DE LINEA CELERRIMI DESCENSVS IN MEDIO QVOCVNQVE RESISTENTE.

AVCTORE
Leonh. Euler.

§. 1.

Qvae curuae ad certum quendam motum producendum in vacuo non multo labore inueniuntur, eaedem in medio resistente non solum laborem multo maiorem; sed etiam plus sollertiae et cautionis requirunt. Saepenumero quoque euenit, vt multa problemata in hypothesi medii resistentis solutionem vel omnino respuant vel in particularibus tantum casibus admittant. Cuiusmodi est problema tautochronarum, de quo an in alia resistentiae hypothesi, praeter simplicem et duplicatam celeritatum rationem resolui queat, vehementer dubito. Tabula VIII

§. 2. Pertinet huc quoque problema lineae brachystochronae seu celerrimi descensus, quod a *Cel. Ioh. Bernoulli* in hypothesi vacui Geometris propositum mox plures easque differentes nactum est solutiones, quas in Actis Lipsiensibus, Transact. Angl. Comment. Parisinis, pluribusque aliis libris videre licet. Idem autem problema in medii resistentis hypothesi ego primum in Actis Lips. A. 1726. soluendum proposui, cum ob eius non contemnendam elegantiam, tum ob singularem circumspectio-

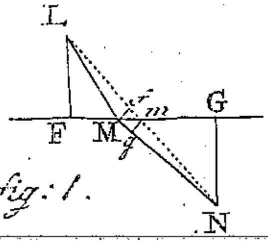

fig: 1.

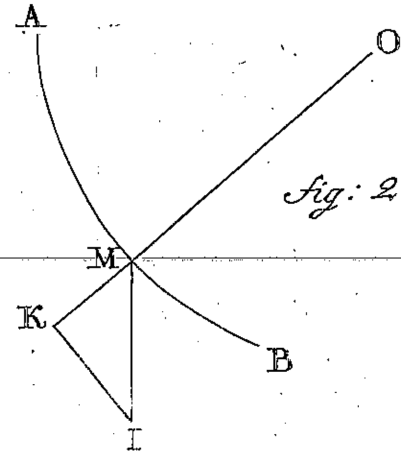

fig: 2.

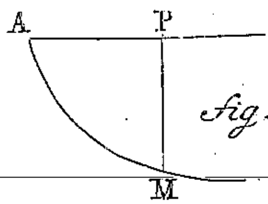

fig: 3.

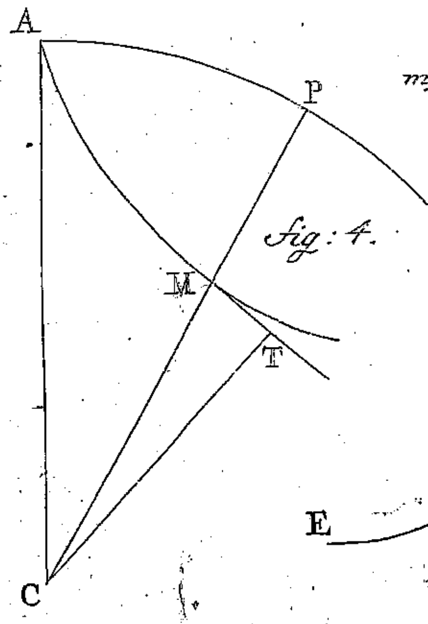

fig: 4.

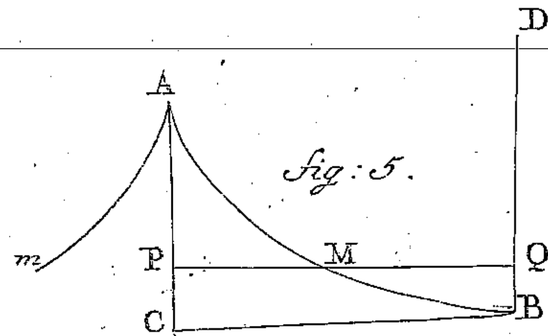

fig: 5.

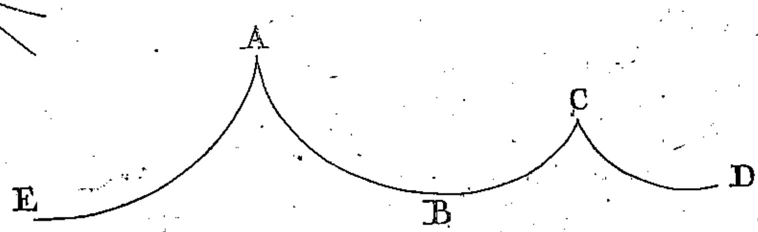

fig: 6.

ſpectionem, qua in eius ſolutione vti oportet, ne quis in errorem incidat.

§. 3. Poſtquam autem hoc problema propoſuiſſem *Celeb. Hermannus* id dignum iudicauit, cuius ſolutionem diſſertationi de motibus variatis Tom. II. Comment. infereret. Sed copia rerum, quas in hac diſſertatione pertractauit viro ceterum perſpicaciſſimo non permiſiſſe videtur vt hoc problema, quod paucis tantum attigerat, ſatis perpenderet, et ſolutionem inuentam accurate examinaret. Ex quo factum eſt, vt curuae ab illo aſſignatae problemati non conueniant, nec brachyſtochronismi proprietatem poſſideant. Monui etiam hac de re beatae memoriae Virum per litteras, ipſique meam ſolutionem a ſua diſcrepantem transmiſi, vt in cauſam diſcriminis inquireret, ad quae mihi reſpondit, ſe vtique de ſua ſolutione dubitare coepiſſe, et quam primum negotia conceſſura eſſent, emendationem ſe perficere velle, quam etiam, niſi mors interueniſſet, pro eius eximia integritate iam certe haberemus.

§. 4. Quod igitur ipſe feciſſet, ſi vixiſſet, non arbitror quenquam aegre laturum, ſi idem ego fecero atque eius ſolutionem correxero. Hoc non ſolum non iniquum puto, ſed etiam ad id me obſtrictum credo, ne forte poſthac alii ſint acceſſuri, qui Viri eximii famam et exiſtimationem iſto lapſu imminuere ſuſtineant. Atque cum oſtendero, quantam circumſpectionem ad huiusmodi errores euitandos adhiberi oporteat, tum vnusquisque eo facilius Viro defuncto hoc erratum condonabit, tum etiam meum inſtitutum non reprehendet, quo genuina methodo problema a me propoſitum reſoluere ſtatui.

§. 5.

§. 5. Praecipuum, ad quod in ſolutione huius problematis attendere debemus, eſt lemma ex natura maximi et minimi petitum, per quod diſpoſitio duorum elementorum contiguorum curuae quaeſitae determinatur, quo corpus ea breuiori tempore abſoluat deſcendendo, quam quaeuis alia elementa intra eoſdem terminos poſita. Huiusmodi propoſitio habetur a *Hugenio* demonſtrata, eaque vſus eſt *Hermannus* in ſua ſolutione: ſed vti mox apparebit, plus ei tribuit, quam oportebat, atque ad reſtrictionem, quam iſta propoſitio requirit, non ſatis attendebat. Quamobrem et hoc Lemma *Hugenianum* et aliud latius patens atque ad quosuis caſus accommodatum in medium proferam.

§. 6. Oporteat igitur in recta FG definire punctum M ex quo ad datos terminos L et N ductae lineae LM, MN a deſcendente corpore tempore breuiſſimo percurrantur: ſit autem celeritas corporis ſupra FG $= m$ et infra eam $= n$, quocunque aſſumto puncto M in FG. His igitur poſitis debebit $\frac{LM}{m} + \frac{MN}{n}$ eſſe minimum, quia hac quantitate tempus per LMN aſſignatur. Quod vt efficiatur, puncto M proximum m eſt accipiendum, et ductis Lm, mN, tempora per LMN et LmN aequalia facienda. Hinc ergo habebitur $\frac{LM}{m} + \frac{MN}{n} = \frac{Lm}{m} + \frac{mN}{n}$, ex quo deſcriptis centris L et N arculis Mf et mg prodibit haec aequatio $\frac{mf}{m} = \frac{Mg}{n}$ ſeu iſta analogia $mf : Mg = m : n$. Eſt vero mf ad Mg vt coſinus anguli LMF ad coſinum anguli GMN. Quocirca coſinus angulorum, quos haec duo elementa cum recta FG conſtituere debent, ſunt celeritatibus, quibus illa elementa deſcribuntur, propor- Figura 1.

tionales. Atque hoc eſt lemma *Hugenianum*, quo vſus *Hermannus* ad ſuam problematis ſolutionem peruenit.

§. 7. Quo autem perſpiciatur, quam late pateat hoc lemma et quibus in caſibus poſſit adhiberi, ad hoc eſt aduertendum, quod in eo ponitur, elementa omnia infra rectam FG ſumta eadem celeritate n abſolui. Quamobrem, niſi corpus in hisce omnibus elementis, puncto M vbicunque aſſumto, eandem habuerint celeritatem, hoc lemma perperam adhibetur, atque in erroneam ſolutionem inciditur. Euenit autem hoc in medio reſiſtente, atque ita eſt factum, vt *Cel. Hermannus*, poſtquam hoc lemmate in inueniendis brachyſtochronis in vacuo feliciter eſſet vſus, pro mediis reſiſtentibus eodem lemmate a recta via fuerit ſeductus.

§. 8. In vacuo tamen etiam res ita eſt inſtituenda, vt recta FG ad directionem potentiae ſollicitantis vbique ſit normalis. Tum enim id, quod requiritur, obtinetur, et corpus ex L ad quodque rectae FG punctum descendens idem ſemper acquirit celeritatis incrementum, ita vt ſingula elementa intra FG ſita aequali celeritate percurrantur. Curua igitur his in caſibus, ſcilicet in vacuo, erit brachyſtochrona, ſi celeritas corporis in quouis elemento proportionalis fuerit ſinui anguli, quem hoc elementum cum directione potentiae ſollicitantis conſtituit. Quamobrem ope huius regulae inueniri poterit curua celerrimi deſcenſus in vacuo, quaecunquae fuerit potentiae ſollicitantis lex.

§. 9. Ex his iam ſatis perſpicitur datam regulam inueniendae brachyſtochronae ad medium reſiſtens accommodari

modari non posse. Namque celeritatis incrementa, quae corpus descendendo ex L ad quaeque rectae FG puncta acquirit, non sunt inter se aequalia, etiamsi recta FG ad potentiae sollicitantis directionem sit normalis; sed praeterea ab inclinatione elementorum percursorum pendent, quemadmodum ex natura resistentiae facile apparebit. Pro his igitur casibus peculiare lemma stabiliri oportet, in quo celeritates per inferiora elementa vtcunque variabiles ponuntur, pro diuersis locis in quibus punctum M in FG accipitur.

§. 10. Sumtis igitur vt ante punctis M et m proximis, et ductis elementis LM, MN ac Lm, mN, sit celeritas per elementa LM et L$m = q$, celeritas per MN $= q + dt$, at ea per elementum mN $= q + dt + dd\theta$. Incrementum scilicet celeritatis per LM acquisitum ponitur dt, et id, quod per Lm acquiritur, ponitur $dt + dd\theta$. Quo igitur tempus per LMN fiat minimum, oportet id aequale fieri tempori per LmN. Ex quo habebitur $\frac{LM}{q} + \frac{MN}{q+dt} = \frac{Lm}{q} + \frac{mN}{q+dt+dd\theta}$, atque ex hoc prodibit $\frac{mf}{q} = \frac{Mg}{q+dt} + \frac{mN.dd\theta}{(q+dt)(q+dt+dd\theta)}$ seu $(q + 2qdt + dt^2 + qdd\theta + dtdd\theta)\, mf = (q^2 + qdt + qdd\theta)\, Mg + q.mN.dd\theta$. Est vero $mf = \frac{FM\ Mm}{LM}$ et $Mg = \frac{MG.Mm}{LM}$. Quibus substitutis et neglectis negligendis orietur $q(\frac{MG}{LM} - \frac{FM}{LM}) = \frac{FM}{LM}dt - \frac{LM\ dd\theta}{Mm}$. Quae, cum $dd\theta$ semper ita per Mm determinetur vt sit huius formae Z.Mm, alias quantitates non inuoluet, nisi quae a puncto M pendebunt.

§. 11. Si aequalia ponantur elementa LF, NG, dicanturque dx, atque fiat $FM = dy$, $LM = ds$, erit $MG = dy + ddy$ et $MN = ds + dds$. Quibus ſubſtitutis ſuperior formula transibit in hanc $\frac{qdsddy - qdydds}{ds^2} = \frac{dydt}{ds} - \frac{dsdd\theta}{Mm}$, ſeu ob $dsdds = dyddy$ poſito dx conſtante, in hanc $\frac{qdx^2ddy}{ds^3} = \frac{dydt}{ds} - \frac{dsdd\theta}{Mm}$. Atque hoc eſt lemma, quo loco *Hugeniani* ad inueniendas brachyſtochronas in medio reſiſtente vti debemus.

§. 12. Sit nunc potentia ſollicitans quaecunque, eius vero directio, vt ante, normalis ad rectam FG. Ponatur ea dum corpus elementum LM vel Lm deſcribens vrget $= p$, poſita vi grauitatis $= 1$. Reſiſtat porro medium in ratione quacunque multiplicata celeritatum, cuius exponens ſit $2n$, atque haec reſiſtentia ita ſe habeat, vt aequalis ſit vi grauitatis 1, ſi corporis celeritas debita fuerit altitudini c. Iam ſit corporis in L celeritas tanta, quanta acquiritur lapſu grauis per altitudinem v. Quibus poſitis erit vis reſiſtentiae, quae motum corporis ab L ad FG ingredientis retardat, $= \frac{v^n}{c^n}$.

§. 13. A potentia p corpus, ſiue per LM ſiue per Lm deſcendat idem accipit celeritatis incrementum, quia FG ad directionem potentiae normalis ponitur. Altitudo autem v capiet augmentum $= pdx$. Reſiſtentia autem ita retardabit corpus per LM deſcendens, vt decrementum altitudinis v ſit $= \frac{v^n}{c^n} LM$. At ſi corpus per Lm incedere ponitur, erit decrementum altitudinis $v =$

v^n

$\frac{v^n}{c^n}$ L m. Quare celeritas, qua elementa LM et L m percurruntur, debetur altitudini v; celeritas vero per MN altitudini $v + p\,dx - \frac{v^n}{c^n}$ LM, et celeritas per mN altitudini $v + p\,dx - \frac{v^n}{c^n}$ L m.

§. 14. His cum noſtro lemmate comparatis habebimus $q = v$, $q + dt = \sqrt{(v + p\,dx - \frac{v^n}{c^n}\text{LM})} = \sqrt{v} + \frac{p\,dx - \frac{v^n}{c^n}.\text{LM}}{2\sqrt{v}}$; adeoque $dt = \frac{p\,dx - \frac{v^n}{c^n}ds}{2\sqrt{v}}$. Atque $q +$

$$dt + dd\theta = \sqrt{(v + p\,dx - \frac{v^n}{c^n}\text{L}m)} = \sqrt{v} + \frac{p\,dx - \frac{v^n}{c^n}\text{L}m}{2\sqrt{v}}$$

Ex his fiet ergo $dd\theta = \frac{v^n(\text{LM} - \text{L}m)}{2c^n\sqrt{v}} = -\frac{v^n.\text{FM}.\text{M}m}{2c^n.\text{LM}.\sqrt{v}}$ conſequenter $\frac{dd\theta}{\text{M}m} = -\frac{v^n\,dy}{2c^n\,ds\sqrt{v}}$. Sequens igitur ex iſtis orietur aequatio ſingulis per $2\sqrt{v}$ multiplicatis, $\frac{2v\,dx^2\,ddy}{ds^3} = \frac{p\,dx\,dy}{ds} - \frac{v^n\,dv}{c^n} + \frac{v^n\,dy}{c^n}$ ſeu $2v\,dx\,ddy = p\,dy\,ds^2$.

Hanc igitur proprietatem, vt ſit $v = \frac{p\,dy\,ds^2}{2\,dx\,ddy}$, curua brachyſtochrona habere debet, ex eaque facile erit eam inuenire.

§. 15. Quia ii termini, in quos resistentia $\frac{v^n}{c^n}$ ingreditur sese mutuo destruunt, hoc lemma latissime patet et ad quamcunque resistentiam potest accommodari, sine vlla mutatione. Haec est igitur proprietas vniuersalis omnium brachystochronarum tam in vacuo, quam in quocunque medio resistente. Sed quo facilius istud lemma memoria teneri queat, aliam formam ei inducemus.

§. 16. Aequatio inuenta $2\,v\,dx\,ddy = p\,dy\,ds^2$ si diuidatur per ds^3 abit in hanc $\frac{2v\,dx\,ddy}{ds^3} = \frac{p\,dy}{ds}$, in qua $\frac{p\,dy}{ds}$ exprimit vim normalem resolutione vis sollicitantis p ortam. In altero membro $\frac{2v\,dx\,ddy}{ds^3}$ significat $\frac{-ds^3}{dx\,ddy}$ radium osculi curuae L M N secundum plagam F porrectum. At quia curua versus F est conuexa radius osculi in plagam oppositam G erit directus, et habet idcirco valorem negatiuum. Eius ergo longitudo erit $\frac{ds^3}{dx\,ddy}$. Quare posito radis osculi $= r$, et vi normali $=$ N habebitur ista aequatio $\frac{2v}{r} =$ N. Denotat autem $\frac{2v}{r}$ vim centrifugam, qua corpus, quatenus in recta linea progredi nequit, curuam, in qua mouetur, premit. Hanc ob rem omnis brachystochrona hanc habebit proprietatem, vt vis normalis aequalis sit vi centrifugae.

Figura 2. §. 17. Notandum autem est omne corpus, quod a quapiam vi sollicitatum siue in vacuo siue in medio resistente super concaua parte curuae cuiusdam A M B incedit, curuam duplici vi premere, vi scilicet normali a potentia sollicitante orta, et vi sua centrifuga. Sit M I potentia

solli-

ſollicitans corpus in M; haec reſolui ſolet in duas alias MK, KI, quarum illius directio MK normalis eſt in curuam et propterea vis haec normalis appellatur, alterius KI directio eſt ſecundum curuae tangentem et tangentialis vocatur. Perſpicuum igitur eſt harum virium normalem ſolam corpus ad curuam apprimere. Secundum eandem directionem MK praeterea curua AMB in M premitur a vi centrifuga, quae ſe habet ad vim grauitatis, vt altitudo celeritatem generans v ad dimidium radii oſculi MO.

§. 18. Si ergo curua AMB ſiue in vacuo ſiue in medio reſiſtente quocunque ita fuerit comparata, vt corporis ſuper ea deſcendentis ambae vires, quibus curua premitur ſcilicet normalis et centrifuga, inter ſe fuerint aequales, curua ſemper erit brachiſtochrona, ſeu corpus ſuper ea minori tempore ex A ad M deſcendit, quam ſuper alia quacunque linea per A et M transeunte. Haec igitur aequalitas inter vim normalem et vim centrifugam vera et vniuerſalis eſt lex omnium curuarum brachyſtochronarum, eiusque beneficio in quacunque et potentiae ſollicitantis et reſiſtentiae hypotheſi in promtu erit curuas brachyſtochronas determinare.

§. 19. Quia in vacuo ſecundum *Theorema Hugenianum* celeritas proportionalis eſſe debet ſinui anguli, quem curua cum directione potentiae conſtituit, i. e. ipſi $\frac{MK}{MI}$, erit $\frac{MK^2}{MI^2 . MO}$ proportionale ipſi MK ſeu $\frac{MK}{MI}$ ipſi MI. MO. Omnes igitur brachyſtochronae in vacuo hanc habent proprietatem, vt ſinus anguli, quem directio potentiae cum curua facit, vbique ſit proportionalis radio oſculi

osculi et potentiae sollicitanti coniunctim. Quare huius regulae ope sine celeritatis determinatione omnes brachystochronae in vacuo facile inuenientur.

§. 20. Initium autem curuae A, in quo omnes descensus ex quiete fieri debent, semper in eo est loco, in quo curuae tangens in directionem potentiae incidit. In hoc enim loco in vacuo ipsa corporis celeritas propter angulum curuae cum directione potentiae euanescentem fit aequalis o. In medio autem resistente ipsum motus initium a vacuo non differt, et hanc ob rem etiam hoc casu tangens initii curuae cum potentiae directione congruere debet. Huius vero ratio est habenda in adiectione constantium quantitatum, quando aequationem differentio-differentialem brachystochronae integramus, et efficere debemus, vt curua datum habeat initium et per datum punctum transeat.

Figura 3. §. 21. Illustremus regulam §. 19. pro brachystochronis inueniendis in vacuo datam exemplis, sitque potentia sollicitans constans $= g$, eius directio verticalis secundum PM. Brachystochrona vero quaesita sit AM et abscissae in recta horizontali AP per initium curuae transeunte accipiantur. His factis sit $AP = y$, $PM = x$, $AM = s$, eritque sinus anguli, quem PM cum curua conficit $= \frac{dy}{ds}$, et radius osculi $= \frac{ds^3}{dxddy}$, posito dx constante, qui ob potentiam constantem proportionalis esse debet ipsi $\frac{dy}{ds}$. Fiat igitur $\frac{ds^3}{dxddy} = \frac{ady}{ds}$ seu ob $ddy = \frac{dsdds}{dy}$ hoc modo $ds^3 = adxdds$. Diuidendo per ds^2 et integrando prodit $s = C - \frac{adx}{ds}$. Quia facto $s = o$ fieri debet.

debet $dx = ds$, erit $C = a$ et ideo $sds = ads - adx$, quae porro integrata dat $s^2 = 2as - 2ax$ aequationem pro cycloide vt constat.

§. 22. Sit porro C centrum virium attrahens in ratione quacunque multiplicata distantiarum, cuius exponens sit m. Curua AM sit brachystochrona pro corpore in vacuo moto. Dicatur $CA = a$, $CM = y$, et perpendiculum CT in tangentem MT ex C demissum $= z$. Vis ergo in M secundum MC corpus trahens erit vt y^m, sinus anguli curuae cum hac directione erit $= \frac{z}{y}$, et radius osculi erit $-\frac{ydy}{dz}$. Quare vi regulae erit $\frac{z}{y}$ vt Fig. 4.

$\frac{y^{m+1}dy}{dz}$ seu $Azdz = y^{m+2}dy$, cuius integralis est $C + Az^2 = y^{m+3}$. Quia si $y = a$ fit $z = 0$, erit $C = a^{m+3}$, et consequenter $Az^2 = a^{m+3} - y^{m+3}$, arbitraria A negatiue sumta. Haecque aequatio omnes brachystochronas, quae circa centra virium existunt, complectitur.

§. 23. Reuertamur autem ad medium resistens in ratione quacunque multiplicata celeritatum, cuius exponens sit $2n$. Potentia sollicitans vero ponatur constans $= g$ et habens directionem verticalem vbique ipsi AP parallelam. Sit AMB curua celerrimi descensus inueniendа, in qua ponamus $AP = x$, $PM = y$ et $AM = s$. Celeritas porro in M debita sit altitudini v; quare resistentia in M erit $= \frac{v^n}{c^n}$. Vnde ex sollicitatione potentiae et effectu resistentiae simul habebitur $dv = gdx - \frac{v^n ds}{c^n}$. Brachystochronismus vero dat $2vdxddy = gdyds^2$ Figura 5.

 po-

poſito dx conſtante (§. 14.). Ex quibus aequationibus coniunctis exterminata littera v prodibit aequatio pro curua brachyſtochrona quaeſita.

§. 24. Propter dx conſtans erit $ddy = \frac{ds\,dds}{dy}$ ideoque $v = \frac{g\,ds\,dy^2}{2\,dx\,dds}$. Ergo $dv = \frac{g\,dy^2 dds^2 + 2g\,ds^2 dds^2 - g\,ds\,dy^2 d^3s}{2\,dx\,dds^2}$. His valoribus ſubſtitutis in aequatione $dv = g\,dx - \frac{v^n ds}{c^n}$ habebitur $\frac{g\,ds\,dy^2 d^3s - 3g\,dy^2 dds^2}{2\,dx\,dds^2} = \frac{g^n ds^{n+1} dy^{2n}}{2^n c^n dx^n dds^n}$ ſeu $ds\,d^3s - 3\,dds^2 = \frac{g^{n-1} ds^{n+1} dy^{2n-2}}{2^{n-1} c^n dx^{n-1} dds^{n-2}}$. Haec aequatio, ſi medium reſiſtens ſit infinite rarum ſeu in vacuum transmutatur, quo caſu ſit $c = \infty$, abit in $ds\,d^3s = 3\,dds^2$, cuius integralis eſt $a\,dx\,dds = ds^3$. Quae quod ſit ad cycloidem §. 21. oſtendimus.

§. 25. Ad aequationem autem generalem conſtruendam pono $ds = p\,dx$, vt ſit $dds = dp\,dx$ et $d^3s = dx\,ddp$. Hinc erit $dy = dx\sqrt{(p^2 - 1)}$ et $v = \frac{g\,p\,dx(p^2-1)}{2\,dp}$. Ipſa autem aequatio abibit in hanc $p\,ddp - 3\,dp^2 = \frac{g^{n-1} p^{n+1} dx^n (p^2-1)^{n-1}}{2^{n-1} c^n dp^{n-2}}$. Ponatur porro $dx = q\,dp$, eritque $ddp = -\frac{dp\,dq}{q}$. Quo ſubſtituto prodibit $-\frac{p\,dq - 3q\,dp}{q^{n+1}} = \frac{g^{n-1} p^{n+1} (p^2-1)^{n-1} dp}{2^{n-1} c^n}$. Multiplicetur haec aequatio per $n\,p^{-3n-1}$; quo facto habebitur —

$$-\frac{np^{-3n}dq-3np^{-3n-1}qdp}{q^{n-1}}=\frac{ng^{n-1}p^{-2n}(p^2-1)^{n-1}dp}{2^{n-1}c^n}$$

Cuius integralis eſt $\frac{2^{n-1}c^n}{ng^{n-1}p^{3n}q^n}=\int\frac{(p^2-1)^{n-1}dp}{p^{2n}}$. Ponatur breuitatis gratia $\frac{ng^{n-1}}{2^{n-1}c^n}\int\frac{(p^2-1)^{n-1}dp}{p^{2n}}=P^{-n}$, quae quantitas conceſſis quadraturis, ſi integratio non ſuccedit, ſemper poteſt exhiberi. Quo ergo poſito erit $p^3 q=P$, atque ob $q=\frac{dx}{dp}$, fiet $dx=\frac{Pdp}{p^3}$. Conſequenter $x=\int\frac{Pdp}{p^2}$, $s=\int\frac{Pdp}{p^2}$ et $y=\int\frac{Pdp\surd(p^2-1)}{p^3}$. Quare in quacunque medii reſiſtentis hypotheſi brachyſtochrona hoc modo poterit conſtrui.

§. 26. Si reſiſtentia medii ſit vt quadratum celeritatis erit $n=1$, ideoque $P^{-1}=\frac{1}{c}\int\frac{dp}{p^2}=\frac{1}{ac}-\frac{1}{cp}=\frac{p-a}{acp}$ Quare fiet $P=\frac{acp}{p-a}$; atque $p^2q=\frac{ac}{p-a}=\frac{p^2dx}{dp}$, ſeu $dx=\frac{acdp}{p^2(p-a)}$, cuius integralis eſt $x=b+\frac{c}{p}+\frac{c}{a}l\frac{p-a}{p}=b+\frac{cdx}{ds}+\frac{c}{a}l\frac{ds-adx}{ds}$. In qua aequatione, quia facto $x=0$, debet eſſe $ds=dx$, fiet $b=-c-\frac{c}{a}l(1-a)$. Habebitur ergo pro curua quaeſita haec aequatio $x=\frac{c(dx-ds)}{ds}+\frac{c}{a}l\frac{ds-adx}{ds-ads}$. Vel ſi aequatio a logarithmis libera deſideretur, haec differentio-differentialis, $acdxdds=ds^2-adxds^2$ poſito dx conſtante. Haec alio modo diſpoſita abit in hanc $\frac{acdxdds}{ds^2}=ds-adx$, cuius integralis eſt $s-ax=ac+\frac{acdx}{ds}$ ſeu $sds-axds=acds-acdx$. Quae integrata dat $s=cl\frac{s-ax-ac+c}{c-ac}$ ſeu $e^{\frac{s}{c}}(c-ac)=s-ax+c-ac$. Huius curuae punctum infimum B ibi erit vbi eſt $s = a(x + c)$. Hoc igitur caſu erit $AB = c\,l\frac{1}{1-a}$ et $AC = \frac{c}{a}\,l\frac{1}{1-a} - c$.

§. 27. Si autem *Theoremate Hugeniano* tanquam ad hunc caſum idoneo vſi eſſemus, ſtatim hanc habuiſſemus inde aequationem $v = \frac{ady^2}{ds^2}$. Hincque $dv = \frac{2adx^2ddy}{ds^3} = g\,dx - \frac{a^n dy^{2n}}{c^n ds^{2n-1}}$ ſeu $2\,a\,dx^2 ddy = gdxds^3 - \frac{a^n dy^{2n}}{c^n ds^{2n-4}}$. Quae facto $ds = p\,dx$ abit in $\frac{2apdp}{\sqrt{(p^2-1)}} = g\,p\,x^2\,dx - \frac{a^n dx(p^2-1)^n}{c^n p^{2n-4}}$ quae iam per ſe eſt ſeparata, ideoque conſtrui poteſt. Si ponatur $n = 1$, vt brachyſtochrona pro medio reſiſtente in duplicata celeritatum ratione prodeat, erit $2\,acdx^2ddy = cgdxd\,s^3 - ady^2 ds^2$ ſeu $2\,acdx^2 dds = cg\,dx\,dy\,ds^2 - ady^3 ds$. Quae aequatio, etiamſi lemmate ſimpliciore nitatur, tamen multo magis eſt compoſita et perplexa, quam noſtra brachyſtochrona inuenta; id quod per ſe ſaepe veritatis criterium eſſe ſolet, praecipue ſi operoſior calculus eo deduxerit.

§. 28. Quo autem appareat, qualem figuram brachyſtochrona noſtra in medio ſecundum celeritatis quadrata reſiſtente habitura ſit, aequationem ſumamus hanc $e^{\frac{s}{c}}(c - ac) = s - ax + c - ac$. Haec, in ſeriem conuerſo $e^{\frac{s}{c}}$, abit in hanc $(c-ac)(1 + \frac{s}{c} + \frac{s^2}{1.2.c^2} + \frac{s^3}{1.2.2.c^3} + \frac{s^4}{1.2.3.4.c^4} + \text{etc.}) = s - ax + c - ac$, ex qua reperitur poſito $\frac{1-a}{a} = k$ haec aequatio $x = s - \frac{ks^2}{1.2.c} - \frac{ks^3}{1.2.3.c^2} - \frac{ks^4}{1.2.3.4.c^4} - \text{etc.}$ Perſpicitur ergo k neceſſario eſſe debere numerum affirmatiuum, alias enim fieret $x > s$ quod fieri nequit;

erit

erit ergo $a = \frac{1}{1+k}$. Ex hac ſerie, quia vehementer conuergit facile pro quouis valore ipſius s reſpondens ipſius x inuenietur. Praeterea intelligitur curuam hanc vltra A continuari in Am, quae ſimilis eſt ipſi AM.

§. 29. Quomodo vero curua vltra B porrigatur hac ratione inueſtigo. Ducto ex B axe verticali BD, in eumque applicata MQ, ſit BQ $=$ PC $= u$, arcus BM $= t$. Hoc poſito erit $s = cl\frac{1}{1-a} - t$, et $x = \frac{c}{a}l\frac{1}{1-a} - t - u$, quibus ſubſtitutis haec emergit aequatio $ce^{\frac{-t}{c}} = au - t + c$ vel haec differentialis, $tdt - audt = acdu$. Per ſeriem vero habebitur $au = \frac{t^2}{1.2.c} - \frac{t^3}{1.2.3.c^2} + \frac{t^4}{1.2.3.4.c^3} -$ etc. Quae aequatio prorſus congruit cum ea, quam A. 1729. pro tautochrona aſcenſui in eadem reſiſtentiae hypotheſi inueni. Altera igitur portio curuae vltra axem BD ſita erit tautochrona ad deſcenſum pertinens. Habebit ergo curua brachyſtochrona huiusmodi formam EABCD infinitis cuſpidibus A, C etc. praeditam, quarum alterni ſunt altiores vt A, alterni humiliores vt C. Rami vero ex vtraque cuſpidis cuiusque parte ſunt inter ſe aequales et ſimiles. Eleuatio altiorum cuſpidum eſt $\frac{c}{a}l\frac{1}{1-a} - c$ humiliorum vero eſt $c - \frac{c}{a}l(1+a)$. Ipſi vero rami altiores AB vel AE ſunt $= cl\frac{1}{1-a}$ depreſſiorumque CB, CD longitudo eſt $= cl(1+a)$. Conuenientia ceterum iſta inter tautochronam et brachyſtochronam praeter vacuum etiam in hac reſiſtentiae hypotheſi praecipue conſiderari meretur, et disquirendum reſtat, num forte in reliquis reſiſtentiae hypotheſibus ſimilis analogia locum obtineat? Id quod tautochronarum inuentionem per ſe difficillimam redderet facillimam. Figura 6.