



METHODVS VNIVERSALIS  
SERIERVM CONVERGENTIVM  
SVMMAS

QVAM PROXIME INVENIENDI.

AVCTORE

*Leonb. Eulero.*

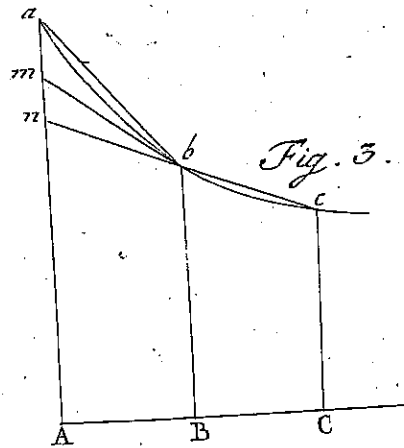
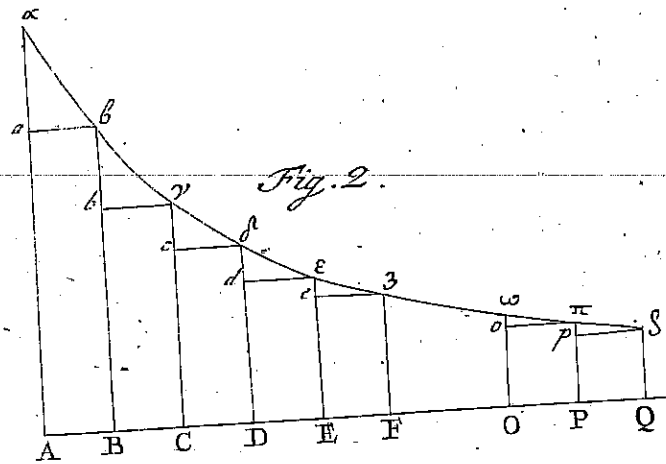
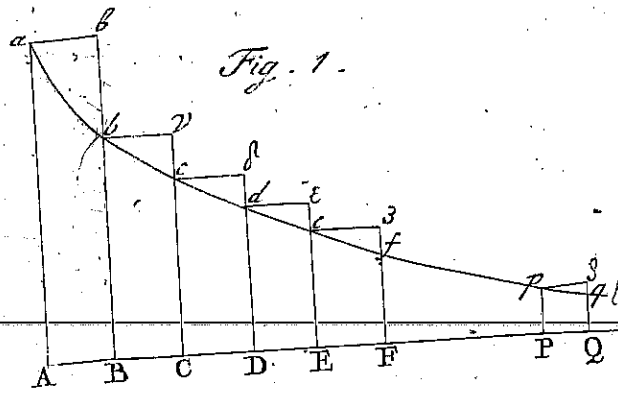
§. I.

**I**Ncidi iam pridem in peculiarem serierum summas proxime inueniendi modum, qui integratione perficiebatur, et admodum facile cuiusuis seriei propositae conuergentis summam exhibebat. Dedi etiam huius methodi specimina iam aliquoties, in dissertatione de seriebus harmonicis; eam autem fusius exponere magisque perficere tum temporis non vacabat, etiamsi perspicerem ex ea multa praeclara subsidia ad summationem serierum posse deriuari. Hac autem ratione serierum summationem ad integrationem reducebam. Posito numero terminorum  $n$ , eorumque summa  $s$ , si crescat  $n$  unitate, summae  $s$  augmentum erit terminus seriei sequens, qui per  $n$  dabitur. Sit is  $x$ , eritque

Tabula I.

A 2

$x$



## METHODVS VNIVERSALIS

$x$  quantitas valde exigua, si  $n$  fuerit numerus satis magnus. Consideratis nunc  $x$  et  $n$  instar incrementorum momentaneorum quantitatum  $n$  et  $s$  erit  $dn:ds = 1:x$  ideoque  $ds = xdn$  et  $s = \int xdn$ . In qua integratione quidem constantem incognitam addi oportet, quae autem si summa  $s$  a summa seriei in infinitum continuatae, quae ex eadem integratione innotescit, subtrahatur, rursus exit ex calculo. Hoc itaque modo obtinetur terminorum ab  $x$  vsque in infinitum summa, quae ad summam  $s$  ipso actu inueniendam addita, dabit seriei propositae in infinitum continuatae summam.

§. 2. Obseruavi autem hoc modo semper summam seriei nimis paruum prodire, id quod mihi occasionem praebuit cogitandi, an alio simili tamen modo summa nimis magna possit produci, quo limites habeantur, intra quos vera seriei summa sit constituta. In quo negotio maximam afferri lucem animaduerti, si, quae ante per solum calculum praefiteram, ad considerationem linearum curuarum reducantur. Hoc enim modo inspectio figurae non solum imaginationis vim adauget, sed etiam ad iudicandum et inueniendum ingens affert subsidium. Traduxi autem sequenti modo seriei summationem ad figuram geometricam, cuius quadratura ipsam summam exhibet.

Figura 1. §. 3. Sit series, cuius summa inuestigatur,  $a + b + c + d + c + \text{etc.}$  in qua terminus cuius index est  $n$  sit  $x$  quantitas scilicet ex  $n$  vtcunque composita. Sumantur in axe  $AP$  partes  $AB, BC, CD, DE$  etc. inter se aequales et unitate denotentur. In punctis  $A, B, D,$  etc.

SERIERVM CONVERGENTIVM SVMMAS INV. 5

etc. erigantur applicatae  $Aa, Bb, Cc, Dd$  etc. respective aequales terminis seriei propositae  $a, b, c, d$ , etc. Atque sumta  $AP = n - 1$  fiat applicata  $Pp = x$ . Ad has applicatas et portiones axis  $= 1$  compleantur parallelogramma  $A\beta, B\gamma, C\delta, D\varepsilon$ , etc. usque ad  $P\zeta$ . Horum igitur parallelogrammorum summa exprimet seriei  $a + b + c + d + \dots + x$  summam. Quare ad huius seriei summam inveniendam methodo opus est commoda, qua horum parallelogrammorum aggregatum quam proxime possit definiri.

§. 4. Per puncta  $a, b, c, d, e, f, \dots, p$  intelligatur ducta linea curva  $abcdef, \dots, p$ , cuius haec erit natura, vt posita abscissa  $AP = n - 1 = t$  sit applicata  $Pp = x$ . Quia autem  $x$  est quantitas ex  $n$  et constantibus composita, si loco  $n$  ponatur  $t + 1$ , habebitur aequatio inter coordinatas  $t$  et  $x$  pro ista curva. Vel si terminus seriei vltimum sequens ponatur  $y$ , cuius ergo index erit  $n + 1$ , aequatio inter  $n$  seu  $AQ$  et  $y$  seu  $Qq$  exprimet quoque naturam curvae  $abc, \dots, pq$ . Data autem hac serie dabitur etiam  $y$  per  $n$ , vnde oritur aequatio inter  $n$  et  $y$  curvae naturam exprimens.

§. 5. Facta iam hac linea curva perspicuum est aream curvae inter abscissam  $AQ$  et applicatas  $Aa$  ac  $Qq$  contentam minorem esse quam aggregatum omnium rectangulorum  $A\beta + B\gamma$  etc.  $\dots + P\zeta$ ; quippe differentia est summa omnium triangulorum  $ab\beta, bc\gamma, \dots, p\zeta\zeta$ . Cum autem aggregatum illorum rectangulorum exhibeat summam seriei  $a + b + c, \dots, x$ , erit haec summa maior quam area  $AaQq$ . Quae ve-

ro area cum fit  $= \int y dn$ , hoc integrali ita accepto vt euanescat posito  $n=0$ ; erit  $a + b + c + \dots + x > \int y dn$ .

Figura 2.

§. 6. Inuento ergo vno limite, quo summa seriei est maior, alterum similem sequenti modo inuestigo. Sumtis iterum in axe AP partibus aequalibus AB, BC, CD, ----- PQ, quae singulae vnitate exprimantur; applicatae ita constituentur vt fit  $B\varepsilon = a$ ,  $C\gamma = b$ ,  $D\delta = c$ , sumtoque  $AP = n$  fit  $P\pi = x$ , et  $Q\varrho = y$ . Quemadmodum autem est  $y$  terminus vltimum  $x$  sequens; ita fit A terminus primum  $a$  antecedens; cui aequalis capiatur  $A\alpha$ . Quo facto aggregatum rectangulorum  $Ba + Cb + Dc + \dots + Po$  erit aequale summae seriei  $a + b + c + d + \dots + x$ .

§. 7. Nunc simili modo per puncta  $\alpha$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ , -----  $\pi$  concipiatur ducta linea curva  $\alpha\varepsilon\gamma\pi$ , cuius haec erit natura, vt sumta abscissa  $AP = n$  fit applicata  $P\pi = x$ . Area ergo, quae inter hanc curuam et abscissam AP comprehenditur, erit  $= \int x dn$  integrali hoc ita accepto vt euanescat posito  $n=0$ . Area vero ista maior est quam rectangulorum  $Ba$ ,  $Cb$ , -----  $Po$  aggregatum, quocirca erit  $a + b + c + d + \dots + x < \int x dn$ . Sunt ergo huius seriei limites  $\int x dn$  et  $\int y dn$ .

§. 8. Obtinebimus autem adhuc propiores summae huius seriei determinationes, consideratis triangulis paruis, in vtraque figura neglectis. Addi autem oportet in prima figura haec triangula ad aream curuae  $\int y dn$ , vt summa seriei obtineatur. Haec vero triangula sunt curui-

SERIERVM CONVERGENTIVM SVMMAS INV. 7

curvilinea, atque maiora quam si essent rectilinea, quia curva convexitatem obuertit. Summa autem horum triangulorum rectilineorum est aequalis  $(Aa - Qq)AB : 2$  seu  $\frac{a-y}{2}$ . Quare si ad  $\int y dn$  addatur  $\frac{a-y}{2}$  non satis addetur; ideoque erit  $a + b + c + \dots + x > \int y dn + \frac{a-y}{2}$ .

§. 9. In secunda figura ab area  $Aa\pi P$ , quae est  $\int x dn$ , subtrahi deberent omnia triangula  $aa\epsilon$ ,  $\epsilon b\gamma$  ---  $\omega o\pi$ , ad veram rectangulorum summam inveniendam. Sumatur autem loco trianguli curvilinei  $aa\epsilon$  minus rectilineum triangulum, quod oritur producta recta per  $\gamma$  et  $\epsilon$  donec occurrat rectae  $Aa$ , quod erit  $= \frac{a-b}{2}$  horumque triangulorum omnium summa erit  $\frac{a-y}{2}$ . Quia vero  $\frac{a-y}{2}$  minus est quam summa omnium curvilineorum triangulorum, si  $\frac{a-y}{2}$  subtrahatur a  $\int x dn$ , erit  $a + b + c + \dots + x < \int x dn - \frac{a-y}{2}$ .

Figura 2.

§. 10. Horum duorum novorum limitum prior vero valori multo est propior quam posterior. Ille autem  $\int y dn + \frac{a-y}{2}$  aliquantulum minor est quam summa  $a + b + c + \dots + x$  differentia enim est aggregatum omnium segmentorum arcibus  $ab, bc$  etc. et chordis  $ab, bc$  comprehensorum. Ad haec segmenta vero proxime aestimanda producatur chorda sequens  $cb$  in  $n$  vsque et  $an$  in  $m$  bisariam secetur recta  $lm$ , quae proxime pro tangente curvae in  $b$  haberi poterit. Hinc erit denovo quam proxime segmentum  $aba$ , pars tertia trianguli  $abm$ , et consequenter pars sexta trianguli  $abn$ .

Figura 3.

§. 11.

§. 11. Si ergo fuerit  $Aa = a$ ,  $Bb = b$  et  $Cc = c$ ,  
erit  $an = a - 2b + c$ , et ob  $AB = 1$ , triangulum  $abn$   
 $= \frac{a-2b+c}{2}$ . Huius igitur pars sexta  $\frac{a-2b+c}{12}$  aequalis est  
segmento primo  $aba$ ; similiter ergo erit secundum se-  
gmentum  $= \frac{b-2c+d}{12}$  et vltimum  $= \frac{x-2y+z}{12}$ , denotante  
 $z$  terminum indicis  $n-2$ . Fiet ergo summa omnium  
segmentorum  $= \frac{a-b}{12} - \frac{y+z}{12}$ , quae addita ad superiorem  
summam dat  $a + b + c + \dots + x = \int y dn + \frac{a}{2} -$   
 $\frac{y}{2} + \frac{(a-b)}{12} - \frac{(y-z)}{12}$ .

§. 12. Valor hic inuentus valde prope accedit ad  
veram seriei assumtae summam, quia in eo ne segmen-  
ta quidem negleximus. Proposita autem serie conuer-  
gente effici potest, vt haec formula quantumvis prope  
ad veram summam accedat; hocque fieri potest, dum  
aliquot terminorum initialium summa reipsa compute-  
tur, et sequentes demum loco  $a, b, c$  etc. substituuntur.  
Quo enim plures termini initiales reipsa addantur, eo  
exactior proveniet seriei summa. Atque si seriei in in-  
finitum continuatae summa desideretur, evanescent  $y$  et  $z$ ;  
atque in  $\int y dn$  posito  $n = \infty$  erit summa seriei infinitae  $=$   
 $\int y dn + \frac{a}{12} - \frac{b}{12}$ .

§. 13. Vt si quaeratur summa millies mille ter-  
minorum huius seriei  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$  etc. addantur  
decem termini initiales actu prodibitque  $1, 928968$ .  
Reliquorum autem terminorum  $\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13}$  etc. ---  
summa inuenietur hoc modo: est  $a = \frac{1}{11}$ ,  $b = \frac{1}{12}$ ,  
 $x = \frac{1}{n-10}$  et  $y = \frac{1}{n-11}$  et  $z = \frac{1}{n-12}$  atque  $\int y dn = \frac{1}{11} \ln \frac{n-11}{11}$ .  
Posito nunc  $n = 999990$ ; erit summa desiderata  $= \frac{1000001}{11}$   
+

SERIERVM CONVERGENTIVM SVMMAS INV. 9

$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2} + \dots + 2,928968$   
 feu = 14,392669. q. pr.

§. 14. Proposita fit nunc haec series  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$  etc., cuius summa in infinitum desideretur. Si primo decem termini initiales addantur habebitur 1,549768. Pro reliquis vero erit  $a = \frac{1}{21}$ ,  $b = \frac{1}{144}$ ;  $x = \frac{1}{(n+10)^2}$  et  $y = \frac{1}{(n+11)^2}$ . Ex his fit  $\int y dn = \frac{1}{11} - \frac{1}{n+11}$ ; atque posito  $n = \infty$  erit  $\int y dn = \frac{1}{11}$ . Seriei ergo propositae in infinitum continuatae summa erit  $\frac{1}{11} + \frac{1}{12 \cdot 121} - \frac{1}{12 \cdot 144} + 1,549678$ . Quae expressio in partibus decimalibus dat 1,644920.

INVENTIO SVMMAE  
 CVIVSQUE SERIEI

EX  
 DATO TERMINO GENERALI.

AVCTORE  
 Leonh. Eulero.

§. 1.

Cum, quae superiore dissertatione de summatione serierum methodo geometrica exposui, diligentius considerassem, eandemque summandi rationem analytice inuestigassem; perspexi, id, quod geometricae elici, deduci posse ex peculiari quadam summandi methodo, cuius iam ante triennium in *Differ- Tom. VIII.* B ratio-