

est subsidium, eo redit meo iudicio, ut α , β , γ , et δ , ex a , b , c , et d debeant determinari, non vero vicissim; hoc enim casu aequatio ad multo altioremeueheretur potestatem, quam opus est. Aliis autem, quos huiusmodi occupationes iuuant, hanc rem perficiendam, vel mihi ad aliud tempus, relinquo; hoc solo nunc contentus, me fortasse idoneam atque genuinam viam ostendisse.

CONSTRUCTIO AEQVATIONIS DIFFERENTIALIS $ax^m dx = dy + y^2 dx$.

AVCTORE

Leonb. Eulero.

§. I.

Communicauī nuper cum Societate specimen constructionis aequationis cuiusdam differentialis, in qua non solum indeterminatas a se inuicem separare non potueram, sed etiam monstraueram ex ipsa constructione huiusmodi separationem omnino non posse exhiberi. Differt quidem meus ibi datus construendi modus ab vsitatis: attamen iis nequaquam illum esse proponendum quilibet intelliget, qui hanc schedam inspexerit. Neque vero tum temporis hanc methodum vltius extendere, atque ad alias aequationes accommodare licuit, quia ex posita constructione ad aequationem demum perueneram, non autem vicissim data aequatione constructionem eruere potueram. At deinceps cum hanc
rem

rem diligentius contemplatus essem, voti mei compos quodammodo sum factus, ita vt hanc methodum inuerrere, atque propositae aequationis constructionem inuenire potuerim.

§. 2. Selegi igitur statim ad periculum faciendum hanc maxime agitatum aequationem $ax^n dx = dy + y^2 dx$, quam Clar. *Comes Riccati* primum Geometris examinandam proposuit, nemo vero eius constructionem, nisi pro certis litterae n valoribus, dedit. Meae vero methodi beneficio omnes difficultates feliciter superavi, atque vniuersalem huius aequationis constructionem inueni, in qua nihil omnino desiderari queat. Non solum autem vnicam haec methodus suppeditat constructionem, sed plures, immo etiam innumerabiles. Merito igitur mihi videor isti methodo tantam praestantiam adscribere, vt ad omnes aequationes differentiales construendas, in quibus aliae methodi frustra sunt adhibitae, viam sit commonstratura.

§. 3. Quemadmodum in superiore Dissertatione arcu Elliptico sum vsus, ad constructionem huius aequationis $dy + \frac{y^2 dx}{x} - \frac{x dx}{x^2 - 1}$, ita pro aequatione proposita alia opus erit curua, loco Ellipsis substituenda. Quam vt inueniam pono vniuersalissime eius elementum $= PR dz$, in quo P et R sunt functiones ipsius z tales, quae iisdem factis operationibus, vt supra in elemento elliptico, deducant ad aequationem propositam. Pono porro, vt series quaedam in considerationem veniat, $R = 1 + AgQ + ABg^2 Q^2 + ABCg^3 Q^3 + ABCDg^4 Q^4 + etc.$

in qua serie est Q functio: quaedam ipsius z , g linea data seu quasi parameter curvae, A, B, C, D , etc. coefficientes constantes. Ponatur $PR dz = dZ$; erit ergo $Z = \int P dz + Ag \int PQ dz + ABg^2 \int PQ^2 dz + ABCg^3 \int PQ^3 dz + \text{etc.}$

§. 4. Ita autem P et Q a se inuicem pendeant, vt omnia haec integralia possint ad $\int P dz$ reduci. Sit ergo $\int PQ dz = \alpha \int P dz + O_1$; $\int PQ^2 dz = \alpha\beta \int P dz + O_2$; $\int PQ^3 dz = \alpha\beta\gamma \int P dz + O_3$; etc. Denotant hic O_1, O_2, O_3 etc. quantitates algebraicas. Post peractam hoc modo integrationem ponatur $z = b$: est autem b talis quantitas, quae loco z substituta faciat omnes eas quantitates algebraicas O_1, O_2, O_3 , etc. euanescere, atque tum fiat $\int P dz = H$ quantitati prorsus constanti. Ex his igitur, facto post integrationem $z = b$, erit $Z = H(1 + A\alpha g + AB\alpha\beta g^2 + ABC\alpha\beta\gamma g^3 + \text{etc.})$ Facta iam parametro g variabili obtinebuntur infiniti valores ipsius Z pro infinitis ipsius g , atque ex dato elemento $PR dz$ poterit construi curua, in qua, si abscissae designentur littera g , applicatae sunt $= Z$

§. 5. Hoc itaque modo poterit construi summa seriei $1 + A\alpha g + AB\alpha\beta g^2 + ABC\alpha\beta\gamma g^3 + \text{etc.}$ quamuis forte ex sui ipsius consideratione summa prorsus non possit determinari. Vtor autem ad summam huius seriei inuestigandam methodo mea summae serie-rum inuentionem ad resolutionem aequationum reducendí, quam anno praeterito exposui, vt hanciscar aequationem, cuius resolutio a seriei illius summa pendeat. Perspicuum

enim est, utcumque haec aequatio resultans fuerit perplexa, eius tamen constructionem in promptu futuram. Nunc igitur nihil aliud est faciendum, nisi ut quantitates A, B, C , etc. et α, β, γ , etc. efficiantur eiusmodi, ut summae seriei istius inuentio ad resolutionem huius aequationis $ax^n dx = dy + y^2 dx$ deducatur. Hoc vero loco id est efficiendum: ut series $1 + AgQ + ABg^2Q^2 + ABCg^3Q^3 +$ etc. possit in summam redigi, quia alias valor ipsius R non esset cognitus, et proinde integra constructio inutilis. Quamobrem non licebit loco A, B, C etc. valores quosuis pro arbitrio accipere, sed tales, quae hanc seriem summabilem reddant.

§. 6. Quo igitur appareat, cuiusmodi esse debeat series $1 + A\alpha g + AB\alpha\beta g^2 + ABC\alpha\beta\gamma g^3 +$ etc. ut eius summatio perducatur ad resolutionem aequationis $ax^n dx = dy + y^2 dx$; hanc ipsam aequationem in seriem resoluo. Quod ut commodius effici possit, pono $y = \frac{dt}{dx}$, sumtoque dx constante erit $ax^n dx = \frac{ddt}{tdx}$ seu $ax^n t dx^2 = ddt$. Nunc more consueto substituo loco t hanc seriem $1 + Ax^{n+2} + Bx^{2n+4} + Cx^{3n+6} +$ etc. erit $ddt = (n+1)(n+2)Ax^n dx^2 + (2n+3)(2n+4)Bx^{2n+2} dx^2 + (3n+5)(3n+6)Cx^{3n+4} dx^2 +$ etc. Huic igitur seriei aequalis esse debet $ax^n t dx^2$, seu ista series $ax^n dx^2 + Aax^{2n+2} dx^2 + Bbx^{3n+4} dx^2 +$ etc.; propterea aequales facio terminos homogeneos determinandis litteris A, B, C etc. pro arbitrio assumtis, fietque $A = \frac{a}{(n+1)(n+2)}, B = \frac{aa}{(2n+3)(2n+4)}, C =$

$C = \frac{3a}{(3n+5)(3n+6)}$ etc. Ponatur $z x^{n+2} = f$ brevitatis gratia, erit $t = 1 + \frac{f}{(n+1)(n+2)} + \frac{f^2}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)} + \frac{f^3}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)(3n+5)(3n+6)} + \text{etc.}$ Huius ergo seriei summatio pendet a constructione aequationis propositae $ax^n dx = dy + y^2 dx$. Quamobrem si series $1 + A\alpha g + A B\alpha\beta g^2 + \text{etc.}$ in eam possit transmutari, habebitur simul constructio aequationis propositae.

§. 7. Sed quo haec series, quippe quae nimis est generalis, aliquanto magis restringatur, et determinatio litterarum arbitrariarum facilius efficiatur, pono in formula $PR dz$ initio assumpta $P = \frac{1}{(1 + bz^\mu)^\nu}$, et $Q =$

$$\frac{z^\mu}{1 + bz^\mu}. \text{ Erit ergo } \int P dz = \int \frac{dz}{(1 + bz^\mu)^\nu}, \int PQ dz = \int \frac{z^\mu dz}{(1 + bz^\mu)^{\nu+1}}, \text{ et } \int PQ^2 dz = \int \frac{z^{2\mu} dz}{(1 + bz^\mu)^{\nu+2}} \text{ etc.}$$

Post sunt autem haec omnia integralia ad primum $\int \frac{dz}{(1 + bz^\mu)^\nu}$

reduci: est enim generaliter $\int \frac{z^{\theta\mu} dz}{(1 + bz^\mu)^{\nu+\theta}} = \frac{(\theta-1)\mu+1}{b\mu(\nu+\theta-1)}$

$$\int \frac{z^{(\theta-1)\mu} dz}{(1 + bz^\mu)^{\nu+\theta-1}} = \frac{1}{b\mu(\nu+\theta-1)} \cdot \frac{z}{(1 + bz^\mu)^{\nu+\theta-1}}. \text{ Hanc}$$

ob rem erit $\int \frac{z^\mu dz}{(1 + bz^\mu)^{\nu+1}} = \frac{1}{b\mu\nu} \int \frac{dz}{(1 + bz^\mu)^\nu}$

$$\frac{1 \cdot z}{b\mu\nu(1 + bz^\mu)^\nu}, \text{ et } \int \frac{z^{2\mu} dz}{(1 + bz^\mu)^{\nu+2}} = \frac{1(\mu+1)}{b^2\mu^2\nu(\nu+1)} \int \frac{dz}{(1 + bz^\mu)^\nu}$$

Gg 2

$\int \frac{dz}{(1+bz^\mu)^\nu} = \frac{(\mu+1)z}{b^2 \mu^2 \nu (\nu+1) (1+bz^\mu)^\nu} - \frac{1 \cdot z^{\mu+1}}{b \mu (\nu+1) (1+bz^\mu)^{\nu+1}}$
 etc. Debebit ergo b eiusmodi esse quantitas, vt loco
 z substituta faciat $\frac{z^{\mu\theta+1}}{(1+bz^\mu)^{\nu+\theta}} = 0$. Non vero poterit

esse $b=0$, quia tum plerumque simul quantitas $\int \frac{dz}{(1+bz^\mu)^\nu}$

evanesceret. Comparatis iam his reductionibus cum supra assumtis, determinantur litterae $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. Erit scilicet $\alpha = \frac{1}{b\mu\nu}$, $\beta = \frac{\mu+1}{b\mu(\nu+1)}$, $\gamma = \frac{2\mu+1}{b\mu(\nu+2)}$ etc.

§. 8. Definitis hoc modo litteris α, β, γ etc. confidero alteras A, B, C etc. quarum quamlibet video huiusmodi formam $\frac{1}{\sigma\tau}$, scilicet unitatem diuisam per factum ex duobus factoribus, habere oportere. Quo autem simul series $1 + AgQ + ABg^2Q^2 + ABCg^3Q^3 +$ etc. possit summari, facio $A = \frac{1}{\pi(\pi+\rho)}$, $B = \frac{1}{(\pi+2\rho)(\pi+3\rho)}$, $C = \frac{1}{(\pi+4\rho)(\pi+5\rho)}$ etc. atque tum series ope methodi meae vniuersalis series summandi poterit summari. Pono primo breuitatis gratia $gQ = q^2$, erit $R = 1 + \frac{q^2}{\pi(\pi+\rho)} + \frac{q^4}{\pi(\pi+\rho)(\pi+2\rho)(\pi+3\rho)} +$ etc., facioque $R-1=S$ erit $S = \frac{q^2}{\pi(\pi+\rho)} + \frac{q^4}{\pi(\pi+\rho)(\pi+2\rho)(\pi+3\rho)} +$ etc. Multiplico

nunc vbique per $q^{\frac{\pi-\rho}{2}}$ sumoque differentialia, erit $\frac{d(q^{\frac{\pi-\rho}{2}} S)}{dq}$

$= \frac{q^{\frac{\pi-\rho}{2}}}{\pi} + \frac{q^{\frac{\pi+2\rho}{2}}}{\pi(\pi+\rho)(\pi+2\rho)} +$ etc. Iam per q multiplico sumoque denuo differentialia ponendo dq constan-

te, prodibit $\frac{q^2 dd(q^{\frac{\pi-\rho}{2}} S)}{dq^2} = q^{\frac{\pi-\rho}{2}} + \frac{q^{\frac{\pi+\rho}{2}}}{\pi(\pi+\rho)} +$

etc.

etc. = $q^{\frac{\pi-p}{p}}$ + $q^{\frac{\pi-p}{p}}$ ($\frac{q^2}{\pi(\pi+p)}$ + $\frac{q^4}{\pi(\pi+p)(\pi+2p)}$ + etc.)
 Habebimus ergo restituto S loco seriei $\frac{q^2}{\pi(\pi+p)}$ + etc.

Hanc aequationem $e^2 dd(q^{\frac{\pi-p}{p}} S) = q^{\frac{\pi-p}{p}} dq^2 + q^{\frac{\pi-p}{p}}$
 $S dq^2$. Pono porro breuitatis gratia $q^{\frac{\pi-p}{p}} S = T$, erit

$$e^2 ddT = q^{\frac{\pi-p}{p}} dq^2 + T dq^2.$$

§. 9. Ad hanc aequationem integrandam pono $T = rs$, erit $ddT = rdds + 2drds + sddr$, quibus sub-

stitutis habetur $e^2 rdds + 2e^2 drds + e^2 sddr = q^{\frac{\pi-p}{p}} dq^2 + rsd$
 q^2 quae in duas aequationes discerpatur, $e^2 rdds = rsdq^2$, et

$2e^2 drds + e^2 sddr = q^{\frac{\pi-p}{p}} dq^2$. Harum prior per r diuisa
 abit in hanc $e^2 dds = sdq^2$, quae per ds multiplicata dat

hanc $e^2 dsdds = sdsdq^2$, cuius integralis est
 $e^2 ds^2 = s^2 dq^2$, siue haec $eds = sdq$, quae denuo

integrata dat $els = q$ atque $s = c^{\frac{q}{p}}$ denotante c nume-
 rum, cuius logarithmus est r . Inuento itaque s affir-

mo alteram aequationem $2e^2 drds + e^2 sddr = q^{\frac{\pi-p}{p}}$
 dq^2 , quae substituto loco s valore inuento $c^{\frac{q}{p}}$ abit in

istam $2e^2 c^{\frac{q}{p}} dqdr + e^2 c^{\frac{q}{p}} ddr = q^{\frac{\pi-p}{p}} dq^2$. Ponatur dr
 $= v dq$, erit $ddr = dv dq$ atque aequatio mutabitur in

hanc simpliciter differentialem $2e^2 c^{\frac{q}{p}} v dq + e^2 c^{\frac{q}{p}} dv =$
 $q^{\frac{\pi-p}{p}} dq$, quam multiplico per $c^{\frac{q}{p}}$, vt prodeat $2e^2 c^{\frac{2q}{p}}$

$vdq + e^2 c^{\frac{2q}{p}} dv = c^{\frac{q}{p}} q^{\frac{\pi-p}{p}} dq$, cuius integralis est $e^2 c^{\frac{2q}{p}}$
 $v = \int c^{\frac{q}{p}} q^{\frac{\pi-p}{p}} dq$. Fit igitur $v = \frac{1}{p+2} c^{\frac{q}{p}} \int c^{\frac{q}{p}} q^{\frac{\pi-p}{p}} dq$, et sv
 dq .

dq , seu $r = \frac{1}{p^2} \int c^{-\frac{2q}{p}} dq \int c^{\frac{q}{p}} q^{\frac{\pi-p}{p}} dq$. Erit ergo $rs = T$.
 $\frac{1}{p^2} \int c^{\frac{q}{p}} dq \int c^{-\frac{2q}{p}} q^{\frac{\pi-p}{p}} dq$, et $S = \frac{1}{p^2} \int c^{\frac{q}{p}} \int c^{-\frac{2q}{p}} dq \int c^{\frac{q}{p}} q^{\frac{\pi-p}{p}} dq$.

§. 10. Quoniam in hac forma inuenta duplex inuoluitur integratio, notandum est eas ita institui debere vt tam S quam $\frac{dS}{dq}$ fiant $= 0$, posito $q = 0$, quemadmodum ex serie, cui S est aequale, apparet. His obseruatis habetur tandem $R = 1 + \frac{1}{p^2} \int c^{\frac{q}{p}} \int c^{-\frac{2q}{p}} dq \int c^{\frac{q}{p}} q^{\frac{\pi-p}{p}} dq$. Est vero $q = \sqrt[p]{gQ}$, atque ob $Q = \frac{z^\mu}{1 + bz^\mu}$, erit $q = \sqrt[p]{\frac{gz^\mu}{1 + bz^\mu}}$.

$\frac{gz^\mu}{1 + bz^\mu}$. Dabitur igitur ex his $\int P R dz$ seu $\int \frac{R dz}{(1 + bz^\mu)^p}$. Quare si litteris π, g, μ et ν tribuantur debiti valores in n , in promptu erit aequationis propositae $ax^n dx = dy + y^2 dx$ constructio.

§. 11. Hoc facto reuertor ad propositum, atque resumō seriem $1 + A\alpha g + A\beta\alpha\beta g^2 + \text{etc.}$ quae positis loco $A, \alpha, B, \beta, C, \gamma$, etc. electis valoribus transmutatur in hanc $1 + \frac{g}{b\mu\nu\pi(\pi+\rho)} + \frac{(\mu+1)g^2}{b^2\mu^2\nu(\nu+1)\pi(\pi+\rho)(\pi+2\rho)(\pi+3\rho)}$ etc. cuius haec est lex, vt terminus indicis $\theta + 1$ diuisus per terminum indicis θ sit $\frac{g(1 + (\theta-1)\mu)}{b\mu(\nu+\theta-1)(\pi+(2\theta-2)\rho)(\pi+(2\theta-1)\rho)}$. In serie vero quam §. 6. ex aequatione proposita elicuimus, est similis quotus termini indicis $\theta + 1$ per terminum indicis θ diuisi $\frac{f}{(\theta n + 2\theta - 1)(\theta n + 2\theta)}$. Quo igitur hae duae series congruant, oportet vt hi duo quoti sint inter se aequales. Fiat ergo primo $\frac{g}{b} = f$ seu $g = bf$, hoc posito debeat esse $\frac{1}{(\theta n + 2\theta - 1)(\theta n + 2\theta)} = \frac{\theta\mu - \mu + 1}{(\mu\nu + \mu\theta - \mu)(\pi + 2\theta\rho - 2\rho)(\pi + 2\theta\rho - \rho)}$. Vnde si aequatio secundum dimensiones ipsius θ ordinetur, et coefficientes cuiusque ipsius θ potentiae ponantur $= 0$, deter-

prodibunt quatuor aequationes ex quibus μ , ν , π , et ξ determinabuntur in n . Neque vero vnica datur solutio, sed sunt quatuor diuersae quae ad nostrum institutum pertinent. Prima dat $\mu = \frac{2n+4}{3n+4}$, $\nu = 1$, $\pi = n+1$, et $\xi = \frac{n+2}{2}$. Secunda dat $\mu = \frac{2n+4}{n}$, $\nu = 1$, $\pi = \frac{n}{2}$, et $\xi = \frac{n+2}{2}$. Tertia dat $\mu = 2$, $\nu = \frac{n+1}{n+2}$, $\pi = \frac{n+2}{2}$ et $\xi = \frac{n+2}{2}$. Quarta dat $\mu = \frac{1}{3}$, $\nu = \frac{n+1}{n+2}$, $\pi = (n+2)\sqrt{2}$ et $\xi = \frac{n+2}{\sqrt{2}}$.

§. 12, Quatuor harum solutionum non vnaquaeque pro libitu potest adhiberi, sed pro variis casibus exponentis n alia atque alia eligi debet. Quae diiudicatio deducenda est ex ista conditione §. 7 memorata, quod

$\frac{z^{\mu\theta+1}}{(1+bz^\mu)^{\nu+\theta}}$ euanescere debeat facto $z=b$. Fit hoc

quidem si $z=0$, sed cum praeter hunc alius requiratur, facile apparet, id non euenire posse, nisi ponatur $b=\infty$. In quolibet igitur casu ipsius n talis eligenda

est solutio, vt $\frac{z^{\mu\theta+1}}{(1+bz^\mu)^{\nu+\theta}}$ fiat $=0$ posito $z=\infty$.

Denotat hic autem θ numerum quemcunque integrum affirmatiuum non excepta cyphra, quamobrem et ν nunquam esse poterit numerus negatiuus, quia alioquin binomium $1+z^\mu$ in numeratorem veniret. At μ tam affirmatiuum quam negatiuum numerum significare potest, ex quo duplex existit huius rei consideratio, prout fuerit μ vel affirmatiuus numerus vel negatiuus. Sit primo μ numerus affirmatiuus $=+\lambda$, perspicuum est quo

$\frac{z^{\lambda\theta+1}}{(1+bz^\lambda)^{\nu+\theta}}$ fiat $=0$, posito $z=\infty$, oportere maximum ipsius z exponentem in denominatore, qui est λ

$\nu+\lambda\theta$

$\nu + \lambda \theta$ maiorem esse eiusdem z exponente in nume-
ratore, qui est $\lambda \theta + 1$. Erit igitur $\lambda \nu > 1$. Sin autem
fuerit μ numerus negatiuus seu $= -\lambda$, fiet $\frac{z^{-\lambda \theta + 1}}{(1 + bz^{-\lambda})^{\nu + \theta}}$

$= \frac{z^{\lambda \nu + 1}}{(z^\lambda + b)^{\nu + \theta}}$, quae quantitas vt fiat $= 0$ posito z

$= \infty$ debet esse $\lambda \nu + \lambda \theta > \lambda \nu + 1$, seu $\lambda \theta > 1$, id quod
in casu $\theta = 0$ fieri nequit. Quocirca μ nunquam esse
poterit numerus negatiuus. In prima igitur solutione,
quia est $\nu = 1$, quoties fuerit λ i. e. $\frac{2n+4}{3n+4}$ numerus posi-
tiuus, toties simul esse debet numerus vnitatis maior,
excipiuntur igitur ii casus quibus $\frac{2n+4}{3n+4}$ est 1 vel vni-
tate minor. Nisi ergo n contineatur intra hos limites
 0 et $-\frac{4}{3}$ prima solutio adhiberi nequit. In secunda solutio-
ne, quia iterum est $\nu = 1$, similiter excipiuntur casus,
quibus λ seu $\frac{2n+4}{n}$ est vnitatis seu vnitatis minor. Semper
igitur haec solutio locum habebit, his tantum exceptis
casibus, quando n continetur intra hos limites -4 et 0 .
Pro tertia solutione, quia μ iam est numerus positiuus
nempe $= 2$ debet tantum $\frac{2n+2}{n+2}$ esse numerus vnitatis
maior. Hac igitur semper vti poterimus nisi n continea-
tur intra hos limites -2 et 0 ; quoties ergo secunda
locum habet, toties et tertia poterit vsurpari. In quarta
denique solutione quia μ quoque est numerus affirma-
tiuus, scilicet $\frac{1}{3}$, requiritur vt $\frac{n+1}{3n+6}$ sit numerus vni-
tatis maior, id quod accidit, quoties n continetur intra
hos limites -2 et $-\frac{1}{2}$. In his igitur casibus quarta
solutione vti conueniet. Ex quibus inuicem compara-
tis perspicitur, semper hoc modo aequationis propositae

con-

constructionem exhiberi posse, nisi n contineatur intra hos angustos limites $-\frac{1}{3}$ et -2 .

§. 13. Quo autem totum hoc negotium evidentius percipiatur, accommodabo, quae hactenus tradita sunt, ad casum particularem, quo est $n=2$, ut itaque construenda sit haec aequatio $ax^2 dx = dy + y^2 dx$. Pro hoc casu eligo solutionem tertiam, eritque propterea $\mu=2, \nu=\frac{3}{4}, \pi=\xi=2$. His valoribus substitutis habebitur $S = \frac{1}{4}c^{\frac{3}{2}} \int c^{-q} dq \int c^{\frac{3}{2}} dq$. Est vero $\int c^{\frac{3}{2}} dq = 2c^{\frac{3}{2}} + i$, ergo $\int c^{-q} dq \int c^{\frac{3}{2}} dq = \int 2c^{\frac{3}{2}-q} dq + i \int c^{-q} dq = -c^{\frac{3}{2}-q} - ic^{-q} + k$. Consequenter prodit $S = \frac{k}{4}c^{\frac{3}{2}} - \frac{i}{4}c^{\frac{3}{2}-q} - \frac{1}{4}$. Quia iam posito $q=0$ debet evanescere S , habebitur ista aequatio $\frac{k}{4} - \frac{i}{4} - \frac{1}{4} = 0$, seu $k = 1 + i$. Porro cum $\frac{dS}{dq}$ debeat esse $= 0$ si $q=0$, proveniet $i + k = 0$. Namque est $dS = \frac{k}{4}c^{\frac{3}{2}} dq + \frac{i}{4}c^{\frac{3}{2}-q} dq$, et idcirco facto $q=0$, fit $\frac{dS}{dq} = \frac{k}{4} + \frac{i}{4} = 0$. Ex his igitur conditionibus invenitur $i = -\frac{1}{2}$, et $k = \frac{1}{2}$: quamobrem erit $S = \frac{c^{\frac{3}{2}} + c^{-\frac{1}{2}}}{8}$

$-\frac{1}{4}$, atque $R = \frac{3}{4} + \frac{c^{\frac{3}{2}} + c^{-\frac{1}{2}}}{8}$. Quoniam vero est

$\mu=2$ et $g=bf$, erit $q = \sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}}$, adeoque $R = \frac{3}{4} + \frac{1}{8}c^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}} + \frac{1}{8}c^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}}$. Consequenter reperi-

$$\text{tur } \int PR dz = \frac{3}{4} \int \frac{dz}{(1+bz^2)^{\frac{3}{4}}} + \frac{1}{8} \int \frac{dz \left(c^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}} + c^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}} \right)}{(1+bz^2)^{\frac{3}{4}}}$$

Tom. VI.

Hh

Quod

Quod integrale ita capiatur, vt posito $z = 0$ ipsum fiat $= 0$, quo facto ponatur $z = \infty$, et prodibit quantitas, quae vt functio ipsius f potest spectari. Fiat deinde f variabilis, eiusque loco ponatur ax^4 , erit ista functio per H diuisa $= t$ (vid. §. 6.). Atque inuento hoc t erit $y = \frac{dt}{t dx}$, qui est verus valor ipsius y ex aequatione proposita $ax^2 dx = dy + y^2 dx$.

§. 14. Non difficilior euadit constructio aequationis generalis $ax^n dx = dy + y^2 dx$, dummodo n non contineatur intra hos limites 0 et -2 . Vti enim poterimus solutione tertia, in qua fit $x = z$, $y = \frac{n+1}{n+2} z$, $\pi = \rho = \frac{n+2}{2}$. Erit igitur $S = \frac{1}{\rho^2} c^{\rho} \int c^{-\rho} dq \int c^{\rho} dq$. Integratione simili quo supra modo instituta, reperitur $S = \frac{k}{\rho^2} c^{\frac{q}{\rho}} - \frac{i}{\rho^2} c^{-\frac{q}{\rho}} - \frac{1}{\rho^2}$, vbi i et k ex his aequationibus debent definiri $k = 1 + i$, et $k + i = 0$, est ergo vt ante $i = -\frac{1}{2}$ et $k = \frac{1}{2}$. Quapropter est $S = \frac{1}{2\rho^2} c^{\frac{q}{\rho}} + \frac{1}{2\rho^2} c^{-\frac{q}{\rho}} - \frac{1}{\rho^2}$ atque $R = 1 - \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{2\rho^2} c^{\frac{q}{\rho}} + \frac{1}{2\rho^2} c^{-\frac{q}{\rho}}$ vel posito loco ρ valore $\frac{n+2}{2}$ habebitur $R = \frac{n(n+4) + 2c^{\frac{2q}{n+2}} + 2c^{-\frac{2q}{n+2}}}{(n+2)^2}$

Est vero vt ante $q = \sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}}$, at $P dz = \frac{dz}{(1+bz^2)^{\frac{n+1}{n+2}}}$

Quamobrem erit $\int PR dz = \frac{1}{(n+2)^2} \int \frac{dz}{(1+bz^2)^{\frac{n+1}{n+2}}}$

$(\frac{2q}{n+2} + \frac{-2q}{n+2})$ vbi loco $\sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}}$ relin-

quo

quo q . Integrale huius $PR dz$ ita capiatur, ut posito $z=0$, ipsum evanescat, quo facto ponatur $z=\infty$,

denotetque H id quod provenit, si tantum $\int \frac{dz}{(1+bz^2)^{\frac{n+1}{n+2}}}$

hoc modo integretur ut fiat $=0$ posito $z=0$, et postmodum ponatur $z=\infty$. Tum ergo erit integrale ipsius $PR dz$ praescripto modo acceptum, quod posuimus Z

§. 4. functio ipsius f . Aequale id autem erat positum quantitati H , in hanc seriem $1 + Aag + ABa^2g^2 + \text{etc.}$ multiplicatae, quae series in sequentem est transmutata

$1 + \frac{f}{(n+1)(n+2)} + \frac{f^2}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)} + \text{etc.}$ cuius summa est t , vid. §. 6. ubi f designat ax^{n+2} .

Erit ergo $Z=Ht$, in quo H est quantitas constans, quia in ea non inest f , adeoque nec x . Provenit itaque $t = \frac{Z}{H}$, at est $y = \frac{dt}{f dx}$: ergo pro aequatione proposita $ax^n dx = dy + y^2 dx$ prodibit $y = \frac{dz}{Z dx}$.

Ad illam igitur aequationem construendam habemus hanc regulam: Integretur haec formula

$\frac{1}{(n+2)^2} \frac{dz}{(1+bz^2)^{\frac{n+1}{n+2}}} (n(n+4) + \frac{2}{2c^{n+2}} \sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}} + \frac{-2}{2c^{n+2}} \sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}})$ ita ut evanescat facto $z=0$.

Tum ponatur z infinitum, et loco f substituatur ax^{n+2} . Id quod provenit fit Z , quo cognito erit $y = \frac{dz}{Z dx}$.

Si quem offendat, quod post integrationem debeat fieri $z=\infty$, is loco z substituatur $\frac{u}{1-u}$

et post integrationem ponatur $u=1$, quo facto pro Z idem prodibit valor, qui ante.

Quamvis autem analytica pro Z expressio obtineri non potest, quando formula

mula illa non est integrabilis tamen, per quadraturas vel rectificationes valor ipsius Z construi poterit.

§. 15. Quanquam autem in hac constructione ii casus excluduntur, in quibus n continetur intra limites -2 et 0 , nihilo tamen minus haec solutio pro vniuersali est habenda. Nam quia, si aequatio potest resolui in casu $n=m$, resolutio quoque habetur in casu $n=m-4$, vt constat, ex iis, quae de casibus separabilibus sunt detecta; perspicuum est, si m sit numerus intra limites 0 et -2 contentus, fore $m-4$ intra terminos -2 et -4 comprehensum, adeoque in solutione nostra contineri. Quamobrem si occurrat casus, quo n contineatur intra 0 et -2 , hic statim reducatur ad alium per dictum theorema, qui intra -2 et -4 contineatur, huiusque constructio erit in promptu.

§. 16. In formula differentiali §. 13. eruta obseruo, quoties habuerit $\frac{n+1}{n+2}$ huiusmodi formam $k + \frac{1}{2}$, vbi k numerum integrum affirmatiuum denotat, integram formulam posse integrari, et hanc ob rem valorem ipsius Z re ipsa exhiberi. His igitur in casibus valor ipsius y quoque poterit definiri et aequatio integrari. Fiet tum autem $n = \frac{-4k}{2k-1}$, quoties ergo n talem habuerit formam, aequatio $ax^n dx = dy + y^2 dx$ integrationem admittet. Deinde quia casus, si $n = \frac{-m}{m+1}$ vel $n = -m = 4$ reduci potest ad casum $n = m$, integrabilis etiam erit aequatio si $n = \frac{-4k}{2k+1}$ vel $\frac{-4k-4}{2k+1}$ denotante k numerum integrum affirmatiuum. Atque

hi

hi sunt illi ipsi casus integrabiles vel separabiles, ab aliis iam eruti, vbi videre licet in nostris Commentariis A. 1726.

§. 17. Esse autem aequationem integrabilem, quoties sit $\frac{n+1}{n+2} = k + \frac{1}{2}$ hoc modo ostendo. Pono $\frac{bz^2}{1+bz^2} = u^2$; erit $z = \frac{u}{\sqrt{b(1-u^2)}}$ $1 + bz^2 = \frac{1}{1-u^2}$ ideoque $dz = \frac{du}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{b}}$ Fiet igitur $\frac{dz}{(1+bz^2)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{du}{\sqrt{b}} (1-u^2)^{k-1}$. Hanc ob rem formula §. 14 integranda transformabitur in hanc $\frac{1}{(n+2)^2 \sqrt{b}} (n(n+4) du (1-u^2)^{k-1} + 2c \frac{2u\sqrt{f}}{n+2} du (1-u^2)^{k-1} + 2c \frac{-2u\sqrt{f}}{n+2} du (1-u^2)^{k-1})$, quae vt facile perspicitur re ipsa integrari potest, quoties k fuerit numerus integer affirmatiuus. Atque hinc non parum praestantiae accedere arbitro huic meae methodo, quad tam sit facilis et perspicua, vt casus etiam omnes qui re ipsa integrationem vel separationem admittunt, vno obtutu ostendat.

§. 18. Exempli gratia assumo $k=1$, erit $n=-4$, qui casus, vt constat, est facillimus eorum, qui separationem admittunt. Formula igitur integranda abiit in hanc $\frac{1}{2\sqrt{b}} (c^{-u\sqrt{f}} du - c^{u\sqrt{f}} du)$, cuius integralis est $\frac{1}{2\sqrt{b}f} (c^{u\sqrt{f}} - c^{-u\sqrt{f}})$. Constantem non adicio quia posito $z=0$, seu quod eodem recidit $u=0$, totum integrale iam euanescit. Fiat nunc $z=\infty$ seu in nostro casu $u=1$ et ponatur ax^{-2} loco f habebitur $Z = \frac{x}{2\sqrt{ab}}$
 $(\frac{\sqrt{a}}{c^{\frac{x}{2\sqrt{ab}}}} - \frac{-\sqrt{a}}{c^{-\frac{x}{2\sqrt{ab}}}})$. Hoc inuento, erit vt iam est ostensum y

$\frac{dz}{zdx}$. Differentiatio igitur Z et differentiali per Zdx diuiso prodibit $y = \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{a}}{x^2} \left(\frac{c^{\frac{2\sqrt{a}}{x}} + 1}{c^{\frac{2\sqrt{a}}{x}} - 1} \right)$ siue $\frac{2\sqrt{a}}{x} = \frac{pxxy - x - \sqrt{a}}{pxxy - x + \sqrt{a}}$

quae aequatio est integralis huius differentialis $ax^{-4}dx = dy + y^2 dx$. Atque simili modo pro reliquis casibus, qui separationem admittunt, aequationes integrales inueniuntur.

CLAS