SPECIMEN
DE CONSTRVCTIONE AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM SINE INDETERMINATARVM SEPARATIONE.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Indeterminatarum ſeparationem in aequationibus differentialibus ideo tam ſollicite deſiderari, quod ex ea inuenta aequationis conſtructio ſponte fluat, cuique in his rebus exercitato ſatis perſpectum eſſe arbitror. Integratio praeterea aequationum differentialinm, ſiquidem ſuccedit, optime indeterminatis ſeparandis inſtituitur. Quanquam enim innumerabiles dantur aequationes, quarum integrales ſine huiusmodi ſeparatione inueniri poſſunt, cuiusmodi methodum exhibuit Celeb. *Ioh. Bernoulli* in Comm. noſtrorum Tom. I. pag. 167; tamen eae aequationes omnes ita ſunt comparatae, vt vel per ſe obuia ſit indeterminatarum ſeparatio, vel ſaltem ex ipſa integratione facile deriuetur. Similis vero eſt etiam ratio conſtructionum, quibus adhuc vſi ſunt Analyſtae, ſunt enim omnes huiusmodi, vt aequationis, ſi nullo alio modo indeterminatae a ſe inuicem ſeparari poſſunt, ſeparatio tamen ex ipſa conſtructione proficiſcatur. Hanc ob rem nullam adhuc exhiberi poſſe exiſtimo aequationem differentialem conſtruibilem, cuius ſeparatio omnes vires eluderet.

§. 2.

§. 2. Nuper autem in ellipsi rectificanda occupatus inopinato incidi in aequationem differentialem, quam ope rectificationis ellipsis construere poteram, neque tamen indeterminatarum separatio nequidem ex ipso construendi modo inueniri poterit. Aequatio vero quam obtinui erat haec $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{x dx}{x^2 - 1}$ Riccatianae fere similis, et forte ad separandum aeque difficilis ac haec $dy + y^2 dx = x^2 dx$. Casus hic mihi primum vehementer paradoxus videbatur; at constructione attentius perspecta facile intellexi ex ea non solum separationem indeterminatarum non posse deduci, sed etiam, si alio modo separatio haec succederet, multo maiora sequutura esse absurda; comparationem scilicet perimetrorum ellipsium dissimilium, quae, vt mihi quidem videtur, omnem analysin superat. Constructio autem ipsa perquam est facilis, perficitur enim elongatione infinitarum ellipsium alterutrum axem communem habentium, et hanc obrem consueto per quadraturas construendi modo longe est praeferenda.

§. 3. Proponam igitur totam rem, prout ad eam perueni. Sit ACB quadrans ellipticus, cuius centrum C, semi-axes vero AC et BC. Ponantur $AC = a$ et $BC = b$, et ex A ducatur tangens indefinita AT, ad eamque ex centro C secans quaecunque CT, abscindens arcum $AM = s$, voceturque $AT = t$. Demisso ex M in AC perpendiculo vocetur $CP = x$, erit ex natura ellipsis $PM = \frac{b\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a}$; atque ob analogiam CP : PM = CA : AT habebitur $tx = b\sqrt{(a^2 - x^2)}$ seu $x = \frac{ab}{\sqrt{(bb + tt)}}$ Tabula XIII Fig. 1.

 Suma-

Sumatur arcus AM elementum Mm, ducanturque mp, Ct prioribus MP, CT proximae; erit Mm, $ds = \frac{-dx\sqrt{(a^4 - (a^2 - b^2)x^2)}}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ et $Tt = dt$. Quia autem eſt $x = \frac{ab}{\sqrt{(b^2+t^2)}}$; erit $dx = \frac{-abt\,dt}{(b^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}$, et $\sqrt{(a^2-x^2)} = \frac{at}{\sqrt{(b^2+t^2)}}$, et $\sqrt{(a^4 - (a^2 - b^2)x^2)} = \frac{a\sqrt{(b^4 + a^2tt)}}{\sqrt{(b^2+t^2)}}$. Ex his conficitur $ds = \frac{b\,dt\,\sqrt{(b^4+a^2tt)}}{(bb+tt)^{\frac{3}{2}}}$. Ad cuius integrale per ſeriem ſaltem inueniendum pono $a^2 = (n+1)b^2$, quae prodeat $ds = \frac{b^2\,dt\,\sqrt{((b^2+t^2)+nt^2)}}{(b^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}$, ſuperiusque irrationale fit binomium, cuius alterum membrum eſt b^2+t^2, alterumque ſimplex terminus nt^2. Reſoluo nunc $\sqrt{((b^2+t^2)+nt^2)}$ per canonem notum in ſeriem hanc $(b^2+t^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{Ant^2}{(b^2+t^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{Bn^2t^4}{(b^2+t^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{Cn^3t^6}{(b^2+t^2)^{\frac{5}{2}}} +$ etc. in qua breuitatis gratia eſt $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{-1.1}{2.4}$, $C = \frac{1.1.3}{2.4.6}$, $D = \frac{-1.1.3.5}{2.4.6.8}$ etc. Habebitur ergo $ds = \frac{b^2dt}{b^2+t^2} + \frac{Ab^2nt^2dt}{(b^2+t^2)^2} + \frac{Bb^2n^2t^4dt}{(b^2+t^2)^3} + \frac{Cb^2n^3t^6dt}{(b^2+t^2)^4} +$ etc. et integer arcus ellipticus s erit integrale huius ſeriei.

§. 4. Notandum hic eſt ſingulorum horum terminorum integrationem ad primi termini $\int \frac{bbdt}{bb+tt}$ poſſe reduci, dat vero $\int \frac{bbdt}{bb+tt}$ arcum circuli radii b cuius tangens eſt t. Hanc ob rem ſingulos terminos aſſumto hoc circulari arcu integrabo, vt ſequitur: $\int \frac{b^2t^2dt}{(b^2+t^2)^2} = \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}\int\frac{bb\,dt}{bb+tt} - \frac{1}{2}\frac{b^2 t}{bb+tt}$; $\int\frac{b^2 t^4 dt}{(b^2+t^2)^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\int\frac{b^2 dt}{bb+tt} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\frac{b^2 t}{bb+tt} - \frac{1}{4}\frac{b^2 t^3}{(bb+tt)^2}$, $\int\frac{b^2 t^6 dt}{(b^2+t^2)^4} = \frac{1.3.5}{2.4.6}\int\frac{b^2 dt}{bb+tt} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{b^2 t}{bb+tt} - \frac{1.5}{4.6}\cdot\frac{b^2 t^3}{(bb+tt)^2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{b^2 t^5}{(bb+tt)^3}$, ex quibus lex integralium reliquorum terminorum iam ſatis apparet.

§. 5. Si quarta perimetri elliptici pars A M B requiratur, oportet facere t infinitum, hocque facto omnes termini algebraici in ſuperioribus integralibus euaneſcunt. Arcus circularis vero $\int\frac{bb\,dt}{bb+tt}$ poſito $t = \infty$ dabit quartam peripheriae circuli partem, cuius radius eſt b ſeu B C, quam deſignabimus littera e. Erit propterea $\int\frac{b^2 dt}{bb+tt} = e$, $\int\frac{b^2 t^2 dt}{(bb+tt)^2} = \frac{1.e}{2}$, $\int\frac{b^2 t^4 dt}{(bb+tt)^3} = \frac{1.3.e}{2.4}$, $\int\frac{b^2 t^6 dt}{(bb+tt)^4} = \frac{1.3.5.e}{2.4.6}$ etc. Prodibit igitur quarta perimetri elliptici pars AMB $= e(1 + \frac{1\,An}{2} + \frac{1.3}{2.4}Bn^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}Cn^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}Dn^4 + \text{etc.})$. Atque ſubſtitutis loco A, B, C, D, etc. valoribus debitis habebitur $AMB = e(1 + \frac{1.n}{2.2} - \frac{1.1.3.n^2}{2.2.4.4}$ $\frac{1.1.3.3.5.n^3}{2.2.4.4.6.6} - \frac{1.1.3.3.5.5.7.n^4}{2.2.4.4.6.6.8.8} + \text{etc.})$

§. 6. Haec ſeries, ſi n eſt valde paruum ſeu $\frac{a^2-b^2}{b^2}$ id quod euenit, quoties ellipſis admodum propinqua eſt circulo, vehementer conuergit; hocque caſu igitur facile ellipſis perimeter inuenitur. Quando vero n eſt quantitas, quam minima, ſeu $a = b + \omega$, denotante ω quantitatem quam minimam, erit $n = \frac{2\omega}{b}$, et $AMB = e(1 + \frac{\omega}{2b})$ $q.p.$ Quando vero fit $a = 0$, incidit punctum A in C, et euadit $AMB = BC = b$; hoc vero caſu erit $n = -1$, habebitur igitur $\frac{b}{e} = 1 - \frac{1}{2.2} - \frac{1.1.3}{2.2.4.4} - \frac{1.1.3.3.5.}{2.2.4.4.6.6} - \text{etc.}$ Summa huius ſeriei ergo exprimit rationem radii ad quartam peripheriae partem in circulo.

7. Quemcunque igitur habeat valorem littera n in ſerie §. 5. inuenta, ſumma ſeriei ſemper poterit aſſignari ope rectificationis ellipſis, cuius axis maior ſe habet ad minorem, vt $\sqrt{(n+1)}$ ad 1. Hoc cum ita ſe habeat, vſus ſum quoque methodo mea ſummationes ſerierum ad reſolutionem aequationum reducendi, quam nuper exhibui, vt inueſtigarem, a cuius aequationis reſolutione ſummatio inuentae ſeriei pendeat. Quo autem haec methodus facilius poſſit adhiberi pono $n = -x^{2}$, eritque ſummanda iſta ſeries $1 - \frac{1.x^2}{2.2} - \frac{1.1.3.x^4}{2.2.4.4} - \frac{1.1.3.3.5.x^6}{2.2.4.4.6.6} -$ etc., huius igitur ſummam pono s. Erit ergo differentiando $\frac{ds}{dx} = -\frac{1.x}{2} - \frac{1.1.3.x^3}{2.2.4} - \frac{1.1.3.3.5.x^5}{2.2.4.4.6} -$ etc. Iam denuo per x multiplico, ſumoque differentialia poſito dx conſtante, erit $\frac{d.xds}{dx^2} = -1.x - \frac{1.1.3.x^3}{2.2} - \frac{1.1.3.3.5.x^5}{2.2.4.4} -$ etc. Porro diuido vbique x, contraque per dx multiplico, ſumoque integralia, erit $\int \frac{d.xds}{xdx} = -x - \frac{1.1.x^3}{2.2} - \frac{1.1.3.3.x^5}{2.2.4.4} -$ etc. Denique iterum per dx multiplico, diuido vero per x^3, et ſumo integralia, erit $\int \frac{1}{x^3} \int \frac{d.xds}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1.x}{2.2} - \frac{1.1.3.x^3}{2.2.4.4} - \frac{1.1.3.3.5.x^5}{2.2.4.4.6.6} -$ etc. Haec vero ſeries eſt ipſa initialis per x diuiſa: eius igitur ſumma eſt $\frac{s}{x}$. Quocirca habemus hanc aequationem $\int \frac{1}{x^3} \int \frac{d.xds}{x} = \frac{s}{x}$, quae ſumtis differentialibus abit in hanc $x^2 ds - sxdx = \int \frac{d.xds}{x}$. Differentietur haec denuo prodibit $x^2 dds + xdxds - sdx^2 = \frac{d.xds}{x} = dds + \frac{dxds}{x}$. Huius aequationis reſolutio igitur pendet a ſummatione

matione feriei propofitae, quae cum per rectificationem ellipfis habeatur, aequationis conftructio quoque dabitur.

§. 8. Cum in ista aequatione s vbique vnam tenet dimenfionem, reduci ea poterit per methodum meam Tom. III. Comm. infertam ad aequationem fimpliciter differentialem, facta fubftitutione $s = c^{\int p dx}$, vbi c denotat numerum, cuius log. eft 1. Hoc pofito erit $ds = c^{\int p dx} p dx$ et $dds = c^{\int p dx}(dp dx + pp dx^2)$, atque aequatio inuenta transformabitur in hanc $x^2 dp + x^2 p^2 dx + p x dx - dx = dp + pp dx + \frac{p dx}{x}$, quae diuifa per $xx - 1$ mutatur in iftam $dp + pp dx + \frac{p dx}{x} = \frac{dx}{xx - 1}$. Ad hanc fimpliciorem efficiendam pono $p = \frac{y}{x}$, et proueniet $dy + \frac{yy dx}{x} = \frac{x dx}{xx - 1}$. Quae quomodo feparari poffit neque perfpicio, neque conftructionis confideratio eo perducit.

§. 9. Quo autem ipfa conftructio huius aequationis ex praecedentibus deducatur, pono illam axis femiffem AC, quem ante littera a denotaui, aequalem r, quia vt variabilis debet confiderari; et quartam perimetri ellipfis partem refpondentem q; erit $-xx = n = \frac{r^2 - b^2}{b^2}$, et $x = \frac{\sqrt{(b^2 - r^2)}}{b}$. Porro erit $q = es$, eft vero $s = c^{\int p dx} = c^{\int \frac{y dx}{x}}$, quocirca habebitur $q = ec^{\int \frac{y dx}{x}}$, et $lq - le = \int \frac{y dx}{x}$, adeoque $y = \frac{x dq}{q dx} = \frac{(r^2 - b^2) dq}{q r dr}$. Ne autem, quando r maior eft quam b, irrationalia proueniant, reftituo loco xx valorem $-n$, erit $\frac{dx}{x} = \frac{dn}{2n}$, et $\frac{x dx}{xx - 1} = \frac{dn}{2(n+1)}$. His fubftitutis habebitur ifta aequatio

$2\,dy + \frac{y^2 dn}{n} = \frac{dn}{n+1}$, quae conſtruetur ſumendis $n = \frac{r^2 - b^2}{b^2}$ et $y = \frac{(r^2 - b^2) dy}{qrdr}$, ſeu iam inuento n, $y = \frac{2ndq}{qdn}$. Hinc

Fig. 2. ſequens naſcitur conſtructio: deſcripto quadrante elliptico BCA, cuius centrum in C et ſemi-axis BC conſtans eſt puta $= 1$, pono hic 1 loco b, quo facilius homogeneitas poſſit ſeruari. Erit ergo ſemi-axis $\mathrm{AC} = r$, ex A erigatur normalis AD = arcui elliptico AB, erit punctum B in curua aliqua BD, cuius conſtructio hoc modo eſt in promtu. In ea igitur erit $\mathrm{AD} = q$. Sit F huius ellipſis focus, erit $\mathrm{CF} = \sqrt{(r^2 - 1)}$ et ad BF ducatur normalis FP, erit $\mathrm{EP} = r^2 - 1 = n$. Notetur hic, quando fit $\mathrm{AC} < \mathrm{BC}$ et focus F in BC incidit, valorem n fieri negatiuum, et ex altera parte puncti C verſus B accipi oportere. Deinceps ducatur tangens DT curuae BD in D, erit $\mathrm{AT} = \frac{qdr}{dq}$, et iuncta AP, ex T ducatur recta TG normaliter ſecans AP, ſi opus eſt, productam in O et DA productae occurrens in G, erit ob ſimilia triangula PCA et TAG, $\mathrm{AG} = \frac{rqdr}{(r^2-1)dq}$ Ipſi AG aequalis capiatur CH et ſumta $\mathrm{CI} = \mathrm{CB} = 1$; ad ductam HI erigatur perpendicularis IK erit $\mathrm{CK} = \frac{(r^2-1)dq}{rqdr} = y$. Huic CK fiat aequalis PM, eritque M in curua quaeſita BM, huius enim curuae haec eſt proprietas, vt, dictis CP, n et PM, y, ſit $2\,dy + \frac{y^2 dn}{n} = \frac{dn}{n+1}$.

DE