

216 DE FORMIS RADICVM AEQVATIONVM

$$= \frac{\frac{1}{n} - \left(\frac{a+fl}{n-lln}\right)z}{Q^2} + \frac{\frac{1}{n} - \left(\frac{b+gl}{n-lln}\right)z}{R^2} + \frac{\frac{1}{n} - \left(\frac{c+hl}{n-lln}\right)z}{S^2} + \text{etc.}$$

Q. E. I.

Atque haec sunt quibus methodum meam iam anno 1719. in Actis Eruditorum pag. 351. expositam breuiter illustrare, et occasione inuentorum Cel. *Moyvrei* paululum extendere, visum est. Superuacaneum iudico ostendere quomodo superiores formulae in formas *Cotesii* sint transfundendae, cum hoc sit negotium ad purum calculum algebraicum spectans à quolibet Analysta facile expediendum.

DE FORMIS RADICVM AEQVATIONVM CVIVSQVE ORDINIS CON-
JECTATIO.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Summopere admirandum videtur, quod, cum ipsis rei analyticae initiis radices aequationum cubicarum et biquadraticarum essent inuentae, his tamen temporibus, quibus analysis maxima augmenta accepit, modus adhuc lateat altiorum aequationum radices eruen-
di: praesertim, cum haec res continuo a praestantissimis ingenii maximo studio sit inuestigata. Quo studio, quamquam quaesito parum est satisfactum: egregia tamen ad quasque aequationes tractandas subsidia sunt detecta. Quam-
obrem

obrem neminem puto fore, qui hoc meum institutum, quo, quas formas habeant aequationum radices, et quavis via eae forte inveniri possint, ostendo, etiamsi plus non praestiterim, sit reprehensurus. Alios enim fortasse magis iuvare, atque tandem ad intentum scopum perducere, poterit.

§. 2. Cum aequatio cuiusque potestatis omnes inferiores in se comprehendat, facile perspicitur, methodum quoque radicem ex quaque aequatione extrahendi ita esse comparatam, ut omnium inferiorum aequationum methodos inuoluat. Quamobrem inventio radicis ex aequatione sex dimensionum haberi non potest, nisi eadem antea constet de aequationibus quinti, quarti, et tertii gradus. Ita videmus *Bombellii* methodum, ex aequationibus biquadraticis radices extrahendi, perducere ad resolutionem aequationis cubicae; atque cubicae aequationis radicem definiri non posse sine quadraticae aequationis resolutione.

§. 3. Resolutionem aequationis cubicae sequenti modo a quadratica pendentem considero. Sit aequatio cubica $x^3 = ax + b$, in qua secundus terminus deest, huius radicem x dico fore $= \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$; existentibus A et B duabus radicibus aequationis cuiusdam quadraticae $z^2 = az - c$. Quamobrem ex natura aequationum erit $A + B = a$ et $AB = c$. Sed ad a et c ex a et b definiendas sumo aequationem $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$, quae cubice multiplicata dat $x^3 = A + B + 3\sqrt[3]{BA}(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}) = 3x\sqrt[3]{AB} + A + B$. Quae cum proposita
Tom. VI. Ee x^3

$x^3 = ax + b$ comparata dabit $a = 3\sqrt[3]{AB} = 3\sqrt[3]{\mathcal{E}}$, et $b = A + B = a$. Fiet igitur $a = b$ et $\mathcal{E} = \frac{a^3}{27}$; quocirca aequatio quadratica resolutioni aequationis $x^3 = ax + b$ dicto modo inferuiens erit $z^2 = bz - \frac{a^3}{27}$. Huius enim radicibus cognitis A et B, erit $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$.

§. 4. Sed cum radix cubica ex quaque quantitate triplicem habeat valorem, haec formula $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ omnes etiam radices aequationis propositae complectetur. Sint enim μ et ν praeter unitatem radices cubicae ex unitate, erit etiam $x = \mu\sqrt[3]{A} + \nu\sqrt[3]{B}$, si modo sit $\mu\nu = 1$. Quamobrem μ et ν esse debebunt $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$, vel inuerse. Praeter radicem igitur $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ satisfacient quoque propositae hae duae alterae radices $x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{A} - \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{B}$, et $x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{A} - \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{B}$. Hacque ratione aequationis cubicae etiam, in qua secundus terminus non deest, radices determinari poterunt.

§. 5. Aequationes biquadraticae variis modis ad cubiceas reduci solent, quorum autem nullus instituto meo utilitatem afferre potest. Sed mihi est peculiaris methodus idem efficiendi, atque priori, qua cubicae ad quadraticas reducuntur, similis, ita ut exinde quodammodo concludi possit, quomodo aequationes altiorum graduum debeant tractari. Ut si proposita sit haec aequatio

$$x^4 =$$

$x^4 = ax^2 + bx + c$ in qua itidem secundus terminus deest; dico fore $x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$ at A, B et C esse tres radices ex aequatione quadam cubica $z^3 = az^2 - \xi z + \gamma$. Hanc ob rem erit $a = A + B + C$, $\xi = AB + AC + BC$ et $\gamma = ABC$. Quo autem a , ξ et γ determinantur, aequatio $x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$ ab irrationalitate liberetur, hoc modo: Sumantur quadrata erit $x^2 = A + B + C + 2\sqrt{AB} + 2\sqrt{AC} + 2\sqrt{BC}$ hincque $x^2 - a = 2\sqrt{AB} + 2\sqrt{AC} + 2\sqrt{BC}$. Sumendis denuo quadratis fit $x^4 - 2ax^2 + a^2 = 4AB + 4AC + 4BC + 8\sqrt{ABC}(\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}) = 4\xi + 8x\sqrt{\gamma}$, seu $x^4 = 2ax^2 + 8x\sqrt{\gamma} + 4\xi - a^2$. Haec aequatio comparata cum proposita $x^4 = ax^2 + bx + c$ dabit $2a = a$, $8\sqrt{\gamma} = b$ et $4\xi - a^2 = c$; ex quibus prodit $a = \frac{a}{2}$, $\gamma = \frac{b^2}{64}$, $\xi = \frac{c}{4} + \frac{a^2}{16}$. Aequatio ergo cubica resolutioni aequationis biquadratae inferuiens est $z^3 = \frac{a}{2}z^2 - \frac{4c - a^2}{16}z + \frac{b^2}{64}$. Huius enim radices, si sint A, B , et C , erit $x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$. At reliquae tres radices ex aequatione proposita erunt $\sqrt{A} - \sqrt{B} - \sqrt{C}$, $\sqrt{B} - \sqrt{A} - \sqrt{C}$ et $\sqrt{C} - \sqrt{A} - \sqrt{B}$.

§. 6. Ponatur $z = \sqrt{t}$ erit $(t + \frac{4c + a^2}{16})\sqrt{t} = \frac{at}{2} + \frac{b^2}{64}$, et sumendis quadratis habebitur $t^3 + \frac{4c + a^2}{8}t^2 + \frac{(4c + a^2)^2}{256}t = \frac{a^2t^2}{4} + \frac{ab^2t}{64} + \frac{b^4}{4096}$ seu $t^3 = (\frac{a^2}{8} - \frac{c}{2})t^2 + (\frac{ab^2}{64} - \frac{cc}{16} - \frac{a^2c}{32} - \frac{a^4}{256})t + \frac{b^4}{4096}$ Haec aequatio ergo hanc habet proprietatem, ut eius radices sint radices quadratae radicum prioris aequationis, A, B et C . Quare si huius aequationis radices ponantur E, F, G , erit $x = \sqrt[4]{E} + \sqrt[4]{F} + \sqrt[4]{G}$. Datur itaque aequatio cubica cuius radices

E e 2 -cum

cum radices biquadraticae simul sumtae constituent radicem aequationis biquadraticae propositae. Atque haec methodus inveniendi radices ex aequatione biquadratica, etiamsi sit priori operosior, maiorem habet affinitatem cum resolutione aequationum cubicarum, cum eiusdem potestatis radix extrahatur ex radicibus aequationis inferioris, cuius est ipsa aequatio proposita.

§. 7. Simili ratione etiam aequatio quadratica $x^2 = a$, in qua secundus terminus deest, resolvetur ope aequationis vnus dimensionis $z = a$. Huius enim radix est a , atque radix aequationis propositae $x = \sqrt{a}$, vel $x = -\sqrt{a}$. Huiusmodi autem aequationem ordine inferiorem, cuius ope aequatio superior secundo termino carens resoluitur, vocabo *aequationem resoluentem*. Ita aequationis quadraticae $x^2 = a$ aequatio resolvens erit $z = a$; aequationis cubicae $x^3 = ax + b$, aequatio resolvens erit $z^2 = bz - \frac{a^2}{27}$. Atque aequationis biquadraticae $x^4 = ax^2 + bx + c$ aequatio resolvens est $z^3 = (\frac{a^2}{8} - \frac{c}{2})z^2 - (\frac{a^4}{27} + \frac{a^2c}{9} + \frac{c^2}{4} - \frac{ab^2}{24})z + \frac{b^4}{432}$. Pro quadratica enim aequatione, si aequationis resoluentis radix sit A, erit $x = \sqrt{A}$. Pro cubica vero aequatione, si resoluentis radices sint A et B, erit $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$. Atque pro biquadratica aequatione, existentibus resoluentis aequationis radicibus A, B et C, erit $x = \sqrt[4]{A} + \sqrt[4]{B} + \sqrt[4]{C}$.

§. 8. Ex his etiamsi tribus tantum casibus tamen non sine sufficienti ratione mihi concludere videor, superiorum

riorum quoque aequationum dari huiusmodi aequationes resoluentes. Sic proposita aequatione $x^5 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ conicio dari aequationem ordinis quarti $z^4 = \alpha z^3 - \beta z^2 + \gamma z - \delta$, cuius radices, si sint A, B, C et D, fore $x = \sqrt[5]{A} + \sqrt[5]{B} + \sqrt[5]{C} + \sqrt[5]{D}$. Et generatim aequationis $x^n = ax^{n-2} + bx^{n-3} + cx^{n-4} + \text{etc.}$ aequatio resoluens, prout suspicor, erit huius formae, $z^{n-1} = \alpha z^{n-2} - \beta z^{n-3} + \gamma z^{n-4} - \text{etc.}$ cuius cognitis radicibus omnibus numero $n-1$, quae sint, A, B, C, D, etc. erit $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C} + \sqrt[n]{D} + \text{etc.}$ Haec igitur coniectura, si esset veritati consentanea, atque si aequationes resoluentes possent determinari, cuiusque aequationis in promptu foret radices assignare; perpetuo enim peruenitur ad aequationem ordine inferiorem, hocque modo progrediendo tandem vera aequationis proposita radix innotescet.

§. 9. Quamquam autem, si aequatio proposita plures quam quatuor habet dimensiones, aequationem resoluentem definire adhuc non possum: tamen praesto sunt non nullius momenti argumenta, quibus ista mea coniectura confirmatur. Si enim aequatio proposita ita est comparata, ut in aequatione resolvente omnes termini praeter tres primos evanescant; tum semper ipsa aequatio resoluens poterit exhiberi, atque ideo aequationis propositae radices assignari. Aequationes autem, quae hoc modo resolutionem admittunt, sunt eae ipsae, quas Cl. *Abbr. de Moivre* in *Transact.* n. 309. pertractavit, Sic enim aequatio resoluens $z^{n-1} = \alpha z^{n-2} - \beta z^{n-3}$ seu $z^2 =$

Et 3

$\alpha z - \beta,$

ex hacque aequationem resoluendam erui oporteat. Sint huius aequationis radices A et B, reliquae enim radices omnes euanescent, erit aequationis resoluendae radix $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$. Est vero $\alpha = A + B$ et $\xi = AB$ ex natura aequationum. Hinc ergo erit $\sqrt[n]{A^2} + \sqrt[n]{B^2} = x^2 - 2\sqrt[n]{\xi}$. atque porro

$$\sqrt[n]{A^3} + \sqrt[n]{B^3} = x^3 - 3x\sqrt[n]{\xi}$$

$$\sqrt[n]{A^4} + \sqrt[n]{B^4} = x^4 - 4x^2\sqrt[n]{\xi} + 2\sqrt[n]{\xi^2}$$

$$\sqrt[n]{A^5} + \sqrt[n]{B^5} = x^5 - 5x^3\sqrt[n]{\xi} + 5x\sqrt[n]{\xi^2}$$

atque tandem

$$\sqrt[n]{A^n} + \sqrt[n]{B^n} = x^n - nx^{n-2}\sqrt[n]{\xi} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2}x^{n-4}\sqrt[n]{\xi^2} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{n-6}\sqrt[n]{\xi^3} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^{n-8}\sqrt[n]{\xi^4} - \text{etc.} = \alpha.$$

Quae est aequatio resoluenda, cuius resoluens est $z^{n-1} = \alpha z^{n-2} - \xi z^{n-3}$, seu $z^2 = \alpha z - \xi$.

§. 10. Non solum autem hoc modo aequationis

$$x^n - nx^{n-2}\sqrt[n]{\xi} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2}x^{n-4}\sqrt[n]{\xi^2} - \text{etc.} = \alpha$$

unica radix inuenitur $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$; sed satisfacit etiam

quaelibet alia $x = \mu\sqrt[n]{A} + \nu\sqrt[n]{B}$, modo fit $\mu^n = \nu^n = \mu\nu = 1$, id quod n diuersis modis fieri potest. Vt si

fit $n = 5$, aequationis $x^5 - 5x^3\sqrt[5]{\xi} + 5x\sqrt[5]{\xi^2} = \alpha$ radices quinque erunt ut sequuntur:

I. $x = \sqrt[5]{A} + \sqrt[5]{B}$

II. $x = \frac{-1 - \sqrt{5} + \sqrt{(-10 + 2\sqrt{5})}}{4} \sqrt[5]{A} - \frac{1 - \sqrt{5} - \sqrt{(-10 + 2\sqrt{5})}}{4} \sqrt[5]{B}$

III. $x = \frac{-1 - \sqrt{5} - \sqrt{(-10 + 2\sqrt{5})}}{4} \sqrt[5]{A} - \frac{1 - \sqrt{5} + \sqrt{(-10 + 2\sqrt{5})}}{4} \sqrt[5]{B}$

IV. $x = \frac{-1 + \sqrt{5} + \sqrt{(-10 - 2\sqrt{5})}}{4} \sqrt[5]{A} - \frac{1 + \sqrt{5} - \sqrt{(-10 - 2\sqrt{5})}}{4} \sqrt[5]{B}$

V. $x = \frac{-1 + \sqrt{5} - \sqrt{(-10 - 2\sqrt{5})}}{4} \sqrt[5]{A} - \frac{1 + \sqrt{5} + \sqrt{(-10 - 2\sqrt{5})}}{4} \sqrt[5]{B}$

Hi enim coefficientes omnes sunt radices surfolidae ex unitate, et factum ex binis coniunctis est = 1. Simili modo praeter ipsam unitatem sunt sex radices potestatis septimae ex unitate, harumque tria paria multiplicatione unitatem producentia, quae sunt sex radices huius aequationis $y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = 0$. Ad has autem inveniendas tantum opus est resolutione aequationis cubicae; omnis enim aequatio potestatis sextae huius formae $y^6 + ay^5 + by^4 + cy^3 + dy^2 + ey + 1 = 0$, quae non mutatur posito $\frac{1}{y}$ loco y , resolui potest ope aequationis cubicae. Quod quemadmodum fiat, cum ad inveniendas radices saepe utilitatem habere possit, breui sum ostensurus.

§. 11 Aequationes huiusmodi, quae posito $\frac{1}{y}$ loco y formam non mutant, voco *reciprocas*. Hae si maximus ipsius y dimensionum numerus est impar, semper diuidi possunt per $y + 1$; et aequatio resultans etiam erit reciproca, in qua maxima ipsius y dimensio erit par. Quinobrem sufficiet parium tantum dimensionum aequationes reciprocas considerasse, atque modum earum, resoluendarum exposuisse. Sit igitur primo aequatio
pro-

24 DE FORMIS RADICVM AEQVATIONVM

proposita quartae potestatis haec $y^4 + ay^3 + by^2 + ay + 1 = 0$, ponatur haec factum ex duabus quadraticis $y^2 + ay + 1 = 0$ et $y^2 + \xi y + 1 = 0$. Quo facto fiet $\alpha + \xi = a$ et $\alpha\xi + 2 = b$, seu $\alpha\xi = b - 2$. Quare α et ξ erunt duae radices huius aequationis $u^2 - au + b - 2 = 0$, hacque ratione quatuor aequationis propositae radices ope aequationum tantum quadraticarum innotescunt. Aequatio reciproca sextae potestatis $y^6 + ay^5 + by^4 + cy^3 + by^2 + ay + 1 = 0$, ponatur factum trium harum quadraticarum $y^2 + ay + 1 = 0$, $y^2 + \xi y + 1 = 0$, et $y^2 + \gamma y + 1 = 0$. Hinc fiet $\alpha + \xi + \gamma = a$, $\alpha\xi + \alpha\gamma + \xi\gamma = b - 3$, et $\alpha\xi\gamma = c - 2a - 2\xi - 2\gamma = c - 2a$. Quare α , ξ , et γ erunt tres radices huius aequationis cubicae $u^3 - au^2 + (b - 3)u - c + 2a = 0$. Similiter aequatio reciproca octavae potestatis $y^8 + ay^7 + by^6 + cy^5 + dy^4 + cy^3 + by^2 + ay + 1 = 0$, est factum ex quatuor aequationibus quadraticis $y^2 + ay + 1 = 0$, $y^2 + \xi y + 1 = 0$, $y^2 + \gamma y + 1 = 0$, et $y^2 + \delta y + 1 = 0$, ex quo prodibit $\alpha + \xi + \gamma + \delta = a$, $\alpha\xi + \alpha\gamma + \alpha\delta + \xi\gamma + \xi\delta + \gamma\delta = b - 4$, $\alpha\xi\gamma + \alpha\xi\delta + \alpha\gamma\delta + \xi\gamma\delta = c - 3a$, et $\alpha\xi\gamma\delta = d - 2b + 2$. Coefficientes ergo α , ξ , γ , δ sunt quatuor radices huius aequationis $u^4 - au^3 + (b - 4)u^2 - (c - 3a)u + d - 2b + 2 = 0$. Aequatio ordinis decimi $y^{10} + ay^9 + by^8 + cy^7 + dy^6 + ey^5 + dy^4 + cy^3 + by^2 + ay + 1 = 0$ factum erit harum quinque $y^2 + ay + 1 = 0$, $y^2 + \xi y + 1 = 0$, $y^2 + \gamma y + 1 = 0$, $y^2 + \delta y + 1 = 0$, $y^2 + \epsilon y + 1 = 0$, in quibus α , ξ , γ , δ , ϵ sunt quinque radices huius aequationis $u^5 - au^4 + (b - 5)u^3 - (c - 4a)u^2 + (d - 3b + 5)u - e + 2c - 2a = 0$.

Atque

Atque generatim aequatio reciproca $y^{2n} + ay^{2n-1} + by^{2n-2} + cy^{2n-3} + dy^{2n-4} + ey^{2n-5} + fy^{2n-6} + \dots + py^n + \dots + fy^6 + ey^5 + dy^4 + cy^3 + by^2 + ay + 1 = 0$, resoluetur in has numero n aequationes quadraticas $y^2 + \alpha y + 1 = 0$, $y^2 + \xi y + 1 = 0$, $y^2 + \gamma y + 1 = 0$, $y^2 + \delta y + 1 = 0$ etc. At coefficientes α , ξ , γ , δ , etc. erunt radices huius aequationis n dimensionum:

$$\begin{array}{l}
 u^n - au^{n-1} + b \left\{ \begin{array}{l} u^{n-2} - c \\ -(n-1)a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} u^{n-3} + d \\ -(n-2)b \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} u^{n-4} - e \\ -(n-3)c \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} u^{n-5} + f \\ -(n-4)d \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} u^{n-6} - g \\ -(n-5)e \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} u^{n-7} + h \\ -(n-6)f \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} u^{n-8} - i \\ -(n-7)g \end{array} \right\} \dots \text{etc.} \\
 \left. \begin{array}{l} \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} \\ \frac{(n-1)(n-4)}{1 \cdot 2} \end{array} \right\} a \\
 \left. \begin{array}{l} \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ \frac{(n-1)(n-5)(n-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \end{array} \right\} a \\
 \left. \begin{array}{l} \frac{(n-2)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2} \\ \frac{(n-2)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \end{array} \right\} b \\
 \left. \begin{array}{l} \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \end{array} \right\} b
 \end{array}$$

§. 12. Quia cuiuslibet aequationis quadraticae, dididentis aequationem propositam, terminus extremus est unitas, perspicuum est, binarum radicum aequationis propositae factum esse unitatem. Huiusmodi igitur duae semper cum duobus membris $\sqrt[n]{A}$ et $\sqrt[n]{B}$ sunt coniungendae, quo aequationis §.9 propositae omnes obtineantur radices.

§. 13. Si in aequatione reciproca omnes termini praeter extremos et medium deficient, ut in $y^{2n} + py^n + 1 = 0$, divisores eius $y^2 + \alpha y + 1$, $y^2 + \xi y + 1$, $y^2 + \gamma y + 1$, etc. habebuntur substituendis pro α , β , γ , δ etc. radicibus huius aequationis, $u^n - nu^{n-2} +$
 Tom. VI. Ff $n(n-3)$

$\frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} u^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} u^{n-6} + \text{etc.} \pm p = 0$, vbi $+$ p accipi debet si n est numerus par, et $-p$ si n est impar. Ex quo apparet, hanc aequationem conuenire cum aequatione $x^n - nx^{n-2} \sqrt[n]{\beta} + \text{etc.} - - = a$ §. 9 resoluta, et hanc ob rem omnes diuifores posse assignari.

§. 14. Magnam isthaec in factores resolutio formulae $y^{2n} + py^n + 1$ habet vtilitatem in integranda formula differentiali $\frac{dy}{y^{2n} + py^n + 1}$ iam saepius a Geometris pertractata. Denominatore enim in suos factores $y^2 + \alpha y + 1, y^2 + \beta y + 1, \text{etc.}$ resoluta tota integratio ad quadraturam circuli vel hyperbolae reducitur. Praeterea hoc plurimum iuuat, quod aequatio $u^n - nu^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} u^{n-4} - \text{etc.} \pm p = 0$, ex qua α, β, γ etc. determinantur, sectionem arcus circularis in n partes complectatur, atque ita coefficientes $\alpha, \beta, \gamma, \text{etc.}$ facillime inueniantur.

§. 15. Reuertamur autem ad modum ex aequationibus resoluentibus ipsas aequationes resoluendas eliciendi. Sitque aequatio resoluens $z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$, cuius tres radices sint A, B, C ; erit ergo $\alpha = A + B + C$; $\beta = AB + AC + BC$ et $\gamma = ABC$. Radix itaque aequationis resoluendae x erit $= \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$, atque ponatur $p = \sqrt[n]{AB} + \sqrt[n]{AC} + \sqrt[n]{BC}$. His factis erit $\sqrt[n]{A^2} + \sqrt[n]{B^2} + \sqrt[n]{C^2} = x^2 - 2p$, et $\sqrt[n]{A^2 B^2} + \sqrt[n]{A^2 C^2} + \sqrt[n]{B^2 C^2} = p^2 - 2x\sqrt[n]{\gamma}$. Atque porro, vt sequitur:

$\sqrt[n]{A}$

$$\sqrt[n]{A^3} + \sqrt[n]{B^3} + \sqrt[n]{C^3} = x^3 - 3px + 3\sqrt[n]{\gamma}$$

$$\sqrt[n]{A^3 B^3} + \sqrt[n]{A^3 C^3} + \sqrt[n]{B^3 C^3} = p^3 - 3px\sqrt[n]{\gamma} + 3\sqrt[n]{\gamma^2}$$

$$\sqrt[n]{A^4} + \sqrt[n]{B^4} + \sqrt[n]{C^4} = x^4 - 4px^2 + 4x\sqrt[n]{\gamma} + 2p^2$$

$$\sqrt[n]{A^4 B^4} + \sqrt[n]{A^4 C^4} + \sqrt[n]{B^4 C^4} = p^4 - 4p^2 x\sqrt[n]{\gamma} + 4p\sqrt[n]{\gamma^2} + 2x^2\sqrt[n]{\gamma^2}$$

$$\sqrt[n]{A^5} + \sqrt[n]{B^5} + \sqrt[n]{C^5} = x^5 - 5px^3 + 5x^2\sqrt[n]{\gamma} + 5p^2x - 5p\sqrt[n]{\gamma}$$

$$\sqrt[n]{A^5 B^5} + \sqrt[n]{A^5 C^5} + \sqrt[n]{B^5 C^5} = p^5 - 5p^3x\sqrt[n]{\gamma} + 5p^2\sqrt[n]{\gamma^2} + 5px^2\sqrt[n]{\gamma^2} - 5x\sqrt[n]{\gamma^3}$$

Quemadmodum haec tabula fit ulterius continuanda facile perspicitur.

Namque est $\sqrt[n]{A^m} + \sqrt[n]{B^m} + \sqrt[n]{C^m} = x(\sqrt[n]{A^{m-1}} + \sqrt[n]{B^{m-1}} + \sqrt[n]{C^{m-1}}) - p(\sqrt[n]{A^{m-2}} + \sqrt[n]{B^{m-2}} + \sqrt[n]{C^{m-2}}) + \sqrt[n]{\gamma}$. $(\sqrt[n]{A^{m-3}} + \sqrt[n]{B^{m-3}} + \sqrt[n]{C^{m-3}})$. Atque $\sqrt[n]{A^m B^m} + \sqrt[n]{A^m C^m} + \sqrt[n]{B^m C^m} = p(\sqrt[n]{A^{m-1} B^{m-1}} + \sqrt[n]{A^{m-1} C^{m-1}} + \sqrt[n]{B^{m-1} C^{m-1}}) - x\sqrt[n]{\gamma}$, $(\sqrt[n]{A^{m-2} B^{m-2}} + \sqrt[n]{A^{m-2} C^{m-2}} + \sqrt[n]{B^{m-2} C^{m-2}}) + \sqrt[n]{\gamma^2}$, $(\sqrt[n]{A^{m-3} B^{m-3}} + \sqrt[n]{A^{m-3} C^{m-3}} + \sqrt[n]{B^{m-3} C^{m-3}})$.

§. 16. Alias etiam harum progressionum non contemnendas observavi proprietates. Posito enim $\sqrt[n]{A^m}$

$\sqrt[n]{B^m} + \sqrt[n]{C^m} = R$, et $\sqrt[n]{A^m B^m} + \sqrt[n]{A^m C^m} + \sqrt[n]{B^m C^m} = S$, erit $\sqrt[n]{A^{2m}} + \sqrt[n]{B^{2m}} + \sqrt[n]{C^{2m}} = R^2 - 2S$, et $\sqrt[n]{A^{2m} B^{2m}} + \sqrt[n]{A^{2m} C^{2m}} + \sqrt[n]{B^{2m} C^{2m}} = S^2 - 2R\sqrt[n]{\gamma^m}$. Simili modo est quoque $\sqrt[n]{A^{3m}} + \sqrt[n]{B^{3m}} + \sqrt[n]{C^{3m}} = R^3 - 3RS + 3\sqrt[n]{\gamma^m}$, et $\sqrt[n]{A^{3m} B^{3m}} + \sqrt[n]{A^{3m} C^{3m}} + \sqrt[n]{B^{3m} C^{3m}} = S^3 - 3RS\sqrt[n]{\gamma^m} + 3\sqrt[n]{\gamma^{2m}}$. Atque hoc modo haec series procedit prorsus ut ipsa praecedens.

§. 17. Si fit $n=2$; erit $\alpha = x^2 - 2p$ et $\beta = p^2 - 2x\sqrt{\gamma}$; hisque duabus aequationibus coniunctis habebitur $x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$ et $p = \sqrt{AB} + \sqrt{AC} + \sqrt{BC}$, sunt autem A, B et C tres radices huius aequationis cubicae $z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$. Eliminata ergo ex illis duabus aequationibus littera p , prodibit $(\frac{x^2 - \alpha}{2})^2 - 2x\sqrt{\gamma} = \beta$ seu $x^4 - 2\alpha x^2 - 8x\sqrt{\gamma} = 4\beta - \alpha^2$, cuius aequationis itaque radix x est cognita, quippe $= \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$, quae aequatio illi est consentanea, quae §. 5. est resoluta. Simili modo si quando duae huiusmodi aequationes occurrunt $x^3 - 3px + 3\sqrt{\gamma} = \alpha$ et $p^3 - 3px\sqrt{\gamma} + 3\sqrt{\gamma^2} = \beta$, erit $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C}$ et $p = \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{AC} + \sqrt[3]{BC}$, existentibus A, B et C radicibus aequationis $z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$, ut ante. Vel eliminata littera p prodibit aequatio inter x, α, β, γ , cuius radix x innotescet. Eodem prorsus modo occurrentibus duabus hisce aequationibus $x^4 -$

$4px^2 + 4x\sqrt[3]{\gamma} + 2p^2 = a$ et $p^4 - 4p^2x\sqrt[3]{\gamma} + 4p\sqrt[3]{\gamma} + 2x^2\sqrt[3]{\gamma} = \beta$, erit $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C}$ et
 $p = \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{AC} + \sqrt[3]{BC}$, at iterum sunt A, B et C radices huius aequationis $z^3 = az^2 - \beta z + \gamma$. Quo
 p facilius eliminetur, ponatur $x^2 - 2p = R$, et $p^2 - 2x\sqrt[3]{\gamma} = S$, eritque $R^2 - 2S = a$ et $S^2 - 2R\sqrt[3]{\gamma} = \beta$.
 Iam ex illis duabus aequationibus exterminata p habe-
 bitur $x^4 = 2Rx^2 + 8x\sqrt[3]{\gamma} + 4S - R^2$. Comparetur
 haec aequatio cum ista $x^4 = ax^2 + bx + c$, erit $R = \frac{x^2}{2}$,
 $\sqrt[3]{\gamma} = \frac{S}{8}$ seu $\gamma = \frac{b^4}{4096}$, et $S = \frac{c}{4} + \frac{a^2}{16}$. Hinc igitur
 habebitur $a = \frac{a^2}{8} - \frac{c}{2}$ et $\beta = \frac{c^2}{16} + \frac{a^2c}{32} + \frac{a^4}{256} - \frac{ab^2}{64}$. Quam-
 obrem erunt A, B et C tres radices huius aequationis
 $z^3 = (\frac{a^2}{8} - \frac{c}{2})z^2 - (\frac{a^4}{256} + \frac{a^2c}{32} + \frac{c^2}{16} - \frac{ab^2}{64})z + \frac{b^4}{4096}$, id
 quod mire consentit, cum eo, quod §. 7. est inveni-
 tum.

§. 18. Quoties igitur accidit, ut calculus perdu-
 catur ad duas aequationes duas incognitas z et p con-
 tinentes, quae reperiantur inter formulas §. 15, vtriusque
 valor poterit assignari, etiam si eliminata altera aequatio
 prodeat maxime composita. Hanc ob rem in his casi-
 bus expediet calculum non ad unicam aequationem, uni-
 camque incognitam, deducere, sed duas aequationes duas
 incognitas involuentes retinere, atque investigare, num
 forte inter illas formulas contineatur, id quod saepius,
 si calculus recte instituitur, evenire posse mihi persuasum
 est.

§. 19. Quemadmodum autem aequationes resolu-
 uentes $z^2 = az - \beta$ et $z^3 = az^2 - \beta z + \gamma$ tractauimus,
 ita etiam ulterius est progrediendum ad aequationem z^4
 $= az^3 - \beta z^2 + \gamma z - \delta$ simili modo pertractandam.
 Scilicet, si eius radices sint A, B, C, et D, ponatur
 $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C} + \sqrt[n]{D} = x$, et $\sqrt[n]{AB} + \sqrt[n]{AC} +$
 $\sqrt[n]{AD} + \sqrt[n]{BC} + \sqrt[n]{BD} + \sqrt[n]{CD} = p$ atque $\sqrt[n]{ABC}$
 $+ \sqrt[n]{ABD} + \sqrt[n]{ACD} + \sqrt[n]{BCD} = q$, et quaerantur
 hinc expressiones pro $\sqrt[n]{A^m} + \sqrt[n]{B^m} + \text{etc.}$ et $\sqrt[n]{A^m B^m}$
 $+ \sqrt[n]{A^m C^m} + \text{etc.}$ atque pro $\sqrt[n]{A^m B^m C^m} + \text{etc.}$ His perfici-
 endis semper trinae inuenientur aequationes x, p et q
 continentis pro quouis ipsius m valore. Atque simili
 modo occurrentibus tribus huiusmodi aequationibus, tres
 incognitae constabunt.

§. 20. Suspicio autem posito $x = \sqrt[5]{A} + \sqrt[5]{B} +$
 $\sqrt[5]{C} + \sqrt[5]{D}$ aequationem rationalem posse concinnari, in
 qua x plures quam 5 non habeat dimensiones, etiam si
 hoc fere impossibile videatur. Nam quemadmodum §. 17
 ex aequationibus $x^4 - 4px^2 + 4x\sqrt{\gamma} + 2p^2 = a$ et
 $p^4 - 4p^2x\sqrt{\gamma} + 4p\sqrt{\gamma} + 2x^2\sqrt{\gamma} = \beta$ eliminanda p
 aequationem non plurium quam 4 dimensionum obti-
 nuimus, quod pariter vix fieri posse videatur, ita etiam
 pro quinta potestate forte simile artificium vsu venire pot-
 est, ut aequatio $x^5 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tandem
 resolui queat. Quod vero maximum in hoc perficiendo
 est

est subsidium, eo redit meo iudicio, ut α , β , γ , et δ , ex a , b , c , et d debeant determinari, non vero vicissim; hoc enim casu aequatio ad multo altiorem eueheretur potestatem, quam opus est. Aliis autem, quos huiusmodi occupationes iuuant, hanc rem perficiendam, vel mihi ad aliud tempus, relinquo; hoc solo nunc contentus, me fortasse idoneam atque genuinam viam ostendisse.

CONSTRUCTIO AEQVATIONIS

DIFFERENTIALIS $a x^n dx = dy + y^2 dx.$

AVCTORE

Leonb. Eulero.

§. I.

Communicaui nuper cum Societate specimen constructionis aequationis cuiusdam differentialis, in qua non solum indeterminatas a se inuicem separare non potueram, sed etiam monstraueram ex ipsa constructione huiusmodi separationem omnino non posse exhiberi. Differt quidem meus ibi datus construendi modus ab vſitatis: attamen iis nequaquam illum esse postponendum quilibet intelliget, qui hanc schedam inspexerit. Neque vero tum temporis hanc methodum ulterius extendere, atque ad alias aequationes accommodare licuit, quia ex posita constructione ad aequationem demum perueneram, non autem vicissim data aequatione constructionem eruere potueram. At deinceps cum hanc
rem