DE MOTV PLANETARVM ET ORBITARVM DETERMINATIONE

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

CVm hoc tempore ſatis conſtet, planetas in ellipſibus moueri, in quarum altero foco ſol ſit poſitus, motumque ita eſſe comparatum, vt tempora areis circa ſolem deſcriptis ſint proportionalia; quaeſtio de motu planetarum duplex oritur, quarum altera qualitatem ellipſis, poſitionem abſidum ſcilicet et excentricitatem requirit, altera vero ipſius planetae motum in ſua orbita. Vtramque hanc quaeſtionem hic euoluere, et quantum calculi difficultas permittet, reſoluere conabor. Tabula IV.

§. 2. Primum quidem orbitam planetae pro cognita habebo, atque motum planetae in ea definire ſtudebo. Sit igitur ADB ſemiſſis orbitae planetae cuiusdam P, cuius abſis ſumma ſeu aphelion ſit in A, periphelion vero in B, atque ſol ſit in foco ellipſis S poſitus. Sit porro C centrum orbitae, et ponatur ſemiaxis AC vel BC $= a$, diſtantia foci S a centro C ſeu excentricitas CS $= b$, erit ſemiaxis coniugatus CD $= \sqrt{(a^2 - b^2)}$. Ponamus nunc planetam ex aphelio A perueniſſe in P, Fig. 1.

hincque momento temporis progredi in p, ex quibus punctis tam ad S rectae, quam ad axem AB perpendicula ducantur; ponaturque $CQ = r$, erit $PQ = \frac{\surd(a^2-b^2)(a^2-r^2)}{a}$, et $PS = a + \frac{br}{a}$.

§. 3. His poſitis exprimit angulus ASP planetae anomaliam veram ſeu coaequatam, quam ponam $= z$. Anomalia vero media proportionalis eſt tempori, quo planeta ſpatium AP abſoluit, ſeu areae ASP. Erit ergo area ADB ad aream ASP vt angulus duobus rectis aequalis ad anomaliam mediam. Conſideremus nunc circulum radii 1, cuius arcus ſit anomalia vera $= z$, in eodem ergo ſi anomaliam mediam inuenire velimus, quae aequalis ſit arcui x; erit area ADB ad angulum duobus rectis aequalem ſeu ad duplam aream ſemicirculi illius vt AC. CD ad 2, i. e. vt $a\surd(a^2-b^2)$ ad 2. Fiet igitur $a\surd(a^2-b^2) : 2 = \text{Area. } ASP : x$, vnde eſt $x = \frac{2\,\text{Area } ASP}{a\surd(a^2-b^2)}$.

§. 4. Cum ſit anomalia vera z aequalis angulo ASP, erit eius incrementum dz aequale PSp. Angulus vero PSp aequatur areolae PSp bis ſumtae per quadratum PS diuiſae; erit ſcilicet $dz = \frac{2\,\text{Areol. } PSp}{(a+\frac{br}{a})^2} = \frac{2a^2\,PSp}{(a^2+br)^2}$. At ex ſuperiore aequatione erit $dx = \frac{2\,PSp}{a\surd(a^2-b^2)}$. Reſtat ergo, vt elementum areae PSp idoneo modo exprimatur, id quod ex conſideratione totius areae fiet. Eſt enim area $ASP = \frac{PQ.QS}{2} + \int PQ.Qq = \frac{(b+r)\surd(a^2-b^2)(a^2-r^2)}{2a}$

$-\int$

$\frac{1}{2}\int\frac{dr\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-r^2)}}{a}$, cuius differentiale eſt $\frac{-dr(a^2+br)\sqrt{(a^2-b^2)}}{2a\sqrt{(a^2-r^2)}}$ quod ergo eſt $=PSp$. Hinc igitur fit elementum anomaliae mediae $dx=\frac{-dr(a^2+br)}{a^2\sqrt{(a^2-r^2)}}$, et elementum anomaliae verae $dz=\frac{-adr\sqrt{(a^2-b^2)}}{(a^2+br)\sqrt{(a^2-r^2)}}$.

§. 5. His duabus aequationibus continetur relatio, quae inter anomaliam mediam et veram intercedit; ad eam ergo definiendam oportet, vt vtraque aequatio integretur, quo tandem aequatio inter z et x elici queat. Quod ad priorem attinet, ea ſtatim abit in hanc $dx=\frac{-dr}{\sqrt{(a^2-r^2)}} \frac{-brdr}{a^2\sqrt{(a^2-r^2)}}$, cuius integralis eſt $x=A.\frac{\sqrt{(a^2-r^2)}}{a}+\frac{b}{a^2}\sqrt{(a^2-r^2)}$, vbi A ſignificat arcum circuli, cuius ſinus eſt quantitas poſtfixa exiſtente ſinu toto $=1$. Poſito ergo hoc ſinu $\frac{\sqrt{(a^2-r^2)}}{a}=s$, erit $x=A.s+\frac{bs}{a}$.

§. 6. Altera aequatio differentialis eſt $dz=\frac{-adr\sqrt{(a^2-b^2)}}{(a^2+br)\sqrt{(a^2-r^2)}}$ quae cum abſolute, tum plurimis modis per ſeries poteſt integrari. Prae reliquis vero is modus eligendus eſſe videtur, qui huiusmodi det ſeriem, in qua dimenſiones ipſius b in numeratoribus creſcant, quo pro exiguis excentricitatibus ſufficiat duos vel tres terminos initiales aſſumſiſſe.

§. 7. In ſeriem ergo primum conuerto $\sqrt{(a^2-b^2)}$, quae erit iſta $a-\frac{1.b^2}{2a}-\frac{1.1.b^4}{2.4.a^3}-\frac{1.1.3b^6}{2.4.6.a^5}$ etc. $=a-\frac{b^2}{2a}-\frac{b^4}{8a^3}-\frac{b^6}{16a^5}$ etc. Deinde eſt etiam $\frac{a}{a^2+br}=\frac{1}{a}-\frac{br}{a^3}+\frac{b^2r^2}{a^5}-\frac{b^3r^3}{a^7}+$ etc. Hae ergo duae ſeries in ſe inuicem multiplicata dabunt $\frac{a\sqrt{(a^2-b^2)}}{a^2+br}=1-\frac{br}{a^2}-\frac{b^2(a^2-2r^2)}{2a^4}+\frac{b^3r(a^2-2r^2)}{2a^6}-\frac{b^4(a^4+4a^2r^2-8r^4)}{8a^8}$

I 3 +

$+\frac{b^5 r(a^4+4a^2r^2-8r^4)}{8a^{10}}-$ etc. Si nunc huius ſeriei ſinguli termini ducantur in $\frac{-dr}{\sqrt{(a^2-r^2)}}$ habebitur elementum anomaliae verae dz. Erunt vero omnes termini praeter primum abſolute integrabiles, inuenietur enim $z = A. \frac{\sqrt{(a^2-r^2)}}{a} - \frac{b\sqrt{(a^2-r^2)}}{a^2} + \frac{b^2 r\sqrt{(a^2-r^2)}}{2a^4} - \frac{b^3(a^2+2r^2)\sqrt{(a^2-r^2)}}{6a^6} + \frac{b^4 r(a^2+2r^2)\sqrt{(a^2-r^2)}}{8a^8} -$ etc.

§. 8. Dicatur nunc arcus ſeu angulus V, cuius ſinus eſt $\frac{\sqrt{(a^2-r^2)}}{a}$ et ſignum $\int$ denotet poſthac ſinum anguli poſtſcripti; erit $x = V + \frac{b}{a}\int V$, atque per eundem angulum V eiusque ſinum vna cum multiplorum ipſius ſinibus z ſequenti modo determinabitur, vt ſit $z = V - \frac{b}{a}\int V + \frac{b^2}{4a^2}\int 2V - \frac{b^3}{12a^3}(\int 3V + 3\int V) + \frac{b^4}{32a^4}(\int 4V + 4\int 2V) - \frac{b^5}{80a^5}(\int 5V + 5\int 3V + 10\int V) + \frac{b^6}{192a^6}(\int 6V + 6\int 4V + 15\int 2V) - \frac{b^7}{448a^7}(\int 7V + 7\int 5V + 21\int 3V + 35\int V) +$ etc. cuius ſeriei lex facile patet, conſtituunt enim denominatores numerales hanc ſeriem, 1. 1, 2. 2, 3. 4, 4. 8, 5. 16, 6. 32, etc.

§. 9. Commodiſſime ergo ex data anomalia media x determinabitur anomalia vera z, ſi primum ex aequatione $x = V + \frac{b}{a}\int V$ angulus V per angulum x definiatur, atque is tum in altera aequatione anomaliam veram z exhibente ſubſtituatur. Difficile autem videtur ex illa aequatione V per x definire, cum ſit aequatio transcendens, atque ideo V per x algebraice omnino exprimi nequeat. In id ergo eſt incumbendum, vt V quam fieri poteſt proxime et minimo labore per x definiafiniatur, id quod mihi sequenti modo commodissime praestari videtur, erit scilicet $V = x - \frac{b}{a}\int(x - \frac{b}{a}\int(x - \frac{b}{a}\int(x -$ etc. hinc enim admodum erit facile angulum V inuenire. Nam sumatur log. $\int x$ ab hoc subtrahatur log. $\frac{a}{b}$, denuoque subtrahatur iste log. 6, 4637261; residuum quaeratur inter logarithmos numerorum naturalium, numerusque respondens dabit angulum in minutis primis. Iste deinde angulus subtrahatur ab anomalia media x, residuique anguli sinus capiatur logarithmus, a quo tam log. $\frac{a}{b}$ quam 6, 4637261 subtrahatur, numerusque logarithmo residuo respondens dabit numerum minutorum primorum ab x subtrahendum, angulus residuus, si opus esse censeatur, denuo eodem modo tractetur, donec tandem neque amplius augeatur neque minuatur; atque tum iste angulus erit verus valor ipsius V.

§. 10. Inuento hac ratione angulo V, a logarithmo eius sinus denuo tam log. $\frac{a}{b}$ quam 6, 4637261 subtrahatur, et numerus residuo respondens dabit angulum in minutis primis expressum, qui ab V subtrahi debet, residuumque erit anomalia vera iam satis exacta; magis vero correcta euadet si sinus dupli anguli V sumatur logarithmus ab eoque duplus log. $\frac{a}{b}$, et log. 4. atque praeterea 6, 4637261 subtrahantur residui enim numerus respondens dabit minuta prima insuper vel addenda vel subtrahenda prout V vel minor vel maior fuerit quam 90°. Praeterea etiam sequentes termini seriei, cui z aequalis est inuenta, eodem modo computari

tari possunt, quamdiu anguli inueniuntur, quos negligere non volemus. Semper autem dum res logarithmis peragitur, praeter consuetas operationes logarithmorum, iste logarithmus 6, 4637261 subtrahi debet, numerusque respondens dabit minuta prima; sin loco minutorum primorum secunda desiderentur, tum loco illius logar. iste debet vsurpari 4, 6855749.

§. 11. Inuento angulo V facile innotescet planetae a sole distantia $PS = a + \frac{br}{a}$; fiat vt sinus totus ad cosinum anguli V ita b ad quartam proportionalem, quae ad distantiam mediam a addita vel subtracta, prout cosinus ipsius V fuerit vel affirmatiuus vel negatiuus, dabit veram planetae a sole distantiam. Ex angulo quoque z inuento seu ipsa anomalia vera, distantia PS poterit inueniri, erit namque $PS = \frac{(a+b)(a-b)}{a-b.\cos z}$.

§. 12. Inuento angulo V porro simplicius ipsa anomalia vera z poterit inueniri; erit enim $\cos z = \frac{a.\cos V + b}{a + b\cos V}$, vel $\sin z = \frac{\sin V.\surd(a^2 - b^2)}{a + b.\cos V}$, quae expressio etsi simplicior est et breuior, quam supra inuenta series, tamen nescio, an illa non sit huic, si commoditas calculi spectetur, praeferenda; in sequenti vero ista formula maiorem fortasse praestabit vtilitatem.

§. 13. Sit nobis exemplum orbita Martis, in qua est $a:b = 152369:14100$. ideoque $\log.\frac{a}{b} = 1,0336775$. Dataque sit anomalia media $2\,S, 20°$, seu $80°$ quaeraturque anomalia vera. Erit ergo operatio instituenda vt sequitur.

$l\frac{a}{b} =$

$l\frac{a}{b} = 1,0336775$
4,6855749
5,7192524

$l\int 80 = 9,9933515$
subtr. 5,7192524
4,2740991
num. 18797″
hoc est 5°, 13′, 17″
ab 80°
restat 74°, 46′, 43″

log. sinus huius anguli = 9,9844906
subtr. 5,7192524
4,2652382
num. 18418″
hoc est 5°, 6′, 58″
ab 80°
restat 74°, 53′, 2″

log. sinus huius anguli = 9,9847070
subtr. 5,7192524
4,2654546
num. 18427″
hoc est 5°, 7′, 7″
ab 80°
restat 74°, 52′, 53″

log. sinus huius anguli = 9,9847035
subtr. 5,7192524
4,2654511
num. 18427
hoc est 5°, 7′, 7″

Erit ergo V = 74°, 52′, 53″
subtrah. $\frac{b}{a}\int V$ = 5°, 7′, 7″

 z prope

z prope verus valor $= 69^\circ, 45', 46''$

$2V = 149^\circ, 45', 46''$

Deinceps poſ. $= 30^\circ, 14', 14''$

log. ſinus huius anguli 9, 7020703

ſubtrah. $2\, l \frac{a}{b}$ 2, 0673550

7, 6347153

ſubtrah. 4, 6855749

2, 9491404

ſubtrah. log. 4 0, 6020600

2, 3470804

num. $222''$

hoc eſt $3', 42''$ addat.

Valor ipſius z magis correctus $69^\circ, 49', 28''$

$3V = -44^\circ, 38', 39''$, ſinus $= -7025671$

$+ 3ſV = 28961904$

$ſ3V + 3ſV = 21936233$

eius log. $=$ 10, 3412220

ſubtrah. $3\, l \frac{a}{b} =$ 3, 1010325

7, 2401895

ſubtrah. $l\, 12 =$ 1, 0791812

6, 1610083

ſubtrah. 4, 6855749

1, 4754334

num. $37''$ ſubtr.

Valor ipſius z correctus ſeu anomalia vera $= 69^\circ, 48', 51''$.

§. 14.

§. 14. Cum vero altero modo, quo z ex V inueniri potest, fit $\text{cos. } z = \text{cos. V} + \frac{b\int V . \int V}{a+b. \text{cos. V}} = \text{cos. V} + \frac{\int V . \int V}{\frac{a}{b} + \text{cos. V}}$, videamus an eandem anomaliam veram eodem modo inueniamus. Operatio erit vt sequitur:

Cos. V	=	2608181
sin. tot. $\frac{a}{b}$	=	108063121
$\frac{a}{b}$ + cos. V	=	110671302
huius log.	=	11, 0440348
$2 l\int V$	=	19, 9694070
diff.	=	8, 9253722
respondet sinus.		842116
ad cos. V		2608181
cos. z	=	3450297
Ergo Anomalia vera	=	$69^\circ, 48', 59''$

ad quam ante inuenta proxime accedit, notandum autem est praecedentem esse nimis paruam, cum adhuc terminum $\frac{b^4}{32a^4}(\int 4 V + 4\int V)$ adiicere opportuisset; hic vero terminus ne integrum quidem minutum secundum efficit. Ceterum in prioris calculi ultima operatione partes medias proportionales non sumsi; atque in isto calculo tabulae log. non sufficiebant.

§. 14. Distantia Martis a sole respondens huic anomaliae est $= a + b$ cos. V; est vero vt ante inuenimus $\frac{a}{b}$ + cos. V = 110671302. Fiat ergo vt sinus totus

totus ad hunc numerum, ita b ad diſtantiam Martis a ſole. Ergo erit per logarithmos

$$\begin{array}{ll} l(\frac{a}{b} + \text{coſ. V}) = & 11,0440348 \\ + lb. & 4,1492191 \\ - l\,\text{ſin. tot.} & -10,0000000 \\ \hline \text{log. diſt. a} \odot & 5,1932539 \end{array}$$

§. 16. Denique notandum eſt, ſi inuenta fuerit anomalia vera datae anomaliae mediae reſpondens, facili negotio incrementum minimum anomaliae verae inueniri poſſe, ſi anomalia media minima particula augeatur. Augeatur ſcilicet anomalia media angulo dx, erit incrementum anomaliae verae $dz = \frac{dx}{(1 + \frac{b}{a}\,\text{coſ. V})^2}$ Noſtro ergo caſu erit $l(1 + \frac{b}{a}\text{coſ. V}) = 0,0103573$ et $(1 + \frac{b}{a}\text{coſ. V})^2 = 1,04885$ Quare erit $dz = \frac{dx}{1,04885}$ $= dx - \frac{2dx}{43}$ ſi ergo anomalia media fuerit $81°$, erit anomalia vera $70°, 46', 4''$.

§. 17. Sin autem quis velit hac methodo tabulam anomalium verarum computare, is ſcopum ſuum commodius aſſequetur, ſi non anomalias medias pro cognitis aſſumat, ſed angulos, quos littera V diſignaui, ex hisque angulis tam anomalias medias quam veras calculo inueſtiget; Hoc enim modo facile tabulam conficiet. Sumto enim pro lubitu angulo V, erit $x = V + \frac{b}{a}\int V$ et $z = V - \frac{b}{a}\int V + \frac{b^2}{4a^2}\int 2V - \frac{b^3}{12a^3}(\int 3V + \int 3V)$ Exempli gratia pro orbita martis ponatur V=

$V = 20°$. Erit $l\int V =$	9, 5340517
ſubtr. vt ſupra	5, 7192524
	3, 8147993
num. reſp.	6528''
hoc eſt.	1°, 48', 48''
Erit ergo anomalia media	21°, 48', 48''
et anomalia vera prope vera	18°, 11', 12''
Nunc ſumatur $l\int 2V$	9, 8080675
ſubtr. $2l\frac{a}{b}$	2, 0673550
	7, 7407125
ſubtr. $l4$,	0, 6020600
	7, 1386525
ſubtrahatur inſuper	4, 6855749
	3, 4530776
num.	284'' = 4', 44''
Anomalia magis correcta =	18°, 15', 56''
Denique ſumatur $\int 3V =$	8660254
et $3\int V =$	10260606
	18920860
huius log.	10, 2769406
ſubtr. $3l\frac{a}{b}$	3, 1010325
	7, 1759081
ſubtr. $l12$	1, 0791812
	6, 0967269
ſubtr.	4, 6855749
	1, 4111520
num.	26''

Anomalia vera ergo eſt $18°, 15', 30''$ reſpondens anomaliae mediae $21°, 48', 48''$. Huic vero anomaliae mediae in tabulis reſpondet haec anomalia vera $18°, 16', 14''$.

§. 18. Progredior ergo ad alteram quaeſtionem, cuius initio mentionem feci, quae circa ſpeciem ellipſis, in qua planeta circumfertur, eiusque poſitionem determinandam verſatur. Ad haec inuenienda cognitum eſſe pono tempus periodicum planetae, quod ſit $= T$. Deinde etiam data eſſe oportet tria loca heliocentrica planetae, cuiusmodi ſint FS, GS, HS vna cum temporibus inter obſeruationes elapſis. Ex locis ergo heliocentricis dantur anguli FSG et FSH, ſitque $FSG = f$ et $FSH = g$. Praeterea fiat vt tempus periodicum T ad tempus inter duas obſeruationes, ita 360 gradus, ad angulum qui eſt differentia anomaliarum mediarum inter easdem obſeruationes. Cum igitur dentur differentiae anomaliarum mediarum inter obſervata planetae loca, ſit ea quae eſt inter loca F et $G = m$, et quae eſt inter loca F et $H = n$. Ponatur nunc ratio AC ad CS vt 1 ad v; erit $\frac{b}{a} = v$; porro ſit anomalia media loci $F = x$, et anomalia vera ſeu angulus $ASF = z$.

Fig 2.

§. 19. His poſitis erit loci G anomalia media $= x + m$, et loci $H = x + n$; loci vero G anomalia vera erit $= z + f$ et loci $H = z + g$. Deinde ſit $x = P + v\int P$; $x + m = Q + v\int Q$ et $x + n = R + v\int R$; erit $\text{coſ.}\, z = \frac{\text{coſ. P} + v}{1 + v\,\text{coſ. P}}$ et $\text{coſ. P} = \frac{\text{coſ.}\, z - v}{1 - v.\,\text{coſ.}\, z}$, atque $\int P = \frac{\int z.\sqrt{(1 - v^2)}}{1 - v.\,\text{coſ.}\, z}$.

Simili

Simili modo erit cof. $Q = \frac{\text{cof.}(z+f) - v}{1 - v\,\text{cof.}(z+f)}$, et $\int Q = \frac{\int(z+f).\sqrt{(1-v^2)}}{1 - v\,\text{cof}\,z+f)}$; atque cof. $R = \frac{\text{cof.}(z+g) - v}{1 - v.\text{cof.}(z+g)}$ ac $\int R = \frac{\int(z+g).\sqrt{(1-v^2)}}{1 - v.\text{cof.}(z+g)}$. Si nunc hi valores loco P, Q, R in tribus prioribus aequationibus, fubftituantur, habebuntur tres aequationes, ex quibus tres incognitae x, z et v determinari debent. At hoc modo ftatim deuenitur ad aequationes omnino irrefolubiles, ita vt hac via minime ad finem peruenire queamus. Quamobrem expediet potius hanc quaeftionem vero proxime refoluere.

§. 20. Ad hoc commodiffime efficiendum iuuabit anomalias veras priori modo per feries exprimere. Erit ergo vt fequitur.

$$z = P - v\int P + \tfrac{v^2}{4}\int 2P - \tfrac{v^3}{12}(\int 3P + 3\int P) + \text{etc.}$$
$$z+f = Q - v\int Q + \tfrac{v^2}{4}\int 2Q - \tfrac{v^2}{12}(\int 3Q + 3\int Q) + \text{etc.}$$
$$z+g = R - v\int R + \tfrac{v^2}{4}\int 2R - \tfrac{v^3}{12}(\int 3R + 3\int R) + \text{etc.}$$

Ex his aequationibus eliminando z erit

$$f = Q - P - v(\int Q - \int P) + \tfrac{v^2}{4}(\int 2Q - \int 2P) - \tfrac{v^3}{12}(\int 3Q - \int 3P + 3\int Q - 3\int P)\ \text{etc.}$$
$$g = R - P - v(\int R - \int P) + \tfrac{v^2}{4}(\int 2R - \int 2P) - \tfrac{v^3}{12}(\int 3R - \int 3P + 3\int R - 3\int P)\ \text{etc.}$$

Priores vero aequationes eliminando x dabunt.

$$m = Q - P + v(\int Q - \int P)$$
$$n = R - P + v(\int R - \int P) \quad \text{atque}$$

Ponamus terminos in quibus ineft v^2 et altiores poteftates euanefcere; erit coniungendis aequationibus $\frac{f+m}{2} = Q - P$ et $Q = P + \frac{f+m}{2}$, atque $R = P + \frac{g+n}{2}$. Per poftepoſteriores autem aequationes eſt $v = \frac{m-f}{2\int(P+\frac{f+m}{2})-2\int P} = \frac{n-g}{2\int(P+\frac{g+n}{2})-2\int P}$. Ex his vero aequationibus oritur tang. $P = \frac{(m-f)\int\frac{n+g}{2}-(n-g)\int\frac{m+f}{2}}{(m-f)\int v.\frac{n+g}{2}-(n-g)\int v\frac{m+f}{2}}$ vbi $\int v.$ ſinum verſum denotat. Ex hac igitur aequatione iam proxime inueniri poteſt angulus P; hocque inuento ſimul quoque valor ipſius v proxime verus innoteſcit.

§. 21. Inuento hac ratione angulo P, ex eo determinetur valor ipſorum Q et R per aequationes $Q = P + \frac{f+m}{2}$ et $R = P + \frac{g+n}{2}$ deinde etiam valor ipſius v per aequationem $v = \frac{m-f}{2\int Q - 2\int P}$. Hi vero valores hoc modo inuenti nondum ſunt veri, ſed tantum veris propinqui; propiores autem inuenientur ſequentibus terminis non negligendis, erit nempe $\frac{f+m}{2} = Q - P + \frac{v^2}{8}(\int 2Q - \int 2P) - \frac{v^3}{24}(\int 3Q - \int 3P + 3\int Q - 3\int P)$ etc. ideoque $Q = P + \frac{f+m}{2} - \frac{v^2}{8}(\int 2Q - \int 2P) + \frac{v^3}{24}(\int 3Q - \int 3P + 3\int Q - 3\int P)$ atque ſimili modo $R = P + \frac{g+n}{2} - \frac{v^2}{8}(\int 2R - \int 2P) + \frac{v^3}{24}(\int 3R - \int 3P + 3\int R - 3\int P)$; in quibus expreſſionibus loco, P, Q, R et v ante inuenti valores ſubſtituantur poſt ſignum $=$; hocque pacto propiores pro Q et R valores habebuntur. Ponatur breuitatis gr. $Q = P + M$ et $R = P + N$ erit $v = \frac{m-M}{\int(P+M)-\int P} = \frac{n-N}{\int(P+N)-\int P}$. Ex quibus aequationibus inuenitur tang. $P = \frac{(m-M)\int N-(n-N)\int M}{(m-M)\int v.N-(n-N)\int v.M}$; unde quoque multo propior valor ipſius

ipſius P obtinetur. Quo iterum ſubſtituto tam pro Q et R quam pro v multo magis propiores valores oriuntur.

§. 22. Cum ſit $M = \frac{f+m}{2} - \frac{v^2}{8}(\int 2Q - \int 2P) + \frac{v^3}{24}(\int 3Q - \int 3P + 3\int Q - 3\int P) - \text{etc.}$ et $N = \frac{g+n}{2} - \frac{v^2}{8}(\int 2R - \int 2P) + \frac{v^3}{24}(\int 3R - \int 3P + 3\int R - 3\int P) - \text{etc.}$ ſi in his aequationibus loco P, Q, R, et v vltimo inuenti valores ſurrogentur; tum proxime veri valores pro M et N habebuntur; et conſequenter proximi quoque pro Q et R, iterumque pro P et v. Harum ergo operationum reuolutiones, ſi toties repetantur, quoad valores ipſorum P et v non amplius mutentur; tum demum inuentos valores ipſos eſſe veros certum erit. His vero inuentis ex P et v per ſupra traditas regulas reperietur z, qui eſt angulus ſeu diſtantia loci primum obſervati F ab aphelio; v vero exprimit rationem excentricitatis orbitae ad ſemiaxem transuerſum ſeu diſtantiam mediam.

§. 23. Ad talem autem calculum ſuſcipiendum conducit plures tribus obſeruationes aſſumſiſſe, cum quo operationes inſtituendae magis confirmentur, tum quo obſeruationes maxime idoneae eligi queant. Habent autem eae obſeruationes, in quibus differentiae anomaliarum mediarum et verarum aequales ſunt, hoc incommodum, vt ſtatim in prima operatione dent $v = \frac{0}{0}$. Quod ergo quo euitetur tales obſeruationes ſunt eligendae, in quibus differentiae anomaliarum ſint maximae. Atta-

Attamen ne hac quidem circumſpectione eſt opus, ſi quidem excentricitas praeter propter tantum fuerit cognita, quin imo prolubitu excentricitas poteſt fingi eaque initio pro v ſubſtitui, unde ſtatim propiores valores pro Q et R detegentur ex quibus tum operationes, vt ante, inſtitui poterunt.

§. 24. Exempli loco per iſthanc methodum determinemus poſitionem abſidum orbitae terrae, eiusque excentricitatem ex datis tribus ſequentibus obſeruationibus, quae ex Comment. Ac. R. Scient. Pariſ. A. 1720. ſunt decerptae.

Anno 1716	erat	Locus ☉
Mart. 20. d.	$11^h.57', 44''$	$0S, 0°, 0', 0''$
Mai. 12. d.	$11^h.55', 53''$	$1S, 21°, 44', 35''$
Iul. 28. d.	$12^h. 5', 48''$	$4S, 5°, 22', 10''$

Ex his obſeruationibus eſt differentia anomaliarum verarum inter primam et ſecundam obſeruationem, quam poſuimus $f = 51°, 44', 35''$
et differentia inter primam et tertiam ſeu $g = 125°, 22', 10''$

§. 25. Ad differentias anomaliarum mediarum inveniendas aſſumo pro tempore periodico T ſeu anno tropico 365 d. 5 h. 49′ 8″ ſeu 31556948″. Atque differentia temporum primae et ſecundae obſeruationis eſt 52 d. 23 h. 58′, 9″ ſeu 4579089″ hinc oritur differentia inter anomalias medias harum obſeruationum, quam poſuimus $m = 52°, 14', 17''$. Differentia vero temporum

porum primae et tertiae obseruationis est $130d, 0^h, 8', 14''$ seu $11232494''$. Ex quo fit differentia inter anomalias medias harum obseruationum, quae erat $n = 128°, 8', 23''$.

§. 26. Nunc ad calculum instituendum est

$$m - f = 29', 42'' = 1782''$$

$$\text{et } n - g = 2°, 46', 13'' = 9973''$$

$$\text{atque } \frac{m+f}{2} = 51°, 59', 26''$$

$$\text{et } \frac{n+g}{2} = 126°, 45', 16''$$

Deinde ad commoditatem calculi est

$$l\frac{n-g}{m-f} = 0,7479181.$$

$$\text{Deinde est } \int\frac{n+g}{2} = 8012073$$

$$\text{atque } \int v.\frac{n+g}{2} = 15983867.$$

$$\text{Deinde est } l\int\frac{m+f}{2} = 9,8964761$$

$$\text{ad quem additus } l\frac{n-g}{m-f} = 0,7479181$$

$$10,6443942$$

$= l\frac{n-g}{m-f}\int\frac{m+f}{2}$, cui logarithmo respondet numerus hic:

$$44095498 \quad \text{ab hoc subtractus}$$

$$8012073 \quad \int\frac{n+g}{2}$$

$$36083425 = \frac{n-g}{m-f}\int\frac{m+f}{2} - \int\frac{n+g}{2}$$

qui numerus est numerator fractionis cui tP aequatur.

Est vero $l\int v.\frac{m+f}{2}$ $9,5845671$ ad hunc $l\frac{n-g}{m-f}$

$$0,7479181 \quad \text{addatur}$$

$$10,3324852 = l\frac{n-g}{m-f}\int v.\frac{m+f}{2}.$$

Huic respondet in tabulis sinuum numerus

$$21502313 \quad \text{ab hoc subtrahatur}$$

$$15983867 \quad \int v.\frac{n+g}{2}$$

$$5518446 \quad \text{denominator fractionis.}$$

Erit

Erit ergo tang. $P = \frac{36083425}{55518446} = 6,5387$ - - -
vnde prodit angulus $P = 81°, 18', 17''$.

Deinde eſt $l\frac{m-f}{2} = 2,9498777$,

atque $P + \frac{m+f}{2} = Q = 133°, 17', 43''$

cuius ſinus aequatur ſin. $46°, 42', 17'' = 7278292$,

et $\int P = 98885062$,

eſt igitur $\int(P+Q) - \int P = -2606770$,

ex quo valor ipſius v erit negatiuus, id quod indicat locum, quem calculus pro aphelio dare deberet non eſſe aphelion ſed periphelion. Vt vero v determinetur ſumatur ex tabula ſinuum logarithmus ſinus 2906770,

qui erit 9,4160988

ab hoc ſubtrahatur numerus ſupr. 4,6855749

log. denom. fract. pro v 4,7305239

ſubtr. 2,9498777

Hinc erit $l - v = -$ 1,7806462

ergo $\frac{100}{6035}$, ſeu diſtantia terrae mediae a ⊙ eſt ad excentricitatem vt 6035 ad 100, quae ratio autem nondum eſt correcta. Si hinc antequam ſequentes correctiones adhibeamus, poſitionem abſidum inuenire velimus, prodibit pro z circiter $82°, 14'$ ſeu 2 S, $22°, 14'$, qui locus a loco primae obſeruationis ſubtractus dat 9 S, $7°, 46'$ pro loco periphelii; et 3 S, $7°, 46'$ pro loco aphelii; qui locus iam prope congruit. Accuratiſſime autem haec quaeſita obtinebuntur, ſi tantum prima correctio adhibeatur.

§. 27.

§. 27. Ad correctionem autem instituendam notandum est loco anni tropici sidereum, quippe quo sol ab aphelio ad aphelium reuertitur, adhiberi debere, quo facto fiet $m = 52°, 14', 10''$ et $n = 128°, 8, 5''$, ideoque $m - f = 1775''$ et $n - g = 9955''$. Atque $\frac{m+f}{2} = 51°, 59', 22''$, et $\frac{n+g}{2} = 126°, 45', 8''$. Deinde est $P = 81°, 18'$, $Q = 133°, 18'$ et $R = 208°, 3'$, vbi minuta secunda de industria negligo, quia ad M et N inueniendа nihil conferunt. Est vero $M = \frac{f+m}{2} - \frac{v^2}{8}(\text{ſ}2Q - \text{ſ}2P)$; et $N = \frac{n+g}{2} - \frac{v^2}{8}(\text{ſ}2R - \text{ſ}2P)$. Ex his prodit $M = 51°, 59', 17''$ et $N = 126°, 45', 4''$; et $m - M = 0°, 14', 53'' = 893''$, et $n - N = 1°, 23', 1'' = 4981''$, vnde erit $l\frac{n-N}{m-M} = 0,7464650$ atque per superiorem regulam $tP = \frac{(\frac{n-N}{m-M})\text{ſ}M - \text{ſ}N}{(\frac{n-N}{m-M})\text{ſ.v.}M - \text{ſ.v.}N}$. Ex hoc inuenitur ang. $P = 81°, 23', 0''$, et $P + M = 133°, 22', 17'' = Q$. Atque v iterum prodit valoris negatiui, estque $l - v = -1,7815349$ seu est distantia media terrae a sole ad excentricitatem vt 6047 ad 100. Hi valores cum sint exactissimi, erit $z = 82°, 19', 16''$, qui angulus subtractus ab aequinoctio verno dat locum perigaei solis 9 S, 7°, 40', 44''. Vnde erit Apogaeum solis in ♋, 7°, 40', 44''. Tabulae vero Streetianae pro hoc tempore dant ♋ 7°, 52', 32''. Si adhuc vnam correctionem quis vellet instituere, dubito an ea minuta secunda sit affectura.