SOLVTIO
PROBLEMATIS ARITHMETICI
DE
INVENIENDO NVMERO
QVI PER DATOS NVMEROS DIVISVS, RELINQVAT DATA RESIDVA.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Reperiuntur in vulgaribus arithmeticorum libris passim huiusmodi problemata, ad quae perfecte resoluenda plus studii et sollertiae requiritur quam quidem videatur. Quamuis enim plerumque regula sit adiecta, cuius ope solutio obtineri queat, tamen ea vel est insufficiens solique casui proposito conuenit, ita vt circumstantiis quaestionis parum immutatis, ea nullius amplius sit vsus; vel subinde etiam solet esse falsa, Ita quadratorum magicorum constructio iam pridem ab arithmeticis est tradita; quae autem cum esset insufficiens maiora ingenia *Labirii* et *Sauwerii* ad perficiendum requisiuit. Simili quoque modo vbique fere ocurrit istud problema, vt inueniatur numerus, qui per 2, 3, 4, 5, et 6 diuisus relinquat vnitatem, per 7 vero diuidi queat sine residuo: methodus vero idonea ad huius modi problemata soluenda nusquam exhibetur; solutio

tio enim ibi adiecta in hunc tantum casum competit, atque tentando potius absoluitur.

§. 2. Si quidem numeri, per quos quaesitus numerus diuidi debet, sunt parui, prout in hoc exemplo, tentando non difficulter quaesitus numerus inuenitur; difficillima autem foret istiusmodi solutio, si diuisores propositi essent valde magni. Cum itaque ad huius generis problemata soluenda methodus etiamnum habeatur nulla genuina, quae ad magnos diuisores aeque pateat, ac ad paruos; non inutiliter operam meam collocatam esse confido, dum in huiusmodi methodum inquisiui, qua sine tentatione pro maximis etiam diuisoribus talia problemata resolui queant.

§. 3. Quo igitur, quae hac de re sum meditatus, distincte exponam, a casu incipio simplicissimo, quo vnicus tantum datur diuisor, numerusque quaeritur, qui per illum diuisus datum relinquat residuum. Requiratur scilicet numerus z, qui per numerum a diuisus relinquat p pro residuo. Huius quidem quaestionis solutio est facillima, erit enim $z = ma + p$, denotante m numerum quemcunque integrum; interim tamen obseruari conuenit hanc solutionem esse vniuersalem, omnesque numeros satisfacientes complecti. Praeterea ex ea quoque intelligitur, si vnus habeatur numerus satisfaciens, ex eo innumerabiles alios satisfacientes quoque posse inueniri, dum ille numerus quocunque multiplo ipsius a vel augeatur, vel si fieri potest, minuatur.

Erit

Erit autem p ſeu $0a+p$ minimus numerus ſatisfaciens, hunc excipit $a+p$, quem porro ſequuntur $2a+p$, $3a+p$, $4a+p$, etc. qui numeri omnes conſtituunt progreſſionem arithmeticam differentiam conſtantem habentem a.

§. 4. Hoc expoſito ſequitur caſus, quo duo diuiſores cum ſuis reſiduis proponuntur, qui eſt praecipuus, et ſequentes omnes in ſe complectitur. Nam, quotcunque propoſiti fuerint diuiſores, quaeſtio ſemper ad hunc caſum, quo duo tantum proponuntur, reduci poterit, quemadmodum in ſequentibus monſtrabo. Quaeri igitur oporteat numerum z, qui per a diuiſus relinquat p, per b vero diuiſus relinquat q; ſitque numerus a maior numero b. Cum ergo numerus quaeſitus z ita debeat eſſe comparatus vt per a diuiſus relinquat p, neceſſario in hac forma $ma+p$ continebitur, eritque idcirco $z=ma+p$. Deinde ex altera conditione, qua z per b diuiſus relinquere debeat q, erit $z=nb+q$. Quamobrem, cum ſit $ma+p=nb+q$, determinari debebunt numeri integri loco m et n ſubſtituendi, vt ſit $ma+p=nb+q$, quibus inuentis erit $ma+p$ ſeu $nb+q$ numerus quaeſitus z.

§. 5. Quia ergo eſt $ma+p=nb+q$, erit $n=\frac{ma+p-q}{b}$ ſeu poſito $p-q=v$, erit $n=\frac{ma+v}{b}$. Hanc ob rem definiri oportet numerum m, vt $ma+v$ diuidi poſſit ſine reſiduo per b. Quia eſt $a>b$ ponatur $a=\alpha b+c$; erit $n=m\alpha+\frac{mc+v}{b}$; oportet ergo vt mc

$+v$

$+v$ diuisionem per b admittat; sunt autem α et c numeri cogniti, qui reperiuntur ex diuisione ipsius a per b; erit enim α quotus et c residuum. Ponatur porro $\frac{mc+v}{b}=A$, erit $m=\frac{Ab-v}{c}$; quare numerum A inveniri oportet, vt $Ab-v$ diuidi queat per c. Si eueniat, vt v per c diuidi possit, operatio iam poterit finiri; sumto enim $A=o$, erit $m=-\frac{v}{c}$ et $z=-\frac{av}{c}+p$ quae expressio, etiamsi euadat negatiua, tamen ad infinitos numeros affirmatiuos pro z inueniendos est idonea.

§. 6. Sin autem v per c non potest diuidi, quo $\frac{Ab-v}{c}$ fiat numerus integer, pono $b=\beta c+d$, seu diuido b per c, dicoque quotum $=\beta$ et residuum $=d$. Quo facto erit $\frac{Ab-v}{c}=A\beta+\frac{Ad-v}{c}=m$, debebitque $\frac{Ad-v}{c}$ esse numerus integer sit is $=B$, fiet $A=\frac{Bc+v}{d}$. Si nunc v per d diuidi poterit, facio $B=o$, eritque $A=\frac{v}{d}$, et $m=\frac{\beta v}{d}$. Sin autem v per d non est diuisibile, pono porro $c=\gamma d+e$; eritque $A=B\gamma+\frac{Be+v}{d}$. Atque pono $\frac{Be+v}{d}=C$ ut sit $B=\frac{Cd-v}{e}$. Si nunc v per e diuidi poterit, pono $C=o$ eritque $B=-\frac{v}{e}$, et $A=-\frac{\gamma v}{e}$ atque $m=-\frac{\beta\gamma v}{e}-\frac{v}{e}$; sin $\frac{v}{e}$ nondum fuerit integer numerus, pono $d=\delta e+f$, eritque $B=C\delta+\frac{Cf-v}{e}$; atque facio $\frac{Cf-v}{e}=D$, ut sit $C=\frac{De+v}{f}$, vbi videndum est vtrum v per f diuidi possit an secus, atque in vtroque casu vt supra operatio debet institui.

§. 7. Quia

§. 7. Quia autem $a > b$, atque $b > c$ et $c > d$ etc. hac ſerie a, b, c, d, e, f, etc. continuanda perpetuo ad minores numeros deuenitur, ita vt tandem ad tam paruum perueniri oporteat, qui ſit pars aliquota ſeu diuiſor ipſius v. Sunt autem c, d, e, f etc. continua reſidua ordinariae operationis, qua maximus communis diuiſor ipſorum a et b inueſtigari ſolet, quam operationem hic appono.

$n = \frac{ma+v}{b}$	$b \mid a \mid \alpha$	$a = \alpha b + c$
$n = \frac{Ab-v}{c}$	$c \mid b \mid \beta$	$b = \beta c + d$
$A = \frac{Bc+v}{d}$	$d \mid c \mid \gamma$	$c = \gamma d + e$
$B = \frac{Cd-v}{e}$	$e \mid d \mid \delta$	$d = \delta e + f$
$C = \frac{De+v}{f}$	$f \mid e \mid \varepsilon$	$e = \varepsilon f + g$
$D = \frac{Ef-v}{g}$	$g \mid f \mid \zeta$	$f = \zeta g + h$
$E = \frac{Fg+v}{h}$	$h \mid g \mid \eta$	$g = \eta h + i$
$F = \frac{Gh-v}{i}$	$i \mid h \mid \theta$	$h = \theta i + k$
$G = \frac{Hi+v}{k}$	k	

§. 8. Haec ergo operatio, qua ad maximum communem diuiſorem numerorum a et b vti ſolemus, eousque eſt continuanda, donec ad reſiduum perueniatur, quod diuidat v. Quo inuento ſequenti modo inueſtigabimus numerum m. Si v iam per b diuidi poterit, fiet $m = 0$. Si v per c diuiſionem admittat, fiet $A = 0$ et $m = \frac{-v}{c}$. Si v per d diuidatur, fiet $B = 0$ et $A = \frac{v}{d}$ atque $m = \frac{bv}{cd} - \frac{v}{c} = \frac{\beta v}{d}$ ob $b = \beta c + d$. Quo autem valores ipſius m facilius reperiantur primo valor ipſius

A per

A per B, tum valor ipſius B per C et ita porro exprimi debet, vnde nata eſt iſta tabula.

$$1.\quad m = \frac{Ab - v}{c},$$

$$2.\quad m = \frac{Bb + \beta v}{d}$$

$$3.\quad m = \frac{Cb - v(1 + \beta\gamma)}{e}$$

$$4.\quad m = \frac{Db + v(\delta + \beta\gamma\delta + \beta)}{f}$$

$$5.\quad m = \frac{Eb - v(\delta\varepsilon + \beta\gamma\delta\varepsilon + \beta\varepsilon + \beta\gamma + 1)}{g}$$

$$6.\quad m = \frac{Fb + v(\delta\varepsilon\zeta + \beta\gamma\delta\varepsilon\zeta + \beta\varepsilon\zeta + \beta\gamma\zeta + \zeta + \delta + \beta\gamma\delta + \beta)}{h} \text{ etc.}$$

De his valoribus eſt notandum, ſigna ipſius v alternari hoc modo $- + - + - +$ etc. Deinde coefficientes ipſius v hanc tenent legem:

$$\begin{array}{cccccc} \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \\ 1, & \beta, & \beta\gamma + 1, & \beta\gamma\delta + \delta + \beta, & \beta\gamma\delta\varepsilon + \delta\varepsilon + \beta\varepsilon + \beta\gamma + 1, & \text{etc.} \end{array}$$

cuius progreſſionis quisque terminus eſt aggregatum ex termino praecedente in indicem ſupra ſe ſcriptum multiplicato et termino hunc praecedente.

§. 9. Si igitur v per b diuidi poterit, erit $m = 0$; ſi v per c diuidi poteſt erit $m = \frac{-v}{c}$ propter $A = 0$; ſi v per d diuidi poterit, fiat $B = 0$; eritque $m = \frac{v}{d}\beta$. Vnde ſequens oritur lex:

Si

Si est numerus integer	erit
$\frac{v}{b}$	$m = 0$
$\frac{v}{c}$	$m = -\frac{v}{c}$
$\frac{v}{d}$	$m = +\frac{v}{d}\beta$
$\frac{v}{e}$	$m = -\frac{v}{e}(\beta\gamma + 1)$
$\frac{v}{f}$	$m = +\frac{v}{f}(\beta\gamma\delta + \delta + \beta)$
$\frac{v}{g}$	$m = -\frac{v}{g}(\beta\gamma\delta\varepsilon + \delta\varepsilon + \beta\varepsilon + \beta\gamma + 1)$
$\frac{v}{h}$	$m = +\frac{v}{h}(\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta + \delta\varepsilon\zeta + \beta\varepsilon\zeta + \beta\gamma\zeta + \beta\gamma\delta + \zeta + \delta + \beta)$ etc.

Si nunc hi ipſius m valores in aequatione $z = ma + p$ ſubſtituantur, reperietur vt ſequitur:

Si eſt integer	erit
$\frac{v}{b}$	$z = q + \frac{bv}{b}1 = q + v$
$\frac{v}{c}$	$z = q - \frac{bv}{c}\alpha$
$\frac{v}{d}$	$z = q + \frac{bv}{d}(\alpha\beta + 1)$
$\frac{v}{e}$	$z = q - \frac{bv}{e}(\alpha\beta\gamma + \alpha + \gamma)$
$\frac{v}{f}$	$z = q + \frac{bv}{f}(\alpha\beta\gamma\delta + \alpha\beta + \alpha\delta + \gamma\delta + 1)$
$\frac{v}{g}$	$z = q - \frac{bv}{g}(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon + \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\varepsilon + \alpha\delta\varepsilon + \gamma\delta\varepsilon + \alpha + \gamma + \varepsilon)$ etc.

§. 10. Ad inueniendum ergo numerum z, qui per a diuiſus relinquat p, et per b diuiſus relinquat q, poſito $p - q = v$ ſequentem habebimus regulam; Inſtituatur operatio ad maximum communem diuiſorem inter a et b inueniendum, eaque eovsque producatur, donec ad reſiduum perueniatur, quod ſit diuiſor ipſius v, teneaturque quotus

quotus ex diuiſione ipſius v per illud reſiduum reſultans, qui ſit Q, vbi operatio abrumpatur. Deinde in ſerie ſcribantur quoti α, β, γ, etc. in hac diuiſione orti, ex iisque conſtruatur, noua ſeries 1, α, $\alpha\beta+1$, $\alpha\beta\gamma+\alpha+\gamma$, etc. quae ex illa quotorum ſerie formatur, atque eovsque continuari debet, quovsque per illam ſeriem fieri poteſt. Sub hac noua ſerie ſcribantur ſigna alternantia $+-+-$ etc. vltimusque terminus cum ſuo ſigno multiplicetur per Q, atque etiam per minorem diuiſorem propoſitum b, ad factum addatur reſiduum q diuiſori b reſpondens. Quo facto erit aggregatum numerus quaeſitus.

§. 11. Inuento hoc modo vno nnmero ſatisfaciente z, ex eo ſtatim innumerabiles aliis numeri ſatisfacientes reperiuntur. Nam ſi z per a diuiſum p relinquit et per b diuiſum q; eandem proprietatem habebunt quoque numeri $ab+z$, $2ab+z$, et $mab+z$. Multiplum quidem facti ab continuo adiici vel auferri poteſt, ſi a et b fuerint inter ſe numeri primi; at ſi a et b fuerint numeri compoſiti, tum etiam ſufficit eorum minimum communem diuiduum ſumſiſſe; cuius multiplum quodque adiectum vel ablatum a z dabit numeros ſatisfacientes; vt ſi minimus communis diuiduus fuerit M comprehendet mM$+z$ omnes omnino numeros quaeſtioni ſatisfacientes. Quare etiamſi hoc modo ſaepe numeri negatiui pro z inueniantur, tamen adiiciendo ad eos M vel eius multiplum obtinebuntur numeri affirmatiui. Hac ergo operatione ſemper minimus numerus ſatisfaciens inuenietur, ſiquidem minimus communis diuiduus M toties ſubtrahatur, quoties fieri poteſt.

§. 12. Quia exemplis haec operatio maxime illuſtrabitur, quaeramus numerum, qui per 103 diuiſus relinquat 87, et per 57 diuiſus relinquat 25. Erit ergo $a = 103$; $b = 57$; $p = 87$ et $q = 25$, atque $v = 62$; quare operationem ita inſtituo

$$\begin{array}{r|r|l}
57 & 103 & 1 \\
 & 57 & \\
\hline
46 & 57 & 1 \\
 & 46 & \\
\hline
11 & 46 & 4 \\
 & 44 & \\
\hline
 & 2 &
\end{array} \qquad \tfrac{62}{2} = 31 = Q.$$

$$\begin{array}{cccc}
1, & 1, & 4 & \\
1, & 1, & 2, & 9 \\
+ & - & + & -
\end{array}$$

Nunc eſt $-9 \cdot 31 = -279$; atque numerus quaeſitus $= 25 - 57 \cdot 279$; qui cum fiat negatiuus addo ad eum $3 \cdot 57 \cdot 103$ ſeu $57 \cdot 309$, vnde inuenitur $25 + 57 \cdot 30 = 1735$, qui eſt minimus numerus quaeſitus; omnes vero ſatisfacientes continentur in hac forma $m \cdot 103 \cdot 57 + 1735$.

§. 13. Quaeramus porro numerum, qui per 41 diuiſus relinquat 10, et per 29 diuiſus relinquat 28. In

In hoc exemplo compendium adhibebo, quod in aliis ſimilibus computationibus magnam habebit vtilitatem, nam cum in diuiſione per 29 reſiduum ſit 28, reſtare quoque poterit in eadem diuiſione -1 ſi quotus vnitate maior accipiatur. Sumo ergo -1 pro reſiduo diuiſoris 29; eritque $a = 41$, $b = 29$, $p = 10$ et $q = -1$; vnde erit $v = 11$. Operationem ergo vt ante inſtituo ita.

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
29 & \vert\, 41 & \vert\, 1 & & & & & \\
 & \vert\, 29 & & & & & & \\
 & 12 & \vert\, 29 & \vert\, 2 & & & & \\
 & & \vert\, 24 & & & & & \\
 & & 5 & \vert\, 12 & \vert\, 2 & & & \\
 & & & \vert\, 10 & & & & \\
 & & & 2 & \vert\, 5 & \vert\, 2 & & \\
 & & & & \vert\, 4 & & & \\
 & & & & 1 & & &
\end{array}
\qquad \frac{11}{1} = 11 = Q.$$

1,	2,	2,	2.	
1,	1,	3,	7,	17
+	−	+	−	+

Erit ergo $+17.\ 11 = 187$; atque numerus quaeſitus $= -1 + 29.\ 187$. Subtrahatur $29.\ 4.\ 41$ erit is $= -1 + 29.\ 23 = 666$. Satisfacient ergo quaeſtioni omnes numeri in hac forma $m.\ 41.\ 29 + 666$ contenti.

§. 14. Com-

§. 14. Compendium hinc ſe prodit ad ſupra datam regulam adiiciendum, quod in hoc conſtat, vt, poſtquam numerus Q per ultimum ſeriei formatae terminum eſt multiplicatus, factum per maiorem diuiſorem a diuidatur, atque reſiduum loco ipſius facti adhibeatur. Scilicet hoc reſiduum per minorem diuiſorem b multiplicatum atque reſiduo q auctum dabit numerum quaeſitum. Atque iſte numerus hoc pacto inuentus erit minimus, qui ſatisfacit. Praeterea hac diuiſione effici poteſt vt reſiduum prodeat affirmatiuuum, etiamſi diuidendus fuerit negatiuus. Ita in primo exemplo §. 12 habebatur -279, qui numerus per 103 diuiſus, ſumto quoto $= 3$, relinquit $+30$. Ex quo numerus quaeſitus minimus eſt $= 25 + 57 \cdot 30 = 1735$.

§. 15. Fieri deinde etiam poteſt, vt huiusmodi exempla proponantur, quae ſolutionem omnino non admittant, vti ſi quaeratur numerus qui per 24 diuiſus relinquat 13, per 15 vero diuiſus relinquat 9; talis enim numerus per alteram conditionem deberet eſſe per 3 diuiſibilis, per alteram ſecus. Idem vero etiam ipſa regula oſtendit, nunquam enim ad tale reſiduum, excepto 0, deuenietur, quod diuidat v ſeu 4, vti ex ipſa operatione videre eſt

15]

15	24	1
	15	
9	15	1
	9	
6	9	1
	6	
3	6	2
	6	
	0	

Huiusmodi vero exempla exhiberi non poſſunt, niſi diuiſores a et b ſint numeri compoſiti inter ſe; nam ſi fuerint inter ſe primi, ſemper numeri quaeſiti exhiberi poſſunt. Sin autem diuiſores a et b fuerint numeri compoſiti, atque v non diuidi potuerit per maximum ipſorum a et b diuiſorem, tum ſemper problema ad abſurdum deducit. Hocque eſt criterium, ex quo, num problema ſolutionem admittat, diiudicari poteſt, antequam operatio inſtituatur.

§. 16. Expoſito hac methodo vniuerſali, qua omnis generis huius problemata facile reſolui poſſunt, ex ea alia regula poteſt formari, quae quidem ad vſum non eſt tam facilis, at ſimplicitatis plus in ſe habet. Oritur ea autem, ſi in valoribus ſupra inuentis ipſius (z) (§. 9.), loco α, β, γ, etc. eorum valores ex aequationibus $a = \alpha b + c$, $b = \beta c + d$, etc. ſubſtituantur. Nam ſi inſtituatur operatio ad maximum communem diuiſorem inter a et b inueniendum, ex eaque innoteſcant

con-

continua residua c, d, e, etc. dico fore numerum $z = q + abv\left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} - \frac{1}{de} + \frac{1}{ef} - \text{etc.}\right)$, eousque hac serie continuanda, donec v per factorem aliquem denominatoris diuidi queat. Vti si quaeratur numerus, qui per 16 diuisus relinquat 1 et per 9 diuisus relinquat 7, erit $a = 16$, $b = 9$, $p = 1$, $q = 7$, et $v = -6$. Quare

$$\begin{array}{r|c|c|c|l}
9 & 16 & & & 1 \\
 & 9 & & & \\
\hline
 & 7 & 9 & & 1 \\
 & & 7 & & \\
\hline
 & & 2 & 7 & 3 \\
 & & & 6 & \\
\hline
 & & & 1 &
\end{array}$$

Hinc ergo erit $z = -6.\,9.\,16\left(\frac{1}{16.\,9} - \frac{1}{9.\,7} + \frac{1}{7.\,2}\right) = 7 - 6 + \frac{6.\,16}{7} - \frac{3.\,9.\,16}{7} = 1 - 3.\,16 = -47$. Satisfaciunt ergo omnes numeri $m.\,144 - 47$ seu $m.\,144 + 97$; eorumque minimus est 97. Superior formula generalis ipsius z etiam in hunc modum potest exprimi $z = p - abv\left(\frac{1}{bc} - \frac{1}{cd} + \frac{1}{de} - \frac{1}{ef} + \text{etc.}\right)$ quae series fractionum eousque continuari debet, donec valor ipsius z fiat numerus integer.

§. 17. Considerabo nunc quosdam casus particulares, in quibus a ad b datam habeat relationem; et primo quidem sit $b = a - 1$ seu $a = b + 1$, residua vero ex diuisione numeri quaesiti per a et b orta sint vt ante p et q. Erit ergo $c = 1$; ideoque per regulam

lam postremam $z = p - av = p - ap + aq$. Quae expressio si $aq + p > ap$ dat minimum numerum quaesito satisfacientem: at si $aq + p < ap$ tum minimus numerus satisfaciens erit $a^2 - a + p - ap + aq$. Omnes vero numeri satisfacientes in hac formula generali $ma^2 - ma + p - ap + aq$ comprehenduntur, seu etiam in ista $mb^2 + mb - bp + bq + q$. Quicquid nunc sit m si haec quantitas diuidatur per $b^2 + b$ residuum erit minimus numerus quaesito satisfaciens.

§. 18. Quemadmodum hac ratione ope residuorum datorum, quae post diuisionem numeri incogniti per diuisores b et $b + 1$ remanent, ipse numerus incognitus sit inueniendus, docuit *Siselius* in Commentario ad *Rudolfi* artem Cossicam. Regula eius ita se habet: si fuerit residuum numeri incogniti per $b + 1$ diuisi p, et residuum eiusdem per b diuisi q, iubet q multiplicare per $b + 1$, et p per b^2, horumque factorum aggregatum per $b^2 + b$ diuidere, quod restat post diuisionem, id pronunciat esse numerum quaesitum. Fluit autem haec regula ex nostra generali formula, si ponatur $m = p$, tum enim habetur $b^2 p + (b + 1)q$, quod per $b^2 + b$ diuisum relinquit minimum numerum quaesitum.

§. 19. Interim tamen minori opera minimus numerus satisfaciens reperietur sequenti modo: Residuum q, quod ex diuisione quaesiti numeri per b oritur, multiplicetur per $b + 1$, factumque addatur ad numerum pronicum ipsius b puta ad $b^2 + b$, hinc subtrahatur factum

 ex

ex residuo p, quod ex diuisione numeri quaesiti per $b+1$ remanet, ducto in b; si id quod restat fuerit $< b^2+b$, erit id ipse numerus quaesitus, sin vero fuerit $> b^2+b$ subtrahatur b^2+b, eritque residuum numerus quaesitus. Vt si quaeratur numerus, qui per 100 diuisus relinquat 75 et per 101 diuisus 37; tum addatur 10100 ad factum ex 75 in 101 seu 7575, vt habeatur 17675, hinc subtrahatur factum ex 37 in 100 seu 3700 remanebit 13975, a quo si 10100 auferantur prodibit 3875, qui est minimus numerus quaesitus.

§. 20. Si quaeratur numerus qui per b diuisus relinquat q et per $nb+1$ diuisus p; erit iterum $c=1$ atque numerus quaesitus $z=p-av=p-ap+aq=(nb+1)q-nbp$ ob $a=nb+1$. Atque omnes numeri satisfacientes continebuntur in hac expressione $mnb^2+mb+(nb+1)q-nbp$, ex qua sumto pro m numero quocunque, inuenietur minimus numerus satisfaciens, si ea expressio diuidatur per nb^2+b; residuum enim erit minimus numerus satisfaciens.

§. 21. Casus porro notari meretur, quo residua p et q, quae oriuntur ex diuisione quaesiti numeri per datos diuisores a et b, sunt inter se aequalia seu $p=q$. Hoc enim casu fit $v=0$, ideoque inuenitur numerus quaesitus $z=p$. Si igitur sit M minimus communis diuiduus numerorum a et b, omnes numeri satisfacientes continebuntur in hac formula $mM+p$. Eadem pla-

plane formula quoque satisfacit, si quotcunque fuerint diuisores a, b, c, d, etc. per quos singulos numerus quaesitus diuisus relinquat p, si quidem M denotet omnium diuisorum minimum communem diuiduum. Omnes ergo numeri huiusmodi quaestionibus satisfacientes ita sunt comparati, vt per M diuisi relinquant p.

§. 22. Hinc satis tritum problema, quo quaeritur numerus, qui per 2, 3, 4, 5, 6 diuisus relinquat 1 per 7 vero nihil relinquat, solui potest. Omnes enim numeri qui per 2, 3, 4, 5, 6 diuisi relinquunt 1 hanc habent proprietatem vt per 60, qui numerus est minimus communis diuiduus numerorum 2, 3, 4, 5, et 6, diuisi relinquant 1. Problema ergo huc redit vt inueniatur numerus qui per 60 diuisus relinquat 1, per 7 vero sit diuisibilis; erit ergo $a = 60$, $b = 7$, $p = 1$, $q = 0$, et $v = 1$. Facta ergo operatione.

```
7|60|8
 |56|
 -------
   4|7|1        1/1 = 1 = Q.
    |4|         8, 1, 1.
   -------
     3|4|1      1, 8, 9, 17
      |3|       +  -  +  -
     -------
        1
```

Erg. $z = 0 - 119 + 420m$.
et si $m = 1$ erit $z = 301$.

§. 23. Maiorem difficultatem habere videtur hoc problema, quo quaeritur numerus qui per numeros 2,

 3, 4,

3, 4, 5, 6 diuisus respectiue relinquat numeros 1, 2, 3, 4, 5, at per 7 diuidi queat, propter residua proposita inaequalia. Sed haec quaestio congruit cum hac: inuenire numerum qui per 2, 3, 4, 5, 6 diuisus relinquat -1 et per 7 nihil. Illi iam conditioni satisfacit forma $60m-1$; quare numerus quaeritur qui per 60 diuisus -1, at per 7 nihil relinquat, fit itaque $a=60$, $b=7$, $p=-1$, $q=0$, et $v=-1$ atque operatione vt ante instituta est $Q=-1$ quod in -17 ductum dat $+17$, hocque per b multiplicatum dat 119 numerum quaesitum.

§. 24. Ex his duobus exemplis apparet, quomodo huiusmodi quaestiones, in quibus quotcunque diuisores proponuntur, quibus autem duo tantum residua respondent, per supra datas regulas solui queant; statim enim quaestio ad quaestionem duorum diuisorum reducitur: vti si omnia residua sunt aequalia, quaestio perinde soluitur, ac si vnicus diuisor fuisset propositus. At si residua sunt inaequalia, tum nihilominus repetendis his operationibus, quibus pro duobus diuisoribus vsi sumus, solutio poterit obtineri. Primo enim duobus diuisoribus satisfieri debet, tum tertius assumitur, deinde quartus, donec omnibus erit satisfactum. Hoc vero commodissime exemplis explicabitur.

§. 25. Quaeramus igitur numerum, qui per 7 diuisus relinquat 6, per 9 relinquat 7, per 11 relinquat 8 et per 17 relinquat 1. Ex his iam quatuor condi-

conditionibus ſumamus duas quasque, vt duas priores, et inueſtigemus omnes numeros iis ſatisfacientes. Erit ergo $a = 9$, $b = 7$, $p = 7$, $q = 6$ et $v = 1$, quare operatio inſtituetur vti ſequitur:

$$\begin{array}{r|c|l} 7 & 9 & 1 \\ & 7 & \\ \hline 2 & 7 & 3 \\ & 6 & \\ \hline & 1 & \end{array} \qquad Q = 1.$$

$$\begin{array}{lll} 1, & 3, & \\ 1, & 1, & 4 \\ + & - & + \end{array}$$

fietque $z = 6 + 1.4.7 = 34$.

Omnes ergo numeri his duabus conditionibus ſatisfacientes continentur in hac forma $63m + 34$, ſeu ita erunt comparati, vt per 63 diuiſi relinquant 34.

§. 26. Problema ergo huc eſt reductum, vt inueniatur numerus, qui diuiſus per 63 relinquat 34, per 11 relinquat 8, et per 17 relinquat 1. Harum trium conditionum ſumantur duae priores eritque $a = 63$, $b = 11$, $p = 34$, $q = 8$, et $v = 26$, vnde fluit ſequens operatio:

$$\begin{array}{r|l|l}
11 & 63 & 5 \\
 & 55 & \\
\hline
8 & 11 & 1 \\
 & 8 & \\
\hline
3 & 8 & 2 \\
 & 6 & \\
\hline
 & 2 &
\end{array} \qquad Q=\tfrac{26}{2}=13.$$

$$\begin{array}{cccc}
5, & 1, & 2 & \\
1, & 5, & 6, & 17 \\
+ & - & + & -
\end{array} \quad \text{ergo } z=m.63.11+8-13.17.11.$$

Quo minimus numerus satisfaciens reperiatur, ponatur $m=4$; erit $z=8+31.11=349$. Omnes ergo numeri satisfacientes in hac continentur forma $693m+349$, seu hanc habebunt proprietatem, vt per 693 diuisi relinquant 349.

§. 27. Problema ergo tandem huc est reductum, vt definiatur numerus, qui per 693 diuisus relinquat 349 et per 17 diuisus relinquat 1. Facio ergo $a=693$, $b=17$, $p=349$, $q=1$, et $v=348$, sequentemque iuxta data praecepta instituo operationem:

$$\begin{array}{r|l|l}
17 & 693 & 41 \\
 & 697 & \\
\hline
 & -4 &
\end{array} \qquad Q=\tfrac{348}{-4}=-87.$$

$$\begin{array}{cc}
41 & \\
1, & 41 \\
+ & -
\end{array} \qquad z=693.17.m+1+41.87.17.$$

Quo

Quo minimus numerus ſatisfaciens prodeat pono $m = -5$, eritque $z = 1 + 102.17 = 1735$, qui eſt minimus numerus quatuor praeſcriptis conditionibus ſatisfaciens. Omnes autem qui ſatisfaciunt hac continentur formula $11781m + 1735$. Ex hoc exemplo ergo abunde intelligitur, quomodo omnes huiusmodi quaeſtiones ſint reſoluendae.

§. 28. Pertinet huc ſolutio problematis chronologici ſatis cogniti, quam, prout ex his regulis inueni, apponam, in quo annus a Chriſto nato quaeritur, ex datis cyclis ſolis et lunae vna cum indictione Romana illius anni. Cum enim cyclus ſolis ſit reſiduum, quod oritur diuiſione numeri anni nouenario aucti per 28; cyclus vero lunae ſit reſiduum, quod oritur diuiſione numeri anni vnitate aucti per 19; Indictio vero Romana ſit reſiduum, quod oritur, ſi numerus anni ternario auctus per 15 diuidatur, ſequens prodiit ſolutio. Sit p cyclus ſolis, q cyclus lunae et r indictio Romana; multiplicetur p per 4845; q per 4200; et r per 6916, haec tria producta cum numero 3267 in vnam ſummam coniiciantur, eaque diuidatur per 7980; quod remanebit reſiduum erit numerus anni quaeſiti. Si annus periodi Iulianae requiratur, tum operatio eodem modo inſtituatur, niſi quod numerus 3267 negligi debet; quae eſt regula iam paſſim tradita.

§. 29. Multam quidem operam requirit ſolutio pro pluribus diuiſoribus, ſi quidem problema continuo ad casum, quo diuisorum numerus vnitate minuitur, vt in praecedente exemplo fecimus, reducitur; At ex ea ipsa operatione facilior multoque breuior via sese prodit, qua statim proposita quaestio, quotcunque etiam fuerint diuisores, ad casum duorum diuisorum reduci potest; quae regula ita se habet: Inueniendus sit numerus, qui per diuisores a, b, c, d, e, quos numeros inter se primos esse pono, diuisus relinquat respectiue haec residua p, q, r, s, t. Huic quaestioni satisfacit iste numerus $Ap + Bq + Cr + Ds + Et + mabcde$, in qua expressione A est numerus, qui per factum $bcde$ diuisus nihil relinquat, per a vero diuisus relinquat vnitatem; B est numerus, qui per $acde$ diuisus relinquat nihil, per b vero vnitatem; C est numerus qui per $abde$ diuisus nihil relinquat, per c vero vnitatem; D est numerus qui per $abce$ nihil relinquat, per d vero vnitatem; atque E est numerus per $abcd$ diuisus nihil relinquat, per e vero vnitatem, qui ergo numeri per regulam pro duobus diuisoribus datam inueniri possunt.

DE