DE MINIMIS OSCILLATIONIBVS CORPORVM TAM RIGIDORVM QVAM FLEXIBILIVM. METHODVS NOVA ET FACILIS.

AVCTORE
Leonh. Euler.

§. 1.

QVae ad oſcillationes corporum rigidorum pertinent problemata, ea Geometrae ad inuentionem centri oſcillationis referre ſunt ſoliti. Cum enim corpora rigida figuram ſuam, quantumuis etiam a potentiis ollicitentur, immutatam retineant; ad eorum oſcillationes determinandas ſufficit eorum oſcillationis centrum noſſe. Hac enim ratione tota quaeſtio reducitur ad oſcillationes penduli ſimplicis, cuius motus iam ſatis cognitus et extra omne dubium eſt poſitus. Omnes idcirco circa motum oſcillatorium corporum rigidorum quaeſtiones eo redeunt, vt inueniatur longitudo penduli ſimplicis, quod iisdem temporibus oſcillationes ſuas abſoluat; hac enim cognita ſimul quoque motus oſcillatorius corporum propoſitorum innotescit. Tabb. V. VI.

§. 2. Quod vero ad oſcillationes corporum flexibilium attinet, de iis duplex facienda eſt quaeſtio. Nam antequam penduli ſimplicis iſochroni longitudo determi-

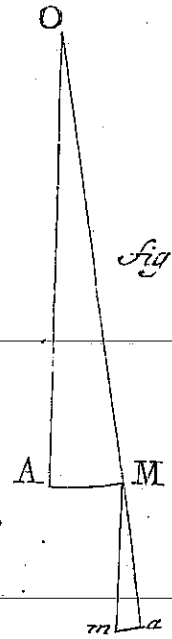


fig: 1.

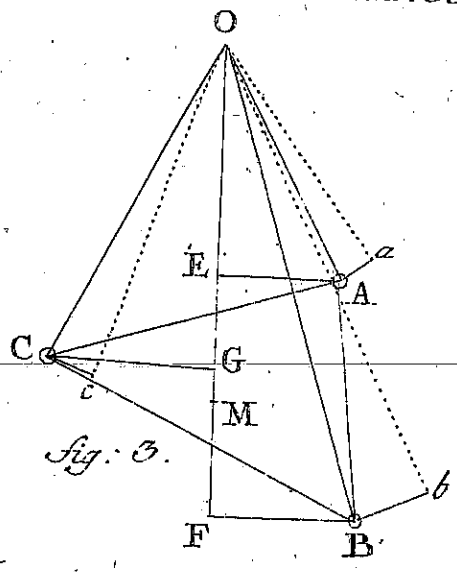


fig: 3.

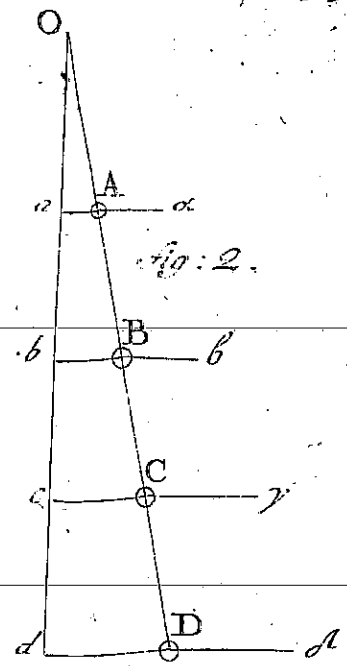


fig: 2.

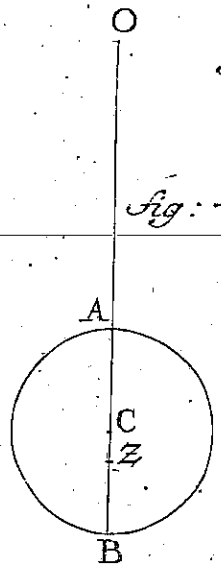


fig: 4.

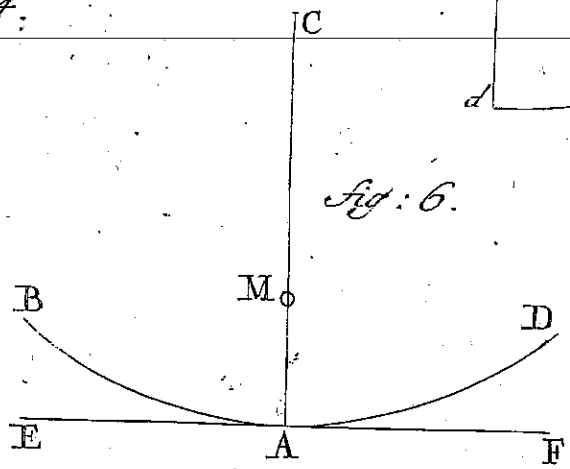


fig: 6.

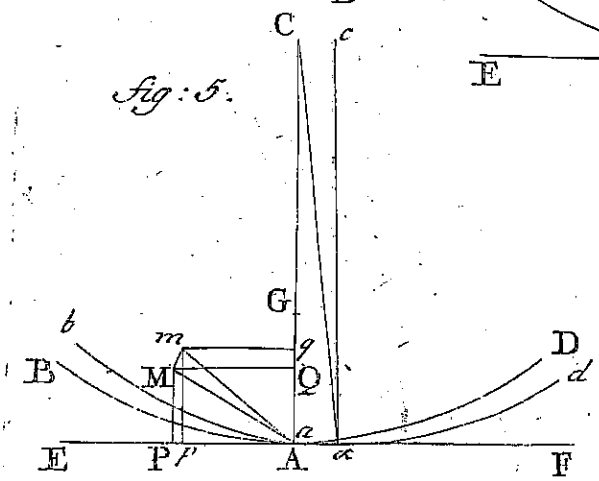


fig: 5.

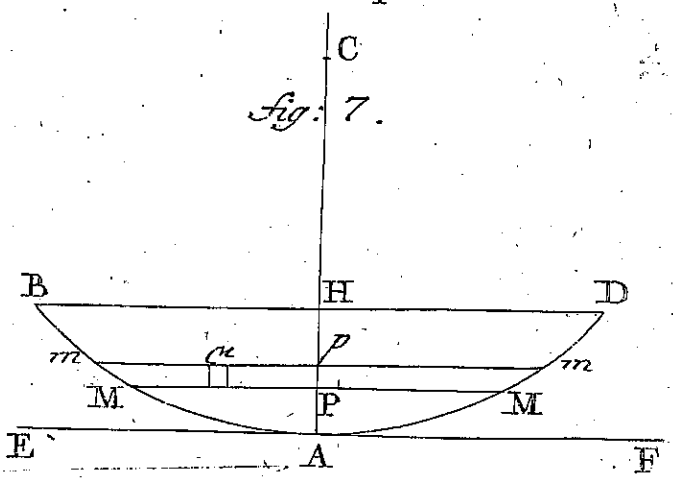
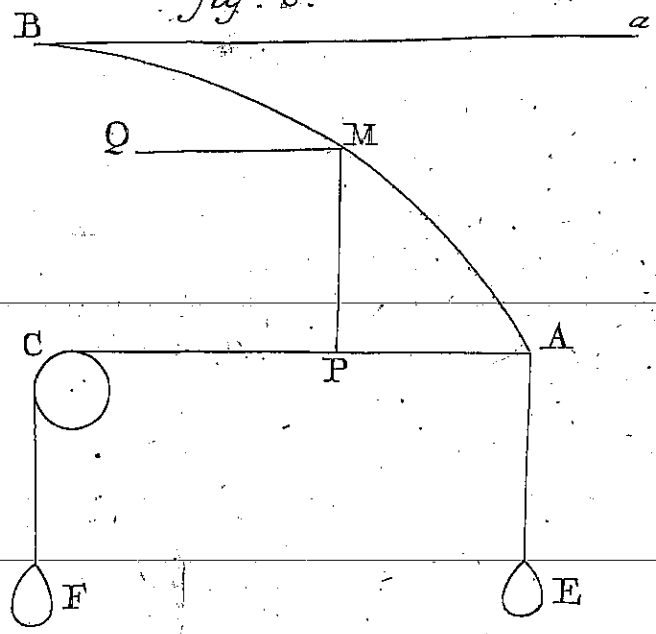


fig: 7.

fig: 8.



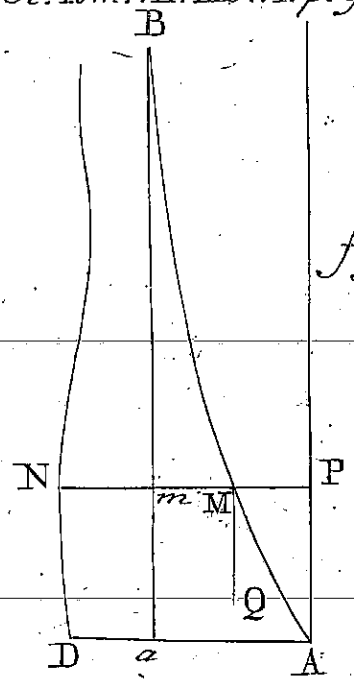


fig. 9.

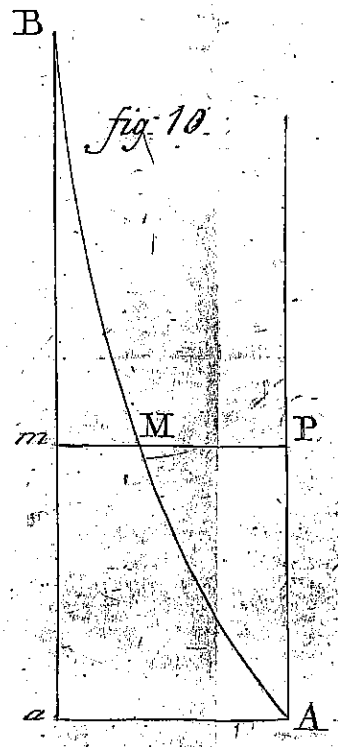


fig. 10.

fig. 11.

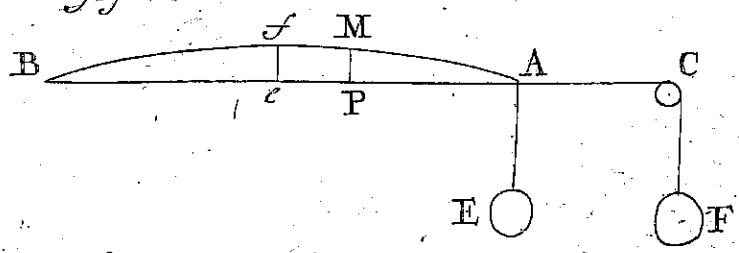
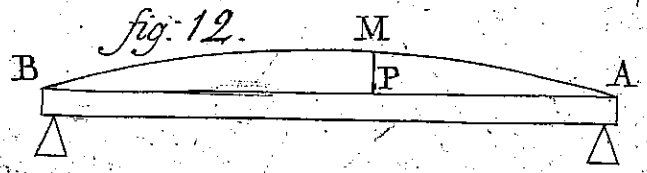


fig. 12.



nari poteſt, figura, quam huiusmodi corpora flexibilia inter oſcillandum induunt, debet definiri; niſi enim haec ſit cognita, quid potentiae in ea agentes efficiant, aſſignari nequit. Ad motum igitur oscillatorium corporum flexibilium inueniendum requiritur, vt figura eorum, quam quouis momento inter oſcillandum induunt, determinetur; quo facto facile erit longitudinem penduli ſimplicis iſochroni aſſignare.

§. 3. Huius generis problemata iam quaedam a Geometris ſunt pertractata, quorum primum, cuius *Cl. Taylorus* elegantem dedit ſolutionem, circa oſcillationes chordarum muſicarum tenſarum verſatur, quibus oscillationibus ſoni eduntur. In hacque tractatione *Cl. Taylorus* primo curuam, quam chorda vibrata format, determinauit; ex eaque poſtmodum numerum oſcillationum, quem data chorda dato tempore abſoluit, definiuit.

§. 4. Huc quoque pertinet problema de oſcillationibus funis ſeu catenae perfecte flexilis, cuius praeterito anno *Cl. Bernoullius* ſolutionem huc tranſmiſit; quodque idem problema poſtmodum alia metodo ſatis breui et facili reſolui, pariter hic coram ſocietate praelecta. In vltimis vero, quas ad me dedit Cl. *Bernoullius*, litteris mentionem fecit oſcillationum laminae elaſticae altero termino parieti firmo infixae, atque aequationem mihi perſcripſit a ſe pro curua, quam lamina oſcillans facit, inuentam eſſe; de qua autem adhuc anceps haerebat, vtrum conueniat, an ſecus: propterea quod haec quaeſtio tam ſit intricata, atque in ea reſoluenda errorem committere admodum ſit procliue.

§. 5.

§. 5. Ego quidem, quamuis valde facilem et latepatentem essem adeptus methodum curuam funis perfecte flexilis oscillantis determinandi; tamen ex ea parum vtilitatis ad curuam laminae elasticae oscillantis inueniendam haurire potui. In mentem igitur mihi venit alia methodus latissime patens atque staticis tantum principiis nitens, cuius ope non solum has de oscillationibus laminae elasticae et funis suspensi quaestiones mira facilitate resolui, sed omnia quae ad oscillationes pertinent promptissime expedire possum.

§. 6. Aliis enim, iisque maxime diuersis methodis sunt vsi auctores, qui de centro oscillationis seu oscillationibus corporum rigidorum egerunt, alias etiam *Cl. Bernoullius*, et ego methodos ad oscillationes funis suspensi flexilis inueniendas adhibuimus. Ex diuersis quoque principiis Clarissimi Viri *Taylorus*, *Ioh Bernoulli*, et *Hermannus* oscillationes chordae vibratae deriuauerunt. Ea vero methodus, qua problema oscillationum laminae elasticae parieti fixo infixae resolui, ita est comparata, vt eius ope quoque supra memorata problemata omnia summa cum facilitate resolui queant.

§. 7. Quo igitur hanc methodum, qua omnia huiusmodi problemata circa oscillationes corporum tam rigidorum quam flexibilium resolui possunt, commodissime exponam, considero ante omnia pendulum simplex, et oscillationes, quas peragit: quippe ad quod quorumque corporum oscillationes sunt reducendae. Contemplor autem ad hoc institutum oscillationes minimas tan-

tum, eo quod hae ſunt inter ſe iſochronae tam in pendulo ſimplici, quam in corpore quocunque: cum maiores oſcillationes cum pendulo ſimplici rariſſime comparari queant.

Figura 1.

§. 8. Sit ergo OM pendulum ſimplex in O ſuspenſum et in M habens pondus alligatum, cuius maſſa ſit M. Declinet hoc pendulum a ſtatu quietis ſeu recta verticali OA angulo infinite paruo AOM, ita vt arculus MA pro recta horizontali haberi queat; voceturque longitudo huius penduli $OM = f$; et ſpatiolum AM corpori M percurrendum, donec in ſtatum quietis perueniat $= k$. Vis grauitatis porro, quae corpus M deorſum vrget, aequatur ipſius ponderi ſeu ipſi M. Ex hac vero per reſolutionem oritur vis corpus verſus MA vrgens $= \frac{am.M}{Mm} = \frac{AM.M}{OM}$, $= \frac{Mk}{f}$, facto triangulo Mam ſimili triangulo OAM.

§. 9. Ponatur haec vis ſollicitans corpus M ſecundum $MA = g$; erit $g = \frac{M.k}{f}$, vnde oritur $f = \frac{Mk}{g}$. Si igitur corpus M ſecundum directionem MA vrgeatur vi g, eique percurrendum ſit ſpatium $MA = k$, donec in ſtatum quietis perueniat; erit tempus, quo ex M in A peruenit, aequale tempori descenſus penduli longitudinis $\frac{Mk}{g}$; ſi quidem dum corpus per MA incedit, vis ad A vrgens proportionalis fuerit diſtantiae corporis ab A.

§. 10. Ex his ergo perſpicitur, quomodo, ſi detur maſſa corporis et via percurrenda atque vis corporis ſecundum hanc viam ſollicitans, inueniri debeat longitudo

gitudo penduli ſimplicis eodem tempore deſcenſum ſeu ſemioſcillationem abſoluentis, quo illud corpus viam ſuam abſoluit. Illa autem via eſt ſpatium, quod corpus percurrere debet, donec in ſtatum quietis perueniat. Dum vero corpus in hoc ſpatio mouetur, vis illud ſollicitans ſemper eſt proportionalis diſtantiae a ſtatu quietis, ſi quidem minimae oſcillationes fuerint iſochronae. Id quod ex caſibus deinceps euoluendis patebit, in quibus vis ſingulas particulas vrgens proportionalis quoque reperietur diſtantiis ipſarum a ſtatu quietis.

§. 11. Si igitur plura corpora ſimul in ſtatum quietis peruenire debeant, oportet vt in iis quantitas $\frac{Mk}{g}$ ſit eadem. Quocirca potentiae ea corpora ſecundum directionem, in qua mouentur, ſollicitantes debent eſſe in ratione compoſita ex rationibus maſſarum et ſpatiorum percurrendorum, quibus confectis in ſtatum quietis perueniant, ſeu in quo ſitu in quiete permanere poterunt.

§. 12. In omni ergo corpore oſcillationes peragente ſpectandus eſt ante omnia ipſius ſtatus aequilibrii, in quo ſi ſemel fuerit in quiete, in eo perpetuo ſit permanſurum. Hic enim ſtatus reſpondebit ſitui penduli ſimplicis verticali in quo ſolo quiescere poteſt. Deinde illud corpus parumper ex hoc ſtatu eſt deturbandum, et inquirendum, quanto interuallo quaeque particula ab eo loco, quem in ſtatu aequilibrii occupabat, diſtet; quod erit ſpatium percurrendum. Denique

nique, quo omnes particulae iterum ſimul in ſitum aequilibrii perueniant, debet eſſe potentia, quae vnamquamque particulam ſecundum ipſius viae percurrendae directionem ſollicitat, vt factum ex maſſa particulae in viam percurrendam.

§. 13. At ſi ſingulae corporis oſcillantis partes actu ab aliis viribus atque in aliis directionibus ſollicitentur, tum loco illarum virium aliae ſubſtitui debent, quae ſingulas partes ſecundum ſpatiorum percurrendorum directiones ſollicitent, et proportionales ſint factis ex maſſis ipſarum particularum et viis percurrendis. Haeque potentiae tantae ſunt accipiendae, vt omnes aequiualeant ipſis potentiis corpus actu ſollicitantibus.

§. 14. Cum igitur hae potentiae ſubſtituendae ipſis potentiis corpus ſollicitantibus aequiualere debeant, ex ſtatica conſtat, ſi earum loco potentiae ipſis aequales at ſecundum directiones contrarias agentes collocentur, tum corpus eſſe debere in aequilibrio. Quamobrem iſte ſtatus aequilibrii erit determinandus, quo definito tempus innoteſcet, quo corpus ſibi relictum oſcillationes ſingulas abſoluat. Hac ergo ratione tota circa oſcillationes corporum verſans diſquiſitio ad ſtatica principia reducitur. Quae omnia ex ſequentibus caſibus melius percipientur.

Fig. 2. §. 15. Sit virga rigida grauitate ſeu potius omni materia deſtituta et quatuor ponduſculis A, B, C, D onuſta; eaque circa O oſcillationes peragat, dum in ſitum aequilibrii O*d* accedit, ex eoque in alteram partem recedit.

Huius-

Huiusque penduli compositi requiritur tempus vnius cuiusque oscillationis. Ponamus longitudinem penduli simplicis isochroni esse f, quod scilicet pendulum eodem tempore descensum absoluat, quo tempore virga OD in situm Od pertingit.

§. 16. Quo autem virga OD in situm Od transferatur corpusculis A, B, C, et D percurrenda sunt spatia Aa, Bb, Cc, et Dd, quae ob angulum DOd infinite paruum, pro lineis horizontalibus haberi poterunt. Omnia vero haec corpuscula in Ad simul eodemque tempore, quo pendulum f descensum absoluit, peruenient, si ea secundum directiones Aa, Bb, Cc et Dd vrgeantur viribus $\frac{A.Aa}{f}$, $\frac{B.Bb}{f}$, $\frac{C.Cc}{f}$ et $\frac{D.Dd}{f}$ respectiue. Quare si his potentiis aequales in directionibus contrariis Aα, Bβ, Cγ et Dδ applicentur, hae virgam AD in hoc situ AD in aequilibrio seruabunt.

§. 17. Singula vero corpuscula A, B, C et D reipsa vi grauitatis deorsum tendunt viribus ipsis eorum massis proportionalibus. Quare hae potentiae deorsum trahentes cum illis horizontalibus Aα, Bβ, Cγ et Dδ in aequilibrio debent esse constitutae. At momentum ponderum A, B, C, D ad virgam circa O conuertendam est $=$ A. Aa $+$ B. Bb $+$ C. Cc $+$ D. Dd. Momentum vero potentiarum horizontalium est $\frac{A.Aa.AO + B.Bb.BO + C.Cc.CO + D.Dd.DO}{f}$. Quae momenta cum debeant esse aequalia prodibit $f = \frac{A.Aa.AO + B.Bb.BO + C.Cc.CO + D.Dd.DO}{A.Aa + B.Bb + C.Cc + D.Dd}$, quae est longitudo penduli simplicis isochroni cum pendulo composito OD.

§. 18. Sunt autem ſpatia ſingulis corporibus percurrenda Aa, Bb, Cc, Dd diſtantiis ipſorum a polo O proportionalia. Quocirca erit $f = \frac{A.AO^2 + B.BO^2 + C.CO^2 + D.DO^2}{A.AO + B.BO + C.CO + D.DO}$ Quae expreſſio eſt ea ipſa, quae ex regulis iam ſatis cognitis pro diſtantia centri oſcillationis a polo O inuenitur. Eſt enim diſtantia centri oſcillationis a polo O nil aliud, niſi longitudo penduli ſimplicis ipſi compoſito OD iſochroni. Cognita ergo longitudine f innoteſcit numerus oſcillationum, quem hoc pendulum compoſitum OD dato tempore abſoluit.

Figura 3. §. 19. Sin autem ponduſcula, quae virgis rigidis inter ſe connexa circa polum O oſcillari ponuntur, non fuerint in linea recta ſita, primo caſus aequilibrii eſt ſpectandus, qui ſit is, qui in figura repraeſentatur, in qua tria ponduſcula A, B, C ex polo O ſunt ſuſpenſa. Horum ergo ponduſculorum centrum grauitatis erit poſitum in recta verticali OF. Quare ſi demittantur ad hanc verticalem perpendicula AE, BF et CG erit A.AE + B.BF = C.CG.

§. 20. Conſideretur iam triangulum ABC circa polum O infinite parum conuerti, ita vt A in a, B in b, atque C in c perueniat, erunt haec elementa Aa, Bb, Cc inter ſe vt AO, BO et CO. Sit iam f longitudo penduli ſimplicis deſcenſum eodem tempore abſoluentis, quo tria ponduſcula ex ſitu abc in ſitum ABC pertingunt. Hoc poſito erit vis quae corpus A in a ſecundum aA vrget $= \frac{A.Aa}{f}$; ſimiliterque vis corpus B iuxta bB vrgens $= \frac{B.Bb}{f}$, et vis corpus C per cC vrgens $= \frac{C.Cc}{f}$. Harum ergo virium momentum in polum O erit

erit $= \frac{A.Aa.AO + B.Bb.BO + C.Cc.CO}{f}$. Momentum vero, quod oritur ex ponderibus corporum A, B, C in a, b, c sitorum in O, est $= A.AE + B.BF - C.CG + \frac{A.OE.Aa}{AO} + \frac{B.OF.Bb}{BO} + \frac{C.OG.Cc}{CO}$, in qua formula $A.AE + B.BF - C.CG$ est $= 0$, propterea quod ABC est status aequilibrii.

§. 21. Cum igitur haec duo momenta inter se debeant esse aequalia erit $\frac{A.Aa.AO + B.Bb.BO + C.Cc.CO}{f} = \frac{A.Aa.OE}{AO} + \frac{B.Bb.OF}{BO} + \frac{C.Cc.OG}{CO}$. Quia autem Aa, Bb, Cc, sunt ipsis AO, BO et CO proportionalia, erit $\frac{A.AO^2 + B.BO^2 + C.CO^2}{f} = A.OE + B.OF + C.OG$. Ex qua aequatione oritur $f = \frac{A.AO^2 + B.BO^2 + C.CO^2}{A.OE + B.OF + C.OG}$. Exprimit autem $\frac{A.OE + B.OF + C.OG}{A + B + C}$ distantiam centri grauitatis corporum A, B, C a polo O, quod si ponatur in M, erit longitudo penduli simplicis isochroni $f = \frac{A.AO^2 + B.BO^2 + C.CO^2}{(A + B + C)OM}$, quae quantitas dat quoque distantiam centri oscillationis a polo O. Ex hac ergo nascitur sequens regula pro centro oscillationis corporis cuiuscunque rigidi circa punctum fixum oscillantis inueniendo. *Quaelibet particula multiplicetur in quadratum distantiae suae a polo, et horum factorum summa diuidatur per massam totius corporis in distantiam centri grauitatis a polo ductam; quotusque dabit distantiam centri oscillationis a polo seu longitudinem penduli simplicis isochroni.* Haecque regula sufficit ad oscillationes quorumcunque corporum rigidorum circa polum fixum determinandas.

§. 22. Hic quidem posuimus omnes corporis oscillantis partes cum polo O in eodem sitas esse plano,

 easque

easque in eodem plano oscillationes absoluere; nihilo vero minus haec eadem regula valet, si vel omnes partes non in eodem plano fuerint positae, vel oscillationes non in eo plano peragantur. His enim in casibus non tantum polus seu punctum debet considerari, sed axis seu linea horizontalis, circa quam oscillationes absoluuntur. Hic enim iterum quaeuis particula in quadratum distantiae suae ab axe est multiplicanda, et summa omnium factorum per factum ex tota oscillantis corporis massa in distantiam centri grauitatis ipsius ab axe diuidenda, ex qua diuisione ortus quotus dabit centrum oscillationis seu potius longitudinem penduli isochroni. Hinc inuenitur Theorema Hugenianum pro globo ex materia homogenea constante AB circa polum O oscillante, quod scilicet centrum oscillationis Z seu longitudo penduli simplicis isochroni sit $OZ = OC + \frac{2}{5}\frac{AC^2}{OC}$, existente C centro globi.

Figura. 4.

§. 23. Dantur autem praeter motum oscillatorium corporum rigidorum circa polum fixum, ex quo sunt suspensa, infinita alia oscillationum genera. Quorum vnicum satis notum, neque tamen a quoquam, quantum mihi constat expositum, hac methodo pertractabo, antequam ad corpora flexibilia progrediar. Constat autem hoc oscillationum genus in motu reciproco curuarum vel corporum quorumque basi conuexa super plana superficie vacillantium. Quem motum, ne cum motu oscillatorio modo exposito confundatur, vacillatorium appellari conuenit. In hoc motu vero notandum est

pla-

planum, super quo fit, aliquantulum asperum esse ponendum, ne curuae de loco suo inter vacillandum dimoueri queant, quod eueniret si planum maxime foret politum.

§. 24. Sit igitur BAD basis seu sectio verticalis corporis super plano EF vacillantis, cuius in imo puncto A curuaturae radius sit AC; in hocque situ sit corpus in aequilibrio, atque M sit particula quaecunque huius corporis. Quoniam vero in hoc situ BAD corpus ponitur esse in aequilibrio, erit eius centrum grauitatis in recta verticali AC situm. Quamobrem erit summa omnium factorum ex particulis M in distantias ipsarum MQ a verticali $AC = o$, sumtis nempe distantiis particularum ad alteram partem rectae AC positarum negatiuis, seu erit $\int M.MQ = o$. Iam vacillet hoc corpus parumper, vt veniat in situm $baad$, in quo a est punctum contactus corporis cum plano EF et radius ao; quo motu punctum A in a perueniet, et M in m, ita vt sit ang. $Maam$ seu $MNm = Cac$ seu ACa atque elementum Mm normale erit ad rectam Ma vel MA. Figura 5.

§. 25. Posito nunc corpore BAD in situ bad, determinari debet vis id rursus in statum quietis BAD restituens, quae reperietur sumendis omnibus momentis, quae singulae particulae M habent ad corpus circa a conuertendum. Momentum vero particulae M in m positae erit $M.pa$ demisso ex m in EF perpendiculo mp. Cum autem sit $CA : Aa = AM : Mm$, erit $Mm = \frac{AM.Aa}{CA}$; vnde

vnde erit $AM:PM = Mm:Pp$ seu $Pp = \frac{PM.A\alpha}{CA}$. Ex his fit $p\alpha = PA + A\alpha - Pp = PA + \frac{(CA-PM)A\alpha}{CA} = PA + \frac{CQ.A\alpha}{CA}$. Particulae ergo M momentum est $M.PA + \frac{M.CQ.A\alpha}{CA}$. Atque summa omnium momentorum erit $= \int M.PA + \int \frac{M.CQ.A\alpha}{CA} = \int \frac{M.CQ.A\alpha}{CA}$, quia $\int M.PA$ aequale est nihilo.

§. 26. Ponamus iam longitudinem penduli isochroni $= f$, erit vis punctum m in M sollicitans $= \frac{M.Mm}{f} = \frac{M.AM.A\alpha}{CA.f}$ huiusque vis momentum in $\alpha = \frac{M.AM^2.A\alpha}{CA.f}$. Omnium ergo horum momentorum summa erit $\int \frac{M.AM^2.A\alpha}{CA.f}$ seu $\frac{A\alpha}{CA.f} \int M.AM^2$, ob $A\alpha$, CA et f constantes quantitates. Haec vero momentorum summa aequalis esse debet summae momentorum inuentae $\int \frac{M.CQ.A\alpha}{CA}$ seu $\frac{A\alpha}{CA} \int M.CQ$, vnde habebitur ista aequatio $f \int M.CQ = \int M.AM^2$, ex qua fit $f = \frac{\int M.AM^2}{\int M.CQ}$, quae expressio dat longitudinem penduli simplicis isochroni, quod iisdem temporibus oscillationes absoluit, quibus corpus BAD super plano EF vacillationes peragit. Quocirca hinc tempus cuiusque vacillationis definire licet.

§. 27. In formula autem inuenta designat $\int M.CQ$ distantiam centri grauitatis corporis a C in massam totius corporis ductam. Si igitur G fuerit centrum grauitatis atque massa totius corporis ponatur C, erit longitudo penduli simplicis isochroni $= \frac{\int M.AM^2}{C.CG}$. Ponamus autem ad comparationem instituendam corpus in situ deorsum conuerso circa A oscillationes absoluere, erit longitudo penduli simplicis isochroni $= \frac{\int M.AM^2}{C.AG}$. Data ergo

hac

hac penduli longitudine per priorem regulam inuenta, quae sit F; erit $F.AG = f.CG$ atque $f = \frac{F.AG}{CG}$. Si igitur inuentae fuerint oscillationes corporis ex A suspensi, innotescent simul vacillationes super plano EF.

§. 28. Sit machina vacillans basin BAD habens omni materia destituta praeter vnicum pondusculum M in axe CA situm. Vacillante ergo hac machina super plano EF, erit longitudo penduli simplicis isochroni $= \frac{AM^2}{CM}$. Vnius igitur vacillationis tempus erit vt $\frac{AM}{\sqrt{CM}}$. Atque quo dato tempore, eo scilicet quo pendulum simplex f oscillatur, vacillationes absoluantur, debet esse $AM^2 = f.AC - f.AM$. Quare inuenitur $AM = -\frac{1}{2}f + \sqrt{(\frac{1}{4}f^2 + f.AC)}$. Figura 6.

§. 29. Consideremus iam segmentum circulare BAD ex vniformi constans materia vacillare super recta EF. Ponatur $AC = a$; $AH = b$; $AP = x$, erit applicata $PM = \sqrt{(2ax - xx)}$. Iam in elemento $MPpm$, capiatur particula μ existente $P\mu = z$; erit ista particula $= dxdz$, quae ducta in $A\mu$ quadratum dat $dxdz(x^2 + z^2)$, cuius integrale posito x constante est $x^2zdx + \frac{z^3dx}{3}$. Fiat $z = \sqrt{(2ax - xx)}$, erit summa factorum ex singulis elementi mP particulis in quadrata distantiarum ab $A = dx(\frac{2adx}{3} + \frac{2xx}{3})\sqrt{(2ax - xx)}$, cuius duplum $\frac{4xdx}{3}(a + x)\sqrt{(2ax - xx)}$ respondebit toti elemento $MMmm$. Huius differentialis integrale denuo sumtum dat $3a^2\int dx \sqrt{(2ax - xx)} - (\frac{x + 3a}{3})(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}$. Ponatur $x = b$ prodibit $\int M.AM^2$ pro toto segmento $BAD = \frac{3a^2}{2}.BADB - a.BH^3 - \frac{1}{3}AH.BH^3$. Figura 7.

§. 30.

§. 30. Ad ſummam vero ipſarum M.CQ inuenienda, multiplicetur elementum $MMmm = 2dx\sqrt{(2ax - xx)}$ per $CP = a - x$, prodibit $2(a-x)dx\sqrt{(2ax - xx)}$, cuius integrale eſt $\frac{2}{3}(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}$ in quo ſi ponatur $AP = AH$, habebitur $\int M.CQ$ pro toto ſegmento $BAD = \frac{2}{3}BH^3$. Longitudo ergo penduli ſimplicis iſochroni erit $\frac{9a^2.BADB}{4BH^3} - \frac{7}{2}a - \frac{1}{2}AH$. Si fiat ſegmentum hoc aequale ſemicirculo, fient $BH = a$, $AH = a$, poſitaque ratione inter diametrum et peripheriam $1 : \pi$ erit area ſemicirculi $= \frac{\pi a^2}{2}$. Pro ſemicirculo ergo vacillante erit longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{9}{4}\pi a - 2a$, ſeu quam proxime $\frac{43}{28}a$. Semicirculus ergo radii 2061 ſcrup. ped. Rhenani ſingulis minutis ſecundis vacillationes abſoluet.

§. 31. Si tantum arcus circuli BAD materia vniformi conſtet, reperietur $\int M.AM^2 = 2a^2(BAD - BD)$; atque $\int M.CQ = a.BD$. Ergo longitudo penduli ſimplicis iſochroni erit $= \frac{2a.BAD}{BD} - 2a$. Aequetur arcus toti ſemiperipheriae erit longitudo penduli iſochroni $= a(\pi - 2) = \frac{8}{7}a$ quam proxime. Minore ergo tempore ſemiperipheria quam ſemicirculus vacillationes abſoluit. Ceterum in genere notari debet de his motibus reciprocis, centrum grauitatis ſemper infra centrum baſis C ſitum eſſe debere: nam ſi in ipſo centro C centrum grauitatis exiſtat, corpus ex ſtatu quietis deturbatum non reſtituetur, ſed quieſcet. At ſi ſupra C centrum grauitatis exiſtat corpus non ſolum non motu reciproco feretur, ſed penitus ſubuertetur.

§. 32.

§. 32. His de corporibus rigidis expositis pergo ad oscillationes corporum flexibilium, quae vel sunt perfecte flexibilia, vel ita comparata, vt ad ea flectenda vi sit opus, cuiusmodi corpora elastica vocantur. Ex quo intelligitur corpora perfecte flexibilia ex elasticis oriri, si vis elastica euanescat. De huiusmodi corporibus igitur, antequam eorum oscillationes possunt determinari, necesse est, vt figurae, quas inter oscillandum induunt, definiantur. Quod quo secundum in principio tradita principia fieri queat, ante necesse est, vt figura definiatur, quam huiusmodi corpus a quibuscunque potentiis sollicitatum induere debet, id quod prolixe satis in *Tom. III. Comment.* sum persecutus. Quamobrem breuitatis causa propositionem primariam ibi traditam hic repetam.

§. 33. Sit B*a* virga recta elastica in B fixa, quae tum a potentiis quibuscunque in singulis punctis applicatis, tum etiam a duobus ponderibus E et F in altero extremo termino A appensis induat figuram BMA, cuius naturam aequatione exponere oportet. Sumatur recta AC pro axe, in eaque abscissa $AP = x$, sitque applicata $PM = y$. Ponamus singulis punctis M duas potentias esse applicatas, quarum altera in directione verticali MP agat, altera in directione horizontali MQ. Sit summa omnium potentiarum verticalium singulis arcus AM punctis applicatarum P; et summa omnium horizontalium eidem arcui applicatarum Q. Praeterea sit vis elastica in $M = V$. Cumque eadem vis elastica sit eo maior, quo magis virga curuatur, erit vis elastica in M vt V diuisum per radium osculi in M, quem po- Figura 8.

namus $=r$. His positis natura curuae BMA hac continebitur aequatione $\frac{V}{r}=Ex+Fy+\int Pdx+\int Qdy$. Si ergo virga fuerit perfecte flexilis; euanescet V, ideoque haec aequatio $Ex+Fy+\int Pdx+\int Qdy=0$, dabit naturam curuae quaesitae.

Figura 9. §. 34. Sit funis perfecte flexilis Ba ex B suspensus, qui ad oscillationes minimas peragendas sit impulsus, ita vt in medio cuiusque oscillationis in situm Ba perueniat, ad quam legem quascunque oscillationes vt libet initio irregulares reduci experientia demonstrat. Sit nunc BMA figura, quam funis inter oscillandum induit, quae, quia infinite parum a verticali Ba declinat, erit Aa linea horizontalis, et arcus BMA$=$Ba. Exponant applicatae Nm curuae DN crassities funis in respondentibus locis M. Ex A ducatur verticalis AP, voceturque AP$=x=am$, et PM$=y$ atque N$m=q$. Erit ergo quam proxime arcus AM$=$AP$=x$, atque hinc pondus elementi arcus AM erit $=qdx$. Ponatur A$a=b$, et M$m=u$, erit $y=b-u$.

§. 35. Sit porro longitudo penduli simplicis isochroni $=f$; necesse est vt quaeuis particula M, quae est qdx sollicitetur versus Mm vi, quae est $=\frac{qudx}{f}$, est enim M$m=u$ spatium particulae M percurrendum, quo in statum aequilibrii perueniat. Eundem igitur hae potentiae in singulis punctis applicatae effectum producent, quem vis grauitatis, qua singulae particulae funis deorsum vrgentur. Quamobrem si in singulis punctis M potentiae $\frac{qudx}{f}$ versus contrariam plagam MP applicatae concipian-

cipiantur, funis BMA ab his potentiis et propria gravitate sollicitatus erit in aequilibrio. Cum autem P denotet summam omnium potentiarum MP, erit $P = \int \frac{qudx}{f}$. Pondus porro particulae M est $= qdx$ et secundum MQ tendit, quae directio illi, quam in generali propositione assumsimus est contraria; hanc ob rem erit $Q = -\int qdx$. E vero et F euanescent. Ex his inuenitur ista pro curua BMA aequatio $\int dx \int \frac{qudx}{f} = \int dy \int qdx$, seu $dx \int qudx = \int dy \int qdx$, et posito dx constante, erit $qudx^2 = \int ddy \int qdx + \int qdx dy$, in qua si loco y ponatur $b - u$ prodit $qudx^2 + \int ddu \int qdx + \int qdx du = 0$. Quae est aequatio pro curua AMB, ex qua longitudo f determinatur ex data funis longitudine Ba; quae si ponatur a, et ex aequatione quaeratur locus vbi $u = 0$; dabit valor ipsius x per f inuentus longitudinem a, vnde f per a inuenietur. Siue sumto M in A erit $\int qudx = Da.Aa.dx$ et $\int qdx = Da.dx$. Quibus positis erit in puncto A, $f = \frac{Aa.dx}{dy}$ = tangenti seu subtangenti curuae in A.

§. 36. Progredior nunc ad problema, quod mihi *Cl. Dan. Bernoulli* nuperrime proposuit, in quo oscillationes laminae elasticae muro verticali infixae et in plano horizontali oscillantis requirit. Sit igitur Ba virga seu lamina elastica in situ horizontali muro in B infixa, atque eiusdem vbique crassitiei. Induat ea inter oscillandum figuram BMA, sitque longitudo penduli simplicis isochroni $= f$. Debebit ergo esse vis, quae quoduis eius elementum M, quod est $= dx$, posito AP $= x$, secundum Mm vrget $= \frac{Mm.dx}{f}$. Quare si in quouis eius puncto Figura. 12.

cto M potentia $\frac{Mm.dx}{f}$ ſecundum directionem ipſi Mm contrariam MP concipiatur applicata, lamina elaſtica BMA in hoc ſitu erit in aequilibrio. Ponatur $PM=y$, $Aa=b$, et $Mm=b-y=u$; ſitque radius oſculi in $M=r$, et vis elaſtica abſoluta $=A$ ſeu conſtans; erit ergo $V=A$. Deinde quia grauitas laminae non in conſiderationem venit, erit $Q=0$, et $P=\frac{\int u\,dx}{f}$. Ex quibus pro curua BMA haec obtinetur aequatio $\frac{A}{r}=\int dx\int\frac{u\,dx}{f}$. Poſito autem dx conſtante eſt $r=\frac{-dx}{ddy}=\frac{dx^2}{ddu}$; quare erit $A\,ddu=dx^2\int dx\int\frac{u\,dx}{f}$ ſeu $A\int d^4u=u\,dx^4$, quae eſt aequatio pro curua AMB.

§. 37. Ex hac autem aequatione differentiali quarti ordinis valde eſt difficile quicquam ad oſcillationes laminarum elaſticarum cognoſcendas deriuare. Quia enim haec aequatio quadruplicem integrationem requirit, ſi in vnaquaque conſtans adiiciatur, tam innumerabiles prodibunt eae curuae, ad quas ea pertinet, vt quae illarum noſtro exemplo conueniat, non ſine ſumma circumſpectione definiri queat. Obſeruauit quidem *Cl. Dan. Bernoulli* in hac aequatione contineri iſtas $Bd^2u=u\,dx^2$ et $Bdu=u\,dx$, quarum vero neutra hic locum habere poteſt. Quod quidem ad quatuor illas conſtantes in totidem integrationibus addendas attinet, earum tres ex his conditionibus determinantur, quod poſito $x=0$, fieri debeat $u=b$; ſimulque et $\int u\,dx=0$ et $\int dx\int u\,dx=0$; quarta vero conſtans tamen manet indeterminata. Eam autem ex hac conditione definiri debere tandem intellexi, quod in puncto B, vbi fit $u=0$, tangens in ipſam

rectam

rectam Ba debeat incidere, id quod natura elateris, qui non nisi a potentia infinita ad angulum finitum inflecti potest, postulat.

§. 38. Quo igitur melius curuae BMA natura cognoscatur, sumo aequationem $Af\,ddu = dx^2 \int dx \int u\,dx$ eamque in seriem transmuto tribus primo memoratis conditionibus satisfaciendo. Methodo autem ad hoc faciendum satis consueta adeptus sum hanc aequationem $u = b - Cx + \frac{bx^4}{1.2.3.4\,Af} - \frac{Cx^5}{1.2.3.4.5\,Af} + \frac{bx^8}{1.2 - - - 8\,A^2f^2} - \frac{Cx^9}{1.2.3 - - - - 9\,A^2f^2} + \text{etc.}$ quae series ex duabus satis regularibus est conflata. In ea vero inest noua indeterminata constans C, quae ex quarta conditione debet definiri. Pono ergo B$a = a$, positoque $x = a$, euanescere debet u. Quocirca prodibit ista aequatio $0 = b - Ca + \frac{ba^4}{1.2.3.4.Af} - \frac{Ca^5}{1.2.3.4.5.Af} + \text{etc.}$ ex qua prodit $C = \frac{b + \frac{ba^4}{1.2.3.4\,Af} + \frac{ba^8}{1.2.3 - - 8\,A^2f^2}}{a + \frac{a^5}{1.2.3.4.5\,Af} + \frac{a^9}{1.2.3. - - 9\,A^2f^2}}$

Cum vero etiam $\frac{du}{dx}$ debeat esse $= 0$ si $x = a$; erit $0 = -C + \frac{ba^3}{1.2.3\,Af} - \frac{Ca^4}{1.2.3.4\,A^2f^2} + \text{etc.}$ seu $C = \frac{\frac{ba^3}{1.2.3.Af} + \frac{ba^7}{1.2. - - 7\,A^2f^2} - \frac{ba^{11}}{1.2 - - 11.A^3f^3}}{1 + \frac{a^4}{1.2.3.4.Af} + \frac{a^8}{1.2. - - 8\,A^2f^2} + \text{etc.}}$

§. 39. His duabus inuentis aequationibus coniungendis et loco numeralium coefficientium litteris α, β, γ, etc. ponendis prodibit ista aequatio: $0 = 1 + \frac{\alpha a^4}{Af} + \frac{\beta a^8}{A^2f^2} + \frac{\gamma a^{12}}{A^3f^3} + \text{etc.}$ in qua C non amplius inest. Ex hac aequatione pro f valor huiusmodi erit formae $\frac{Na^4}{A}$ denotante N numerum quempiam constantem, qui est circiter

citer $= \frac{2}{25}$, ita vt longitudo penduli ſimplicis iſochroni ſit vt $\frac{\alpha a^4}{A}$. *Pro variis ergo laminis elaſticis eiusdem vbique craſſitiei oſcillantibus erunt longitudines pendulorum ſimplicium iſochronorum in ratione compoſita ex directa quadruplicata longitudinum laminarum, et reciproca ſimplici elaſticitatum abſolutarum. Tempora vero ſingularum oſcillationum erunt directe vt quadrata longitudinum laminarum et inuerſe vt radices quadratae ex elaſticitatibus abſolutis.* Tempora igitur oſcillationum laminarum aequali elaſticitate praeditarum ſunt in duplicata ratione longitudinum laminarum.

§. 40. Sin autem duae laminae ex materiis diuerſae elaſticitatis aequales fabricentur, eaeque parieti firmo infigantur, tum tempora oſcillationum illarum erunt in ratione reciproca ſubduplicata elaſticitatum, quia longitudines ponuntur aequales. Quamobrem numeri oſcillationum, quas iſtae laminae dato tempore puta vno minuto edunt, erunt directe vt radices quadratae ex elaſticitatibus. Hoc igitur modo diuerſarum materiarum elaſticitates explorari poterunt, quod tum in Phyſica, tum in vita communi non parum vtilitatis habebit. Hinc enim inueſtigari poterit, quanto alia chalybis ſpecies ſit alia magis elaſtica; atque etiam elaſticitates diuerſorum metallorum inter ſe comparari poterunt. Ad hoc accedit, quod haec methodus admodum ſit facilis, et ſola oſcillationum numeratione perficiatur. Ne autem oſcillationes nimis fiant celeres, oportet vt laminae ſatis ſint magnae ſeu longae; de quo quidem obſeruaui ſufficere poſſe, ſi earum longitudo ſit duorum circiter pedum.

§. 41.

§. 41. In hoc negotio vel lamina grauitatis expers ponitur, vel ita est parieti firmo infigenda, vt grauitas oscillatorium motum nihil afficiat, id quod obtinetur, si horizontaliter muro infigatur, atque satis sit lata, ne a grauitate deorsum incuruari queat. Nunc vero quoque laminam elasticam grauem contemplabimur, eamque pauimento firmo verticaliter in B infixam ponemus, ita vt ea ex B dependens oscillationes perficiat. Sit ergo BMA curua, quam haec lamina inter oscillandum format, in qua vt ante pono $Aa = b$, $AP = am = AM = x$, $PM = y$, $Mm = u$, radium osculi in $M = r$ atque vim elasticam in $M = \frac{\Lambda}{r}$. Sit f longitudo penduli simplicis isochroni, erit vis, qua quodvis elementum dx per Mm vrgeri debet $= \frac{udx}{f}$, quae ergo vis si in directione contraria MP applicata concipiatur, tota lamina in situ BMA erit in aequilibrio. His ergo cum generali propositione comparatis est $P = \int \frac{udx}{f}$, $Q = -\alpha \int dx = -\alpha x$, et E et $F = 0$. Prodibit ergo pro curua BMA ista aequatio $\frac{\Lambda}{r} = \int dx \int \frac{udx}{f} - \alpha \int x dy$ seu $\frac{\Lambda ddu}{dx^2} = \int dx \int \frac{udx}{f} + \alpha \int x du$, quae abit in $f\Lambda d^4u = udx^4 + \alpha f dx^3 du + \alpha \int x dx^2 ddu$, quam autem vlterius non persequor.

§. 42. His de oscillationibus funium perfecte flexibilium et laminarum elasticarum vnico puncto fixarum expositis ad oscillationes eorundem corporum inuestigandas progredior, si in duobus punctis fuerint fixae, quorsum pertinent motus vibratorii chordarum tensarum tam perfecte flexibilium quam elasticarum. Ac primo quidem sit BPA chorda perfecte flexibilis in B fixa, in A vero Figura 11.

vero tensa pondere F ope fili AC. In A vero chorda vel per foraminulum transit vel ponticulo superiacet, ne vibrationes vltra A versus B propagentur. Huius ergo loco pondus E concipio, quo chordae punctum A semper in hoc loco retineatur. Sit itaque BMA figura, quam chorda inter oscillandum induit, voceturque $AP = x$, cui et AM ob interuallum PM valde parvum aequatur, et $PM = y$, sitque ponduscullum seu massa elementi chordae in $M = g\,dx$, pono enim chordam aequabilis crassitiei.

§. 43. Sit porro longitudo penduli simplicis isochroni f, erit vis, qua quoduis elementum $g\,dx$ ex M versus P per MP vrgetur $= \frac{gy\,dx}{f}$. Huic ergo vi, si aequalis in directione contraria applicata concipiatur, chorda BMA erit in aequilibrio. Chordam praeterea ipsam grauitatis expertem pono. Hoc ergo casu ad propositionem generalem accommodato erit $P = -\int \frac{gy\,dx}{f} = \frac{-g}{f} \int y\,dx$, $E = E$, atque $F = -F$ ac $Q = 0$. Ex quibus pro curua AMB haec prouenit aequatio $Ex = Fy - \frac{g}{f} \int dx \int y\,dx = 0$, quae bis differentiata dat $Ff\,ddy + gy\,dx^2 = 0$ posito dx constante. Huius aequationis in dy ductae integralis est $Ff\,dy^2 + gy^2\,dx^2 = gb^2\,dx^2$ posita b maxima chordae a recta AB declinatione ef, vbi est $dy = 0$. Hanc ob rem erit $dx = \frac{dy\sqrt{Ff}}{\sqrt{g(b^2 - y^2)}}$, atque $x = \frac{\sqrt{Ff}}{b\sqrt{g}} \times$ in arcum circuli cuius sinus est y existente sinu toto $= b$.

§. 44. Sit tota chordae longitudo $AB = a$, quae ex aequatione inuenta prodire debet, si y altera vice euanescere ponatur. Hoc vero euenit, si arcus ille circuli

aequa-

aequalis sit semiperipheriae, quo facto erit $x = a$. Sit ergo $1 : \pi$ ratio diametri ad peripheriam erit πb semiperipheria circuli radii b. Quamobrem erit $a = \frac{\pi \sqrt{Ff}}{\sqrt{g}}$ seu $\sqrt{f} = \frac{a\sqrt{g}}{\pi\sqrt{F}}$ atque $f = \frac{ga^2}{\pi^2 F}$, quae est longitudo penduli simplicis isochroni, in qua F pondus chordam tendens, a longitudinem chordae, et ga seu $\int g dx$ pondus seu massam chordae significat. Sit autem pondus chordae $= p$ erit $f = \frac{ap}{\pi^2 F}$. Singularum igitur vibrationum tempora erunt in ratione composita subduplicata ex directis longitudinum et ponderum chordarum et ex inuersa ponderum chordas tendentium.

§. 45. Quo autem appareat, quot oscillationes chorda dato tempore scilicet minuto secundo edat; considerari debet longitudo penduli simplicis singulis minutis secundis oscillantis quae est 3,166 ped. Rh. Erit ergo vnum minutum secundum ad tempus vnius chordae vibrationis vt $\sqrt{3,166} : \frac{\sqrt{ap}}{\pi\sqrt{F}}$, ex quo numerus vibrationum minuto secundo editarum est $\frac{\pi\sqrt{3,166F}}{\sqrt{ap}}$, seu $\frac{\pi\sqrt{3166F}}{\sqrt{ap}}$, si a in partibus millesimis pedis Rhenani exprimatur. Posito vero loco π eius valore, erit iste vibrationum numerus $= \frac{\sqrt{31250F}}{\sqrt{ap}} = \frac{125\sqrt{2F}}{\sqrt{ap}}$, vbi 15625 scrup. denotant altitudinem, quam graue descendendo minuto secundo absoluit.

§. 46. Haec est ea ipsa regula pro inueniendo vibrationum numero tempore vnius minuti secundi edito a data chorda tensa, quam primum *Cl. Taylor* in Methodo Incrementorum, et *Cl. Iob. Bernoulli* in Comment. nostris dederunt, ex longe diuersis principiis petitam. Habet autem haec regula magnam vtilitatem in Musica et acustica, ad sonos, quos quaeuis chorda edit, de-

 termi-

terminandos, sunt enim soni inter se vti vibrationum dato tempore editarum numeri. Ex hac porro regula, si habeatur mensura fixa scilicet pedis Rhenani, qui vbi vis locorum ope pendulorum inueniri potest, soni fixi determinari poterunt, dum chorda ita adaptatur, vt datum minuto secundo vibrationum numerum edat. Ope huius regulae inueni in instrumentis musicis, quae ad tonum choralem attemperata sunt, chordam infimam littera C notatum minuto secundo 118 edere vibrationes; summam vero, quae $\bar{\bar{c}}$ signari solet, eodem tempore vibrationes 1888 absoluere.

§ 47. Ponuntur quidem hic chordae perfecte flexibiles, quod autem in chordas aeneas et chalybeas minus competere videtur. At cum huiusmodi chordae sint admodum flexibiles, quin etiam laxae sponte sese inflectant, merito dubitari licet, num elasticitas in computum sit ducenda, si quidem chordae fuerint admodum tenues, vti in instrumentis adhiberi solent. Sin autem chordae admodum crassae fuerint, vt etiam non tensae sint in directum sitae, atque ad eas tantum inflectendas vis requiratur, tum vtique vis elastica in calculum duci debebit. Huc scilicet pertinent vibrationes bacillorum metallicorum vel etiam ligneorum suis extremitatibus ponticulis impositorum, qui impulsi, etiamsi non sint tensi, sola vi elasticitatis sonos edunt. Si igitur in his elasticitas
Figura 12. fuerit $= \frac{A}{r}$, vt supra posuimus, atque bacillus AB inter oscillandum induat curuam AMB, pro qua ponatur $AP = x$, $PM = y$, erit $\frac{A}{r} = -\frac{g}{f}\int dx \int y\,dx$ seu $A\int ddy + g\,dx^2 \int dx \int y\,dx = 0$, quae aequatio fere conuenit cum ea, quam pro lamina elastica oscillante inuenimus, sed modo alio huic casui est accommodanda.

DE