DE SOLVTIONE PROBLEMATVM DIOPHANTAEORVM PER NVMEROS INTEGROS.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Quoties in problematis Diophantaeis ſoluendis peruenitur ad formulam, in qua plus vna indeterminata non ineſt, maxime requiruntur numeri integri, qui loco indeterminatae poſiti quaeſito ſatisfaciant. Hoc vero quando fieri non poteſt, numeris fractis acquieſcere oportet. Obſeruatum autem eſt, ſi in illa formula indeterminatae maxima dimenſio fuerit quadratum et ipſa formula debeat eſſe numerus quadratus, plerumque infinitos numeros integros problema ſoluere, qui inter ſe certa lege cohaereant, et ſeriem quandam conſtituant. Sed ſi formula vel debeat eſſe cubus aliaue altior potentia, vel ſi indeterminata plures duabus habeat dimenſiones, plus effici non poteſt, quam vt ſaltem numeri fracti eruantur.

§. 2. Ita autem huiusmodi problematum omnium ratio eſt comparata, vt vnum numerum ſatisfacientem diuinatione inueniri oporteat, ex quo deinceps infiniti alii reperiri queant. Neque enim ad primum detegendum regula poteſt tradi, cum caſu poſſint occurrere, qui

qui omnino nullam ſolutionem admittunt, cuiusmodi eſt $3x^2+2$, quae formula nunquam fieri poteſt quadratum. Quamobrem in ſequentibus ſemper ponemus, vnicum tantum caſum eſſe cognitum, quo conditioni problematis ſatisfiat, atque regulam dabimus, qua ex illo innumerabiles alii elici poſſint.

§. 3. Propoſita igitur ſit haec formula ax^2+bx+c, quae debeat eſſe numerus quadratus. Sintque a, b et c numeri integri, et requirantur quoque numeri integri loco x ſubſtituendi. Datus autem ſit numerus n, qui loco x poſitus reddat formulam ax^2+bx+c quadratum. Erit ergo an^2+bn+c numerus quadratus, cuius radix ſit m. Iam ad alium numerum ſatisfacientem ex hoc dato n inueniendum, pono eum eſſe $\alpha n+\beta+\gamma\sqrt{(an^2+bn+c)}$, huncque valorem loco x ſubſtitutum reddere ax^2+bx+c quadratum, cuius radix ſit $\delta n+\varepsilon+\zeta\sqrt{(an^2+bn+c)}$. Perſpicuum enim eſt illum numerum loco x ſubſtituendum fore rationalem ob an^2+bn+c quadratum, numeros autem integros hoc modo reperiri ſi modo ſit n numerus integer, mox apparebit.

§. 4. Subſtituatur igitur $\alpha n+\beta+\gamma\sqrt{(an^2+bn+c)}$ loco x in ax^2+bx+c, hocque facto prodibit

$$\begin{array}{llll} a\alpha^2n^2 & +2a\alpha\beta n & +a\beta^2 & \\ a^2\gamma^2n^2 & +ab\gamma^2 n & +ac\gamma^2 & \\ & +b\alpha n & +b\beta & \\ & & +c & \end{array} \left.\begin{array}{l} +2a\alpha\gamma n \\ +2a\beta\gamma \\ +b\gamma \\ \end{array}\right\}\sqrt{(an^2+bn+c)}$$

Sed

Sed quia huius radicem quadricem ponimus $\delta n + \varepsilon + \zeta \sqrt{(an^2 + bn + c)}$, erit hinc etiam $ax^2 + bx + c$ aequalis sequenti quantitati.

$$\left.\begin{array}{l}\delta^2 n^2 + 2\delta\varepsilon n + \varepsilon^2 + 2\delta\zeta n \\ a\zeta^2 n^2 + b\zeta^2 n + c\zeta^2 + 2\varepsilon\zeta\end{array}\right\} \sqrt{(an^2 + bn + c)}.$$

His duabus formis inter se aequatis, habebuntur sequentes aequationes.

$$a\alpha^2 + a^2\gamma^2 = \delta^2 + a\zeta^2,\ 2a\alpha\beta + ab\gamma^2 + b\alpha = 2\delta\varepsilon + b\zeta^2,$$
$$a\beta^2 + ac\gamma^2 + b\beta + c = \varepsilon^2 + c\zeta^2,\ 2a\alpha\gamma = 2\delta\zeta$$
$$2a\beta\gamma + b\gamma = 2\varepsilon\zeta.$$

Ex quibus elicitur $\delta = \frac{a\alpha\gamma}{\zeta}$ et $\varepsilon = \frac{2a\beta\gamma + b\gamma}{2\zeta}$, et valor ipsius δ in prima aequatione substitutus dat, $a^2\zeta^2 + a\gamma^2\zeta^2 = a\alpha^2\gamma^2 + \zeta^4$, quae in duas resoluitur $\zeta^2 = \alpha^2$, et $\zeta^2 = a\gamma^2$. Harum autem posterior, nisi sit a quadratum, locum habere nequit. Habebimus ergo $\zeta = \alpha$, et secunda aequatio factis substitutionibus hisce similiter in has resoluetur $a\gamma^2 = \alpha^2$, et $\beta = \frac{b(\alpha - 1)}{2a}$, quarum iterum posterior tantum locum habet. His inuentis tertia tandem aequatio dabit $\alpha = \sqrt{(a\gamma^2 + 1)}$: inueniri igitur debet valor pro γ, quo $a\gamma^2 + 1$ fiat quadratum.

§. 5. Sit p iste numerus, qui loco γ substitutus reddat $a\gamma^2 + 1$ quadratum, et huius radix ponatur q; ita vt sit $q = \sqrt{(ap^2 + 1)}$, erit $\alpha = q, \gamma = p, \beta = \frac{b(q-1)}{2a}$, $\delta = ap$, $\varepsilon = \frac{bp}{2}$ et $\zeta = q$. Ex his colligitur sequens Theorema:

Si $ax^2 + bx + c$ est quadratum casu quo $x = n$, erit quoque quadratum casu, quo $x = qn + \frac{bq - b}{2a} + p\sqrt{(an^2 + bn + c)}$; eiusque quadrati radix erit $apn + \frac{bp}{2} + q\sqrt{(an^2 + bn + c)}$.

Si ergo modo bp per 2 diuidi poteſt, radix quadrati erit numerus integer, et propterea quoque valor ipſius x erit integer, ſeu $bq-b$ diuidi poterit per $2a$.

§. 6. Quemadmodum autem ex n valore ipſius x dato inuentus eſt alius $qn+\frac{bq-b}{2a}+pm$ poſito m loco $\surd(an^2+bn+c)$; ita hac quantitate tanquam n tractata, quo caſu loco m ſumi debebit $apn+\frac{bp}{2}+qm$, erueetur denuo alius valor, qui loco x ſubſtitutus quaeſito ſatisfacit, ſcilicet hic: $2\underset{+n}{ap^2}n+bp^2+2pqm$, quadrati vero hinc orti radix erit $2apq+bpq\underset{+}{+}2\underset{m}{ap^2m}$. Conſideretur iam illa quantitas vt n et haec vt m habebitur quartus valor ipſius x ſatisfaciens hic:

$$\begin{array}{l} 4ap^2qn+2bp^2q+4ap^3m \\ +qn+\frac{b(q-1)}{2a}+3pm \end{array}$$

Et radix quadrati reſpondentis erit,

$$\begin{array}{l} 4a^2p^3n+2bp^3+4ap^2qm \\ +3apn+\frac{3pb}{2}+qm \end{array}$$

§. 7. Valores ipſius x ſatisfacientes, vna cum radicibus quadratorum reſpondentium ergo ita ſe habebunt vt ſequitur:

Valo-

Valores ipſius x	Valores $\sqrt{(ax^2+bx+c)}$
I. n	m
II. $qn+pm+\frac{b(q-1)}{2a}$	$apn+qm+\frac{bp}{2}$
III. $2q^2n+2pqm+\frac{b(q^2-1)}{a}$ $-n$	$2apqn+2q^2m+bpq$ $-m$
IV. $4q^3n+4pq^2m+\frac{b(4q^3-3q-1)}{2a}$ $-3qn-pm$	$4apq^2n+4q^3m+2bpq^2$ $-apn-3qm-\frac{bp}{2}$
V. $8q^4n+8pq^3m+\frac{4bq^2(q^2-1)}{a}$ $-8q^2n-4pqm$ $+n$	$8apq^3n+8q^4m+4bpq^3$ $-4apqn-8q^2m-2bpq$ $+m$
etc. etc.	etc.
Huius progreſſionis haec eſt lex.	Huius progreſſionis haec eſt lex.
term. quicunque A	E
hunc ſequens B	F
$2qB-A+\frac{b(q-1)}{a}$	$2qF-E$

Hae igitur progreſſiones, quousque libuerit exiguo labore continuantur.

§. 8. Perſpicitur ex his formis alternos adminimum terminos efficere ax^2+bx+c numerum quadratum integrum; atque omnia omnino quadrata fieri numeros integros ſi fuerit bp numerus par. Omnes autem ipſius x valores erunt numeri integri, ſi $b(q-1)$ diuidi poterit per $2a$; ſin vero hoc non fuerit, ſaltem alterni ipſius x valores erunt numeri integri, nam $qq-1$ i. e. ap^2 ſemper diuidi poterit per a, ſi quidem, vt ponimus p et q ſint numeri integri. Praeterea

terea notandum est in terminis istis etiam m negatiue accipi posse, qua ratione numerus solutionum quandoque duplicatur.

§. 9. Intelligitur etiam, si a sit numerus quadratus, solutionem in numeris integris exhiberi non posse, nisi forte $ax^2 + bx + c$ vel ipsum est quadratum vel numero quadrato fieri potest aequale. Hanc ob rem exclusimus supra eos casus, quibus a erat quadratum, quia hic tantum de numeris integris problema soluentibus praecepta tradere instituimus. Nam si a est quadratum; nullus numerus integer potest exhiberi, qui loco p positus efficiat $ap^2 + 1$ quadratum, praeter o. Hoc vero casu omnes valores ipsius x manent n, nullusque ergo alius, nisi is qui diuinatione est inuentus, eruitur.

§. 10. Quoties autem a non est numerus quadratus, semper numerus integer potest assignari, qui loco p positus efficiat $ap^2 + 1$ quadratum. Quamobrem his casibus, si unicum casum elicuerimus, quo $ax^2 + bx + c$ fit quadratum; simul quoque casus infinitos exhibere poterimus, qui $ax^2 + bx + c$ in quadratum transmutent. Proposita igitur formula $ax^2 + bx + c$ hoc erit agendum: primo coniectura detegi debebit valor ipsius x in integris, qui reddat $ax^2 + bx + c$ quadratum. Deinde etiam quaeri debet valor ipsius p, quo $ap^2 + 1$ etiam fiat quadratum. Hisque inuentis ope progressionum inuentarum casus infiniti innotescent.

§. 11.

§. 11. Si c est quadratum, nempe $= dd$; statim apparet casus, quo $ax^2 + bx + d^2$ est quadratum, is enim est si $x = o$. Ponamus ergo $n = o$, eritque $m = d$, et valores ipsius x satisfacientes constituent hanc seriem: o, $dp + \frac{b(q-1)}{2a}$, $2dpq + \frac{b(q^2-1)}{a}$ - - - - - - - - A, B, $2q$B $-$ A $+ \frac{b(q-1)}{a}$. Quadratorum autem, quae hinc generantur, radices erunt: d, $dq + \frac{bq}{2}$, $d(2q^2-1) + bpq$, - - - - - - - - - E, F, $2q$F $-$ E. Harum serierum lex, vt et priorum (§. 7.) perspicua est, sunt enim omnes recurrentes, seu quiuis terminus ex duabus praecedentibus est compositus.

§. 12. Si $b = o$ et $d = 1$, vt habeatur haec forma $ax^2 + 1$, ad quam, vt ex praecedentibus apparet, generalis $ax^2 + bx + c$ maximam partem reducitur. Huius ergo valores ipsius x respondentes in hac serie progrediuntur: o, p, $2pq$, $4pq^2 - p$, - - - - - A, B, $2q$B $-$ A, Radices vero quadratorum productorum erunt sequentes; 1, q, $2q^2 - 1$, $4q^3 - 3q$, - - - - - fit quadratum constat, huiusmodi numeri infiniti habe- E, F, $2q$F $-$ E. Si ergo vnicus casus p, quo $ap^2 + 1$ fit quadratum constat, huiusmodi numeri infiniti habebuntur, qui in tractatione generalis formulae $ax^2 + bx + c$ loco p et q collocari possunt.

§. 13. Quo autem haec methodus ad quosuis casus possit accommodari, videamus primo, quos numeros pro quolibet ipsius a valore literis p et q tribui oporteat. Debet autem p talis esse numerus qui $ap^2 + 1$ reddat quadratum, huiusque radix erit q. Perspicuum

 quidem

quidem eſt, ſi vnicus pro p habeatur valor idoneus, ſimul quoque infinitos haberi: attamen hic vnicum duntaxat eumque minimum praeter 0 adhiberi conuenit. Nam reliqui ſequentes, qui ſunt $2pq$, $4pq^2 - p$, etc. ſolutionum numerum non multiplicant, cum valores tantum ſequentes ipſius x in §. 7. praebeant. Minimus autem ipſius p valor dabit omnes numeros ipſius x; ſatisfacientes, quod maiores non faciunt.

§. 14. Intelligatur igitur, quod ſi fuerit $a = e^2 - 1$, minimum ipſius p valorem fore 1, ipſiusque q, e. Deinde ſi fuerit $a = e^2 + 1$, tum eſſe $p = 2e$, et $q = 2e^2 + 1$. Atque ſi ſit $a = e^2 \pm 2$, erit $p = e$, et $q = e^2 \pm 1$. Huiusmodi caſus infiniti alii poſſunt definiri, quorum ingens numerus hoc continetur theoremate: ſi ſit $a = \alpha^2 e^{2b} \pm 2\alpha e^{b-1}$, erit $p = e$, et $q = \alpha e^{b+1} \pm 1$ vbi pro α etiam numeri fracti accipi poſſunt, dummodo illi per e^{b-1} multiplicati in integros transmutentur. Simili modo etiam ſi ſit $a = (\alpha e^b + \beta e^\mu)^2 + 2\alpha e^{b-1} + 2\beta e^{\mu-1}$, erit $p = e$, et $q = \alpha e^{b+1} + \beta e^{\mu+1} + 1$. Atque etiam ſi ſit $a = \frac{1}{4}\alpha^2 k^2 e^{2b} \pm \alpha e^{b-1}$, erit $p = ke$, et $q = \frac{1}{2}\alpha k^2 e^{b+1} \pm 1$.

§. 15. Quoties igitur a eſt numerus, qui in iſtis formulis contineatur, ſtatim apparet valor ipſius p et q. At ſi a huiusmodi fuerit numerus, qui nullo modo ad illas formulas poteſt reduci, peculiaris ad inuenienda p et q adhibenda eſt methodus, qua olim iam vſi ſunt *Pellius* et *Fermatius*. Haecque methodus eſt vniuerſalis, et aeque ſuccedit, quemcunque numerum denotet a. Praeterea etiam ideo hic potiſſimum

mum est commendanda, quod minimum ipsius p valorem, qui hoc loco requiritur, exhibeat.

§. 19. Methodus haec extat descripta in operibus *Wallisii*, et hanc ob rem eam hic fusius non expono. Operandi tamen modum in vnico exemplo ostendisse iuuabit, cuius inspectio ad quaeque alia soluenda perducet. Oporteat nimirum determinari minimum ipsius p valorem, quo $31p^2+1$ fit quadratum. Ad hoc efficiendum sequens instituitur calculus.

$\sqrt{(31p^2+1)}=q$. Ergo $q>5p$, ponatur itaque $q=5p+a$

$$\begin{array}{lll}
6p^2+1=10ap+a^2, & p=\frac{5a+\sqrt{(31a^2-6)}}{6}, & p=a+b \\
5a^2=2ab+6b^2+1, & a=\frac{b+\sqrt{(31b^2+5)}}{5}, & a=b+c \\
3b^2=8bc+5c^2-1, & b=\frac{4c+\sqrt{(31c^2-3)}}{3}, & b=3c+d \\
2c^2=10cd+3d^2+1, & c=\frac{5d+\sqrt{(31d^2+2)}}{2}, & c=5d+e \\
3d^2=10de+2e^2-1, & d=\frac{5e+\sqrt{(31e^2-3)}}{3}, & d=3e+f \\
5e^2=8ef+3f^2+1, & e=\frac{4f+\sqrt{(13f^2+5)}}{5}, & e=2f-g \\
f^2=12fg-5g^2+1, & f=6g+\sqrt{(31g^2+1)} &
\end{array}$$

Tamdiu scilicet hae operationes continuantur, quoad in media columna perueniatur ad $\sqrt{(31g^2+1)}$ eiusdem formae, quam habuit proposita $\sqrt{(31p^2+1)}$. Perspicuum iam est si ponatur $g=0$ fore $f=1$. Hincque retrogrediendo habebitur: $e=2$, $d=7$, $c=37$, $b=118$, $a=155$, $p=273$, atque $q=1520$.

§. 17. Quo autem non tanto opus sit labore ad valores ipsarum p et q inueniendos pro dato numero a, sequentem tabulam annexere visum est, in qua pro singulis valoribus ipsius a exhibentur minimi numeri, qui loco p substituti reddant ap^2+1 quadratum.

a.

a.	*p.*	*q.*	*a.*	*p.*	*q.*
2.	2.	3.	37.	12.	73
3.	1.	2.	38.	6.	37
5.	4.	9.	39.	4.	25
6.	2.	5.	40.	3.	19
7.	3.	8.	41.	320.	2049
8.	1.	3.	42.	2.	13
10.	6.	19.	43.	531.	3482
11.	3.	10.	44.	30.	199
12.	2.	7.	45.	24.	161
13.	180.	649.	46.	3588.	24335
14.	4.	15.	47.	7.	48
15.	1.	4.	48.	1.	7
17.	8.	33.	50.	14.	99
18.	4.	17.	51.	7.	50
19.	39.	170.	52.	90.	649
20.	2.	9.	53.	9100.	66249
21.	12.	55.	54.	66.	485
22.	42.	197.	55.	12.	89
23.	5.	24.	56.	2.	15
24.	1.	5.	57.	20.	151
26.	10.	51.	58.	2574.	19603
27.	5.	26.	59.	69.	530
28.	24.	127.	60.	4.	31
29.	1820.	9801.	61.	226153980.	1766319049
30.	2.	11.	62.	8.	63
31.	273.	1520.	63.	1.	8
32.	3.	17.	65.	16.	129
33.	4.	23.	66.	8.	65
34.	6.	35.	67.	5967.	48842
35.	1.	6.	68.	4.	33

§. 18. Hic ſtatim occurrit modus perfacilis extrahendi quam proxime radicem quadratam ex numero quocunque non quadrato a. Quia enim eſt $ap^2+1 = q^2$ erit $\sqrt{a} = \frac{\sqrt{(q^2-1)}}{p}$, et, ſi q ſit numerus valde magnus, erit $\sqrt{a} = \frac{q}{p}$ quam proxime. Sed loco p poſſunt poni ſinguli termini ſeriei $o, p, 2pq, 4pq^2-p$, - - - - - $A, B, 2qB-A$, et loco q ſinguli termini reſpondentes ſeriei huius $1, q, 2q^2-1, 4q^3-3q$ - - - - - $E, F, 2qF-E$ (§. 12.). Sit huius ſeriei terminus indicis $i = Q$, et illius terminus, cuius index etiam i eſt $= P$, erit $\sqrt{a} = \frac{Q}{P}$. Quia vero, quo magis continuantur hae ſeries, maiores quoque fiunt termini Q; eo propior reperietur $\sqrt{a}$ ſumendis terminis ſerierum a primo longius diſtantibus. Sit exempli gratia $a = 6$, erit $p = 2$ et $q = 5$, ſeriesque ſibi inuicem ſubſcribantur vt ſequitur, poſteriore loco ſuperiore poſita:

$\frac{1}{0}, \frac{5}{2}, \frac{49}{20}, \frac{485}{198}, \frac{4801}{1960}, \frac{47525}{19402}, \frac{470449}{192060}, \frac{4656965}{1901198}$, etc. Sumtis igitur vltimis terminis, erit $\frac{4656965}{1901198}$ ita propinquum radici quadratae ex 6, vt plus eam non excedat, quam hac fractione $\frac{1}{2.(1901198)^2\sqrt{6}}$. Simili modo patet radicem quadratam ex 61 fore proxime aequalem $\frac{1766319049}{226153980}$. Quae quidem radix vera aliquantulum maior eſt, ſed exceſſus eſt minor quam $\frac{1}{2(226153980)^2\sqrt{61}}$.

§. 19. Quaerantur omnes numeri triangulares, qui ſint ſimul quadrati; debebit $\frac{x^2+x}{2}$ eſſe quadratum. Quadratum igitur quoque erit $2x^2+2x$, ex quo fit, collatione cum formula ax^2+bx+d^2 (§. 11.) inſtituta $a=2, b=2, d=o$. Sed quia eſt $a=2$, erit ex ta-

 bula

bula ſuperiore $p=2$ et $q=3$. Vnde loco x ſubſtitui debebunt ſequentes valores 0, 1, 8, 49, 288, 1681, 9800, etc. quo $\frac{x^2+x}{2}$ fiat quadratum. Quadratorum autem hinc ortorum radices tenebunt hanc ſeriem, 0, 1, 6, 35, 204, 1189, 6930, etc. Vel quadrata, quorum radices continentur in hac ſerie, erunt numeri triangulares. Seriei quidem huius poſterioris termini ſunt duplo maiores, ſi formentur ex ſerie generali d, $dq + \frac{bp}{2}$, $d(2q^2-1)+bpq$ etc. ſed quia hi termini ſunt radices ex $2x^2+2x$, debebunt diuidi per 2, quo habeantur radices ex $\frac{x^2+x}{2}$.

§. 20. Numeri polygonales l laterum exprimuntur hac formula generali $\frac{(l-2)x^2-(l-4)x}{2}$, in qua x denotat radicem numeri polygonalis. Quo ergo huiusmodi numerus polygonalis fit quadratum, oportet $2(l-2)x^2-2(l-4)x$ eſſe quadratum. Statim autem vnus caſus apparet, quo quaeſito ſatisfit, ſcilicet ſi $x=o$; fit enim ipſa formula $=o$. Quamobrem habebimus $n=o$ et $m=o$, et formula cum generali ax^2+bx+c comparata prodit $a=2(l-2)$ et $b=-2(l-4)$, atque $c=o$. Fiat igitur $2(l-2)p^2+1=q^2$, erunt ipſius x valores, quibus $2(l-2)x^2-2(l-4)x$ ſeu huius pars quarta $\frac{(l-2)x^2-(l-4)x}{2}$ i. e. ipſe nnmerus polygonalis fit quadratum, ſequentes, 0, $\frac{-(l-4)}{2(l-2)}(q-1)$, $\frac{-(l-4)}{(l-2)}(q^2-1)$ ------ A, B, $2qB-A-\frac{(l-4)}{l-2}(q-1)$. Qui quidem numeri omnes, ſi $l>4$, ſunt negatiui, attamen affirmatiui habebuntur valores ipſius x ſumto q negatiuo, tum enim alterni termini erunt affirmatiui. Deinde

etiam

etiam si inuentus sit numerus negatiuus pro x, qui sit $-k$, poterit numerus affirmatiuus dari, qui eundem numerum polygonalem producat, erit nempe $x = k + \frac{l-4}{l-2}$, sed nisi sit $\frac{l-4}{l-2}$ numerus integer, hi numeri affirmatiui sunt fracti, quos hic excludimus. Hanc ob rem alternis terminis superioris seriei posito $-q$ loco q contenti esse debemus. Radices vero quadratorum $2(l-2)x^2 - 2(l-4)x$ his casibus resultantium tenebunt hanc progressionem, $0, (l-4)p, 2(l-4)pq, - - - - - - - E, F, 2qF - E$.

§. 21. Quo autem non alii numeri, nisi affirmatiui et integri reperiantur, alium casum, quo $2(l-2)x^2 - 2(l-4)x$ fit quadratum, erui oportet, qui erit, si $x = 1$; prodibit enim 4. Hanc ob rem ponatur $n = 1$ et $m = 2$, quo facto habebuntur pro x valores sequentes: $1, q + 2p - \frac{(l-4)}{2(l-2)}(q-1), 2q^2 - 1 + 4pq - \frac{(l-4)}{l-2}(q^2-1), - - - - - A, B, 2qB - A - \frac{(l-4)}{l-2}(q-1)$. Radices autem quadratae ex $\frac{(l-2)x^2 - (l-4)x}{2}$ progredientur in hac serie, $1, \frac{lp}{2} + q, lpq + 2q^2 - 1, - - - - - - - E, F, 2qF - E$. Quo autem omnes ipsius x valores sint numeri integri, non quidem loco q minimum valorem, sed eum, qui reddat $\frac{l-4}{2(l-2)}(q-1)$ numerum integrum seligi conuenit, id quod semper fieri poterit. Vt si quaerantur numeri pentagonales quadrati, erit $l = 5$, et $a = 6$, atque q erit numerus ex hac serie $1, 5, 49$, etc. et ipsius p valores respondentes erunt $0, 2, 20$, etc. Quo igitur $\frac{(l-4)}{2(l-2)}(q-1) = \frac{1}{6}(q-1)$ sit numerus integer, sumi debet $q = 49$, et $p = 20$. Radices ergo numerorum pentagotagonalium, qui sunt quadrati, erunt, 1, 81, 7921, ------ A, B, 98 B−A−16, qui numeri etiam in superiore serie (§. 20.) continentur, si accipiatur $q = -5$, erunt enim termini alterni affirmatiui. Horum autem numerorum pentagonalium radices quadratae erunt 1, 99, 9701, ----- E, F, 98 F−E.

§. 22. Quia est $2(l-2)p^2 + 1 = q^2$, manifestum est ex praecedentibus, si fuerit $2l-4$ quadratum, nullum numerum integrum loco p substitui posse. Hanc ob rem vel omnes numeri polygonales erunt quadrati, vel tantum nonnulli. Prius euenit, si $l=4$; nam omnes numeri tetragonales sunt simul quadrati. Posterius vero si sit $2l-4=16$ seu 36, seu 64 etc. his enim casibus alii non erunt quadrati, nisi 0 et 1. Si $2l-4 = 16$, erit $l=10$, ideoque numeri polygonales erunt decagonales, quorum forma est $4x^2-3x$. Nullusque numerus decagonalis est quadratus praeter 0 et 1 in integris.

DE