

prorsus inseparabiles videri queant, construi poterunt. Et sane *Hermannus*, cum aequationem §. 28. cum eo communicassem, eam statim ope methodi suae separavit, eandemque constructionem inuenit, quam ego a posteriori cognitam hic apposui. Dubitari itaque nequit, quin Vir Celeb. plurimum aequationum, quae adhuc inseparabiles habitae sunt, separationem sit daturus.

DE COMMVNICATIONE MOTVS IN COLLISIONE CORPORVM.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. I.

EXperientia constat corporum in se mutuo in- Tabula VII.
currentium motus immutari; quaestio igitur hinc nata est, quae sit huius alterationis motus causa. Dubitari quidem non potest, quin in ipso corporum conflictu ratio huius phaenomeni inuestigari debeat; corpus enim omne siue quiescens siue motum perseuerat in suo statu, nisi a vi quapiam cieatur et ex statu suo deturbetur. Quamobrem quaestio huc est reducta, vt definatur, qua in re insit haec vis et quanta sit, quae motus mutationem in conflictu corporum producere valet. Praeterca etiam determinari debet, quan-

tatis

tam in collisione vtriusque corporis motus mutationem subeat.

§. 2. Inuentae sunt iam superiore seculo a viris maxime meritis *Wrenno*, *Wallisio* et *Hugenio* regulae communicationis motus ex quibus cognoscitur, duobus corporibus in se inuicem incurrentibus, quanta futura sit vtriusque corporis post conflictum celeritas. Regulae etiam istae experimentis egregie confirmantur, vt de earum veritate nefas esset dubitare. Variis tamen incedentes viis illi ad has regulas peruenerunt, et postmodum ab aliis plures ac diuersae inuentae sunt demonstrationes. Harum autem nulla, quantum mihi videtur, est genuina, sed deriuatae sunt omnes ex alienis principiis.

§. 3. Accedit ad hoc, quod nullus adhuc ipsam alterationis motus causam monstrauerit, neque quomodo corpora in se mutuo agere possint, explicauerit. Hanc ob rem operae pretium fore existimari, istam dissertationem proponere, in qua regulae communicationis motus ex certissimis mechanicae principiis deducantur; simulque ostendatur, quomodo in ipsa collisione corpora in se mutuo agant motusque immutent.

§. 4. Accipio hic tanquam indubitatum principium, omnem motus vel diminutionem vel augmentationem vel directionis mutationem produci
a po-

a potentiis, idque successiue non saltu. Facile hoc a quoquam concedetur: nihil enim contra id afferri possit, nisi ipsa motus in collisione communicatio, in qua an natura non faciat saltum a multis est disputatum. Statuo igitur in concursu duorum corporum vtriusque corporis celeritatem a potentia inter corpora illa delitente immutari.

§. 5. Corpora in se mutuo impingentia vim actionis potentiae similem sentire elucescit praecipue in mollioribus corporibus vt cera vel argilla: facile enim perspicitur impressiones, quas sunt consequuta, non subito sed pedetentim esse factas; ex quo etiam ad duriora corpora concludere licet, successiue et per gradus mutationem fieri. Omnia autem corpora, conflictu sibi mutuo impressiones imprimunt, quanquam hoc non de omnibus apparet. Sunt enim corpora, quae impressionem seu mutatam in conflictu formam non retinent, sed pristinam formam recuperant, quae elastica vocantur; illa vero quae mutatam in conflictu formam seruant, mollia.

§. 6. Inter haec duo genera innumerabiles continentur gradus intermedii; eorum scilicet corporum, quae impressiones acceptas ex parte tantum, non penitus, exuunt, ad quorum classem sine dubio omnia quae in mundo sunt corpora, pertinent. Neque enim perfecte reperietur corpus elasticum neque perfecte molle, sed omnia medii

inter haec generis deprehenduntur. Corpora porro tam elasticitate destituta seu mollia, quam elastica etiam differunt ratione duritiei, secundum quam alia aliis magis vel minus sunt dura. Durius autem vocatur corpus quod ab eadem vi minorem impressionem accipit, ex hocque intelligitur, quid sit corpus perfecte durum, quod nimirum a quaque vi finita infinite parvam tantum impressionem accipiat. Prout ergo haec impressio vel restituitur vel secus, corpus perfecte durum vel ad elasticorum vel non elasticorum classem pertinebit

§. 7. Quando duo corpora elastica inter se collidunt alterum comprimit alterum, et sibi impressiones infligunt; postmodum vero se rursus in pristinam formam restituunt. Quamdiu corpora comprimuntur vel vtrumque corpus vel alterutrum saltem de motu suo amittit. Quando vero se restituunt, tum etiam motus in compressione amissus restituitur, sed aliter inter corpora distribuitur. In non elasticorum conflictu autem impressionem quam vtrumque accepit maximam retinet. Ad motum igitur corporum elasticorum post conflictum determinandum, requiritur, ut vtriusque corporis inuestigetur celeritas tum quando sunt prorsus restituta. Pro corporibus vero non elasticis, inueniri debet vtriusque corporis celeritas quam habet in statu maximae impressionis.

§. 8. Quemadmodum ad omnem motum generandum opus est potentia, ita etiam ad partes

COR-

corporis comprimendas et impressiones faciendas potentia requiritur; corpus enim omne vi inertiae vti motui ita quoque impressioni accipiendae resistit, quae a potentia superari debet. Hanc impressionis accipiendae difficultatem vt clarius percipiamus, corporibus annexa concipio elastra in loco, quo impressiones recipiunt. Loco igitur impressionum elastra haec comprimi pono; eodem enim redit siue id, quod comprimitur, fit ipsius corporis pars, siue elastrum corpori adiunctum.

§. 9. Inter corpora igitur A et B concurrentia pono elastrum *ab*, quod dum pergunt ad se inuicem accedere comprimatur. Haecque compressio elastri tamdiu durat, quoad motus, quoad se inuicem accedunt, vim elastri potest superare, tunc ergo elastrum erit in statu maximae compressionis. Deinde si corpora sunt elastica, pono elastrum hoc interpositum vi sese restituendi polere, si vero non sunt elastica, concipio, elastrum cum in statum maximae compressionis est reductum, subito omnem vim sese expandendi amittere.

Fig 1.

§. 10. Hac ratione conflictum considerantes poterimus ex legibus Mechanicis, quas potentiae in alterandis motibus seruant, mutationes motuum in collisione corporum supputare. Notum enim est quantam eeleritatem data potentia in datum corpus agens dato tempore generare, nec non si fuerit motus corporis potentiae contrarius, de-

fruere valeat. Elastrum autem inter corpora concurrentia conceptum, dum se expandere conatur vices potentiae subit, et quo id magis comprimitur, magis etiam corporum motus diminuitur.

§. 11. Quo magis elastrum istud comprimitur, eo etiam maiorem habeat oportet vim sese expandendi, sed quanta ea sit in quolibet compressionis gradu, non est opus vt sciamus; quamcunque enim seruet legem, eadem tamen denique post conflictum prodit motus distributio. Quantitatem ergo vis elastri expansivae generali litera utcumque variabili P designabo et a nulla alia pendente. Scilicet P mihi erit pondus, cuius nisi deorsum aequalis est vis elastri expansiva.

Fig. 2.

§. 12. Incurrat corpus A in elastrum AC vim P se expandendi habens, celeritate tanta quanta ex altitudine v graue cadendo acquirit; progrediatur puncto temporis per spatium $Aa = dx$, sitque celeritas quam in a habeat genita ex altitudine $v + dv$. Perspicuum est si esset $P = A$ corpus eodem modo retardatum iri, quo sursum proiectum a vi gravitatis retardatur, fore nempe $dv = -dx$, si esset $P = nA$ foret $dv = -Pdx:A$, si vis elastri motui corporis est contraria: sed si motum promoveat, erit $dv = +Pdx:A$.

Fig. 3.

§. 13. Moueatur corpus A in linea AO celeritate altitudini a debita, corpus vero B minori cele-

celeritate in eadem directione versus O ex altitudine b oriunda, occurrent haec corpora sibi inuicem, fietque conflictus. Pono ea tum in se mutuo agere incipere, cum distantia centrorum fuerit $=f$. Iphis igitur corporibus vt punctis consideratis interpositum concipio elastrum longitudinis f . Sit id AB, quando ergo corpus A reperietur in A, et B in B conflictus incipiet, elastrumque, quia A celerius mouetur quam B, magis continuo comprimetur.

Fig. 4

§. 14. Reductum iam sit elastrum ad longitudinem PQ, quam pono $=f-x$. Sit celeritas quam corpus A cum in P venerit habet, ex altitudine v orta, celeritasque corporis B in Q ex altitudine u , et vis elastri quam nunc habet se expandendi sit $=P$. Tempusculo quam minimo progrediatur corpus A per elementum Pp $=dr$ et corpus B per Qq $=ds$; sitque altitudo exhibens celeritatem quam corpus A in p habebit $=v+dv$, et respondens altitudo celeritati corporis B in q $=u+du$. Erit $pq = PQ + Qq - Pp = f-x + ds - dr$, sed pq aequatur ipsi PQ vna cum suo differentiali, i. e. $pq = f-x-dx$. Habebitur consequenter $dx = dr - ds$.

§. 15. Quia elementa Pp et Qq simul ponuntur percursa, erunt ipsis celeritatibus, quibus percuruntur proportionalia. Quocirca est $dr:ds = \sqrt{v}:\sqrt{u}$, sunt enim ipsae celeritates vt radices quadratae

dratae ex altitudinibus generantibus. Siue habe-
tur $\frac{dr}{\sqrt{v}} = \frac{ds}{\sqrt{u}} = \frac{dr-dx}{\sqrt{u}}$; ex hac aequatione reperitur
 $dr = \frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{v}-\sqrt{u}}$, atque $ds = \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}-\sqrt{u}}$.

§. 16. Corpus vero A dum progreditur per
 $Pp = dr$ contrariam habet vim elastri expansiuam
P, eritque propterea ex §. 12. $dv = -Pdr : A$. Si-
mili modo corpus B per $Qq = ds$ transiens a vi
elastri P acceleratur eritque $du = +Pds : B$. Ex
his aequationibus coniunctis reperitur $-Adv - Bdu$
 $= Pdr - Pds = Pdx$. Sumantur integralia erit const.
 $-Av - Bu = \int Pdx$, fiat autem $\int Pdx = 0$, si ponatur
 $x = 0$. Ad constantem determinandam ponatur $x = 0$,
eritque tum $v = a$ et $u = b$, est propterea const.
 $= Aa + Bb$. Habemus igitur istam aequationem
 $A(a-v) + B(b-u) = \int Pdx$.

§. 17. Resumamus aequationes $Adv = -Pdr$,
et $Bdu = Pds$, substituamusque pro dr et ds va-
lores inuentos, erit $Adv = \frac{Pdx\sqrt{v}}{\sqrt{v}-\sqrt{u}}$ et $Bdu = \frac{Pdx\sqrt{u}}{\sqrt{v}-\sqrt{u}}$
Habetur ergo ex illa $Pdx = -\frac{Adv\sqrt{v} + Bdu\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$. Erat
autem ante $Pdx = -Adv - Bdu$. Ex hisque pro-
dit $Adv\sqrt{u} = -Bdu\sqrt{v}$ seu $\frac{Adv}{\sqrt{v}} = -\frac{Bdu}{\sqrt{u}}$. Qua in-
tegrata obtinetur $A\sqrt{v} + B\sqrt{u} = \text{const.} = A\sqrt{a}$
 $+ B\sqrt{b}$. Talis enim esse debet constans ut etiam
aequatio ante conflictum verum praebear.

§. 18. Duas ergo inuenimus aequationes istas
 $A(a-v) + B(b-u) = \int Pdx$; atque $A(\sqrt{a} - \sqrt{v})$
 $+ B(\sqrt{b} - \sqrt{u}) = 0$. Ex quibus celeritates
cor-

tes corporum in quouis compressionis statu durante ipso conflictu inueniri possunt. Ad hoc vero requiritur, vt P sit cognita functio ipsius x , quo possit integrale sumi et in eo pro x status compressionis assumtus substitui.

§. 19. Hic autem praecipue celeritates vtriusque corporis post conflictum desiderantur. Quae-ramus eas primo pro corporibus elasticis, hocque in casu finitus est conflictus, quando fit iterum $x=0$, adeoque $\int P dx = 0$. Ex quo erit $A(a-v) = -B(b-u)$. Diuidatur altera aequatio per hanc, prodibit $\sqrt{a} + \sqrt{v} = \sqrt{b} + \sqrt{u}$. Atque ex postremis his duabus aequationibus facile eruitur $\sqrt{v} = \sqrt{a} + \frac{2B(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{A+B}$ et $\sqrt{u} = \sqrt{b} + \frac{2A(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{A+B}$. Hic \sqrt{v} et \sqrt{u} denotant ipsas corporum A et B celeritates, quas post conflictum habebunt; at vero \sqrt{a} et \sqrt{b} celeritates eorum ante conflictum.

§. 20. Si corpora fuerint omni elasticitate destituta, conflictu finietur, quando elastrum est maxime compressum, hoc euenit si est $dx=0$ seu $dr=ds$, i. e. vbi $v=u$. Aequales ergo corpora non elastica habebunt post conflictum celeritates, adeoque coniuncta manebunt. Erit autem eorum communis celeritas \sqrt{v} vel $\sqrt{u} = \frac{A\sqrt{a} + B\sqrt{b}}{A+B}$.

§. 21. Posui in his vtrumque corpus secundum eandem plagam moueri, hoc vero non impedit quo minus hae regulae sint vniuersales. No-

tum

tum enim est plagam mutari, mutata celeritate in negativam. Ita si poneretur *v* loco *v* haberentur regulae communicationis motus pro corporibus in plagas oppositas motis.

§. 22. Simili modo inueniri possunt regulae communicationis motus pro corporibus non perfecte elasticis: ad hoc vero requiritur, vt et nota sit lex vis elasticæ elastri, et quousque se restituere valeat. His autem definitis facile erit motum vtriusque corporis post conflictum determinare.

§. 23. Si corpora oblique in se impingant, aut si plura corpora simul collidant, quos post conflictum habitura sint motus, hic esset superfluum inuestigare. Propositum enim tantum erat hic regularum collisionis genuinam dare demonstrationem; magis autem compositi casus ex his regulis resoluuntur, eatenusque sunt extra dubium positi, quatenus ab his simplicibus pendent.