

SOLVTIO SINGVLARIS CASVS

CIRCA
TAVTOCHRONISMVM.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

Tabula IV.

Cum ante annos tres Clariff. *Bernoulli* methodum innumeras curuas tautochronas in vacuo inueniendi proponeret, mentionem fecit problematis non parum elegantis, cuius solutionem hac scheda daturus sum. Difficillimum quidem eo tempore videbatur hoc problema, et propterea parum studii ad id soluendum impendebam. Postmodum vero cum diligentius in tautochronas pro fluidis inquisiuissem, vniuersalem detexi methodum problemata huiusmodi omnia soluendi, quae etiam me ad solutionem problematis illius manuduxit.

Fig. 1.

§. 2. Problema autem hoc est: *Datae curuae A NB in B adiungere curuam BMC eius proprietatis, vt omnes descensus grauis alicubi in curua BMC incipientes vsque ad inum punctum A fiant temporibus aequalibus.* Oportet ergo inueniri curuam BMC, ex hac conditione, vt sumto in curua BMC pro lubitu puncto M tempus descensus per MBNA fit constans, neque pendat

deat a loco puncti M. Seu tempus descensus per M BNA aequale esse debet tempori descensus per curvam datam BNA; qui est casus incidente puncto M in B.

§. 3. Descendat ergo corpus ex puncto M, et quaeramus descensus tempus per arcum MB et BMA. Ducta verticali BP, ponatur $BP = a$, quae igitur litera, quia locum puncti M definit, in expressione temporis per MBA inesse non potest. Curvae datae altitudo AD sit $= c$. Assumantur in vtraque curua applicatae quaecunque QN, et XY iisque proximae qn et xy . Dicantur $AQ = t$, $AN = r$ et $BX = x$, $BY = s$, quarum inter t et r aequatio est data, inter x et s desideratur. Celeritas quam corpus in N habebit est $\sqrt{(a+c-t)} = \sqrt{(PB+DQ)}$. Adeoque tempus quo arcus AN absoluitur est $= \int \frac{dr}{\sqrt{(a+c-t)}}$. Quod integrale ita debet accipi, vt fiat $= 0$, si sit $t = 0$.

§. 4. Deinceps si ponatur $t = c$, habebitur tempus per integram curuam datam BNA, quod igitur erit expositum formula ex a et constantibus composita. Nonnullos computavi casus speciales, et vidi tempus descensus per curuam BNA initio descensus posito in M, semper exponi posse sequente serie $k - \alpha a - \xi a^2 - \gamma a^3 - \delta a^4$ etc. $-\zeta \sqrt{a} - \eta a \sqrt{a} - \theta a^2 \sqrt{a}$ etc. cuius in quolibet casu speciali coefficients $\alpha, \xi, \gamma, \delta$, etc. et k poterunt determinari. Hoc tempus igitur additum ad descensus tempus per MB, constans esse debet: atque vt in summa omnes termini litera a affecti sese tollant, necesse est.

§. 5. Ad tempus descensus per curuam MB inueniendum, est celeritas in $Y = \sqrt{a-x}$ et elementum temporis $= ds: \sqrt{a-x}$. Huius integrale ita assumptum, vt fiat $= 0$ si $x = 0$ dabit tempus descensus per YB, in quo ergo si ponatur $x = a$ prodibit descensus tempus per MB, quod cum priore constantem quantitatem ab a liberam conficere debet. Si punctum M incidit in punctum B, i. e. si a euanescit, integrum tempus descensus erit tempus descensus per curuam BMA, quod ex superiore formula euadit $= k$. Hanc ob rem etiam tempus descensus per MBNA debet esse $= k$. Proinde tempus per MB debebit esse $= \alpha a + \xi a^2 + \gamma a^3 + \text{etc.} + \zeta \sqrt{a} + \eta a \sqrt{a} + \theta a^2 \sqrt{a} + \text{etc.}$

§. 6. Hoc vt fiat assumo pro curua quaesita sequentem aequationem $ds = A dx \sqrt{x} + B x dx \sqrt{x} + C x^2 dx \sqrt{x} + \text{etc.} + E dx + F x dx + G x^2 dx + \text{etc.}$ Tempus ergo descensus per arcum MB erit $= \int \frac{A dx \sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} + \int \frac{B x dx \sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} + \int \frac{C x^2 dx \sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} + \text{etc.} + \int \frac{E dx}{\sqrt{a-x}} + \int \frac{F x dx}{\sqrt{a-x}} + \int \frac{G x^2 dx}{\sqrt{a-x}} + \text{etc.}$ scilicet si integralibus his ita sumtis vt fiant $= 0$ si $x = 0$ ponatur vbique $x = a$. Determinentur ergo coefficientes A, B, C, etc. ita, vt sint $\int \frac{A dx \sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} = \alpha a$, $\int \frac{B x dx \sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} = \xi a^2$, $\int \frac{C x^2 dx \sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} = \gamma a^3$ etc. et $\int \frac{E dx}{\sqrt{a-x}} = \zeta \sqrt{a}$, $\int \frac{F x dx}{\sqrt{a-x}} = \eta a \sqrt{a}$, $\int \frac{G x^2 dx}{\sqrt{a-x}} = \theta a^2 \sqrt{a}$ etc. Assumpti vero istum loco ds valorem, vt litterae A, B, C, etc. non ab a pendentes determinantur.

§. 7. Integratio huius $\frac{A dx \sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}$ pendet a quadratura circuli; At si ope logarithmorum imaginariorum integre-

tegetur, vt decet, atque ponatur $x = a$ prodibit $\frac{1}{2} A a$
 $\sqrt{-1.l-1}$, quod aequale esse debet aa fit ergo $A =$
 $\frac{2.a}{1.3}$. Simili modo, $\frac{Bxdx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)^3}}$ integratum dabit $\frac{1.3}{2.4}$
 $B.a^2\sqrt{-1.l-1} = \xi a^2$, fit igitur $B = \frac{2.4.6}{1.3\sqrt{-1.l-1}}$.
 Atque porro prodibit $C = \frac{2.4.6.\gamma}{1.3.5.\sqrt{-1.l-1}}$, et $D =$
 $\frac{2.4.6.8.\delta}{1.3.5.7.\sqrt{-1.l-1}}$ etc. Datis ergo a, ξ, γ, δ etc. quae
 ex curva BNA nota inueniuntur, determinantur coef-
 ficientes pro curva quaesita A, B, C, D, etc.

§. 8. Pro altera parte, quae est rationalis, esse
 debet $\int \frac{Edx}{\sqrt{(a-x)}} = \zeta \sqrt{a}$; fit autem $\int \frac{Edx}{\sqrt{(a-x)}} = 2E\sqrt{a}$,
 ex quo prodit $E = \frac{\zeta}{2}$. Deinde $\int \frac{Fxdx}{\sqrt{(a-x)}}$ fit $= \frac{2}{3} \cdot 2Fa$
 \sqrt{a} , itaque aequari debet huic $\eta a \sqrt{a}$, reperitur ergo
 $F = \frac{2\eta}{2}$, similiter proueniet $G = \frac{3.5.\theta}{2.4.2}$; atque $H = \frac{3.5.7.\iota}{2.4.6.2}$
 et ita porro. Hac igitur ratione determinatis A, B,
 C, D, etc. cognita erit aequatio pro curva quaesita ds
 $= A dx \sqrt{x} + B x dx \sqrt{x} + C x^2 dx \sqrt{x} + \text{etc.} + E dx$
 $+ F x dx + G x^2 dx + \text{etc.}$ Quae quanquam in infi-
 nitum plerumque continetur, tamen fieri potest, vt
 saepe eius summa possit definiri, ficque inueniatur aequa-
 tio finita pro curva quaesita.

§. 9. Sit ANB linea recta ad horizontem incli- Fig. 2.
 nata ita vt fit $AN:AQ = n:1$ seu $r = nt$ et $dr = ndt$.
 Ex quo fit $\int \frac{dr}{\sqrt{(a+c-t)}} = \int \frac{ndt}{\sqrt{(a+c-t)}} = \text{Const.} - 2n\sqrt{(a+c-t)}$
 Constans vero haec est $= 2n\sqrt{(a+c)}$ ponatur iam $t = c$ prodit tempus descensus per BA $= 2n$
 $\sqrt{c} + \frac{2na}{2\sqrt{c}} + \frac{2na^2}{4.2c\sqrt{c}} + \frac{1.1.3.2na^3}{8.2.3.c^2\sqrt{c}} + \frac{1.1.3.5.2na^4}{16.2.3.4.c^3\sqrt{c}} +$
 etc. $- 2n\sqrt{a}$, in seriem $\sqrt{(a+c)}$ resoluta. Compa-
 retur

retur haec forma cum hac $k - \alpha a - \xi a^2 - \gamma a^3 - \delta a^4$
 - etc. $-\zeta \sqrt{a} - \eta a \sqrt{a}$ - etc. prodibit $k = 2n\sqrt{c}$, $\alpha =$
 $\frac{-1 \cdot 2n}{2\sqrt{c}}$, $\xi = \frac{1 \cdot 1 \cdot 2n}{4 \cdot 2 \cdot c\sqrt{c}}$, $\gamma = \frac{-1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2n}{8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c^2\sqrt{c}}$, $\delta = \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2n}{16 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot c^3\sqrt{c}}$,
 etc. et $\zeta = 2n$, $\eta = 0$, $\theta = 0$, $2 = 0$ etc.

§. 10. Cognitis his valoribus prodibunt A, B, C,
 etc. vt sequuntur. $A = \frac{-2n}{\sqrt{-c \cdot l - 1}}$, $B = \frac{2n}{3c\sqrt{-c \cdot l - 1}}$, $C =$
 $\frac{-2n}{5c^2\sqrt{-c \cdot l - 1}}$, $D = \frac{2n}{7c^3\sqrt{-c \cdot l - 1}}$ etc. $E = n$, $F = 0$, $G = 0$
 etc. Pro curua igitur quaesita BMC inuenitur ista
 aequatio, $ds = \frac{-2ndx\sqrt{x}}{1 \cdot \sqrt{-c \cdot l - 1}} + \frac{2nx dx\sqrt{x}}{3c\sqrt{-c \cdot l - 1}} - \frac{2nx^2 dx\sqrt{x}}{5c^2\sqrt{-c \cdot l - 1}} +$ etc.
 $+ ndx$, cuius integralis haec est $s = nx - \frac{Anx^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{-c \cdot l - 1}}$
 ($\frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{x}{3 \cdot 5 \cdot c} + \frac{x^2}{5 \cdot 7 \cdot c^2} - \frac{x^3}{7 \cdot 9 \cdot c^3} +$ etc.). Facilius au-
 tem erit aequationem differentialem in expresionem fini-
 tam transmutare, est autem ea haec $ds = ndx - \frac{2ndx}{\sqrt{-c \cdot l - 1}}$
 ($\sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{3c} + \frac{x^2\sqrt{x}}{5c^2} - \frac{x^3\sqrt{x}}{7c^3} +$ etc.). Quae series expri-
 mit arcum circuli, cuius tangens est \sqrt{x} posito radio
 \sqrt{c} , hanc ob rem erit $ds = ndx - \frac{ndx}{l-1} \sqrt{\frac{\sqrt{c} + \sqrt{-x}}{\sqrt{c} - \sqrt{-x}}}$

§. 11. Aequatio haec inuenta $ds = ndx - \frac{ndx}{l-1} \sqrt{\frac{\sqrt{c} + \sqrt{-x}}{\sqrt{c} - \sqrt{-x}}}$
 potest integrari, proditque post integrationem haec ae-
 quatio $s = nx - \frac{2n\sqrt{c}x}{\sqrt{-1 \cdot l - 1}} - \frac{n(c+x)}{l-1} \sqrt{\frac{\sqrt{c} + \sqrt{-x}}{\sqrt{c} - \sqrt{-x}}}$. Hic ipsius s
 valor ope rectificationis circuli constructur sequente mo-
 do. Fiat circuli quadrans cuius radius AC = c, duca-
 tur tangens AT = \sqrt{cx} et secans TMC, erit $s =$
 $\frac{n \cdot AB \cdot AT^2 + n \cdot AT \cdot AC^2 - n \cdot AM \cdot CT^2}{AC \cdot AB}$. Namque ex natura circuli
 est $AB = \frac{cl-1}{2\sqrt{-1}}$ et $AM = \frac{c}{2\sqrt{-1}} \sqrt{\frac{\sqrt{c} + \sqrt{-x}}{\sqrt{c} - \sqrt{-x}}}$, vnde data
 constructio facile sequitur.

§. 12.

§. 12. Ex aequatione $ds = ndx - \frac{ndx}{l-1} \sqrt{\frac{c+\sqrt{c-x}}{c-\sqrt{c-x}}}$ apparet esse $ds < ndx$ nisi in casu $x=0$, quo est $ds = ndx$: habebunt enim curvae AB et BC semper in B tangentem communem. Ex quo apparet curuam quaesitam esse concauam versus axem BP, atque eousque scilicet in C ascendere, quoad eius tangens fiat verticalis, in eoque puncto C curuam habere cuspidem. Altitudo igitur huius curuae BE inuenietur, si in aequatione ponatur $ds = dx$. In nostro ergo casu, quo curua data est linea recta, dabit x altitudinem BE ex aequatione $(n-1)l-1 = n \sqrt{\frac{c+\sqrt{c-x}}{c-\sqrt{c-x}}}$ seu hac $-\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{c+\sqrt{c-x}}}{\sqrt{c-\sqrt{c-x}}}\right)^{\frac{n}{n-1}}}$ siue hac $(\sqrt{c+\sqrt{c-x}})^{\frac{n}{n-1}} + (\sqrt{c-\sqrt{c-x}})^{\frac{n}{n-1}} = 0$. Vel etiam sumatur arcus $AM = \frac{n-1}{n}$ AB, et ducta eius tangente AT erit $\frac{AT^2}{AC}$ altitudo curuae quaesitae.

Fig. 1.

Fig. 2.

§. 13. Si aequatio differentialis inuenta denuo differentietur posito dx constante prodibit aequatio haec $dds = \frac{ndx^2\sqrt{c}}{(c+x)\sqrt{c-x}l-1}$, quae posita ratione peripheriae ad diametrum $\pi:1$ congruit cum hac $dds = \frac{\pi dx^2\sqrt{c}}{\pi(c+x)\sqrt{c-x}}$. Ex hac aequatione casus, quo $c=0$ et $n=\infty$, ita tamen, ut sit $n\sqrt{c} = \sqrt{b}$, facile cognoscitur. Euenit hoc, si recta data est infinite parua et angulum infinite paruum cum horizonte constituit, ita ut tempus descensus per eam tamen sit finitum nimirum $= 2\sqrt{b}$. Erit igitur $AM = AB$, ideoque tangens AT infinita respectu radii c , abibit ergo $c+x$ in x , atque curua quaesita hanc habebit aequationem $dds = \frac{-dx^2\sqrt{b}}{\pi x\sqrt{x}}$ seu $ds = \frac{2dx\sqrt{b}}{\pi\sqrt{x}}$

Tom. VI.

E

atque

atque $s = \frac{4bx}{\pi}$. Hanc ob rem curua quaesita erit cyclois, vt natura rei requirit.

§. 14. Si curua data hanc habuerit aequatione $dt = t^n dt$, erit elementum temporis $\frac{bt^n dt}{\sqrt{(a+c-t)}}$, ponatur $a+c=f$ et $f-t=z^2$, erit $t=f-z^2$ et $t^n = f^n - \frac{n}{1} f^{n-1} z^2 + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} f^{n-2} z^4 - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} f^{n-3} z^6 +$
 etc. et $\frac{bt}{\sqrt{(f-t)}} = -z b d'z$. Hinc prodibit $\int \frac{bt^n dt}{\sqrt{(a+c-t)}} =$
 Const. $-2bf^n z + \frac{2bn}{1 \cdot 3} f^{n-1} z^3 - \frac{2bn \cdot n-1}{1 \cdot 2 \cdot 5} f^{n-2} z^5 + \frac{2bn \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} f^{n-3} z^7 -$ etc. Quod cum facto $t=0$ seu $z = \sqrt{f}$ euanescere debeat, erit Const. $= 2bf^n \sqrt{f} (1 - \frac{n}{1 \cdot 3} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2 \cdot 5} - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} +$ etc.). Ponatur deinde $t=c$ seu $z = \sqrt{a}$, prodibit tempus descensus per BA $= 2b \sqrt{f} (1 - \frac{n}{1 \cdot 3} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2 \cdot 5} - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} +$ etc.): $-2b(f^n \sqrt{a} - \frac{n}{1 \cdot 3} f^{n-1} a \sqrt{a} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2 \cdot 5} f^{n-2} a^2 \sqrt{a} -$ etc.)

§. 15. Ponamus breuitatis causa $1 - \frac{n}{1 \cdot 3} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2 \cdot 5} -$ etc. $= p$, erit substituto $a+c$ loco f descensus per BA $= 2bpc^{n+\frac{1}{2}} + \frac{n+\frac{1}{2}}{1} 2bpc^{n-\frac{1}{2}} a + \frac{n+\frac{1}{2} \cdot n-\frac{1}{2}}{1 \cdot 2} 2bpc^{n-\frac{3}{2}} a^2 +$ etc. $-2bc^n \sqrt{a} = \frac{2n}{3} 2bc^{n-1} a \sqrt{a} - \frac{2n \cdot 2n-2}{3 \cdot 5} 2bc^{n-2} a^2 \sqrt{a} - \frac{2n \cdot 2n-2 \cdot 2n-4}{3 \cdot 5 \cdot 7} 2bc^{n-3} a^3 \sqrt{a} -$ etcet. Haec forma comparata cum forma §. 4. data $k = a a - \zeta a^2 - \gamma a^3 -$ etc. $- \zeta \sqrt{a} - \eta a \sqrt{a} - \theta a^2 \sqrt{a} -$ etc. erit $k = 2bpc^{n+\frac{1}{2}}$, $a = -\frac{(n+\frac{1}{2})}{1} 2bpc^{n-\frac{1}{2}}$, $\zeta = -\frac{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})}{1 \cdot 2}$
 $2bpc^{n-\frac{3}{2}}$

$$2bpc^{n-\frac{3}{2}}, \psi = \frac{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3} 2bpc^{n-\frac{5}{2}} \text{ etc. atque}$$

$$\frac{2n \cdot 2n-2 \cdot 2n-4}{3 \cdot 5 \cdot 7} 2bc^{n-3} \text{ etc.}$$

§. 16. Intentionitur igitur litterae A, B, C, etc.

ut sequitur $A = \frac{2b(2n+1)pc^{n-\frac{1}{2}}}{\sqrt{-1 \cdot 1-1}}$, atque $B = \frac{2b(2n+1)(2n-1)pc^{n-\frac{3}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{-1 \cdot 1-1}}$ etc.

Atque $E = bt^n$, $F = \frac{bnc}{1}$, $G = \frac{b \cdot n \cdot (n-1)c^{n-2}}{1 \cdot 2}$, $H = \frac{bn \cdot (n-1)(n-2)c^{n-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ etc. Pro curua itaque quaesita re-

peritur ista aequatio $ds = \frac{2bpc^{n-\frac{1}{2}}}{\sqrt{-1 \cdot 1-1}} (\frac{2n+1}{1} c^{n-\frac{1}{2}} + \frac{(2n+1)(2n-1)}{1 \cdot 3} c^{n-\frac{3}{2}} x^2 + \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)}{1 \cdot 3 \cdot 5} c^{n-\frac{5}{2}} x^2 + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} c^{n-2} x^2 + \frac{n \cdot (n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} c^{n-3} + \text{etc.}) = b(c+x)^n dx - \frac{2bpc^{n-\frac{1}{2}}}{\sqrt{-1 \cdot 1-1}} (\frac{2n+1}{1 \cdot 4c} + \frac{(2n+1)(2n-1)x}{1 \cdot 3 \cdot 4c} + \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)x^2}{3 \cdot 5 \cdot 4c} + \text{etc.})$

§. 17. Quanquam hic pro curua data haec tantum aequatio $dr = bt^n dt$ est assumpta, tamen ad omnes proliis curuas exemplum hoc accommodari potest. Sit enim curua data ista exposita aequatione $dr = At^\alpha dt + Bt^\beta dt + Ct^\gamma dt + \text{etc.}$ Tum quaeratur aequatio pro curua quaesita primo ex hac tantum aequatione $dr = At^\alpha dt$, et sit aequatio resultans $ds = P dx$. Deinde sumatur aequatio $dr = Bt^\beta dt$ proveniatque aequatio $ds = Q dx$. Similiter ex aequationibus $dr = Ct^\gamma dt$, $E 2$ $dr =$

$dr = Dt^3 dt$ etc. emergant istae $ds = R dx$, $ds = S dx$ etc. erit aequatio pro curua quaesita haec $ds = (P + Q + R + S + \text{etc.}) dx$, si scilicet curua data habuerit aequationem $dr = At^n dt + Bt^e dt + \text{etc.}$

§. 18. Apparet etiam ex aequatione §. 16. si fuerit $n = -\frac{1}{2}$ vel $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ etc. feriem abrumpi, atque statim haberi aequationem finitam; fit $dr = bt^{-\frac{1}{2}}$, curua scilicet data cyclois, erit $n = -\frac{1}{2}$ atque $ds = \frac{bdx}{\sqrt{c+x}}$. Ex quo cognoscitur curuam superiorem annexam cum data inferiore eandem curuam continuam nimirum cycloidem constituere.

DE SUPERFICIEBVS AD AEQVATIONES LOCALES REVOCATIS, VARIISQVE EARVM AFFECTIONIBVS.

AVTHORE

Iacobo Hermanno.

Tabula IV.

Gometrae de aliis Superficiebus quam de planis, aut etiam de his quae ex reuolutione figurae cuiusque curuilineae circa lineam quandam in gyrum actae, vix cogitarunt subinde; tamen infinities infinita genera dantur, ad quae species illae reuocari non possunt. Aequationes locales, quibus omnium superficiesum indoles exponi debet, tres omnino indeterminatas inuolunt, cum tamen aequationes ad lineas
curuas: