſa problema fit ſolutu admodum facile, omnibus autem ſatisfacere maxime videtur difficile. Prima quidem conditione omiſſa, ſi admittantur curuae tranſcendentes, reliquis conditionibus facile ſatisfiet. Si ſecunda omittatur, quaelibet duae curuae algebraicae et rectificabiles problemati ſatisfacient. Tertia quidem neglecta difficilior eſt ſolutio, ſed tamen ex iis quae Celeb. Viri *Hermanus* et *Bernoullius* de reductione quadraturarum ad rectificationes cur-

curuarum algebraicarum dederunt, solutio facile deducitur. Quarta autem conditio, si omittatur, ne quidem problema erit, cum omnes curuae algebraicae non rectificabiles reliquis conditionibus satisfaciant.

§. 2. Ad generalem huius problematis solutionem vtor formulis, quas citati Viri Celeb. dederunt pro curuis vel rectificabilibus, vel quarum rectificatio a data quadratura pendet. His enim formulis effici potest, vt curuae sint algebraicae, vt sint non rectificabiles, atque vt arcuum summa sit rectificabilis. Monstrabo vero etiam, quomodo abscissae aequales reddi possint. Quo facto omnibus conditionibus erit satisfactum, atque problema generaliter solutum. Tam late enim istae formulae patent, vt, nisi praeter necessitatem restrictio adhibeatur, omnes omnino curuas problemati satisfacientes exhibere debeant.

§. 3. Designatis igitur curuis quaesitis per litteras A et B, erit ex illis formulis

in Curua A		in Curua B	
abscissa	$\frac{(dP^2-dQ^2)^{\frac{3}{2}}}{dQddP-dPddQ}$	abscissa	$\frac{(dp^2-dq^2)^{\frac{3}{2}}}{dqddp-dpddq}$
applicata	$P+\frac{dQ(dP^2-dQ^2)}{dQddP-dPddQ}$	applicata	$p+\frac{dq(dp^2-dq^2)}{dqddp-dpddq}$
arcus	$Q+\frac{dP(dP^2-dQ^2)}{dQddP-dPddQ}$	arcus	$q+\frac{dp(dp^2-dq^2)}{dqddp-dpddq}$

His formulis iam obtinetur, quod alias maximam pareret difficultatem, vt ambae curuae sint algebraicae, si modo si modo P ponatur quantitas algebraica. Deinde rectificabiles non erunt, si Q et q quantitates transcendentes inuoluunt. Tertio arcuum summa erit rectificabilis si $Q+q$ fuerit quantitas algebraica, etiamsi Q et q seorsim tales non sint. Cum autem his conditionibus fuerit satisfactum, abscissae inter se aequales sunt efficiendae.

§. 4. Efficiamus primo abscissas inter se aequales eritque $\frac{(dP^2-dQ^2)^{\frac{3}{2}}}{dQ\,ddP-dP\,ddQ}=\frac{(dp^2-dq^2)^{\frac{3}{2}}}{dq\,ddp-dp\,ddq}$. Fiat ad hoc praestandum $dQ=R\,dP$ et $dq=r\,dp$. Quo posito habebitur $\frac{(1-R^2)^{\frac{3}{2}}dP}{-dR}=\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}dp}{-dr}$, hincque $dP=$ $\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}dR\,dp}{(1-R^2)^{\frac{3}{2}}dr}$; quod differentiale, quia P debet esse quantitas algebraica, est integrabile reddendum. Sunt autem R et r quantitates algebraicae, ob curuas A et B algebraicas, quare et $\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}dR}{(1-R^2)^{\frac{3}{2}}dr}$ erit quantitas algebraica. Posito igitur breuitatis gratia $\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}dR}{(1-R^2)^{\frac{3}{2}}dr}$ $=T$, erit $dP=T\,dp$, seu $P=Tp-\int p\,dT$. Quo ergo P sit quantitas algebraica, facio $\int p\,dT=N$, eritque $p=\frac{dN}{dT}$ et $P=\frac{T\,dN}{dT}-N$.

§. 5. Hac igitur ratione iam assecuti sumus valores algebraicos pro P et p, quibus substitutis vtriusque curuae abscissae fiunt aequales. Praeterea curuae ipsae erunt algebraicae, si modo R, r et N fuerint tales. Sed quo arcuum summa fiat quoque algebraica, Q et q ita determinari debent, vt $Q+q$ sit quantitas algebraica. Est vero $Q+q=\int R\,dP+\int r\,dp=RP+rp-\int P\,dR-\int p\,dr$. Ponatur igitur $\int P\,dR+\int p\,dr=M$, eritque $P=\frac{dM-p\,dr}{dR}$. Atque $Q+q=RP+rp-M$.

§. 6. Cum autem iam supra inuentum sit $p=\frac{dN}{dT}$ et $P=\frac{T\,dN}{dT}-N$, substituantur hi valores in aequatione $P\,dR+p\,dr=dM$. Quo facto prodibit $\frac{T\,dN\,dR}{dT}-N\,dR+\frac{dN\,dr}{dT}=dM$. Quia vero M est quantitas algebraica, oportet vt hic ipsius dM valor possit integrari. Integratione autem instituta prodit $M=\frac{TN\,dR}{dT}+\frac{N\,dr}{dT}-\int N(dR+d.\frac{T\,dR}{dT}+d.\frac{dr}{dT})$. Sit itaque hoc integrale $=u$, ideoque debet esse $N=\dfrac{du}{dR+d.\frac{T\,dR}{dT}+d.\frac{dr}{dT}}$; vbi pro R, r et u quantitates quaecunque algebraicae accipi poterunt.

§. 7. Sumtis igitur pro R, r et u functionibus quibuscunque indeterminatae z, dabitur quoque T in z cum sit $T=\dfrac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}dR}{(1-R^2)^{\frac{3}{2}}dr}$. Atque ex postrema aequatione reperietur quoque N in z. Inuenta autem N habebitur $M=\frac{TN\,dr}{dT}+\frac{N\,dR}{dT}-u$. Similique modo dabuntur

buntur P et p per z ex aequationibus $P = \frac{TdN}{dT} - N$ et $p = \frac{dN}{dT}$. Denique habebitur $Q + q = RP + rp - M$.

§. 8. His igitur determinationibus consecuti sumus primo; vt curuarum A et B abscissae sint aequales, secundo vt vtraque curua sit algebraica, et tertio vt arcuum summa sit rectificabilis. Quare videamus, an quoque conditioni reliquae, qua vtraque curua per se debet esse irrectificabilis, sit satisfactum. Hoc quidem iam factum esse videtur, cum nusquam neque Q neque q seorsim integrabiles fecerimus. Attamen ne forte algebraici valores pro Q et q proueniant, cauendum tantum est ne $\frac{dr\,dN}{dT}$ fiat integrabile. Nam cum sit $dq = r\,dp$ erit $q = rp - \int p\,dr = rp - \int \frac{dr\,dN}{dT}$. Atque $Q = RP - M + \int \frac{dr\,dN}{dT}$.

§. 9. Quo autem appareat, quomodo euitari possit integrabilitas ipsius $\frac{dr\,dN}{dT}$, problema etiam quinta adiecta conditione soluam, qua postuletur vt curua vtraque non solum sit irrectificabilis, sed etiam vt vtriusque rectificatio a data pendeat quadratura, puta a $\int Z\,dz$. Ad hoc igitur efficiendum debebit $\int \frac{dr\,dN}{dT}$ ad $\int Z\,dz$ reduci. Est vero $\int \frac{dr\,dN}{dT} = \frac{N\,dr}{dT} - \int N d.\frac{dr}{dT} = \frac{N\,dr}{dT} - \int \frac{du\, d.\frac{dr}{dT}}{dR + d.\frac{TdR}{dT} + d.\frac{dr}{dT}}$ posito loco N eius valore §. 6. inuento.

§. 10. Ponatur breuitatis gratia $\frac{d.\frac{dr}{dT}}{dR + d.\frac{TdR}{dT} + d.\frac{dr}{dT}} = S$, quae ergo quantitas ex solis r et R est composita.

posita. Quare erit $\int\frac{dr\,dN}{dT} = \frac{N\,dr}{dT} - \int S\,du = \frac{N\,dr}{dT} - Su + \int u\,dS$. Fiat igitur $\int u\,dS = \int Z\,dz$, vnde reperitur $u = \frac{Z\,dz}{dS}$. Hoc igitur pro u valore accepto, vtriusque curuae inuentae rectificatio a quadratura $\int Z\,dz$ pendebit. Erit enim $\int\frac{dr\,dN}{dT} = \frac{N\,dr}{dT} - \frac{SZ\,dz}{dS} + \int Z\,dz$. Deinde cum eadem quadratura infinitis modis possit exhiberi, non solum per arbitrarios ipsarum R et r valores varietas infinita obtinetur, sed etiam per innumeros ipsius u valores; quibus tamen omnibus efficitur, vt curuarum inuentarum omnium rectificatio a quadratura proposita $\int Z\,dz$ pendeat.

§. 11. Hac igitur ratione innumerabilibus modis solui problema non solum, vt initio proposueram, sed adiecta insuper conditione pendentiae rectificationis curuarum inueniendarum a data quadratura. Problema igitur hactenus solutum ita est proponendum. Duas inuenire curuas algebraicas, quarum vtriusque rectificatio a data pendeat quadratura, duorum autem arcuum eidem abscissae respondentium summa sit rectificabilis.

§. 12. Ipsae autem curuae quaesitae determinabuntur ex assumtis pro literis R et r valoribus algebraicis atque ex u propositam quadraturam introducente. Ex his enim reperiuntur P et p, quibus inuentis erit curuae A abscissa $= \frac{(1-R^2)^{\frac{3}{2}}dP}{-dR}$ et applicata $= P + \frac{R\,dP(1-R^2)}{-dR}$. Alterius vero curuae B abscissa $= \frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}dp}{-dr}$, quae aequalis

lis erit illius abſciſſae; at applicata erit $= p + \frac{r\,dp(1-r^2)}{-dr}$ Arcus autem curuae A exprimetur formula $\frac{dP(1-R^2)}{-dR} + \int R\,dP$, et curuae B arcus eidem abſciſſae reſpondens erit $\frac{dp(1-r^2)}{-dr} + \int r\,dp$. Pendebit autem tam $\int R\,dP$ quam $\int r\,dp$ a $\int Z\,dz$: nihilo tamen minus $\int R\,dP + \int r\,dp$ algebraice poterit exhiberi.

§. 13. Denique ex ipſa ſolutione ſatis intelligitur me non mônente eadem opera ſolui poſſe problema, ſi non arcuum ſumma, ſed differentia eorum debeat eſſe algebraica, vel etiam ſumma ſeu differentia quorumcunque multiplorum horum arcuum. Quamobrem ſuperfluum foret, hos quoque caſus attingere. Ad inſtitutum quidem plenius perſequendum requireretur, vt exempla quaedam euoluerentur, ſed cum ad prolixiſſimos calculos eſſet perueniendum, ea potius omitto, aliisque inueſtiganda relinquo.
