PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI IN LATISSIMO SENSV ACCEPTI SOLVTIO GENERALIS.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

Problemata, quae curuas maximi minimiue proprietate praeditas requirunt, et adhuc a Geometris tractata sunt, ad duas classes commode referuntur. Quarum prima omnia ea complectitur, quae inter omnes prorsus curuas eam postulant, quae maximi vel minimi cuiusdam habeat proprietatem. Ad alteram vero classem omnia illa pertinent problemata, quae non ex omnibus, sed iis tantum curuis, quae communi quadam gaudent affectione, maximi minimiue proprietatem habentem determinare iubent. Comprehenduntut hae posteriora omnia in famoso isoperimetrico problemate latiori sensu accepto, cuius solutionem Celeberrimi Geometrae *Iacobus* et *Ioannes Bernoullii*, *Taylorus* et *Hermannus* iam pridem dederunt. Quanquam enim hi Viri inter omnes tantum curuas eiusdem longitudinis, eam, quae maximi minimiue proprietatem habeat, quaesiuerunt; tamen eorum methodi facile ad eas quoque quaestiones extendi possunt, quae quaesitam curuam ex omnibus alia communi proprietate praeditis requirunt. Vt si ex omnibus curuis, quae circa axem conuersae solida generant aequalia, ea inuenienda sit, quae solidum minimae superficiei producat. Tabula VIII.

§. 2. Prioris generis problemata duo potiſſimum agitata ſunt, ad definiendas curuas celerrimi deſcenſus et minimae reſiſtentiae, quae vtique inter omnes prorſus curuas ſuam proprietatem maximo ſiue minimo poſſident gradu. Perſpicuum autem eſt, quae curua inter omnes minimam patiatur reſiſtentiam, vel celerrimum producat deſcenſum, eandem hanc praerogatiuam habere inter omnes curuas eiusdem longitudinis, vel alia quacunque proprietate praeditas. Viciſſim vero non valet conſequentia, vt, quae inter omnes curuas eiusdem longitudinis eſt brachyſtochrona, eadem inter omnes omnino curuas talis ſit; Illius enim generis dantur innumerabiles, cum tamen in hoc praeter cycloidem nulla alia ſatisfaciat. Ex quo colligitur, priorem claſſem eſſe quaſi ſpeciem poſterioris, hancque multo latius patere quam illam.

§. 3. Haec conſiderans in eam incidi cogitationem, an forte tertia quaedam claſſis exiſtat, cuius ſecunda tantum eſſet aliqua ſpecies? et hoc modo progrediendo, an dentur etiam quarta, quinta, pluresque hoc ordine ſequentes huiusmodi claſſes? Atque reipſa ita ſe rem habere deprehendi: cognoui enim ad has vlteriores claſſes perueniri, ſi curuae eae, ex quibus, quae maximi minimiue proprietatem habeat, determinari debet, plures vna habuerint affectiones: vt ſi inter omnes curuas eiusdem longitudinis et eandem comprehendentes aream ea requiratur, quae circa axem conuerſa maximum generet ſolidum. Aequatio autem, quam pro hac curua adeptus ſum, magis erat generalis, quam ſi curuas nas tantum vel eiusdem longitudinis, vel eiusdem capacitatis posuissem. Atque sine dubio aequatio magis generalis proditura fuisset, si ad duas has proprietates adhuc vnam pluresue superaddidissem. Ex quibus, quod forte admodum paradoxum videbitur, intelligitur, quo magis curuarum propositarum numerus restringatur, eo plures quaesito satisfacientes reperiri.

§. 4. Has igitur classes in sequentibus quaestionibus complectar maxime vniuersalibus. I *Ex omnibus prorsus curuis eam determinare, quae proprietatem* A *maximo vel minimo gradu contineat. II. Ex omnibus curuis proprietate A aequaliter praeditis, eam determinare, quae proprietatem* B *maximo vel minimo gradu contineat. III. Ex omnibus curuis et proprietate* A *et proprietate* B *aequaliter praeditis, eam determinare, quae proprietatem* C *maximo minimoue gradu contineat. IV. Ex omnibus curuis proprietatibus* A *et* B *et* C *singulis aequaliter praeditis, eam determinare, quae proprietatem* D *maximo minimoue gradu contineat.* Simili modo quinta classis curuas quatuor proprietatibus praeditas contemplabitur et ita porro sequentes.

§. 5. Harum quaestionum probe est notanda proprietas ista, quod proprietates curuarum datarum cum ea, quam quaesita habere debet, possint commutari. Ita secunda quaestio, nam in prima haec commutatio locum habere nequit, congruit cum hac: *Ex omnibus curuis proprietate* B *praeditis, eam determinare, quae proprietatem* A *maximo minimoue gradu habeat.* Et ter-

 tia

tia quaeſtio tribus modis poteſt commutari, prout curua inuenienda vel proprietatem A vel B vel C in ſummo quodam gradu continere debeat, dum interim curuae propoſitae duas reliquas proprietates aequaliter poſſideant. Hoc autem ex modo ſoluendi apparet, cum ea curua maximi vel minimi habeat proprietatem, quae eandem in ſitu proximo retinet; id quod etiam in curuas eadem proprietate gaudentes competit.

§. 6. Proprietas vero maximi vel minimi, quam curua in his problematibus quaeſita habere debet, ita intelligenda eſt, ut nulla intra eosdem terminos detur curua, niſi ipſa quaeſita, quae praeſcriptas habeat affectiones, et tam magno vel tam paruo gradu propoſitam proprietatem contineat. Ita cyclois hanc habet naturam, vt nulla alia curua intra eosdem terminos dari poſſit, ſuper qua corpus deſcendens ab altero ad alterum minori tempore perueniat. Et praeter catenariam per duo puncta transeuntem, nulla datur alia curua eiusdem longitudinis et intra eadem duo puncta contenta, cuius centrum grauitatis in inferiore loco ſit poſitum. Aſſumi vero poſſunt pro terminis his duo quaecunquae puncta, per quae curua quaeſita tranſit. Sicque in circulo, qui vt conſtat, eſt omnium figurarum capaciſſima, aſſumtis duobus quibuscunque punctis AB, non poteſt inueniri inter ea puncta alia curua eiusdem longitudinis, quae maiorem ſectorem quam ABC, comprehendat.

Fig. 1.

§. 7. Ad problemata primae claſſis ſoluenda ſufficit duo curuae elementa contigua conſiderare, quemadmodum

dum ex solutionibus, quae passim inueniuntur, lineae brachystochronae, et solidi minimae resistentiae apparet. Secundae vero classis problemata resolui non possunt nisi tria elementa curuae in computum ducantur. Ex hisque collegi ad solutionem problematum ad tertiam classem pertinentium quatuor opus esse curuae elementis. Atque ita porro pro quarta classe quinque elementa, pro quinta autem sex requiruntur et sic deinceps. Ex quo intelligitur solutionem problematum continuo euadere difficiliorem, quo magis iuxta has classes progrediaris. Difficultas quidem in prolixitate calculi tantum consistit, qui eo fit operosior, quo plura elementa curuae debent considerari. Vehementer is autem poterit abbreuiari si debita compendia adhibeantur.

§. 8. Quo autem facilius intelligatur, qua metodo in singulis classibus vti conueniat, iis etiam quas hic non attingam, plurimum iuuabit duas priores etiam classes percurrere. Quanquam hae vero iam satis sunt tractatae, vt vix quicquam noui in iis detegi posse videatur; tamen eas methodo paulisper diuersa et multo latius patente sum persecuturus, quae ad sequentes etiam classes magis est accommodata. Praeterea quoque haec inde nascetur vtilitas, quod quaelibet proprietas, quam curua quaesita habere debet, in prima et secunda classe ad calculum perducta, in reliquis etiam si parum immutetur, possit inseruire. Multo autem maiore labore opus esset hunc calculum in sequentibus demum classibus de nouo perficere.

§. 9.

Fig. 2. §. 9. Oporteat igitur primum inter omnes prorſus curuas determinare eam oa, quae datam proprietatem maximo vel minimo gradu contineat. Ad hoc praeſtandum ſumatur pro lubitu axis OA, ad quem curua quaeſita referatur. Accipiantur huius elementa AB, BC aequalia, hiſque reſpondeant in curua ipſa duo elementa ab et bc, quae in applicatis praebeant elementa bM, et cN. Vocetur arcus oa, s; abſciſſa OA, x; applicata Aa, y. Erunt AB $=$ BC $= dx$, bM $= dy$, et $ab = ds$. Atque porro cN $= dy + ddy$ et $bc = ds + dds$. Deinde manifeſtum eſt, quam maximi minimiue proprietatem habeat tota curua oa, eandem habere debere quamuis eius partem; ergo etiam duo elementa ab et bc. Quamobrem non duci poterunt alia duo elementa vt $a\beta$ et βc, inter terminos a et c, quae contineant praeſcriptam proprietatem maiore vel minore gradu. Cum vero maximi et minimi proprietas in hoc conſiſtat, vt omnibus in ſitum proximum translatis, proprietas praeſcripta ſtatum ſuum tamen retineat; conſiderari debebunt duo elementa proxima $a\beta$ et βc intra eosdem terminos a et c, contenta. In haec igitur praeſcripta proprietas aeque competere debebit, ac in priora ab et bc. Ex quo poſitio elementorum ab et bc hincque ipſa curua quaeſita oa innoteſcet.

§. 10. In hoc autem ſitu proximo ab tranſit in $a\mathfrak{b}$, bc in $\mathfrak{b}c$; et Mb in M$\mathfrak{b}$, ac cN in cN$-b\mathfrak{b}$. Creſcit igitur elementum ab particula $\mathfrak{b}m$, elementum vero bc decreſcit particula bn. Similiter bM augetur parti-

particula $b\beta$; et cN minuitur particula $b\beta$. Priores vero particulae βm et bn possunt etiam ad $b\beta$ reduci per similitudinem triangulorum $\beta b m$, baM et $\beta b n$, cbN, ex qua reperitur $\beta m = \frac{bM.b\beta}{ab}$, et $bn = \frac{cN.b\beta}{ac}$. Situ ergo proximo migrat ab in $ab + \frac{bM.b\beta}{bc}$; bc in $bc - \frac{cN.b\beta}{bc}$; bM in $bM + b\beta$; et cN in $cN - b\beta$, abscissae vero elementa AB et BC interim manent inuariata. Deinde etiam ipsa applicata Bb crescit elemento $b\beta$; et arcus oab particula βm, i. e. $\frac{bM.b\beta}{ab}$. Quae, quanquam saepissime negligi possunt, tamen in genere retineri debent.

§. 11. Cum autem praescripta proprietas, quam curua oa maximo vel minimo gradu continere debet, tanta debeat reperiri in elementis ab, bc, quanta in proximis $a\beta$, βc; in vtroque casu eam proprietatem ad calculum reuocare conueniet, et expressiones resultantes a se inuicem subtrahere; id enim, quod restat aequale erit ponendum nihilo. Singuli vero huius residui termini vel affecti erunt particula $b\beta$, vel βm et bn; quae autem, quia ad $b\beta$ reduci possunt, totum residuum erit per $b\beta$ diuisibile, quo facto prodibit aequatio, in qua nulla prorsus quantitas a puncto β pendens reperietur, sed tota ex x, y et s cum constantibus constabit. Ex hac igitur natura curuae quaesitae determinabitur.

§. 12. Ponamus curuam oa eam habere debere proprietatem, vt in ea $\int x^n ds$ minorem habeat valorem,

rem, quam in alia quaecunque linea per puncta o et a transeunte. Hanc eandem igitur proprietatem habebunt elementa ab, bc. Quare $OA^n . ab + OB^n . bc$ debebit etiam esse minimum vel aequale huic quantitati $OA^n . a\beta + OB^n . \beta c$. His a se inuicem subtractis restabit haec aequatio $OA^n . \beta m = OB^n . bn$, vel loco βm et bn valoribus inuentis substitutis, haec $\frac{OA^n . bM . b\beta}{ab} = \frac{OB^n . cN . b\beta}{bc}$, siue $\frac{OA^n . bM}{ab} = \frac{OB^n . cN}{bc}$. Quae aequatio ita est comparata, vt posterius membrum sit ipsum prius differentiali suo auctum. Propterea differentiale huius $\frac{OA^n . bM}{ab}$ erit $= o$, ideoque ipsa haec quantitas aequalis erit quantitati constanti, quae sit a^n. In symbolis igitur sequens habebitur aequatio $x^n dy = a^n ds$, ex qua curua quaesita cognoscitur. Perspicitur ex his simul, si talis requiratur curua, vt $\int P ds$, vbi P functionem quamcunque ipsius x designat, in ea sit minimum, prodituram esse aequationem hanc $P dy = A ds$, posito A pro constanti homogenea ipsi P. At si P fuerit functio ipsius y, permutatis coordinatis x et y, prodibit aequatio $P dx = A ds$.

§. 13. Si requiratur vt in curua quaesita sit semper $\int x^m y^n ds$ maximum vel minimum, erit $OA^m . Aa^n . ab + OB^m . Bb^n . bc = OA^m . Aa^n . a\beta + OB^m . B\beta^n . \beta c = OA^m . Aa^n . a\beta + OB^m . B\beta^{n-1} b\beta . \beta c . + OB^m . B\beta^{n-1} . Bb . \beta c$, posito $Bb + b\beta$ loco $B\beta$. Ex qua aequatione oritur ista

OB^m.

$\frac{OB^m . Bb^n . cN . b\beta}{bc} - \frac{OA^m . Aa^n . bM . b\beta}{ab} = n . OB^m . Bb^{n-1} . bc . b\beta - n . OA^m . Aa^{n-1} . ab . b\beta$. Prior autem pars vbique per $b\beta$ diuisa, exprimit differentiale huius quantitatis $\frac{OA^m . Aa^n . bM}{ab}$. Quare symbolis substitutis, prodibit ista aequatio $d . \frac{x^m y^n dy}{ds} = n x^m . y^{n-1} ds$, quae sumendo ibi re ipsa differentiale, et pro dds ponendo valorem $\frac{dy ddy}{ds}$, abit in hanc $\frac{xy dx ddy}{ds^2} + my dy - nx dx = o$. Reduci haec quidem ad differentialem aequationem primi gradus potest; sed ea sit ita complicata, vt, an separari possit, non appareat. Si $\int x^m s^n ds$ debeat esse maximum vel minimum, reperitur haec aequatio $d . \frac{x^m s^n dy}{ds} = n x^m s^{n-1} dy$, quae porro mutatur in istam $x dx ddy + m ds^2 dy = o$. Ex quo apparet exponentem n ex calculo euanescere, ita vt eadem prodeat curua, ac si requireretur $\int x^m ds$ pro maximo; ea vero integrando reducitur ad hanc $x^m dy = a^m ds$, vt iam supra est inuentum.

§. 14. Oporteat inuenire curuam, in qua sit $\int \frac{ds^m dy^n}{dx^{m+n-1}}$ maximum vel minimum. Hic statim apparet, quia dx ponitur constans, id tantum effici debere vt $\int ds^m dy^n$ sit minimum vel maximum. Propterea erit $ab^m . bM^n + bc^m . cN^n = a\beta^m . \beta M^n + \beta c^m . (cN - b\beta)^n$. Hinc resultat ista aequatio $n ab^m . bM^{n-1} + m .$

$ab^{m-2}.bM^{n+1} = n.bc^m.cN^{n-1} + m.bc^{m-2}.cN^{n+1}$, ex qua iterum concluditur $nab^m.bM^{n-1} + m.ab^{m-2}bM^{n+1}$ debere esse constans. Quamobrem pro curua quaesita haec inuenietur aequatio $nds^m dy^{n-1} + m ds^{m-2} dy^{n+1} = a dx^{m+n-1}$, quae semper est pro linea recta. Si vero pro maximo minimoue haec quantitas data fuisset, $\frac{\int x^k ds^m dy^n}{dx^{m+n-1}}$, tum prodiisset ista aequatio $nx^k ds^m dy^{n-1} + mx^k ds^{m-2} dy^{n+1} = a^k dx^{m+n-1}$. Atque generatim si proponeretur ista quantitas $\frac{\int P ds^m dy^n}{dx^{m+n-1}}$ curua quaesita sequenti determinabitur aequatione $nPds^m dy^{n-1} + mPds^{m-2}dy^{n+1} = A dx^{m+n-1}$; vbi P denotat functionem ipsiuis x quamcunque. Si denique id, quod maximum vel minimum esse debet, habuerit hanc formam $s\int x ds$, reperietur eodem modo, scilicet elementis ab et bc ita constituendis vt $\int (ds\int x ds + sx ds)$ sit maximum vel minimum, haec aequatio, $sdds^2 dy + dx ddy(sx + \int x ds) = 0$.

§. 15. His autem primariis casibus primae classis expositis, pergo ad secundam, in qua non ex omnibus prorsus curuis, sed iis solum quae communem quandam habeat proprietatem, determinari debet curua, quae maximi vel minimi quandam habeat proprietatem. Quaeri igitur oporteat curuam oa, quae inter omnes curuas affectionem quandam A aequaliter continentes, habeat aliam quandam proprietatem B in maximo vel minimo gradu. Ad hoc problema soluendum tria necesse

est

est considerare elementa curuae quaesitae. Hancobrem in axe pro lubitu assumto OA accipiantur tria elementa AB, BC, CD, quae sint inter se aequalia, hisque respondeant in curua tria elementa ab, bc, et cd. Ducantur porro, vt ante, applicatae Aa, Bb, Cc, Dd, axique parallelae aM, bN, cP. Dictis ergo OA, x; Aa, y; et oa, s: erit $AB = BC = CD = dx : bM = dy$; et $ab = ds$, porroque $cN = dy + ddy$; $bc = ds + dds$; atque $dP = dy + 2ddy + d^3y$ et $cd = ds + 2dds + d^3s$. Fig 3.

§. 16. Deinde ducantur alius cuiusdam curuae per puncta a et d transeuntis, elementa $a\beta$, $\beta\gamma$, et γd, ad eadem axis elementa relata. Haec autem ita debent esse comparata, vt proprietatem A aeque contineant ac priora ab, bc, et cd; aliae enim hic curuae non considerantur, nisi in quas proprietas A aequaliter competat. At nihilominus haec elementa infinitis modis inflecti possunt, quia a positione duorum punctorum β et γ pendent. Quocirca altera proprietas B adhuc in computum duci potest, quod, si duo tantum elementa vt in antecedente casu assumta fuissent, fieri non potuisset. At ex natura maximorum et minimorum elementa $a\beta$, $\beta\gamma$, γd proprietatem B aeque complecti debent, ac illa ab, bc, cd, ex quo intelligitur curuam quaesitam oa prodire, si hae duae elementorum triades ita assumantur, vt vtramque proprietatem A et B aequali gradu comprehendant; in hocque simul ratio commutationis proprietatum A et B, cuius mentio iam est facta, consistit.

§. 17. Quando autem elementa ab, bc, cd in

 situm

ſitum proximum $a\beta$, $\beta\gamma$, γd transferuntur, augetur ab particula βm, bc minuitur ſumma particularum $b\mu + c\nu$, et cd iterum augetur particula γn. Similiter bM creſcit particula $b\beta$, et cN decreſcit ſumma $b\beta + c\gamma$, atque dP creſcit particula $c\gamma$. Poſſunt vero illa etiam accrementa et decrementa reduci ad $b\beta$ et $c\gamma$ per ſimilia triangula, ſit enim $\beta m = \frac{bm.b\beta}{ab}$, $b\mu = \frac{cN.b\beta}{bc}$, $c\nu = \frac{cN.c\gamma}{bc}$ et $\gamma n = \frac{dP.c\gamma}{cd}$. Propter duas autem proprietates A et B propoſitas, quae communes eſſe debent vtrique elementorum triadi, prodibunt duae aequationes, quarum ſinguli termini affecti erunt vel particula $b\beta$ vel $c\gamma$. His igitur eliminatis elicitur aequatio, in qua nullae amplius inſunt quantitates a punctis β et γ pendentes, ſeu ſymbolis introductis, tota conſtabit ex x, y, s et conſtantibus. Ex qua propterea curua quaeſita cognoſcitur.

§. 18. Duae vero illae aequationes, quae ex conſideratione duarum propoſitarum proprietatum A et B oriuntur, huiusmodi habebunt formam $P.b\beta - Q.c\gamma = o$ et $R.b\beta - S.c\gamma = o$, in quibus quantitates Q et S plerumque ita ſunt comparatae, vt ſit $Q = P + dP$ et $S = R + dR$. Si vero huiusmodi formam non habuerint, poterunt ſemper multiplicando vel diuidendo aequationes ad talem reduci. Hoc ſi factum erit, dico fore ſemper $P + aR = o$, vbi pro a quantitas conſtans quaecunque accipi poteſt. Nam expulſis $b\beta$ et $c\gamma$ oritur iſta aequatio $QR = PS$, quae ſubſtitutis $P + dP$ et $R + dR$ loco Q et S, abit in hanc $RdP = PdR$

ex

ex qua integrata prouenit $P + aR = o$. Haec aequatio hoc modo producta erit pro ipsa curua quaesita; quare si illae aequationes ex proprietatibus propositis deductae praescripto modo instituantur, in promtu erit in quouis casu aequationem curuae quaesitae exhibere.

§. 19. Sufficiet igitur pro singulis proprietatibus, quae proponi possint, aequationes dicto modo adornasse vt habeant formam $P.\,b\beta - (P + dP).\,c\gamma = o$. Huiusmodi enim duabus coniunctis obtinetur aequatio pro curua quaesita; dummodo eae aequationes ex proprietate, quae omnium curuarum ex quibus quaesita determinanda est, communis esse debet, et ex ea, quam quaesita maximo gradu continere debet, eliciantur. Proposita ergo sit primo quantitas $\int y^n dx$, quae vel communis esse debeat curuarum datarum, vel maxima minimaue in quaesita: vtrumque enim eodem redit. Hanc ob rem ob dx constans, debebit esse $A a^n + B b^n + C c^n = A a^n + B b^n + C \gamma^n$, vnde prodit ista aequatio $B\beta^{n-1}.\,b\beta - C\gamma^{n-1}.\,c\gamma = o$, quae praescriptam iam habet proprietatem. Atque in symbolis quantitas ipsi P respondens est y^{n-1}. Si positum fuisset $\int x^n dy$ prodiisset x^{n-1} respondens quantitati P. Et ex assumta quantitate $\int T\,dx$, designante T functionem quamcunque ipsius y, inuenietur pro littera P haec fractio $\frac{dT}{dx}$. Simili modo prodiisset $\frac{Td}{dy}$ ex $\int T\,dy$, si T fuerit functio ipsius x.

§. 20. Exprimat $\int x^n ds$ proprietatem, quae in elementis ab, bc, cd, et $a\beta$, $\beta\gamma$, γd aequaliter inesse debeat; erit $OA^n.\,ab + OB^n.\,bc + OC^n.\,cd =$

OA^n

prout calculo immediate inueniuntur, ſi proprietas praeſcripta ad elementa ab, bc, cd, accommodata ſubtrahatur ab eadem ad elementa $a\beta$, $\beta\gamma$, γd accommodata; neque ſigna mutaui, neque per quantitates conſtantes vel multiplicaui vel diuiſi. Ex hoc non parua naſcitur vtilitas iſta, quod valor ipſius P etiam inueniri queat, ſi formula praeſcripta habeat valorem compoſitum, vt $\int T\, ds + \int t\, dy$. Si enim fuerit $dt = m\, dy + n\, dx$, manente dT vt ante, erit P ſumma eorum, quae pro quolibet membro ſeorſim inueniuntur, ſcilicet $P = \frac{M\, dx^2}{ds} - \frac{N\, dx\, dy}{ds} - T\, d.\frac{dy}{ds} - n\, dx$.

§. 22. Hi ſunt caſus, quando in formula propoſita quantitas T, quae vel in dx vel dy vel ds eſt ducta, eſt functio quaecunque ipſarum x et y. In hisque, vti conſtat, ſtatim ad aequationem peruenitur, quae formam habet $P.b\beta - (P + dP)c\gamma$. At ſi etiam s in T contineatur, non peruenitur ad huiusmodi aequationem, ſed èa demum ad talem debet reduci. Vt ſit propoſita haec formula $\int s^n dx$ oportebit eſſe ob dx conſtans, $oa^n + ob^n + oc^n = oa^n + o\beta^n + o\gamma^n$, ſeu $ob^n + oc^n = o\beta^n + o\gamma^n$. Eſt vero $o\beta = ob + \beta m = ob + \frac{bM.b\beta}{ab}$, et $o\gamma = oc + \beta m - \beta\mu - c\nu = oc + \frac{bM.b\beta}{ab} - \frac{cN.b\beta}{bc} - \frac{cN.c\gamma}{bc}$. Ergo $o\beta^n - ob^n = \frac{n.ob^{n-1}.bM.b\beta}{ab}$ et $o\gamma^n - oc^n = \frac{noc^{n-1}bM.b\beta}{ab} - \frac{n.oc^{n-1}.cN.b\beta}{bc} - \frac{n.oc^{n-1}.cN.c\gamma}{bc}$. Quorum reſiduorum ſumma, cum debeat euanescere erit $((ob^{n-1} + oc^{n-1})\frac{bM}{ab} - \frac{oc^{n-1}cN}{bc})$ $b\beta = \frac{oc^{n-1}.cN.c\gamma}{bc}$. Ponatur $\frac{bM}{ab} = q$, erit $\frac{cN}{bc} = q + dq$, et pro ob posito s, erit $oc = s + ds$, habebiturque $(2s^{n-1}q + n-1)s^{n-2}qds - s^{n-1}(q+dq) - (n-1)s^{n-2}qds)b\beta = (s^{n-1}q + s^{n-1}dq + (n-1)s^{n-2}qds)c\gamma$. Ex qua formatur ista aequatio $P.b\beta = P.c\gamma$ $c\frac{sq+sdq+(n-1)qds}{sq-sdq}$. Debet igitur esse $P(\frac{sq+sdq+(n-1)qds}{sq-sdq}) = P + dP$, vt prodeat requisitus valor ipsius P. Fiet autem ex ista aequatione $2Psdq + (n-1)Pqds = sqdP$. Huiusque integrale $s^{n-1}q^2 = P$, seu $P = \frac{s^{n-1}dy^2}{ds^2}$. Si proposita fuisset haec formula $\int S dx$, vbi S denotat functionem quamcunque ipsius s, prodiisset $P = \frac{dSdy^2}{ds^2}$. Et huic formulae $\int SX dx$ respondet valor $P = \frac{XdSdy^2}{ds^2}$. Atque generatim si fuerit T functio quaecunque ipsarum s, y et x; erit posito $dT = Pds + Mdy + Ndx$, $P = c^{\int\frac{Ldq}{Lq+M}}(Lq + M)$, scripto q loco $\frac{dy}{ds}$.

§. 23. Propositus nunc sit hic casus, quo $\int T ds$ (vbi T vt ante est functio quaecunque ipsarum x, y et s, et $dT = Lds + Mdy + Ndx$) in duabus curuis proximis debeat esse idem. Erit ergo $T.ab + (T + dT)bc + (T + 2dT + ddT).cd = T.a\beta + (T + dT)\beta\gamma + (T + 2dT + ddT)\gamma d$. At differentialia dT et ddT in vtroque membro non sunt aequalia, sed differunt pro punctis β et γ. Ponantur autem primo aequalia erit residuum si illud membrum ab hoc subtrahatur

trahatur $-b\beta . d. Tq + c\gamma d(T + dT)(q + dq)$; posito q loco $\frac{dy}{ds}$. Ponantur iam $a\beta$, $\beta\gamma$ et γd in aequalia ipsis ab, bc, et cd, et quaeratur differentia, quae ex varia significatione dT et ddT oritur. Est vero ipsius $L ds$, transitu facto ab elementis ab, bc, cd ad elementa $a\beta$, $\beta\gamma$, γd, incrementum $L . \beta m = Lq . b\beta$, ipsius $M dy$ vero $M b\beta . N dx$ non mutatur. Simili modo ipsius $2L ds + d. L ds$ incrementum est $(L + dL)(\beta m - b\mu - c\gamma) = (L + dL)(-dq . b\beta - (q + dq) c\gamma)$, et ipsius $2M dy + d. M dy$ incrementum est $-(M + dM) c\gamma$. His singulis incrementis per bc et cd respectiue multiplicatis, cum ante inuento residuo in vnam summam coniectis, et $= o$ positis, prodibit ista aequatio $b\beta(-d. Tq + Lq ds + M ds - L ds dq) + c\gamma(d. (T + dT)(q + dq) - L q ds - L q dds - q dL ds - M ds - M dds - dM ds) = o$. Assumo hic autem bc pro ds, et cd pro $ds + dds$, quia ab non occurrit. Si haec aequatio cum $P b\beta - (P + dP) c\gamma = o$ conferatur, reperietur $P = c^{\int \frac{L ds^2 dq}{M dx^2 - N dx dy - T ds dq}} \left(\frac{M dx^2 - N dx dy - T ds dq}{ds}\right)$, vbi c significat numerum, cuius logarithmus est 1. Similiter, si formula proposita fuerit $\int T dy$, reperietur $P = c^{-\int \frac{L ds dy dq}{L dx^2 + N dx ds}} \left(\frac{L dx^2 + N dx ds}{ds}\right)$. Hic si fuerit $N = o$ erit $P = \frac{L dx^3}{ds^2}$.

§. 24. Consideremus adhuc hanc vnicam formulam $\int X ds^m dy^n dx^{1-m-n}$, in qua X functionem tantum ipsius x denotat. Neglecto igitur dx vt constante, erit $X . ab^m . bM^n + (X + dX) . bc^m . cN^n + (X +$

$2dX + ddX)cd^m . dP^n = X . a\beta^m . \beta M^n + (X + dX)\beta\gamma^m (cN - b\beta - c\gamma)^n + (X + 2dX + ddX)\gamma d^m (dP + c\gamma)^n$. Cuius aequationis illa parte ab hac ſubtracta reſtabit $-b\beta$ $d . X(mab^{m-2} . bM^{n+1} + n . ab^m . bM^{n-1}) + c\gamma d . (X + dX)(m . bc^{m-2} . cN^{n+1} + n . bc^m . cN^{n-1}) = o$. Quae aequatio cum iam habeat formam huius $P . b\beta - (P + dP)c\gamma = o$, erit $P = -d . X(mds^{m-2}dy^{n+1} + n . ds^m dy^{n-1}) = -d . Xds^{m-2}dy^{n-1}(mdy^2 + nds^2)$. Simili modo ſi propoſita fuiſſet haec formula $\int Tds^m dy^n dx^{1-m-n}$, in qua T fuerit functio quaecunque ipſarum x et y, ita vt ſit $dT = Mdy + Ndx$, proditura fuiſſet haec aequatio $P = Mds^m dy^n - d . Tds^{m-2}dy^{n-1}(mdy^2 + nds^2)$. Atque generaliſſime, ſi in $\int Tds^m dy^n dx^{1-m-n}$ fuerit T functio quaecunque ipſarum $x\, y$ et s, atque propterea $dT = Lds + Mdy + Ndx$ erit $P =$

$$c^{\int \frac{Lds^m dy^n dq}{Mds^m dy^n + Lqds^m dy^n - d . Tds^{m-2}dy^{n-1}(mdy^2 + nds^2)}} (Mds^m dy^n + Lqds^m dy^n - d . Tds^{m-2}dy^{n-1}(mdy^2 + nds^2)$$

Haecque eſt formula generaliſſima omnes priores in ſe complectens.

§. 25. Hae formulae inuentae ſeu valores ipſius P reſpondentes omnibus, quae proponi poſſunt proprietatibus, vnum tantum ſignum ſummatorium inuoluentibus, quo clarius in conſpectum cadant, atque facilius ad caſus quosuis poſſint accommodari, collegi eas, et in ſequentem tabulam diſpoſui.

Pro-

Proprietates propositae.	$(q = \frac{dy}{ds}$, et $ddx = 0)$	*Valores litterae* P *respondentes.*
I. $\int T\,dx,\ dT = M\,dy$		$P = M\,dx.$
II. $\int T\,dy,\ dT = N\,dx$		$P = N\,dx.$
III. $\int T\,ds,\ dT = N\,dx$		$P = d.\,Tq.$
IV. $\int T\,ds,\ dT = M\,dy$		$P = d.\,Tq - M\,ds$
V. $\int T\,dx,\ dT = M\,dy + N\,dx$		$P = M\,dx$
VI. $\int T\,dy,\ dT = M\,dy + N\,dx$		$P = N\,dx.$
VII. $\int T\,ds,\ dT = M\,dy + N\,dx$		$P = d.\,Tq - M\,ds$
VIII. $\int T\,dx,\ dT = L\,ds + N\,dx$		$P = Lq^2.$
IX. $\int T\,dy;\ dT = L\,ds + M\,dy$		$P = L\,dx^2 : ds^2$

X. $\int T\,dx, dT = L\,ds + M\,dy + N\,dx.\ P = c^{\int \frac{L\,dq}{Lq + M}}(Lq + M)$

XI. $\int T\,dy, dT = L\,ds + M\,dy + N\,dx,\ P = c^{-\int \frac{L\,ds\,dy\,dq}{L\,dx^2 + N\,dx\,ds}}\left(\frac{L\,dx + N\,ds}{ds}\right)$

XII. $\int T\,ds, dT = L\,ds + M\,dy + N\,dx,\ P = c^{\int \frac{L\,ds^2\,dq}{M\,dx^2 - N\,dx\,dy - T\,ds\,dq}}\left(\frac{M\,dx^2 - N\,dx\,dy - T\,ds\,dq}{ds}\right)$

XIII. $\int \frac{T\,ds^m\,dy^n}{dx^{m+n-1}}\ dT = N\,dx$ - $P = d.\,T\,ds^{m-2}\,dy^{n-1}(m\,dy^2 + n\,ds^2)$

XIV. $\int \frac{T\,ds^m\,dy^n}{dx^{m+n-1}}\ dT = M\,dy + N\,dx,\ P = d.\,T\,ds^{m-2}\,dy^{n-1}(m\,dy^2 + n\,ds^2) - M\,ds^m\,dy^n$

XV. $\int \frac{T\,ds^m\,dy^n}{dx^{m+n-1}},\ dT = L\,ds + M\,dy + N\,dx,\ P =$

$$c^{\int \frac{L\,ds^m\,dy^n\,dq}{(Lq+M)\,ds^m\,dy^n - d.\,T\,ds^{m-2}\,dy^{n-1}(m\,dy^2 + n\,ds^2)}}\left((Lq+M)\,ds^m\,dy^n - d.\,T\,ds^{m-2}\,dy^{n-1}(m\,dy^2 + n\,ds^2)\right).$$

§. 26. Ope huius tabulae nunc perfacile erit problemata tum primae tum secundae classis resoluere. Quod quidem ad primam attinet, in qua quaeritur curua, quae omni-

omnium maximum vel minimum habeat valorem proprietatis propositae A; ad hanc inueniendam sequens habetur regula: Quaeratur proprietates A in tabula, et functione T ad eam accomodata, accipiatur valor ipsius P respondens, isque ponatur $=o$, quae aequatio erit pro curua quaesita. Vt si quaerenda sit curua brachystochrona debebit tempus descensus, quod per $\int\frac{ds}{\sqrt{x}}$ exprimitur, esse minimum. Continetur autem haec formula in tertia, sitque $T=\frac{1}{\sqrt{x}}$ cui respondet $P=d.\frac{q}{\sqrt{x}}$, qui valor cum debeat esse $=o$ erit $\frac{q}{\sqrt{x}}=$ const. seu $dy\sqrt{a}=ds\sqrt{x}$, et $ads^2-adx^2=xds^2$. Fit igitur $ds=\frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{a-x}}$ et $s=C-2\sqrt{a(a-x)}$, ex qua intelligitur, curuam quaesitam esse cycloidem. Ad inueniendam curuam oa quae circa axem $O\theta$ ipsi oA normalem rotata, generat solidum, quod in fluido secundum huius axis directionem motum patiatur minimam resistentiam debebit $\int\frac{xdx^3}{ds^2}$ esse minimum, continetur hoc in formula XIII, vbi esse debet $T=x, m=-2, n=o$, Hinc fit $P=d.-\frac{2xdy}{ds^4}=o$. Ergo $xdx^3dy=ads^4$, ex qua curua generans solidum minimae resistentiae determinatur.

§. 27. Ad secundae classis problemata soluenda sequens inseruiet regula. Si ex omnibus curuis proprietate A aequaliter praeditis ea debeat inueniri, quae proprietatem B maximo minimoue gradu contineat; quaerantur proprietates A et B in tabula et sumantur valores ipsius P respondentes, eorumque per quasuis quantitates constantes multiplicatorum summa ponatur aequalis nihilo; quo facto aequatio proueniens exprimet

natu-

naturam curuae quaesitae. Hanc regulam nonnullis exemplis illustrare iuuabit. Quaeratur curua oa, quae inter omnes eiusdem longitudinis maximam comprehendat aream; erit $A = s = \int ds$. et $B = \int y\,dx$. Illi autem ex formula III. respondet $P = dq$. huicque ex prima $P = dx$. Quamobrem haec aequatio $a\,dq = dx$ erit pro curua quaesita. Ex illa vero prodit haec $aq = \frac{a\,dy}{ds} = x$ seu $dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ i. e. $y^2 + x^2 = a^2$. Quae est aequatio ad circulum. Requiratur nunc curua oa, quae inter omnes alias eiusdem longitudinis, si circa axem Oo conuertatur, producat maximum solidum. Erit ergo $A = \int ds$ et $B = \int x^2\,dy$: quare pro A erit $P = dq$, et pro B erit $P = 2x\,dx$. Ex quibus iuxta regulam, fit $a^2\,dq = 2x\,dx$. Quae integrata dat $a^2\,dy = x^2\,ds + b^2\,ds$, qua natura curuae elasticae exprimitur. Inuenienda sit porro curua oa, quae circum axem Oo rotata inter omnes alias aequalia solida producentes generet minimam superficiem. Erit ergo $A = \int xx\,dy$ et $B = \int x\,ds$. Illi igitur ex Tabula respondet $P = 2x\,dx$, huic vero $P = d.xq$. Hinc nascitur aequatio $2x\,dx = a\,d.xq$ seu $x^2 + b^2 = \frac{ax\,dy}{ds}$. Quae reducitur ad hanc $dy = \frac{(x^2+b^2)\,dx}{\sqrt{(a^2x^2 - (x^2+b^2)^2)}}$. Haec est ad circulum si $b = o$, et ad catenariam si fiat a infinitum, et $bb = ae$. Quaeratur etiam curua oa, quae inter omnes eiusdem longitudinis habeat centrum suum grauitatis ab axe Oo maxime remotum. Erit ergo $A = \int ds$ et $B = \frac{\int x\,ds}{s}$. Quia autem s in omnibus curuis ponitur eiusdem quantitatis, poterit pro B accipi $\int x\,ds$. Sit igitur pro A, $P = dq$ et pro B, $P = d.xq$. Vnde haec oritur aequatio $a\,dq = d.xq$, seu $aq = xq - b$.

Scri-

Scribatur x loco $x-a$, habebitur $xq=b$ seu $x\,dy=b\,ds$, quae est aequatio pro catenaria.

§. 28. Hic non possum, quin annotem, nisi s fuisset in omnibus curuis eiusdem longitudinis et propterea in B reiici potuisset, problema ex formulis resolui non potuisse, quia huiusmodi forma $\frac{\int x\,ds}{s}$ in iis non reperitur. Potest quidem ad propiorem reduci sumendo differentiali iterumque praeponendo signo summatorio, vt tota quantitas signum $\int$ habeat praefixum, fitque hoc modo $B=\int\frac{ds\int s\,dx}{s^2}$: Verum quia haec quantitas $\frac{\int s\,dx}{s^2}$ in T, quippe quae littera semper quantitatem integratam denotat, non comprehenditur, nihil iuuat ad hoc tabula. Nam quoniam in T non inesse possunt differentialia, facile intelligitur neque integralia inesse posse. Hanc ob rem pro huiusmodi casibus formulae erunt etiam eruendae. Inueni autem, si haec $\int(s^n\int s\,dx)\,ds$ fuerit proposita, fore $P=c^{\int\frac{sq\,ds\,dx-n\,ds\,dq\int s\,dx}{s^2q\,dx+s\,dq\int dx}}(s^{n+1}q\,dx+s^n dq\int s\,dx)$. Quae in casu proposito, quo est $n=-2$, dat $P=c^{\int\frac{sq\,ds\,dx+2\,ds\,dq\int s\,dx}{s^2q\,dx+s\,dq\int s\,dx}}(\frac{sq\,dx+dq\int s\,dx}{s^2})$. Haec ad problema postremum soluendum debet aequalis poni $a\,dq$. Sumtis igitur logarithmis sumque differentialibus, prodibit $\frac{ddq}{dq}=\frac{sq\,ds\,dx+2\,ds\,dq\int s\,dx}{s^2q\,dx+s\,dq\int s\,dx}+\frac{2s\,dq\,dx+q\,ds\,dx+ddq\int s\,dx}{sq\,dx+dq\int s\,dx}-\frac{2\,ds}{s}$. Quae abit in hanc $\frac{ssq\,dx\,ddy}{dq}=2ss\,dq\,dx$, haecque per $ss\,dx$ diuisa in $q\,ddq=2\,dq^2$. Integrando ex hac oritur $qq\,dx=-a\,dq$, atque iterum $x=\frac{a}{q}=\frac{a\,ds}{dy}$, seu $x\,dy=a\,ds$, quae est pro catenaria vt ante.

§. 29. Quo autem generaliores huiusmodi formulas consequamur, sit haec proposita $\int T\,dx\int V\,dx$. In qua

qua T et V denotant functiones quascunque ipſarum x y et s, ita vt ſit $dT = L\,ds + M\,dy + N\,dx$ et $dV = G\,ds + H\,dy + K\,dx$. Ex hac formula inuenitur $P = c^{\int \frac{L\,dq \int V dx - TGq\,dx - TH\,dx}{(Lq+M)\int V dx}} (Lq+M)\int V\,dx$. Sit nunc haec formula propoſita $\int T\,dx \int V\,dy$ in qua T et V praecedentes habent valores, erit $P = c^{\int \frac{L\,dq \int V dy + T\,dV - TGq\,dy - TH\,dy}{(Lq+M)\int V dy + TV}} (TV + (Lq+M)\int V\,dy)$. Atque pro hac formula $\int T\,dx \int V\,ds$ reperitur $P = c^{\int \frac{L\,dq \int V ds + Tq\,dV - TGq\,ds - TH\,ds}{(Lq+M)\int V ds + TVq}} (TVq + (Lq+M)\int V\,ds)$. Huiusmodi tres inueniuntur etiam, ſi ſumatur $T\,dy$ vel $T\,ds$ loco $T\,dx$. Has autem omnes prout eas inueni, tanquam tabulae continuationem adiicio.

Proprietates propositae. *Valores litterae* P *respondentes.*

XVI. $\int T dx \int V dx$, $P = c^{\int \frac{Ldq(Vdx - TGqdx - THdx}{(Lq+M)\int Vdx}} (Lq+M)\int V dx$

XVII. $\int T dx \int V dy$, $P = c^{\int \frac{Ldq\int Vdy + TdV - TGqdy - THdy}{(Lq+M)\int Vdy + TV}} (TV + (Lq+M)\int V$

XVIII. $\int T dx \int V ds$, $P = c^{\int \frac{Ldq\int Vds + TqdV - TGqds - THds}{(Lq+H)\int Vds + TVq}} (TVq + (Lq+M)\int$

XIX. $\int T dy \int V dx$, $P = c^{\int \frac{Ldqdy\int Vdx - TGqdxdy - THdxdy}{(Lqdy+Mdy)Vdx - dT\int Vdx - TVdx}} ((Lqdy+Mdy)\int V dx$
$- d.T\int V dx)$

XX. $\int T dy \int V dy$, $P = c^{\int \frac{Ldydq\int Vdy + TdVdy - TGqdy^2 - THdy^2}{(Lqdy+Mdy)\int Vdy + TVdy - dT\int Vdy - VTdy}} (Lqdy + M$
$dy)\int V dy + TV dy - d.T\int V dy)$

XXI. $\int T dy \int V ds$, $P = c^{\int \frac{Ldydq\int Vds + TqdVdy - TGqdsdy - THdsdy}{(Lqdy+Mdy)\int Vds + TVqdy - d.T\int Vds}} ((Lqdy + M$
$dy)\int V ds + TVqdy - d.T\int V ds)$

XXII. $\int T ds \int V dx$, $P = c^{\int \frac{Ldsdq\int Vdx - TGdsdx - THdsdx}{(Lqds+Mds)\int Vdx - d.Tq\int Vdx}} ((Lqds+Mds)\int V dx -$
$d.Tq\int V dx)$

XXIII. $\int T ds \int V dy$, $P = c^{\int \frac{Ldsdq\int Vdy + TdVds - TGqdsdy - THdsdy}{(Lqds+Mds)\int Vdy + TVds - d.Tq\int Vdy}} (Lqds + Mds \int$
$V dy + TV ds - d.Tq\int V dy)$

XXIV. $\int T ds \int V ds$, $P = c^{\int \frac{Ldsdq\int Vds + TqdVds - TGqds^2 - THds^2}{(Lqds+Mds)\int Vds + TVqds - d.Tq\int Vds}} ((Lqds + Mds)$
$\int V ds + TVqds - d.Tq\int V ds)$

Estque vbique $dT = L ds + M dy + N dx$, et $dV = G ds + H dy + K dx$.

§. 30. Quo vsus harum formularum melius intelligatur, quaeri oporteat inter omnes curuas, quas catena cuiuscunque craſſitiei formare poteſt, eam quae habeat centrum grauitatis ſuum a recta Oo remotiſſimum. Patet hic alteram conditionem omnes curuas eius-

eiusdem ponere longitudinis, ex qua oritur $P = dq$; alteram reſpicere diſtantiam centri grauitatis a recta Oo, quae hac formula exprimitur, $\frac{\int x dS}{S}$, vbi S pondus catenae $o a$ repraeſentat. Haec vero vt ad formam in tabula contentam reducatur, differentietur, et prodibit $\frac{Sx dS - dS \int x dS}{SS}$ vel ponendo $\int S dx + \int x dS$ loco Sx, hoc $\frac{dS \int S dx}{SS}$. Quare huius integrale $\int \frac{dS \int S dx}{SS}$ erit $= \frac{\int x dS}{S}$. Sit $dS = t ds$, eſt enim S functio ipſius s, erit hac expreſſione cum vigeſima ſecunda comparata $T = \frac{t}{SS}$ et $V = S$. Atque $L = \frac{S\sigma - 2tt}{S^3}$ poſito $dt = \sigma ds$, $G = t$, et $M = N = H = K = o$. Ex quibus prodit $P = c^{\int \frac{(2tt - S\sigma) ds dq \int S dx + St^2 q ds dx}{S^2 t q dx + St dq \int S dx}} \left(\frac{Stq dx + t dq \int S dx}{SS}\right)$, quod ergo aequale debet poni $a dq$. Sumantur logarithmi et deinde differentialia, prodibit $2SS t dq dx + SS \sigma q ds dx = \frac{SStq dx ddq}{dq}$, quae per $SStq dx$ diuiſa et integrata dat $qq t dx = a dq$; quae pro q ſubſtituto $\frac{dy}{ds}$, et $\frac{dS}{ds}$ pro t, iterum poteſt integrari, proditque $S dy = a dx$. Haecque exprimit naturam catenariae, cuius pondus ſe habet ad longitudinem vt S ad s. Potuiſſet quidem eadem aequatio multo facilius inueniri, ſi in $\frac{\int x dS}{S}$ neglexiſſem denominatorem, quippe qui per priorem conditionem debet in omnibus curuis eſſe idem. Verum quia hoc fortuito accidit, malui vti methodo directa, praeſertim cum conſtituiſſem vſum harum formularum oſtendere.

§. 31. His de prima et ſecunda claſſe expoſitis multo erit facilius tertiam ſequentesque aggredi. Atque a tertia incipiendo, vt iam vidimus, omnia ad eam per-

pertinentia problemata in hoc vniuerſali comprehenduntur, vt quaeratur curua, quae inter omnes et proprietate A et proprietate B ſimul aequaliter praeditas contineat proprietatem C maximo, minimoue gradu. Ad huiusmodi problemata ſoluenda neceſſe eſt quatuor curuae inueniendae elementa conſiderare. Hanc ob rem figuram quartam ita inſtitui, vt quatuor elementa, ab, bc, cd, et de exhibeantur, quae vt in praecedentibus figuris ad aequalia axis OA elementa AB, BC, CD et DE referuntur. Totidem igitur erunt etiam applicatarum elementa bM, cN, dP et eQ conſideranda. Maneant, vt ante $oa = s$, $OA = x$ et $Aa = y$, erunt $AB = BC = CD = DE = dx$, $bM = dy$, $cN = dy + ddy$, $dP = dy + 2ddy + d^3y$ et $eQ = dy + 3ddy + 3d^3y + d^4y$; itemque $ab = ds$, $bc = ds + dds$, $cd = ds + 2dds + d^3s$, et $de = ds + 3dds + 3d^3s + d^4s$.

Fig. 4.

§. 32. Ducantur deinde etiam curuae proximae per terminos d et e transeuntis elementa ad eadem axis OA elementa relata $a\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$ et δe. Debebunt ergo quoque ob rationem ante allatam ſingulae tres propoſitae proprietates in has duas elementorum quaterniones aequaliter competere. Quamobrem proprietatum propoſitarum quaelibet et pro elementis ab, bc, cd, de formula exprimatur, et pro elementis $a\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, δe; tumque illa ab hac ſubtrahatur, et reſiduum ponatur $= o$. Huiusmodi ergo tres in quouis caſu prodibunt aequationes, quae omnes talem habebunt formam $P.b\beta - Q.c\gamma + R.d\delta = o$. Etenim ſingula tam applicatarum, quam arcuum incrementa vel decrementa

poſſunt

possint, vt ante est factum, ad haec $b\beta, c\gamma$, et $d\delta$ reduci. Atque P, Q et R prorsus in s, y et x dabuntur, neque ab hoc assumto situ proximo pendebunt. Quare cum huiusmodi aequationes $P.b\beta - Q.c\gamma + R.d\delta = o$ tres obtineantur, poterunt particulae $b\beta, c\gamma$ et $d\delta$ eliminari; quo facto resultabit aequatio ab illis liberata, haecque determinabit naturam curuae quaesitae oa.

§. 33. Saepe et potissimum in casibus simplicioribus accidit, vt sit $Q = P + dP$, et $R = P + 2dP + ddP$. Atque ad huiusmodi formam conuenit aequationem, quoties aliam habuerit, reducere, si fieri potest, vel multiplicanda vel diuidenda ea. Si autem ex omnibus tribus proprietatibus propositis ad tales aequationes peruentum fuerit, facile erit ex iis aequationem pro curua quaesita formare: hoc enim tantum opus est, vt quantitatum in singulis pro P prodeuntium sumantur quaecunque multipla, eorumque summa ponatur $= o$. Nam si tres habeantur huiusmodi aequationes $P.b\beta - (P + dP)c\gamma + (P + 2dP + ddP)d\delta = o$, $p.b\beta - (p + dp)c\gamma + (p + 2dp + ddp)d\delta = o$, et $\pi.b\beta - (\pi + d\pi)c\gamma + (\pi + 2d\pi + dd\pi)d\delta = o$, prodibit eliminatis $b\beta, c\gamma$ et $d\delta$, haec aequatio $p\,d\pi\,ddP - \pi\,dp\,ddP + \pi\,dP\,ddp - P\,d\pi\,ddp + P\,dp\,dd\pi - p\,dP\,dd\pi = o$. Ex qua integrata reperitur $P + mp + n\pi = o$, in qua m et n quantitates quascunque constantes designant. Patet ergo veritas regulae datae.

§. 34. Proposita sit pro quapiam proprietate haec quantitas $\int y^n dx$. Erit ob dx constans $Aa^n + Bb^n + Cc^n$

T 3

$Cc^n + Dd^n = A\alpha^n + B\beta^n + C\gamma^n + D\delta^n$, cuius aequationis, si illud membrum ab hoc subtrahatur, remanebit $n.Bb^{n-1}.b\beta - n.Cc^{n-1}c\gamma + n.Dd^{n-1}.d\delta = o$. Quae cum iam habeat formam praescriptam erit $P = n Bb^{n-1} = ny^{n-1}$. Perspicitur porro si assumta fuisset $\int Y dx$, vbi Y denotat functionem quamcunque ipsius y, proditurum fuisse $P = dY : dy$. Quamobrem formula prima in tabula superiore etiam pro classe hac tertia valebit. Si sit proposita haec formula $\int x^n dy$, erit $OA^n. bM + OB^n.cN + OC^n.dP + OD^n.eQ = OA^n(bM + b\beta) + OB^n(cN - b\beta - c\gamma) + OC^n(dP + c\gamma + d\delta) + OD^n(eQ - d\delta)$. Hinc fit $b\beta(OA^n - OB^n) - c\gamma(OB^n - OC^n) + d\delta(OC^n - OD^n) = o$, quae cum habeat formam praescriptam, apparet esse $P = -nx^n dx$, atque simul intelligitur formulam secundam tabulae in hac tertia classe etiam locum habere. Generatim vero videre licet, si in praescripta formula $\int T dx$, $\int T dy$, $\int T ds$, T ab s non pendeat, statim ad aequationem requisitam formam habentem perueniri, atque P eundem retinere valorem, quem habet in tabula praecedente. Valent ergo in tertia classe etiam formulae I, II, III, IV, V, VI, VII, imo quoque XIII, et XIV. Atque non solum in tertia sed etiam omnibus sequentibus classibus subsistunt.

§. 35. Cum itaque dictae formulae in omnibus classibus vsurpari possint, in promtu erit problema cuiuscunque classis propositum resoluere, si modo proprietates, quae in illo occurrunt, in istis tabulae formulis contineantur. Tum vero sequens regula, quae

priori

priori ſimilis eſt, debet adhiberi; pro ſingulis ſcilicet proprietatibus, quae in problemate afferuntur quaerendi ſunt valores litterae P ex tabula, eorumque tum ſumantur multipla quaecunque et horum ſumma fiat aequalis nihilo; quo facto aequatio proueniens exponet naturam curuae quaeſitae. Vt ſi inuenienda eſſet curua, quae inter omnes, quae ſunt eiusdem longitudinis, et eandem comprehendunt aream, et circum axem Oo conuerſae generant ſolida aequalia, producat circa hunc eundem axem rotata ſolidum minimae ſuperficiei. Occurrunt hic quatuor proprietates, quae omnes in deſignatis formulis continentur. Ex prima, quae dat formulam $\int ds$, fit $P = dq$ ex ſecunda, quae dat $\int y\,dx$ fit $P = dx$, ex tertia contenta formula $\int xx\,dy$, fit $P = x\,dx$; et ex quarta contenta formula $\int x\,ds$ fit $P = d.\,xq$. Quocirca aequatio pro curua quaeſita erit $a\,dq + b\,dx + 2cx\,dx + d.\,xq = 0$, ſeu haec $aq + bx + cx^2 + xq = f$, hoc eſt $a\,dy + bx\,ds + cx^2\,ds + x\,dy = f\,ds$, quae innumerabiles curuas in ſe comprehendit.

§. 36. Antequam autem eas formulas pro tertia claſſe contemplor, in quibus T etiam ab s pendet, afferam quaedam exempla ad quae ſoluenda memoratae formulae ſufficiunt. Sit igitur propoſitum curuam inuenire, quae inter omnes eiusdem longitudinis et eandem aream comprehendentes generet circa axem Oo conuerſa maximum ſolidum. Tres proprietates quae hic occurrunt, ſunt $\int ds$, $\int y\,dx$ et $\int x^2\,dy$, quibus reſpondent hi ipſius P valores dq, dx et $x\,dx$. Ergo curua quaeſita hanc habebit aequationem $a\,dq + b\,dx$

$+ 2x\,dx$

$+2xdx = o$ ſeu $aq + bx + xx = c$, i. e. $ady + bxds + xxds = cds$. Quaeratur nunc inter omnes iterum curuas eiusdem longitudinis et eiusdem areae curua, ſuper qua graue deſcendat celerrime ſeu tempore breuiſſimo. Hic pro prioribus duabus proprietatibus habet P hos valores dq et dx, pro tertia autem, cuius haec eſt formula $\int \frac{ds}{\sqrt{x}}$, hunc d. $\frac{q}{\sqrt{x}}$. Habebitur ergo pro curua quaeſita haec aequatio, $adq + dx + b\,\mathrm{d}.\frac{q}{\sqrt{x}} = o$ ſeu $aq + x + \frac{bq}{\sqrt{x}} = c$, i. e. $ady + xds + \frac{bdy}{\sqrt{x}} = cds$. Inuenienda ſit etiam curua, quae inter omnes eiusdem areae, et circa axem Oo rotatas aequalia ſolida generantes, producat circa eundem axem conuerſa ſolidum, quod in fluido ſecundum huius axis directionem motum minimam patiatur reſiſtentiam. Priores duae conditiones dant pro P hos valores dx et xdx, poſterior vero, cuius formula eſt $\int \frac{xdx^3}{ds^2}$ hunc d. $\frac{xdy}{ds^4}$. Erit ergo in curua quaeſita $adx + 2bxdx + \mathrm{d}.\frac{xdx^3dy}{ds^4} = o$, ſeu $ax + bxx + \frac{xdx^3dy}{ds^4} = c$. Quae ſi ponatur $c = o$, et x augeatur conſtante quadam vel minuatur, abit in hanc $xds^4 = adx^3dy$, quae aequatio eſt pro curua algebraica, dat enim integrata hanc aequationem quarti ordinis $y^4 - 2by^3 + 2x^2y^2 - 18bx^2y + x^4 + 27b^2x^2 = o$ vel $y^4 + 6by^3 + 2x^2y^2 + 12b^2y^2 - 10bx^2y + 8b^3y - b^2x^2 + x^4 = o$. Haec etiam prodiiſſet ſi a et c fuiſſent poſitae $= o$. Ex quo ſequitur hanc aequationem dare curuam minimae reſiſtentiae ſolidum generantem, inter omnes curuas eiusdem capacitatis ſolida producentes.

§. 37.

§. 37. Quanquam autem huiusmodi problemata, quoties formula occurrit, quae in tabula ad talem referenda eſt, in qua T etiam in s determinatur, iuxta datam regulam reſolui nequeunt; quia non habetur valor ipſius P pro hac tertia claſſe: tamen ſaepe fieri poteſt, vt nihilominus facile ſit ſolutionem perficere. Ex collatione enim formularum datas proprietates exhibentium ſaepe eae in alias poſſunt transmutari, quae in definitis formulis contineantur. Vt ſi oporteat inter omnes curuas eiusdem longitudinis et eiusdem areae eam determinare, in qua $\int s\,dx$ ſit maximum vel minimum. Pertinet haec formula $\int s\,dx$ ad octauam, qua vti in tertia et ſequentibus claſſibus non licet. Verum quia $\int s\,dx = sx - \int x\,ds$, atque per primam proprietatem praeſcriptam s in omnibus curuis debet eſſe eiusdem longitudinis, habebit sx valorem conſtantem, adeoque $\int x\,ds$ debebit quoque eſſe minimum vel maximum. Hanc ob rem pro hoc problemate hae tres formulae poterunt recipi $\int ds$, $\int y\,dx$ et $\int x\,ds$, ex hisque ſolutio inueniri. Habebit enim P tres hos valores dq, dx et $d.\,xq$, ex quibus pro curua quaeſita ſequens obtinetur aequatio $aq + bx + xq = c$ ſeu $a\,dy + bx\,ds + x\,dy = c\,ds$. Quae, niſi hoc compendio vſi eſſemus, difficillime eruta fuiſſet. Quando vero huiusmodi reductiones locum habeant, facilius eſt quouis caſu oblato perſpicere, quam per regulam definire.

§. 38. Conſideremus tamen huiusmodi formulas, in quibus etiam s in T ingreditur; ſitque propoſitum vt $\int s^n dx$ in vtroque elementorum quaternione ſit idem. Erit ergo ob dx conſtans $o\,a^n + o\,b^n + o\,c^n + o\,d^n = o\,a^n$

$+ o\beta^n + o\gamma^n + o\delta^n$. Eſt vero $o\beta^n - ob^n = nob^{n-1} q . b\beta$, $o\gamma^n - oc^n = noc^{n-1} (-dq . b\beta - (q + dq) c\gamma)$ et $o\delta^n - od^n = nod^{n-1} (-dq . b\beta + (dq + ddq) c\gamma + (q + 2dq + ddq) d\delta)$. Fit igitur $b\beta (ob^{n-1} . q - oc^{n-1} . dq - od^{n-1} . dq) - c\gamma (oc^{n-1} . (q + dq) - od^{n-1} (dq + ddq) + d\delta (od^{n-1} (q + 2dq + ddq) = o$. Et generatim ſi aſſumta fuiſſet haec formula $\int T dx$ ſignificetque T functionem quamcunque ipſius s, ita vt ſit $T = L ds$, proditura fuiſſet aequatio iſta $b\beta (Lq - (2L + 2dL + ddL) dq) - c\gamma (Lq + qdL - dLdq - Lddq - 2dLddq - dqddL - ddLddq) + d\delta (L + 2dL + ddL)(q + 2dq + ddq) = o$. Hae vero aequationes nullo modo ad talem formam $b\beta . P - c\gamma (P + dP) + d\delta (P + 2dP + ddP) = o$ reduci poſſunt. Quamobrem eae aliter adhiberi non poterunt, niſi vt cum duabus reliquis aequationibus, quas alterae conditiones ſuppeditant, coniungatur, et re ipſa elementa $b\beta$, $c\gamma$, et $d\delta$ eliminentur. Habeant autem reliquae duae aequationes talem formam, et ſint $b\beta\, p - c\gamma (p + dp) + d\delta (p + 2dp + ddp) = o$ et $b\beta . r - c\gamma (r + dr) + d\delta (r + 2dr + ddr) = o$. Illa vero aequatio ſit breuitatis gratia $b\beta . A - \gamma . B + d\delta . C = o$. Ex ſiis ſi eliminentur $b\beta$, $c\gamma$ et $d\delta$ prodibit iſta aequatio $A (pdr - rdp + pddr - rddp + dpddr - drddp) - B (2pdr - 2rdp + pddr - rddp) + C (pdr - rdp) = o$, vel ſi ponatur $r = pt$ haec $A (ppdt + ppddt + 2pdpdt + pdpddt - pdtddp + 2dp^2 dt) - B (2ppdt + ppddt + 2pdpdt) + C ppdt = o$. Quae determinabit naturam curuae quaeſitae. Poterunt autem loco aequationis $b\beta . A - c\gamma . B + d\delta . C = o$, omnes aequationes, quae ex quibuscunque

cunque formulis oriuntur, ſubſtitui. Atque hoc modo omnia tertiae claſſis problemata ſoluentur, in quibus duae ſaltem conditiones ad formulas in hac claſſe locum habentes deducunt.

§. 39. In noſtro quidem caſu, ſi problema fuerit propoſitum, vt inter omnes curuas proprietates A et B habentes ea inueniatur, in qua $\int T dx$ (vbi $dT = L ds$) ſit maximum minimumue, atque proprietates A et B ad has aequationes $b\beta . p - c\gamma(p + dp) + d\delta . (p + 2$ $dp + ddp) = o$ et $b\beta . r - c\gamma(r + dr) + d\delta(r + 2dr$ $ddr) = o$ reducantur; reperietur pro curua quaeſita ſequens aequatio, $3Lpdrddq - 3Lrdpddq + pqdrddL - rqdp$ $ddL + 2Lrdqddp - Lqdrddp + rqdLddp - 2Lpdqddr + Lqd$ $pddr - pqdLddr + 4pdLdrdq - 4rdLdpdq = o$, quae facta ſubſtitutione $r = pt$ in hanc abit $Lpqdpddt$ $- 2Lppdqddt - ppqdLddt + 3Lppdtddq + ppqdtddL - Lpq$ $dtddp + 2Lqdp^2dt - 4Lpdpdqdt + 4ppdLdqdt - 2pqdLdpdt$ $= o$. Si altera conditio ponat areas aequales, ita vt ſit $p = dx$ et dp et $ddp = o$ prodibit iſta aequatio $\frac{ddr}{dr}$ $= \frac{3Lddq + qddL + 4dLdq}{2Ldq + qdL}$. Si praeterea fuerit $T = s$, erit $L = 1$ et dL et $ddL = o$. Quocirca habebitur pro curua quaeſita iſta aequatio $\frac{2ddr}{dr} = \frac{3ddq}{dq}$, et integrando $dxdr^2$ $= adq^3$. Si tertia conditio requirat omnes curuas eiusdem longitudinis erit $r = dq$, proueniet igitur haec aequatio $addq^2 = dq^3 dx$ vel $\frac{addq}{\sqrt{dq}} = dq\sqrt{dx}$, quae integrata dat $a\sqrt{dq} = q\sqrt{dx} + b\sqrt{dx}$, ſeu $\frac{adq}{(b+q)^2} = dx$ atque $x = \frac{a}{b+q} + c = \frac{a+cq}{b+q}$. Quae eſt eadem, quam pro eodem caſu in §. 37. inuenimus.

DE