ADDITAMENTVM
AD DISSERTATIONEM DE
INFINITIS CVRVIS EIVSDEM GENERIS.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

In superiore dissertatione, in qua methodum tradidi aequationem pro infinitis curuis eiusdem generis inueniendi, ipsius Q valorem in aequatione $dz = Pdx + Qda$ determinare docui, ex data aequatione $z = \int Pdx$. Namque si P ex x, et a cum constantibus vtcunque fuerit compositum; manifestum est si $\int Pdx$ differentietur posito non solum x sed etiam a variabili, prodituram esse huius formae aequationem $dz = Pdx + Qda$, in qua valor ipsius Q necessario a quantitate P, quae est cognita, pendebit. Demonstraui scilicet, si differentiale ipsius P posito x constante fuerit Bda, fore ipsius Q differentiale posito a constante, Bdx, ex quo pendentia ipsius Q a P satis perspicitur.

§. 2. Cum autem inuentus fuerit valor ipsius Q, aequatio $dz = Pdx + Qda$ exprimet naturam infinitarum curuarum ordinatim datarum, quarum singulae seorsim continentur aequatione $dz = Pdx$, a se inuicem vero dif-

diffe-

differunt diuersitate parametri seu moduli a. Et hanc ob rem aequationem $dz = Pdx + Qda$ in qua modulus a tanquam quantitas variabilis inest, cum *Cel. Hermanno* aequationem modularem vocaui.

§. 3. Si Pdx integrationem admittit, seu si curuae ordinatim datae omnes sunt algebraicae aequatio $z = \int Pdx$ simul erit modularis; nam quia nulla adsunt differentialia, modulus a aeque variabilis ac x et z poterit considerari. Sin autem Pdx integrari nequit, aequatio etiam modularis non erit algebraica, exceptis casibus quibus est $P = AX + BY + CZ$ etc. existentibus A, B, C etc. functionibus ipsius a et constantium, atque X, Y, Z etc. functionibus ipsius x et constantium tantum, modulo a ipsas non ingrediente. Etiamsi enim ipsa aequatio $dz = Pdx$ sit differentialis, tamen aequatio modularis $z = A\int Xdx + B\int Y dx + C\int Z dx$ etc. instar algebraicae est consideranda.

§. 4. Nisi autem P talem habuerit valorem aequatio modularis vel erit differentialis gradus primi vel altioris gradus. Differentialis quidem primi gradus erit, si Q vel erit quantitas algebraica, vel integrale ipsius Pdx inuoluet, hoc enim casu z loco $\int Pdx$ substitutum tollet quoque signum summatorium, ita vt aequatio modularis differentialis pura sit proditura.

§. 5. Deprehendi vero in superiore dissertatione, Q toties algebraicum habere valorem quoties P talis fuerit ipsarum a et x functio, vt numerus dimensionum, quas a et x constituunt sit vbique idem atque -1, seu

 quo-

quoties Px vel Pa fuerit functio ipsarum a et x nullius dimensionis. Deinde etiam obseruaui, quoties in P litterae a et x eundem tantum vbique constituant dimensionum numerum, toties Q ab integratione ipsius Pdx pendere. Ex quo, cum tam eximia consequantur subsidia ad aequationes modulares inueniendas, maxime iuuabit inuestigare, num forte aliae dentur huiusmodi functiones ipsius P, quae iisdem praerogatiuis gaudeant. Has igitur a priore inuestigare constitui, quo simul methodus tales functiones inueniendi aperiatur.

§. 6. Si P est functio ipsarum a et x dimensionum -1, seu z functio ipsarum a et x nullius dimensionis, ostendi fore $Px + Qa = o$, seu $Q = -\frac{Px}{a}$. Sumamus igitur esse $Q = -\frac{Px}{a}$ et quaeramus, qualis sit P functio ipsarum a et x. At si $Q = -\frac{Px}{a}$ erit $dz = Pdx - \frac{Pxda}{a}$. Quamobrem P talis esse debebit functio ipsarum a et x, vt $dx - \frac{xda}{a}$ per eam multiplicatum euadat integrabile. Hic autem per integrabile non solum intelligo, quod integratione ad quantitatem algebraicam, sed etiam quod ad quadraturam quamcunque reducitur. Si igitur generaliter inuenerimus quantitatem, in quam $dx - \frac{xda}{a}$ ductum fit integrabile, ea erit quaesitus valor ipsius P, eius proprietatis, vt fit $Q = -\frac{Px}{a}$.

§. 7. Fit autem $dx - \frac{xda}{a}$ integrabile si multiplicatur per $\frac{1}{a}$, integrale enim erit $\frac{x}{a} + c$, designante c quantitatem constantem quamcunque ab a non pendentem. Quocirca, si $f(\frac{x}{a} + c)$ denotet functionem quamcunque

cunque ipsius $\frac{x}{a}+c$, fiet quoque $dx-\frac{xda}{a}$ integrabile, si multiplicetur per $\frac{1}{a}f(\frac{x}{a}+c)$. Qui valor cum sit maxime generalis, erit $P=\frac{1}{a}f(\frac{x}{a}+c)$, et $Q=-\frac{Px}{a}$. Est vero $f(\frac{x}{a}+c)$ functio quaecunque ipsarum a et x nullius demensionis. Quamobrem quoties Pa fuerit functio nullius dimensionis ipsarum a et x, toties erit $Q=-\frac{Px}{a}$, ideoque aequatio modularis $dz=Pdx-\frac{Pxda}{a}$.

§. 8. Sit $Q=A-\frac{Px}{a}$, et A functio quaecunque ipsius a et constantium; erit $dz=Pdx+Ada-\frac{Pxda}{a}$ seu $dz-Ada=Pdx-\frac{Pxda}{a}$. In qua aequatione cum $dz-Ada$ sit integrabile, debebit $Pdx-\frac{Pxda}{a}$ quoque esse integrabile. Hoc autem per praecedentem operationem euenit si $P=\frac{1}{a}f(\frac{x}{a}+c)$. Tum igitur erit $Q=A-\frac{x}{a^2}f(\frac{x}{a}+c)$. Simili ratione intelligitur si fuerit $P=X+\frac{1}{a}f(\frac{x}{a}+c)$, denotante X functionem ipsius x tantum, fore $Q=A-\frac{x}{a^2}f(\frac{x}{a}+c)$, vbi vt ante $f(\frac{x}{a}+c)$ exprimit functionem quamcunque ipsarum a et x nullius dimensionis.

§. 9. Sit $Q=-\frac{nPx}{a}$, vbi n indicet numerum quemcunque; erit $dz=Pdx-\frac{nPxda}{a}$. Debebit ergo P talis esse quantitas, quae $dx-\frac{nxda}{a}$ si in id multiplicetur, reddat integrabile. Fit autem $dx-\frac{nxda}{a}$ integrabile, si ducatur in $\frac{1}{a^n}$, integrale enim erit $\frac{x}{a^n}$. Quare generaliter erit $P=\frac{1}{a^n}f(\frac{x}{a^n}+c)$. Atque quoties P talem ha-

habuerit valorem erit $Q = -\frac{nx}{a^{n+1}} \cdot f(\frac{x}{a^n} + c)$. Intelligitur etiam ſi fuerit $P = X + \frac{1}{a^n} f(\frac{x}{a^n} + c)$, fore quoque generalius $Q = A - \frac{nx}{a^{n+1}} f(\frac{x}{a^n} + c)$. Vbi vt ante et in poſterum ſemper f denotat functionem quamcunque quantitatis ſequentis. At A eſt functio quaecunque ipſius a, et X functio quaecunque ipſius x tantum.

§. 10. Quo igitur dignosci queat, an datus quispiam valor ipſius P in formula inuenta contineatur, poni debebit $a = b^{\frac{1}{n}}$, quo facto videndum eſt, an Pb fiat functio ipſarum b et x nullius dimenſionis, vel an prodeat aggregatum ex functione quadam ipſius x tantum, et tali functione. Quod ſi deprehendetur, habebit P proprietatem requiſitam, eritque Q aequale huic ipſi functioni in $-\frac{nx}{a}$ ductae vna cum functione quacunque ipſius A. In vniuerſum autem notandum eſt quantitatem P functione ipſius x vt X, et Q functione ipſius a vt A poſſe augeri. Nam ſi fuerit $dz = P\,dx + Q\,da$ aequatio modularis, talis quoque erit aequatio $dz = P\,dx + X\,dx + Q\,da + A\,da$. Poſito enim du loco $dz - X\,dx - A\,da$ habebitur $du = P\,dx + Q\,da$, quae cum priore prorſus congruit. Hancobrem ſuperfluum foret in poſterum ad valorem ipſius Q aſſumtum, functionem A ipſius a adiicere. Quare hanc apparentem generalitatem negligemus.

§. 11.

§. 11. Sit nunc $Q = PE$ denotante E functionem quamcunque ipsius a. Erit itaque $dz = P dx + PE da$ et P talis quantitas, quae reddit $dx + E da$ integrabile. At si $P = 1$ fit integrabile hoc differentiale, integrale enim erit $x + \int E da$. Quamobrem erit $P = f(x + \int E da)$ et $Q = Ef(x + \int E da)$. Siue si ponatur $\int E da = A$, fueritque $P = f(x + A)$ erit $Q = \frac{dA}{da} f(x + A)$. Num autem datus ipsius P valor in hac formula contineatur, hoc modo est inuestigandum, ponatur $x = y - A$. et quaeratur, an pro A talis accipi queat functio ipsius a et constantium, vt P fiat functio solius y et constantium, quam modulus a non amplius ingrediatur.

§. 12. Ponamus esse $Q = PY$, vbi Y sit functio quaecunque ipsius x modulum a non inuoluens. Quo posito erit $dz = P dx + PY da$, et P talis functio quae efficiat $dx + Y da$ integrabile. Posito autem $P = \frac{1}{Y}$, fit $z = \int \frac{dx}{Y} + a = X + a$, si ponatur $\int \frac{dx}{Y} = X$. Quamobrem erit $P = \frac{1}{Y} f(X + a)$. Quoties ergo P huiusmodi habuerit valorem erit semper $Q = f(X + a)$.

§. 13. Sit nunc generalius positum $Q = PEY$ erit $dz = P dx + PEY da$, vbi vt ante E denotat functionem ipsius a, Y vero ipsius x. Perspicuum est, si fuerit $P = \frac{1}{Y}$ formulam istam differentialem effici integrabilem, prodiret enim $z = \int \frac{dx}{Y} + \int E da$, seu $z = X + A$ posito $\int \frac{dx}{Y} = X$. Quamobrem erit $P = \frac{1}{Y} f(X + A) = \frac{dX}{dx} f(X + A)$ hisque in casibus fiet $Q = \frac{dA}{da} f(X + A)$. Comprehenduntur in his formulis etiam logarithmici ipsarum A et X valores, vt si sit $X = lT$ et $A = -lF$, erit $P = \frac{dT}{T dx} f \frac{T}{F}$ et $Q = \frac{-dF}{F da} f \frac{T}{F}$.

§. 14.

§. 14. Perſpicitur igitur omnes has formulas locum habere, ſi aequatio propoſita fuerit vel $dz = dX\, f(X + A)$ vel $dz = \frac{dX}{X} f \frac{X}{A}$. Quoties ergo aequatio propoſita ad has formas poterit reduci, ſubſtituendis X pro functione quacunque ipſius x et A pro functione quacunque ipſius a, toties aequatio modularis poterit exhiberi: erit enim priore caſu $dz = dX\, f(X + A) + dA\, f(X + A)$ in poſteriore vero caſu $dz = \frac{dX}{X}, f \frac{X}{A} - \frac{dA}{A} f \frac{X}{A}$. Id quod quidem in his vniuerſalibus exemplis facile perſpicitur, in ſpecialioribus vero multo difficilius. Quocirca maximum poſitum erit ſubſidium in reducendis caſibus particularibus ad has generales formas, id quod, ſi quidem talis reductio fieri poteſt, non difficulter praeſtatur.

§. 15. Si ponatur $Q = PR$, deſignante R functionem quamcunque ipſarum a et x, erit $dz = P dx + PR\, da$. Ad inueniendum nunc valorem ipſius P, ſumatur formula $dx + R\, da$, ſeu aequatio $dx - R\, da = o$ conſideretur, et quaeratur quomodo indeterminatae a et x a ſe inuicem poſſint ſeparari, ſeu quod idem eſt, per quamnam quantitatem $dx + R\, da$ debeat multiplicari, vt fiat integrabilis. Sit haec quantitas S et ipſius $S\, dx + RS\, da$ integrale T erit $P = S f T$. Hisque in caſibus erit $Q = RS f T$. Haec operatio latiſſime patet et omnes caſus complectitur, quibus Q cognitum et a z non pendentem habet valorem.

§. 16. Progrediamur autem vlterius et in eos ipſius P valores inquiramus, in quibus Q non ſolum a P ſed etiam

etiam a $\int P\,dx$ seu a z pendet. Ponatur igitur primo $Q = \frac{nz}{a} - \frac{Px}{a}$, denotante n numerum quemcunq; Erit ergo $dz = P\,dx + \frac{nz\,da}{a} - \frac{Px\,da}{a}$, seu $dz - \frac{nz\,da}{a} = P\,dx - \frac{Px\,da}{a}$. Multiplicetur vtrinque per $\frac{1}{a^n}$, quo prodeat haec aequatio $\frac{dz}{a^n} - \frac{nz\,da}{a^{n+1}} = \frac{P\,dx}{a^n} - \frac{Px\,da}{a^{n+1}}$, in qua prius membrum est integrabile. Debebit ergo etiam integrabile esse alterum membrum $\frac{P\,dx}{a^n} - \frac{Px\,da}{a^{n+1}}$, ex quo idoneus ipsius P valor est quaerendus. Euenit hoc si $P = a^{n-1}$, erit enim integrale $\frac{x}{a} + c$. Quare erit vniuersaliter $P = a^{n-1} f(\frac{x}{a} + c)$, id quod contingit si $\frac{P}{a^{n-1}}$ est functio ipsarum a et x nullius dimensionis seu P functio ipsarum a et x dimensionum $n-1$. Hoc igitur casu est $nz = Px + Qa$ vt in superiore dissertatione ostendimus.

§. 17. Sit $Q = \frac{nz}{a} + PEY$, vbi E ex a, et Y ex x vtcunque est compositum. Erit itaque $dz - \frac{nz\,da}{a} = P\,dx + PEY\,da$, et $\frac{dz}{a^n} - \frac{nz\,da}{a^{n+1}} = \frac{P\,dx}{a^n} + \frac{PEY\,da}{a^n}$. Quamobrem P ita debet accommodari, vt $\frac{dx + EY\,da}{a^n}$ per id multiplicatum euadat integrabile. Fit hoc autem si $P = \frac{a^n}{Y}$, quo casu integrale est $\int \frac{dx}{Y} + \int E\,da$ seu $X + A$ posito $\int \frac{dx}{Y} = X$ et $\int E\,da = A$. Quare debebit esse $P =$

$\frac{a^n dX}{dx} f(X+A)$, et in his casibus erit $Q = \frac{a^n dA}{da} f(X+A) + \frac{nz}{a}$. Si X et A a logarithmis pendeant prodibit P huius valoris $\frac{a^n dX}{X dx} f \frac{X}{A}$ cui respondebit $Q = \frac{nz}{a} - \frac{a^n dA}{A da} f \frac{X}{A}$.

§. 18. Si ponatur $Q = Fz + PEY$, et F et E functiones sint ipsius a, Y vero ipsius x. Tum erit $dz - Fz da = P dx + PEY da$. Ponatur $\int F da = lB$, ita vt B sit functio ipsius a, et diuidatur per B habebitur $\frac{dz}{B} - \frac{z dB}{B^2} = \frac{P dx}{B} + \frac{PEY da}{B}$. Cum igitur prius membrum sit integrabile, et alterum tale effici debet. Fit hoc si $P = \frac{B}{Y}$ tumque erit integrale $\int \frac{dx}{Y} + \int E da$ seu X+A. Quocirca erit ipsius P valor quaesitus $\frac{B dX}{dx} f(X+A)$, Q vero erit $\frac{z dB}{B da} + \frac{B dA}{da} f(X+A)$. Perspicitur quoque si fuerit $P = \frac{B dX}{X dx} f \frac{X}{A}$ fore $Q = \frac{z dB}{B da} - \frac{B dA}{A da} f \frac{X}{A}$.

§. 19. Latissime patebit solutio si ponatur $Q = Fz + PR$ et R fuerit functio ipsarum a et x. Erit enim $dz - Fz da = P dx + PR da$. Posito $\int F da = lB$ diuidatur per B habebitur $\frac{dz}{B} - \frac{z dB}{B^2} = \frac{P}{B}(dx + R da)$. Sit iam S functio efficiens $dx + R da$ integrabile sitque $\int (S dx + SR da) = T$. Quo inuento erit $P = BS fT$ huic respondet $Q = \frac{z dB}{B da} + BRS fT$.

§. 20. Possunt praeterea plures huiusmodi valores ipsius P coniungi, hocque modo multo latius extendi

vt

vt si ponatur $P = \frac{BdX}{dx} f(X + A) + \frac{BdY}{dx} f(Y + E)$ erit $Q = \frac{zdB}{Bda} + \frac{BdA}{da} f(X + A) + \frac{BdE}{da} f(Y + E)$. Atque simili modo numerus terminorum quantum libuerit, poterit augeri. In his igitur casibus omnibus aequatio modularis differentialis primi casus inuenitur. Quamobrem his expeditis pergo ad eos casus inuestigandos, inquibus aequatio modularis primi gradus differentialis non datur, sed qui tamen ad aequationem modularem differentio-differentialem perducuntur.

§. 21. Si igitur Q neque algebraice per a et x neque per z potest exprimi, ii inuestigandi sunt casus quibus differentiale ipsius Q poterit exhiberi. Est autem $Q = \frac{dz - Pdx}{da}$, ergo $dQ = d\frac{dz - Pdx}{da}$. Quare si differentiale ipsius Q vel per sola a et x vel per haec et Q vel etiam simul per z poterit exprimi, habebitur aequatio modularis, quae erit differentialis secundi gradus. Ostensum autem est superiore dissertatione si ponatur $dP = Ldx + Mda$ fore $dQ = Mdx + Nda$, ita vt haec differentialia communem literam M inuoluant. Quia autem ex dato P etiam M datur, nil aliud requiritur, nisi vt N determinetur. Quamobrem in eos inquiremus casus, quibus N vel algebraice, vel per Q vel per Q et z exprimi potest. Tum enim habebitur aequatio modularis $Mdx + Nda = d. \frac{dz - Pdx}{da}$, posito in N loco Q eius valore $\frac{dz - Pdx}{da}$.

§. 22. Ex praecedentibus satis intelligitur, si N per sola a et x determinetur, fore $M = \frac{dX}{dx} f(X + A)$ et $N = \frac{dA}{da} f(X + A)$, seu $M = V + \frac{dX}{dx} f(X + A)$ et N

 $= I$

$= \mathrm{I} + \frac{dA}{da} f(X+A)$ denotante V functionem quamcunque ipsius x et I ipsius a. Ex dato itaque P quaeratur M, differentiando P posito x constante, et differentiali inuento per da diuidendo. Quo facto quaeratur an valor ipsius M in formula $V + \frac{dX}{dz} f(X+A)$ contineatur. Quod si fuerit compertum et X et A et V definitae, erit $Vdx + dX f(X+A) + \mathrm{I}\,da + dA f(X+A) = d.\frac{dz - Pdx}{da}$ aequatio modularis desiderata. Notandum est in posterum semper loco $\frac{dX}{dx} f(X+A)$ poni posse aggregatum ex quotuis huiusmodi formulis $\frac{dX}{dx} f(X+A) + \frac{dY}{dx} f(Y+B) +$ etc. At loco $\frac{dA}{da} f(X+A)$ tunc poni debebit $\frac{dA}{da} f(X+A) + \frac{dB}{da} f(Y+B)$ etc. Hoc igitur monito in posterum tantum vnica formula $\frac{dX}{dx} f(X+A)$ eique respondente $\frac{dA}{da} f(X+A)$ vtemur.

§. 23. Pendeat N simul etiam a Q sitque $N = R + DQ$, vbi D sit functio ipsius a, et R functio ipsarum a et x ex conditionibus sequentibus determinanda. Erit igitur $dQ - DQda = Mdx + Rda$, sit $Dda = \frac{dH}{H}$ et diuidatur vtrinque per H prodibit $\frac{dQ}{H} - \frac{QdH}{H^2} = \frac{Mdx + Rda}{H}$. In qua aequatione, cum illud membrum sit integrabile, tale quoque hoc $\frac{Mdx + Rda}{H}$ est efficiendum. Fiet igitur per praecedentem methodum $M = \frac{Hdx}{dx} f(X+A)$ et $R = \frac{Hda}{da} f(X+A)$. Quare si in exemplo quopiam proposito ex P reperiatur M talis valoris, erit $N = \frac{HdA}{da} f(X+A) + \frac{dH}{Hda^2}(dz - Pdx)$ posito $\frac{dH}{Hda}$ loco D et $\frac{dz - Pdx}{da}$ loco Q. Atque hinc in promptu erit aequatio modularis.

§. 24.

§. 24. Si N non a Q sed a z pendeat, ita vt sit $N = R + Cz$, denotante C functionem ipsius a quamcunque; erit $dQ - Czda = Mdx + Rda$. At quia est $dz - Qda = Pdx$, addatur huius multiplum $Fdz - QFda = PFdx$, existente F functione ipsius a, quo facto orietur aequatio $dQ - QFda + Fdz - Czda = (M + PF)dx + Rda$. Ponatur $Fda = \frac{dB}{B}$ et $\frac{Cda}{F} = \frac{dG}{G}$, ita vt sit $F = \frac{dB}{Bda}$ et $C = \frac{dBdG}{BGda^2}$. Perspicuum itaque est $dQ - QFda$ integrabile reddi si diuidatur per B seu multiplicetur per $\frac{1}{B}$, $Fdz - Czda$ autem fit integrabile, si multiplicetur per $\frac{1}{FG}$. Quare quo idem factor summam horum differentialium reddat integrabilem debebit esse $FG = B$ seu $\frac{GdB}{Bda} = B$, vnde fiet $G = \frac{B^2da}{dB}$. Hancobrem alterum quoque membrum per B diuisum est integrabile efficiendum scilicet $\frac{(M+PF)dx + Rda}{B}$. Quocirca facio $R = \frac{BdA}{da} f(X + A)$ et $M + PF = \frac{BdX}{dx} f(X + A) = M + \frac{PdB}{Bda}$. Inuestigari igitur debet proposito exemplo, an loco A, B et X tales functiones inueniri queant, quae exhibeant formulam $\frac{PdX}{dx} f(X + A)$ aequalem ipsi $M + \frac{PdB}{Bda}$. Hisque inuentis erit $N = \frac{BdA}{da} f(X + A) + \frac{zdBdG}{BGda^2}$ existente $G = \frac{B^2da}{dB}$, qui valor in aequatione $Mdx + Nda = d.\frac{dz - Pdx}{da}$ substitutus dabit aequationem modularem.

§. 25. Sit nunc generalissime $N = R + DQ + Cz$, tenentibus R, D et C iisdem quibus ante valoribus. Erit ergo $dQ - DQda - Czda = Mdx + Rda$, addatur ad hanc aequatio $Fdz - FQda = PFdx$, quo habeatur $dQ - DQda - FQda + Fdz - Czda = (M + PF)dx +$

 $R\,da$

$R\,da$. Pofitis autem vt ante $D\,da = \frac{dH}{H}$, $F\,da = \frac{dB}{B}$, et $\frac{C\,da}{F} = \frac{dG}{G}$, fit $dQ - DQ\,da - FQ\,da$ integrabile fi ducatur in $\frac{1}{HB}$, et $F\,dz - Cz\,da$ integrabile fit ductum in $\frac{1}{FG}$. Quare debebit effe $HB = FG = \frac{G\,dB}{B\,da}$ et $G = \frac{B^2 H\,da}{dB}$. Atque $\frac{(M+PF)\,dx + R\,da}{HB}$ reddendum eft integrabile: fiet ergo facto $HB = E$, $R = \frac{E\,dA}{da} f(X+A)$ et $M + PF =$ $\frac{E\,dX}{dx} f(X+A)$. Quocirca in cafu propofito A, X, E et F fi fieri poteft ita debent definiri, vt $\frac{E\,dX}{dx} f(X+A)$ aequale fiat ipfi $M + PF$. Hocque inuento erit $N =$ $\frac{E\,dA}{da} f(X+A) + \frac{dH}{H\,da^2}(dz - P\,dx) + \frac{Fz\,dG}{G\,da}$, vnde aequatio modularis reperitur.

§. 26. At fi nequidem differentialis fecundi gradus aequatio modularis obtineri poterit; ad differentialia tertii gradus erit procedendum. Fiet ergo $N = \frac{d\left(\frac{dz - P\,dx}{da}\right) - M\,dx}{da}$ atque hinc pofito $dN = s\,dx + t\,da$, erit $s\,dx + t\,da = d\left(\frac{d\left(\frac{dz - P\,dx}{da}\right) - M\,dx}{da}\right)$. Datur autem s ex M, cum fit $s\,da$ differentiale ipfius M, quod prodit, fi x ponatur conftans. Quamobrem t tantum debebit inueftigari. Sit ergo $t = R + EN + DQ + Cz$, ideoque $dN - EN\,da$ $- DQ\,da - Cz\,da = s\,dx + R\,da$. Cum fit autem $dQ -$ $N\,da = M\,dx$ et $dz - Q\,da = P\,dx$, addantur horum multipla ad illam aequationem, vt prodeat haec aequatio $dN - EN\,da - FN\,da + F\,dQ - DQ\,da - GQ\,da + G\,dz$ $- Cz\,da = (s + MF + PG)\,dx + R\,da$. Sit $E\,da +$ $F\,da = \frac{df}{f}$, $\frac{D\,da + G\,da}{F} = \frac{dg}{g}$ et $\frac{C\,da}{G} = \frac{dh}{h}$, fiatque $f = Fg$ $= Gh$.

$= G b$. Quo facto aequationis inuentae prius membrum fit integrabile diuisum per f, hanc ob rem et $\frac{(s+MF+PG)dx+Rda}{f}$ efficiendum est integrabile. Ponendum igitur est $R = \frac{f\,dA}{da} f(X+A)$ et $s+MF+PG = \frac{f\,dX}{da} f(X+A)$. In aequatione ergo proposita, quia s et M ex P dantur, debent F, G et f et X ex hac aequatione determinari. Quo facto sumatur $g = \frac{f}{F}$ et $b = \frac{f}{G}$, et $C = \frac{G\,db}{b\,da}$, et $D = \frac{F\,dg}{g\,da} - G$ et $E = \frac{df}{f\,da} - F$. Atque ex his cognita erit aequatio $t = R + EN + DQ + Cz$, ex qua aequatio modularis facile conflatur. Simili modo ex his intelligitur quomodo pro altioribus differentialium gradibus operatio debeat institui, vt ad aequationes modulares perueniatur.

§. 27. In compendium nunc, quae hactenus tradidimus, redigamus tum quo facilius quaeuis aequatio proposita reduci queat, tum quo processus ad cuiusque gradus differentialia clarius perspiciatur. Proposita igitur aequatione $dz = P\,dx$, ponatur x constans et a tantum variabile, sitque $dP = M\,da$, $dM = p\,da$, $dp = r\,da$ etc. Sit porro $Q = \frac{dz - P\,dx}{da}$, $N = \frac{dQ - M\,dx}{da}$, $q = \frac{dN - p\,dx}{da}$ et $s = \frac{dq - r\,dx}{da}$ etc. vbi dQ, dN, et dq, etc. sunt differentialia ipsorum Q, N et q, quae ex valoribus $\frac{dz - P\,dx}{da}$, $\frac{dQ - M\,dx}{da}$ et $\frac{dq - r\,dx}{da}$, inueniuntur positis a, x et z variabilibus. Hanc igitur ob rem cognitae erunt M, p, r etc. ex solo P, ex his vero habebuntur Q, N, q etc. Sint praeterea A, B, C, D, E, F etc. functiones ipsius a et constantium, et X, Y etc. functiones ipsius x non inuoluentes a.

§. 28

§. 28. His praemissis si fuerit P talis functio ipsius x et a, vt BP comprehendatur in hac forma $\frac{dX}{dx}$ f (X + A) seu plurium huiusmodi formularum aggregato, semper dari poterit aequatio modularis differentialis primi gradus. Namque erit $P\,dA\,dx = z\frac{dB\,dX}{B} + Q\,da\,dX$ seu $BP\,dA\,dx = z\,dB\,dX + BQ\,da\,dX$. Quae aequatio ob datum Q est modularis respondens aequationi propositae.

§. 29. Deinde si P talis sit functio ipsarum a et x vt BP + CM aequalis fieri possit $\frac{dX}{dx}$ f (X + A) seu quotcunque huiusmodi formularum aggregato, aequatio modularis ad differentialia secundi gradus ascendet. Erit enim $BP\,dA\,dx + CM\,dA\,dx = z\,dB\,dX + BQ\,da\,dX + Q\,dC\,dX + CN\,da\,dX$. Quae est aequatio modularis quaesita, et inuoluit differentialia secundi gradus, quia eam littera N ingreditur, quae per dQ ideoque per ddz, ddx et dda determinatur.

§. 30. At si fuerit BP + CM + Dp aequalis huic formulae $\frac{dX}{dx}$ f(X + A) vel aggregato quotcunquae huiusmodi formularum; aequatio modularis erit differentialis tertii gradus, prodibit enim ista aequatio $BP\,dA\,dx + CM\,dA\,dx + Dp\,dA\,dx = z\,dB\,dX + BQ\,da\,dX + Q\,dC\,dX + CN\,da\,dX + N\,dD\,dX + Dq\,da\,dX$. Quemadmodum ex ante traditis colligere licet, si modo quantitates ab a tantum pendentes ad has formulas accommodantur.

§. 31. Simili modo ad altiora differentialia progressus facile absoluitur. Nam si BP + CM + Dp + Er

$+ Er$ aequetur formulae $\frac{dx}{dx} f(X + A)$ vel talium plurium formularum aggregato, orietur aequatio modularis ista $BPdAdx + CMdAdx + DpdAdx + ErdAdx = zdBdX + BQddadX + QdCdX + CNdadX + NdDdX + DqdadX + qdEdX + EsdadX$ quae erit differentialis quarti gradus. Atque hoc modo quousque libuerit hae operationes facile continuantur ex sola allatarum inspectione.

§. 32. His autem omnibus perspectis maxima tamen difficultas saepenumero posita erit in dignoscenda functione P, an in his expositis generibus contineatur et in quonam genere. Etiam si enim generales ipsius P valores, qui ex assumtis formulis obtinentur nihil difficultatis in se habere videantur, tamen exemplis particularibus propositis accommodatio saepissime erit difficillima. Cuius rei ratio nequaquam methodo traditae est tribuenda, sed imperfectae functionum cognitioni, quae adhuc habetur. Quamobrem non solum in hoc negotio, sed in plurimis etiam aliis casibus maxime vtile foret, si functionum doctrina magis perficeretur, et excoleretur.

§. 33. Quantum quidem mihi hac de re meditari licuit, eximium subsidium inueni, si P statim ad huiusmodi formam $\frac{dx}{dx} f(X + A)$ vel huiusmodi formularum aggregatum reducatur, id quod sequenti modo facillime praestatur, Prima aequatio proposita non constituatur inter z et x sed inter z et y, ita vt aequatio ad modularem perducenda sit $dz = T\,dy$, existente T

 functione

functione ipſius y et moduli a. Tum accipiatur pro x talis functio ipſarum a et y, quae transmutet T in functionem ipſarum a et x contentam in formula $f(X + A)$, vel pluribus huic ſimilibus, earumque multiplis, in quibus X eſt functio ipſius x tantum, et A ipſius a. Hoc igitur facto prodeat aequatio $dz = S\,dx\,f(X + A)$ vbi S ſit quantitas tam ſimplex quam fieri poteſt. Quare P erit $Sf(X + A)$ ideoque cum M, p etc. coniuncta facilius cum generalibus formulis comparatur. Inuenta autem hoc modo aequatione modulari, valor ipſius x in a et y aſſumtus, vbique loco x, loco dx autem differentiale huius valoris poſitis a et y variabilibus ſubſtituatur. Quo facto habebitur aequatio modularis inter a, y et z, quae quaerebatur.

§. 34. Ad pleniorem quidem methodi hactenus traditae cognitionem maximam lucem afferrent exempla et problemata, quorum ſolutio iſtam methodum requirit. Sed quia ipſorum problematum dignitas peculiarem tractationem poſtulat, in aliud tempus, ne hoc tempore nimis ſim longus, eam differo.

CLAS-