DE INFINITIS CVRVIS EIVSDEM GENERIS. SEV METHODVS INVENIENDI AEQVATIONES PRO INFINITIS CVRVIS EIVSDEM GENERIS.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

CVruas eiusdem generis hic voco tales curuas, quae a se inuicem non differunt nisi ratione lineae cuiusdam constantis, quae alios atque alios valores assumens eas curuas determinat. Linea haec constans a *Cel. Hermanno* modulus est vocatus, ab aliis parameter: quia autem parametri nomen ambiguitatem creare potest, moduli vocabulum retinebo. Est itaque modulus linea constans et invariabilis, dum vna infinitarum curuarum quaecunque determinatur; varios autem habet valores et ideo variabilis est, si ad diuersas curuas refertur. Sic si in aequatione $y^2 = ax$ sumatur a pro modulo, ex variabilitate ipsius a innumerabiles oriuntur parabolae super eodem axe positae et communem verticem habentes.

§. 2. Infinitae igitur curuae eiusdem generis omnes vnica aequatione exprimuntur, quam modulus cui nobis

nobis ſemper litera a indicabitur, ingreditur. Huic enim modulo, ſi ſucceſſiue alii atque alii valores tribuantur, aequatio continuo alias dabit curuas, quae omnes in vna aequatione continentur. Aequationem hanc modulum continentem cum *Hermanno* modularem vocabimus; in qua igitur praeter alias conſtantes et eiusdem valoris in omnibus curuis quantitates inſunt modulus a et duae variabiles ad curuam quamlibet pertinentes, cuiusmodi ſunt vel abſciſſa et applicata, vel abſciſſa et arcus curuae, vel area curuae et abſciſſa etc. prout problema ſoluendum poſtulat.

§. 3. Sint igitur quantitates variabiles x et z, quae cum modulo a aequationem modularem ingrediuntur. Perſpicuum eſt, ſi detur aequatio algebraica inter x et z et a, pro vnica curua, in qua a vt conſtans conſideratur, eandem fore ſimul modularem, ſeu ad omnes curuas pertinere, ſi modo a fiat variabilis. At ſi inter x et z non poterit aequatio algebraica dari, difficile erit aequationem modularem inuenire. Nam ſit $z = \int P\,dx$, vbi P in a, z et x, quomodocunque detur, ſeu $dz = P\,dx$, in qua aequatione a vt conſtans conſideratur; intelligitur aequationem modularem haberi, ſi integralis aequationis $dz = P\,dx$ denuo differentietur, poſito etiam a variabili. Sed cum integrationem perficere non liceat, eiusmodi methodus deſideratur, qua differentialis aequatio, quae prodiret, ſi integralis denuo differentietur poſita etiam a variabili, inueniri poſſit.

§. 4.

§. 4. Ad conſtruendas quidem et cognoſcendas curuas aequatio $dz = P\,dx$ ſufficit. Nam, dato ipſi modulo a certo valore conſtruetur aequatio $dz = P\,dx$, quo facto habebitur vna curuarum infinitarum, eodemque modo aliae reperientur aliis ponendis valoribus loco a. Sed ſi in his curuis certa puncta debeant aſſignari prout problema aliquod poſtulat; talis aequatio $z = \int P\,dx$ non ſufficit ſed requiritur aequatio a ſignis ſummatoriis libera in qua ſi non eſt algebraica, etiam differentialia ipſius a inſint. Ex data igitur aequatione differentiali pro vnica curua $dz = P\,dx$ in qua a vt conſtans conſideratur, quaeri oportet aequationem differentialem, in qua et a ſit variabilis, haecque erit modularis. Haec vero modularis interdum erit differentialis primi gradus, interdum ſecundi et altioris, interdum etiam penitus non poterit inueniri.

§. 5. Quo igitur methodum tradam, qua ex aequatione differentiali $dz = P\,dx$, in qua a eſt conſtans, modularis poſſit inueniri, quae a vt variabilem contineat; pono primo P eſſe functionem ipſarum a et x tantum, vt $\int P\,dx$ ſaltem per quadraturas exhiberi poſſit. Erit igitur $z = \int P\,dx$, in integratione ipſius $P\,dx$, a pro conſtanti habita. Quaeritur nunc differentiale ipſius $\int P\,dx$ ſi etiam a vt variabilis tractetur; quo inuento ipſique dz aequali poſito habebitur aequatio modularis. Differentiale autem ipſius $\int P\,dx$ habebit hanc formam $P\,dx + Q\,da$, eritque $dz = P\,dx + Q\,da$ aequatio modularis, ſi modo valor ipſius Q eſſet cognitus.

§. 6.

§. 6. Ad inueniendum autem valorem ipſius Q ſequens inſeruit theorema. *Quantitas A ex duabus variabilibus t et u vtcunque compoſita, ſi differentietur poſito t conſtante, hocque differentiale denuo differentietur poſito u conſtante et t variabili, idem reſultat ac ſi inuerſo ordine A primo differentietur poſito u conſtante hocque differentiale denuo differentietur poſito t conſtante et u variabili.* Vt ſit $A = \sqrt{(t^2 + nu^2)}$, differentietur poſito t conſtante, habebitur $\frac{nu\,du}{\sqrt{(t^2+nu^2)}}$. Hoc denuo differentietur poſito u conſtante et prodibit $\frac{-ntu\,dt\,du}{(t^2+nu^2)^{\frac{3}{2}}}$. Iam ordine inuerſo differentietur $\sqrt{(t^2+nu^2)}$ poſito u conſtante, eritque differentiale $\frac{t\,dt}{\sqrt{(t^2+nu^2)}}$, quod denuo differentiatum poſito t conſtante dabit $\frac{-ntu\,dt\,du}{(t^2+nu^2)^{\frac{3}{2}}}$, id quod congruit cum prius inuento. Atque ſimilis conuenientia in quibusque aliis exemplis cernetur.

§. 7. Quamuis autem huius theorematis veritatem exercitati facile perſpiciant, demonſtrationem tamen ſequentem adiiciam ex ipſius differentiationis natura petitam. Cum A ſit functio ipſarum t et u, abeat A in B ſi loco t ponatur $t+dt$; at poſito $u+du$ loco u abeat A in C. Poſito autem ſimul $t+dt$ loco t et $u+du$ loco u mutetur A in D. Ex his perſpicuum eſt, ſi in B ſcribatur $u+du$ loco u, prouenire D; ſimilique modo ſi in C ponatur $t+dt$ loco t proditurum quoque D. His praemiſſis, ſi differentietur A poſito t conſtante prodibit C−A, nam poſito $u+du$ loco u abit A in C, dif-

differentiale autem eſt $C-A$. Si porro in $C-A$ ponatur $t+dt$ loco t prodibit $D-B$, quare differentiale erit $D-B-C+A$. Inuerſo nunc ordine poſito $t+dt$ loco t in A habebitur B, eritque differentiale ipſius A poſito tantum t variabili $B-A$. Hoc differentiale poſito $u+du$ loco u abit in $D-C$, quare eius differentiale erit $D-B-C+A$, id quod congruit cum differentiali priori operatione inuento. Q. E. D.

§. 8. Iſtud autem theorema hoc modo inſeruit ad valorem ipſius Q inueniendum. Cum P et Q ſint functiones ipſarum a et x, ſit $dP = A\,dx + B\,da$ et $dQ = C\,dx + D\,da$, atque z cum ſit $= \int P\,dx$, erit quoque functio ipſarum a et x, poſitum autem eſt $dz = P\,dx + Q\,da$. Iam ſecundum Theorema differentietur z poſito x conſtante, eritque differentiale $Q\,da$ hoc porro differentiatum poſito a conſtante dabit $C\,da\,dx$. Altera operatione differentiale ipſius z poſito primo a conſtante eſt $P\,dx$, huius vero differentiale poſito x conſtante eſt $B\,da\,dx$. Quare vi theorematis aequalia eſſe debent $C\,da\,dx$ et $B\,da\,dx$, ex quo fit $C = B$. Datur autem B ex P; differentiale enim ipſius P poſito x conſtante diuiſum per da dat B. Cum igitur ſit $dQ = B\,dx + D\,da$, erit $Q = \int B\,dx$, ſi in hac integratione a vt conſtans conſideretur.

§. 9. Ex his ergo habebitur $dz = P\,dx + da \int B\,dx$, exiſtente $dP = A\,dx + B\,da$. Si igitur $B\,dx$ integrari poterit, deſiderata habebitur aequatio modularis. At ſi integrari non poteſt aeque inutilis eſt haec aequatio ac

prima

prima $z=\int P\,dx$, vtraque enim inuoluit integrationem differentialis, in qua a vt constans debet considerari, id quod est contra naturam aequationis modularis, quippe in qua a aeque variabile esse debet ac x et z.

§. 10. Quando autem $B\,dx$ integrationem non admittit: non tamen aequatio inuenta vt inutilis omnino est negligenda. Nam si integratio ipsius $B\,dx$ pendeat a $\int P\,dx$ aequatio modularis poterit exhiberi. Si enim fuerit $\int B\,dx = \alpha \int P\,dx + K$ existente K functione ipsarum a et x algebraica, erit ob $\int P\,dx = z$, $\int B\,dx = \alpha z + K$ et $dz = P\,dx + \alpha z\,da + K\,da$, quae aequatio reuera erit modularis. Quoties igitur $B\,dx$ vel reipsa poterit integrari, vel ad integrationem ipsius $P\,dx$ deduci, aequatio habebitur modularis, quae erit differentialis primi gradus. At si $P\,dx$ est integrabile, ne hoc quidem opus est: sed $z=\int P\,dx$ erit simul aequatio modularis.

§. 11. Si autem $\int B\,dx$ neque algebraice exhiberi neque ad $\int P\,dx$ reduci potest, dispiciendum est, num $\int B\,dx$ ad integrationem alius differentialis, in qua a non inest, possit reduci. Tale enim integrale in qua a non inest non turbat aequationem modularem, cum si libuerit per differentiationem tolli possit. Atque eodem iure, si $\int P\,dx$ reduci poterit ad aliud integrale, quod a non continet, nequidem hac ipsius Q determinatione opus est, sed $z=\int P\,dx$ statim dat aequationem modularem, vt si sit $\int P\,dx = b\int K\,dx$ data b per a et K per x tantum, erit aequatio modularis $z = b\int K\,dx$ seu $dz = \frac{z\,db}{b} + K\,b\,dx$.

§. 12. Si autem haec omnia nullum inueniant locum indicio est, aequationem modularem primi gradus differentialem non dari. Quamobrem in altioris gradus differentialibus quaeri debebit. Ad hoc differentio denuo aequationem $dz = P\,dx + da\int B\,dx$. Pono autem $dB = E\,dx + F\,da$, quo facto erit ipsius $\int B\,dx$ differentiale $B\,dx + da\int F\,dx$. Differentiatione igitur peracta et loco $\int B\,dx$ eius valore ex eadem aequatione nempe $\frac{dz}{da} - \frac{P\,dx}{da}$ posito, habebitur $ddz = P\,ddx + dP\,dx + \frac{dz\,dda}{da} - \frac{P\,dx\,dda}{da} + B\,da\,dx + da^2\int F\,dx$. Erit igitur $\int F\,dx = \frac{ddz}{da^2} - \frac{dz\,dda}{da^3} - \frac{P\,ddx}{da^2} - \frac{dP\,dx}{da^2} + \frac{P\,dx\,dda}{da^3} - \frac{B\,dx}{da}$. Cum autem sit $\int B\,dx = \frac{dz}{da} - \frac{P\,dx}{da}$ et $\int P\,dx = z$, si $\int F\,dx$ reduci poterit ad integralia $\int B\,dx$ et $\int P\,dx$ vel si reipsa poterit integrari, habebitur aequatio modularis, quae erit differentialis secundi gradus. Vt si fuerit $\int F\,dx = \alpha\int B\,dx + \beta\int P\,dx + K$, datis α et β vtcunque per a et constantes, et K per a et x constantes, erit aequatio modularis haec $\frac{da\,ddz - dz\,dda - P\,da\,ddx + P\,dx\,dda - dP\,da\,dx}{da^3} - \frac{B\,dx}{da} = \frac{\alpha\,dz - \alpha P\,dx}{da} + \beta z + K$. At B et F ex dato P facile reperiuntur.

§. 13. Si $\int F\,dx$ quod autem rarissime euenit vel non amplius in se contineat a, vel ad aliud possit reduci, in quo a non insit, aequatio inuenta differentialis secundi gradus pro legitima modulari poterit haberi. Sed si haec omnia nondum succedant, adhuc differentiatio est instituenda, in qua differentiale ipsius $\int F\,dx$ erit $F\,dx + da\int H\,dx$ posito $dF = G\,dx + H\,da$. Quo facto videndum est vel an $\int H\,dx$ re ipsa possit exhiberi, vel an pendeat a praecedentibus $\int F\,dx$, $\int B\,dx$ et $\int P\,dx$, vel an possit ex signo summatorio a eliminari. Quorum si quod obtigerit, habebitur aequatio modularis differentialis tertii gradus; sin vero nullum locum habuerit, continuanda est differentiatio simili modo donec signa summatoria potuerint eliminari.

§. 14. His generalibus praemissis ad specialia accedo, casus euoluturus, quibus functio P quodammodo determinatur. Sit igitur P functio ipsius x tantum, a prorsus non inuoluens, quam littera X designabo, erit ergo $dz = X\,dx$, quae quidem aequatio quia non continet a, ad vnicam videtur curuam pertinere, neque ad modularem praebendam apta esse. Sed cum in integratione constantem addere liceat, poterit esse $z = \int X\,dx + na$ seu differentiando $dz = X\,dx + n\,da$, quae est vera aequatio modularis. Eadem aequatio prodiisset, si iuxta regulam X differentiassem posito x constante, vnde prodit $B = 0$ et $\int B\,dx = n$ constanti, orta igitur esset aequatio modularis $dz = X\,dx + n\,da$ cuius loco potius integralis $z = \int X\,dx + na$ vsurpatur.

§. 15. Sit nunc $P = AX$, existente A functione ipsius a, et X ipsius x tantum. Cum igitur sit $z = \int P\,dx$ erit $z = \int AX\,dx$ seu quia in integratione a vt constans debet considerari, $z = A\int X\,dx$. Quae aequatio seu eius differentialis $A\,dz - z\,dA = A^2 X\,dx$ erit aequatio modularis quaesita. Loco A quidem cum sit functio ipsius a tantum, poni potest ipse modulus a: nam loco moduli eius functio quaecunque eodem iure pro modulo haberi potest.

§. 16. Sit $P = A + X$ litteris A et X eosdem vt ante retinentibus valores. Erit ergo $dz = A\,dx + X\,dx$ atque $z = A\,x + \int X\,dx$, quae aequatio iam eſt modularis; quia modulus A non eſt in ſigno ſummatorio inuolutus. Si quem autem $\int X\,dx$ offendat, differentialem aequationem $dz = A\,dx + x\,dA + X\,dx$ pro modulari habere poteſt.

§. 17. Simili ratione modularem aequationem inuenire licet, ſi fuerit $P = AX + BY + CZ$ etc. vbi A, B, C ſunt functiones quaecunque ipſius moduli a, et X, Y, Z functiones quaecunque ipſius x et conſtantium excepta a. Namque ob $dz = AX\,dx + BY\,dx + CZ\,dx$ erit $z = A\int X\,dx + B\int Y\,dx + C\int Z\,dx$, quae ſimul eſt modularis, cum modulus a nusquam poſt ſignum ſummatorium reperiatur.

§. 18. Sit $P = (A + X)^n$ ſeu $z = \int dz\,(A + X)^n$. Differentiale ipſius P poſito x conſtante eſt $n(A + X)^{n-1}dA$ id quod per da diuiſum dat ſuperiorem valorem B vid. §. 8. Erit igitur $dz = (A + X)^n dx + n\,dA\int (A + X)^{n-1}dx$ ſeu $\int dx\,(A + X)^{n-1} = \frac{dz - (A + X)^n dx}{n\,dA}$. Cum igitur ſit $\int dx\,(A + X)^n = z$, ſi haec duo integralia a ſe inuicem pendeant, vel $\int dx\,(A + X)^{n-1}$ algebraice etiam exprimi poterit, habebitur quod quaeritur. Si neutrum contingat denuo differentiatio eſt inſtituenda. Eſt autem differentiale ipſius $\int dx\,(A + X)^{n-1} = dx\,(A + X)^{n-1}$

$$+ (n-1)\,dA\int (A + X)^{n-2}dx = \text{Diff.}\ \frac{dz - (A + X)^n dx}{n\,dA}.$$

Erit

Erit itaque $\int dx(A+X)^{n-2} = \frac{1}{(n-1)dA}$ Diff. $\frac{dz-(A+X)^n dx}{ndA}$ $= \frac{dx(A+X)^{n-1}}{(n-1)dA}$. Quare videndum eſt an $\int dx(A+X)^{n-2}$ poſſit vel integrari vel ad priora integralia reduci.

§. 19. Si n fuerit numerus integer affirmatiuus aequatio modularis erit algebraica. Nam $(A+X)^n$ poteſt in terminos numero finitos reſolui, quorum quisque in dx ductus integrari poteſt, ita vt modulus a in ſignum ſummatorium non ingrediatur. Erit autem aequatio modularis haec $z = A^n x + \frac{n}{1} A^{n-1} \int X dx + \frac{n.n-1}{1.2} A^{n-2} \int X^2 dx$ etc. Examinandum igitur reſtat quibus caſibus ſi n non fuerit numerus integer affirmatiuus, ſupra memoratae conditiones locum habeant.

§. 20. Sit primo $X = bx^m$, vbi b etiam ab a pendere poteſt; erit ergo $x = \int (A+bx^m)^n dx$. Haec formula primo ipſa eſt integrabilis, ſi $m = \frac{1}{i}$ deſignante i numerum quemcunque affirmatiuum integrum: deinde etiam ſi $m = \frac{-1}{n+i}$. His igitur caſibus aequatio modularis fit algebraica. At ſi $m = -\frac{1}{n}$, vbi b ab a non pendere poteſt illa quidem aequatio integrationem non admittit ſed ſequens $dz = (A+bx^{\frac{-1}{n}})^n dx + ndA \int dx(A+bx^{\frac{-1}{n}})^{n-1}$ euadit integrabilis, fitque aequatio modularis differentialis primi caſus.

§. 21. Non ſolum autem, quicunque valor ipſi m tribuatur aequatio modularis differentialis primi gradus haberi poteſt, ſed etiam ſi fuerit $z = \int x^m dx(A+bx^k)^n$. Fiet enim $dz = x^m dx(A+bx^k)^n + ndA \int x^m dx(A+bx^k)^{n-1}$

Sed

Sed eſt $\int x^m dx(A+bx^k)^n = \frac{x^{m+1}(A+bx^k)^n}{m+nk+1} + \frac{nkA}{m+nk+1} \int x^m dx(A+bx^k)^{n-1}$, ſeu $\int x^m dx(A+bx^k)^{n-1} = \frac{(m+nk+1)z}{nkA} - \frac{x^{m+1}(A+bx^k)^n}{nkA}$. Conſequenter habebitur aequatio modularis haec $Akdz = (A+bx^k)^n (Akx^m dx - x^{m+1} dA) + (m+nk+1) z dA$. Simili modo modularis eſſet inuenta, ſi fuiſſet $z = B\int x^m dx (A+bx^k)^n$ alia enim non prodiiſſet differentia niſi quod loco z ſcribi debuiſſet $\frac{z}{B}$, et loco dz, $\frac{Bdz - zdB}{B^2}$ ſi quidem B ab a etiam pendeat.

§. 22. Miſſis autem huiuſmodi litterae P determinationibus, quippe quae minus late patent, ad alias accedo, quae multo ſaepius vſui eſſe poſſunt. Continentur hae determinationes ea functionis cuiusdam propoſitae proprietate, qua functio eundem vbique tenet dimenſionum quantitatum variabilium numerum. Tales enim functiones peculiari modo differentiationem admittunt. Vt ſit u functio nullius dimenſionis ipſarum a et x, cuiusmodi ſunt $\frac{a}{x}$, $\frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{a}$ aliaeque ſimiles, in quibus ipſarum a et x dimenſionum numerus in denominatore aequalis eſt numero dimenſionum numeratoris. Det autem talis functio u differentiata $Rdx + Sda$; dico fore $Rx + Sa = o$. Nam ſi in functione u ponatur $x = ay$, omnia a ſeſe deſtruent et in ea praeter y et conſtantes nulla alia littera remanebit. Hancobrem in differentiali poſt hanc ſubſtitutionem aliud differentiale praeter dy non reperietur. Cum autem ſit $x = ay$ erit

erit $dx = a\,dy + y\,da$, ideoque $du = Ra\,dy + Ry\,da + S\,da$. Debebit ergo esse $Ry + S = 0$, seu $Rx + Sa = 0$.

§. 23. Sin vero fuerit u functio m dimensionum ipsarum a et x, atque $du = R\,dx + S\,da$; erit $\frac{u}{x^m}$ functio ipsarum a et x nullius dimensionis. Differentietur igitur $\frac{u}{x^m}$ et prodibit $\frac{x\,du - mu\,dx}{x^{m+1}}$ seu $\frac{Rx\,dx - mu\,dx + Sx\,da.}{x^{m+1}}$ Quod cum sit differentiale functionis nullius dimensionis erit $Rx^2 - mux + Sax = 0$, seu $Rx + Sa = mu$. Quare si fuerit u functio m dimensionum ipsarum a et x; atque ponatur $du = R\,dx + S\,da$ erit $Rx + Sa = mu$ ideoque $du = R\,dx + \frac{da}{a}(mu - Rx)$ seu $a\,du = Ra\,dx - Rx\,da + mu\,da$.

§. 24. His praemissis in $dz = P\,dx$ seu $z = \int P\,dx$ sit P functio n dimensionum ipsarum a et x, erit igitur z talis functio dimensionum $n + 1$. Quare si ponatur $dz = P\,dx + Q\,da$, erit $Px + Qa = (n + 1)z$. Ex quo valor ipsius Q substitutus dabit aequationem modularem $dz = P\,dx + \frac{da}{a}((n + 1)z - Px)$ seu $a\,dz - (n + 1)z\,da = Pa\,dx - Px\,da$. Quae tantum est differentialis primi gradus. Cum autem generaliter erat $Q = \int B\,dx$, erit hoc casu $(n + 1)\int P\,dx = a\int B\,dx + Px$. Ex quo perspicitur hoc casu integrale $\int B\,dx$ semper reduci ad $\int P\,dx$.

§. 25. Eadem aequatio modularis proueniet ex consideratione solius P. Posito enim $dP = A\,dx + B\,da$, erit $nP = Ax + Ba$. Cum autem sit $dz = P\,dx + da$

$\int B\,dx$, erit $dz = P\,dx + \frac{da}{a}\int(nP\,dx - Ax\,dx)$ in qua integratione a conſtans habetur. Erit igitur $\int nP\,dx = nz$, et $\int Ax\,dx = Px - \int P\,dx$ ob $\int A\,dx = P$. Habebitur itaque $dz = P\,dx + \frac{da}{a}((n+1)z - Px)$, id quod prorſus congruit cum praecedentibus.

§. 26. Retinente P ſuum valorem n dimenſionum. Sit $z = \int APX\,dx$, vbi A ſit functio ipſius a et X ipſius x tantum. Erit igitur $\frac{z}{A} = \int PX\,dx$. Poſito $dP = A\,dx + B\,da$, (in quo littera A cum altera quae eſt functio ipſius a tantum non eſt confundenda) erit $nP = Ax + Ba$. Ipſius PX differentiale igitur poſito x conſtante erit $BX\,da$. Conſequenter habebitur $d.\frac{z}{A} = PX\,dx + da\int BX\,dx = PX\,dx + \frac{da}{a}\int(nPX\,dx - AXx\,dx)$. Eſt vero $\int nPX\,dx = \frac{nz}{A}$ et $\int AXx\,dx = PXx - \int PX\,dx - \int Px\,dX$. Quare fiet $d.\frac{z}{A} = PX\,dx - \frac{PXx\,da}{a} + \frac{(n+1)z\,da}{Aa} + \frac{da}{a}\int Px\,dX$. Niſi igitur $\int Px\,dX$ reduci poterit ad $\int PX\,dx$ vel prorſus integrari, aequatio modularis differentialis primi gradus dari nequit.

§. 27. At ſi fuerit $z = R\int P\,dx$, exiſtente R functione quacunque algebraica ex a, x et etiam ex z conſtante, at P functione ipſarum a et x dimenſionum n. Quia eſt $\frac{z}{R} = \int P\,dx$ erit $d.\frac{z}{R} = P\,dx + \frac{da}{a}(\frac{(n+1)z}{R} - Px)$ $= \frac{R\,dz - z\,dR}{R^2}$ ſeu $Ra\,dz - za\,dR - (n+1)Rz\,da = PR^2a\,dx - PR^2x\,da$. In vniuerſum autem teneatur, quoties $z = \int P\,dx$ ad aequationem modularem reduci poſſit, toties etiam $z = R\int P\,dx$ ad aequationem modularem reduci poſſe. Nullum aliud enim diſcrimen aderit,

rit, nisi quod in illo casu erat z, hoc casu debeat esse $\frac{z}{R}$. Quare si R fuerit vel quantitas algebraica, vel talis transcendens, vt eius differentiale posito etiam a variabili possit sine summatione exhiberi, aequatio modularis per praecepta data reperietur. Quamobrem in posterum tales casus, etiamsi latius pateant praetermittere licebit.

§. 28. Ponamus esse $z = \int(P + Q)dx$, seu $z = \int P dx + \int Q dx$ et P esse functionem ipsarum a et x dimensionum $n-1$, Q vero functionem earundem a et x dimensionum $m-1$. Cum igitur differentiale ipsius $\int P dx$ fit $\frac{P(adx - xda)}{a} + \frac{da}{a}\int nP\,dx$ et differentiale ipsius $\int Q dx$ fit $\frac{Q(adx - xda)}{a} + \frac{da}{a}\int mQ\,dx$; erit $dz = \frac{(P+Q)(adx - xda)}{a} + \frac{da}{a}(n\int P dx + m\int Q dx)$. Ponatur $\frac{adz - (P+Q)(adx - xda)}{da} = u$, eritque $u = n\int P dx + m\int Q dx$. Si igitur porro differentietur erit $du = \frac{(nP + mQ)(adx - xda)}{da} + \frac{da}{a}(n^2\int P dx + m^2 \int Q dx)$. Posito igitur $\frac{adv - (nP + mQ)(adx - xda)}{da} = t$ erit $t = n^2\int P dx + m^2\int Q dx$. Eliminatis nunc ex his tribus aequationibus ipsarum z, u et t integralibus $\int P dx$ et $\int Q dx$, prodibit haec aequatio $mnz - (m+n)u + t = 0$. Quae aequatio, si loco u et t valores assumti substituantur, erit modularis quaesita.

§. 29. Simili modo si fuerit $z = \int(P + Q + R)dx$ et P functio $n-1$, Q functio $m-1$ et R functio $k-1$ dimensionum ipsarum a et x. Ponatur $u = \frac{adz - (P+Q+R)(adx - xda)}{da}$ et $t = \frac{adu - (nP + mQ + kR)(adx - xda)}{da}$, et $s = \frac{adt - (n^2P + m^2Q + k^2R)(adx - xda)}{da}$

 Quo

Quo facto erit aequatio modularis haec: $kmnz-(km+kn+mn)u+(k+m+n)t-s=o$.

§. 30. Sit porro $z=\int(P+Q)^k dx$, vbi P sit functio n dimensionum, Q vero functio m dimensionum ipsarum a et x. Quando igitur est $dP=A\,dx+B\,da$ et $dQ=C\,dx+D\,da$, erit $nP=Ax+Ba$ et $mQ=Cx+Da$. Differentiale autem ipsius $(P+Q)^k$ posito x constante diuisum per da est $k(B+D)(P+Q)^{k-1}$. Hanc ob rem erit $dz=(P+Q)^k dx+\frac{k\,da}{a}\int(P+Q)^{k-1}(Ba+Da)dx$. Cum autem sit $Ba=nP-Ax$ et $Da=mQ-Cx$, et $A\,dx=dP$ et $C\,dx=dQ$ ob a in hac integratione constans, erit $dz=(P+Q)^k dx+\frac{da}{a}\int(P+Q)^{k-1}(nP\,dx+mQ\,dx-x\,dP-x\,dQ)$, seu $dz=$

$$\frac{(P+Q)^k(a\,dx-x\,da)}{a}+\frac{da}{a}\int(P+Q)^{k-1}((nk+1)$$

$Pdx+(mk+1)Qdx)$. Ponatur $\frac{adz-(P+Q)^k(adx-xda)-zda}{kda}=u$ erit $u=\int(nP\,dx+mQ\,dx)(P+Q)^{k-1}$. Quare si integrale $\int(nP\,dx+mQ\,dx)(P+Q)^{k-1}$ pendet ab integrali $\int(P+Q)^k dx$ habebitur aequatio modularis differentialis gradus primi; sin minus differentiatio est continuanda. Fit autem $du=(nP\,dx+mQ\,dx)(P+Q)^{k-1}+\frac{uda}{a}-\frac{da}{a}(nP+mQ)(P+Q)^{k-1}x+\frac{da}{a}\int(kn^2P^2dx+(2kmn+n^2-2mn+m^2)PQ\,dx+km^2Q\,dx)\int(P+Q)^{k-2}$.

Et posito $t=\frac{adu-uda-(nP+mQ)(P+Q)^{k-1}(adx-xda)}{da}$

erit $t=\int(kn^2P^2dx+(2kmn+n^2-2mn+m^2)PQ\,dx+km^2Q^2dx)(P+Q)^{k-2}$.

§. 31.

§. 31. Cum igitur habeantur tria integralia videndum est, num ea a se inuicem pendeant, hoc enim si fuerit, habebitur aequatio algebraica inter t, u et z, quae, dabit loco t et u substitutis assumtis valoribus aequationem modularem differentialem secundi gradus. Quo autem facilius in casibus particularibus perspici possit, an pendeant a se inuicem, ad alias formas eas reduci conuenit. Cum igitur sit $z = \int (P+Q)^k dx$ erit $u = mz + (n-m)\int (P+Q)^{k-1} P dx$ et $t = (2km + n - m)u - (km^2 - m^2 + mn)z + (n-m)^2 (k-1) \int (P + Q)^{k-2} P^2 dx$. Quaerendum itaque est an $\int (P+Q)^{k-2} P^2 dx$ reduci possit ad haec $\int (P+Q)^{k-1} P dx$ et $\int (P+Q)^k dx$ Vel an sit $\int (P+Q)^{k-2} P^2 dx = \alpha \int (P+Q)^{k-1} P dx + \beta \int (P+Q)^k dx + V$ designante V quantitatem algebraicam quamcunque per a et x datam, et α ac β sunt coefficientes ex constantissimis et a compositae.

§. 32. Fiat igitur $V = T(P+Q)^{k-1}$ huius differentiale posito a constante sit $dT(P+Q)^{k-1} + (k-1)(T dP + T dQ)(P+Q)^{k-2}$. Prodibit ergo sequens aequatio $P^2 dx = \alpha P^2 dx + \alpha P Q dx + \beta P^2 dx + 2\beta P Q dx + \beta Q^2 dx + P dT + Q dT + (k-1) T dP + (k-1) T dQ$, quae per dx diuidi poterit. At T ita debet accipi, vt termini repondentes sese destruant, sumtis ad hoc idoneis pro α et β valoribus.

§. 33. At si per $\int P dx$ non absolute determinetur z sed quantitas $\int Q dz$, data Q vtcunque per a et z, atque P per a et x; habebitur ista aequatio $Q dz = P dx$ in qua indeterminatae x et z sunt a se inuicem sepa-

ſeparatae. Modularis vero aequatio hoc modo inuenietur: Quia eſt $\int Q\,dz = \int P\,dx$ differentietur vtrumque membrum ponendo etiam a variabili ope $dP = A\,dx + B\,da$ et $dQ = C\,dz + D\,da$. Erit ergo $Q\,dz + da\int D\,dz = P\,dx + da\int B\,dx$ ſeu $Q\,dz = P\,dx + da(\int B\,dx - \int D\,dz)$. Quae aequatio, ſi $\int B\,dx$ et $\int D\,dz$ poterunt eliminari, dabit modularem quaeſitam.

§. 34. Sit P functio $m-1$ dimenſionum ipſarum a et x, et Q functio $n-1$ dimenſionum ipſarum a et z. His poſitis erit Diff. $\int P\,dx = \frac{m\,da\int P\,dx + P(a\,dx - x\,da)}{a}$, et Diff. $\int Q\,dz = \frac{n\,da\int Q\,dz + Q(a\,dz - z\,da)}{a}$. Ex quo eruitur iſta aequatio $(m-n)\int P\,dx = \frac{Q(a\,dz - z\,da)}{da} - \frac{P(a\,dx - x\,da)}{da}$ ob $\int P\,dx = \int Q\,dz$. Quare ſi fuerit $m = n$, erit $Q\,a\,dz - Q\,z\,da = P\,a\,dx - P\,x\,da$. quae eſt aequatio modularis, ſeu $\frac{da}{a} = \frac{Q\,dz - P\,dx}{Qz - Px}$.

§. 35. Sin vero m et n non ſint aequales, aequatio modularis erit differentialis ſecundi gradus. Nam cum ſit $(m-n)\int P\,dx = \frac{Q(a\,dz - z\,da) - P(a\,dx - x\,da)}{da}$ erit Diff. $\frac{Q(a\,dz - z\,da) - P(a\,dx - x\,da)}{da} = \frac{m(m-n)\,da\int P\,dx}{a} + \frac{(m-n)P(a\,dx - x\,da)}{a} = \frac{mQ(a\,dz - z\,da) - nP(a\,dx - x\,da)}{a}$. Quae aequatio eſt modularis quaeſita.

§. 36. Si in aequatione propoſita $dz + P\,dx = 0$ indeterminatae non fuerint a ſe inuicem ſeparatae, ita vt P ſit functio involuens x et z et a; debebit per quantitatem quandam R multiplicari, quo formula $R\,dz + PR\,dx$ vt differentiale integralis cuiusdam S poſſit conſiderari. Erit itaque $dS = R\,dz + PR\,dx = 0$, ideoque

ideoque $S = \text{Const.}$ Sed ad quantitatem R inueniendam, sit $dP = A\,dx + B\,dz$ et $dR = D\,dx + E\,dz$, vbi a tantisper pro constante habemus. His positis erit $d.PR = (DP + AR)\,dx + (EP + BR)\,dz$, quocirca debet esse $D = EP + BR$. At ob $D = \frac{dR - E\,dz}{dx}$ fiet $E\,dz + EP\,dx + BR\,dx = dR$. Cum vero sit $dz + P\,dx = o$, habebitur $dR = BR\,dx$, et $lR = \int B\,dx$. Cognita vero est B ex dato P, et quia B et z et x inuoluit, $B\,dx$ integrari debet ope aequationis $dz + P\,dx = o$, si quidem fieri potest. Sit itaque $\int B\,dx = K$, eritque $R = e^K$ posito $le = 1$.

§. 37. Cum igitur sit $dS = e^K dz + e^K P\,dx = o$, ad aequationem modularem inueniendam sit $dK = F\,dx + G\,dz + H\,da$, eritque $de^K = e^K(F\,dx + G\,dz + H\,da)$. Sumatur deinde integrale ipsius $e^K H\,dz$ posito tantum z variabili, x vero et a constantibus, quo facto erit aequatio modularis $e^K dz + e^K P\,dx + da\int e^K H\,dz = o$, seu diuiso per e^K haec $dz + P\,dx + e^{-K} da \int e^K H\,dz = o$. Alia aequatio modularis inuenitur, posito $dP = A\,dx + B\,dz + C\,da$, erit enim ipsius $e^K P$ differentiale posito x et z constante hoc $e^K(C\,da + PH\,da)$. Integretur $e^K dx(C + PH)$ posito tantum x variabili, quo facto erit aequatio modularis $dz + P\,dx + e^{-K} da \int e^K dx\,(C + PH) = o$. Sed huiusmodi aequationes modulares nisi R possit sine aequatione proposita $dz + P\,dx = o$ determinari, nullius fere sunt vsus.

§. 38. Consideremus igitur casus particulares, sitque in aequatione $dz + P\,dx = o$, P functio nullius dimen-

sionis

fionis ipfarum x et z, non computatis conftantibus et modulo a. Formula vero $dz+Pdx$ integrabilis femper redditur fi diuidatur per $z+Px$, quamobrem erit $S=\int\frac{dz+Pdx}{z+Px}=$ Conft. Fit autem $\int\frac{dz+Pdx}{z+Px}=l(z+Px)$ $-\int\frac{xdP}{z+Px}$. Deinde pofito $z=tx$, fiet P functio ipfius t tantum quae fit T. Quare erit $S=l(z+Px)-\int\frac{dT}{t+T}$ quod per quadraturas poteft exhiberi.

§. 39. Ad aequationem modularem igitur inueniendam nil aliud eft agendum, nifi vt $\int\frac{dz+Pdx}{z+Px}$ differentietur pofito quoque modulo a variabili. Ponatur igitur $dP=Adx+Bdz+Cda$, vbi erit $Ax+Bz=o$. Differentietur nunc coefficiens ipfius dx, nempe $\frac{P}{z+Px}$ pofito tantum a variabili, erit eius differentiale $\frac{Czda}{(z+Pz)^2}$. Deinde integretur $\frac{Czdx}{(z+Px)^2}$ tantum x pro variabili habita, quo facto erit aequatio modularis quaefita $dz+Pdx+(z+Px)da\int\frac{Czdx}{(z+Px)^2}=o$. Simili modo ex coefficiente ipfius dz qui eft $\frac{1}{z+Px}$ prodit haec aequatio modularis $dz+Pdx-(z+Px)da\int\frac{Cxdz}{(z+Px)^2}=o$, in qua integratione z tantum pro variabili habetur. Siue etiam haec $dz+Pdx=(z+Px)da\int\frac{Ddt}{(t+T)^2}$ in qua C et T per folum t et a dantur.

§. 40. Praetermittere hic non poffum, quin generalem aequationum homogenearum, vti a *Cel. Ioh. Bernoulli* vocantur, quae omnes hac aequatione $dz+Pdx=o$ continentur, refolutionem adiiciam. Namque reperitur ex (§. 38) $l(z+Px)=\int\frac{dT}{t+T}=l(t+T)-\int\frac{dt}{t+T}$ vbi $=\frac{z}{x}$ et $T=P$. Prodibit igitur. $lx+\int\frac{dt}{t+T}=o$ feu adiecta

iecta constante $l\frac{c}{x} = \int \frac{dt}{t+T}$. Vt si proposita sit aequatio $nx\,dz + dx\sqrt{(x^2+z^2)} = 0$ fiet $P = \frac{\sqrt{(x^2+z^2)}}{nx}$, positoque $z = tx$, erit $T = \frac{(1+tt)}{n}$ ideoque $l\frac{c}{x} = \int \frac{n\,dt}{nt+\sqrt{(1+tt)}}$ fiat $\sqrt{(1+tt)} = t+s$ erit $t = \frac{1-ss}{2s}$ et $dt = \frac{-ds(1+ss)}{2ss}$. Quare erit $l\frac{c}{x} = \int \frac{-n\,ds(1+ss)}{(n+1)s-(n-1)s^3} = \frac{-n}{n+1}ls + \frac{n^2}{n^2-1}l((n-1)s^2 - n - 1)$.

§. 41. Quo tamen vsus calculi §. 36 in casu speciali appareat, sit aequatio proposita $dz + pz\,dx - q\,dx = 0$, in qua p et q vtcunque in a et x dantur. Quae aequatio cum illa generali $dz + P\,dx = 0$ collata dat $P = pz - q$, ex quo fiet $B = p$, et $lR = \int p\,dx$ seu $R = e^{\int p dx}$. Cum igitur $\int p\,dx$ per quadraturas possit assignari, cognitus est valor ipsius R, ideoque aequatio proposita per $e^{\int p dx}$ multiplicata sit integrabilis: erit igitur $e^{\int p dx}dz + e^{\int p dx}pz\,dx - e^{\int p dx}q\,dx = 0$ huiusque integralis $e^{\int p dx}z = \int e^{\int p dx}q\,dx$ seu $z = e^{-\int p dx}\int e^{\int p dx}q\,dx$. Differentiari itaque debet $e^{-\int p dx}\int e^{\int p dx}q\,dx$ positis et a et x variabilibus, et differentiale ipsi dz aequale poni, quo facto habebitur aequatio modularis. Positis igitur $dp = f\,dx + g\,da$ et $dq = h\,dx + i\,da$ prodibit ista aequatio modularis $dz = -e^{-\int p dx}(p\,dx + da\int g\,dx)\int e^{\int p dx}q\,dx + q\,dx + e^{-\int p dx}da\int e^{\int p dx}(i\,dx + q\,dx\int g\,dx)$, seu posito breuitatis gratia $\int e^{\int p dx}q\,dx = T$ erit $dz = -e^{-\int p dx}Tp\,dx + q\,dx + e^{-\int p dx}da\int e^{\int p dx}i\,dx - e^{-\int p dx}da\int Tg\,dx$. Ex qua operatione intelligi potest, ad aequationem modularem inueniendam id maxime esse efficiendum, vt in aequatione proposita indeterminatae a se inuicem separentur.