At si pro medio resistente data fuerit curua AC; atque requiratur altera CM eius proprietatis, vt omnes descensus super MCA aequalibus absoluantur temporibus; solutio non dissimili modo efficietur. Nam ex data curua AC pro medio resistente, inueniatur curua eiusdem proprietatis pro vacuo *ac* per Scholion 2. Qua inuenta quaeratur curua *cm* ei adiungenda, quae omnes descensus in vacuo isochronos producat (432.). Denique methodo modo tradita ex curua composita *acm* pro vacuo quaeratur similis curua composita pro medio resistente ACM, cuius quidem pars AC iam est cognita, quippe ex ea lineam *ac* definiuimus. Idem ergo problema quod in vacuo tantum in se habebat difficultatis, in medio quoque resistente resoluitur. Denique hinc caput hoc finiens Lectorem beneuolum rogo, vt antequam ad caput sequens progrediatur, quae in Cap. I. ab §. 58. vsque ad finem cap. tradita sunt, repetere velit.

CAPUT

CAP OTU PUNCTI
fuerit curua AC; proprietatis, vt ualibus absoluan- mili modo effi- pro medio re- proprietatis pro inuenta quaera- e omnes descen- t (432.). Deni- curua composita curua compo- , cuius quidem e ex ea lineam oblema quod in ultatis, in medio e hinc caput hoc , vt antequam uae in Cap. I. radita sunt, re-
CAPUT
MOT
D
quam em si
AP, mina datae perp g ad nunc et Q dabit has v =Pd. alia perfi Tom

CAPUT QUARTUM

DE

MOTU PUNCTI SUPER DATA SUPERFICIE.

PROPOSITIO 90.

Problema.

§. 1.

Data via in superficie quacunque $Mm\mu$, *inuenire eius positionem respectu plani dati* APQ, *et radii osculi illius viae in* M *tam positionem quam longitudinem; nec non normalis in superficiem situm.* Tab. XVII. Fig. 1.

Solutio.

Sumto pro lubitu plano APQ in eoque axe AP, quorum respectu positio curuae $Mm\mu$ sit determinanda; ex tribus punctis proximis M, m et μ datae viae in superficie in planum APQ demittantur perpendicula MQ, mq, $\mu\varrho$; atque ex punctis Q, q, ϱ ad axem AP perpendicula QP, qp et $\varrho\pi$. Posito nunc initio abscissarum in A, sit $AP = x$; $PQ = y$ et $QM = z$. Quia porro superficies data ponitur, dabitur aequatio eius naturam exprimens inter tres has variabiles x, y et z; quae aequatio sit haec $dz = Pdx + Qdy$. Cum hac aequatione si coniungatur alia aequatio, exprimetur linea quaedam in ista superficie existens; quare cum linea $Mm\mu$ data po-

ponatur dabitur praeter aequationem $dz = Pdx + Qdy$ insuper alia aequatio, qua curua $Mm\mu$ determinatur, quam autem hic repraesentare non est opus. Sint elementa abscissae Pp, $p\pi = dx$ inter se aequalia, seu sumatur elementum dx constans. Erit ergo $pq = y + dy$; $\pi\varrho = y + 2dy + ddy$; atque $qm = z + dz$, et $\varrho\mu = z + 2dz + ddz$. His positis sit MN normalis in superficiem in puncto M, et N punctum quo haec normalis plano APQ occurrit, demittatur ex N in axem perpendiculum NH; erit $AH = x + Pz$ et $HN = -Qz - y$ (68). Sit nunc MR positio radii osculi curuae $Mm\mu$, et R incidentia eius in planum APQ; erit ex R in axem demisso perpendiculo RX; $AX = \frac{zdz(dyddy + dzddz)}{(dx^2+dy^2)ddz - dydzddy} + x$; atque $XR = \frac{zdx^2ddy + zdz(dzddy - dyddz)}{(dx^2+dy^2)ddz - dydzddy} - y$ (68). Longitudo vero radii osculi scilicet MO =

$$\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx^2(ddy^2+ddz^2)+(dyddz-dzddy)^2)}} \quad (72).$$

Denique concipiatur planum, in quo sita sunt elementa Mm, $m\mu$, productum, donec planum APQ intersecet sitque intersectio recta RKI, cui ex A erecta perpendicularis in K occurrat, et ex P in V; inuentum est supra esse $PV = \frac{zddy}{ddz} - y$ (68). Cum nunc sit $XR - PV : AX - AP = PV : PI$, erit $PI = \frac{(AX-AP)PV}{XR-PV}$. Est vero $AX - AP = \frac{zdx(dyddy+dzddz)}{(dx^2+dy^2)ddz - dydyddy}$ atque $XR - PV = \frac{zddyddz(dz^2-dy^2) + zdydz(ddy^2-ddz^2)}{ddz((dx^2+dy^2)ddz - dydzddy)}$. Quibus substitutis erit $PI = \frac{dx(dyddy+dzddz)(zddy-yddz)}{ddyddz(dx^2+dy^2)+dydz(ddy^2-ddz^2)}$ =

$= \frac{zdxddy - ydxddz}{dzddy - dyddz}$ atque $AI = PI - AP = \frac{zdxddy - ydxddz - xdzddy + xdyddz}{dzddy - dyddz}$. Hinc reperitur $AK = \frac{PV.AI}{PI} = \frac{zdxddy - ydxddz - xdzddy + xdyddz}{dxddz}$. Plani vero in quo sita sunt elementa Mm et $m\mu$, inclinatio ad planum APQ inuenietur, demittendo ex Q perpendiculari QS ad intersectionem RI; erit enim tangens anguli inclinationis $= \frac{QM}{QS}$. At cum sit $IV : PI = QV : QS$ erit illa tangens $= \frac{QM.IV}{PI.QV} = \frac{\sqrt{(dx^2ddz^2 + (dzddy - dyddz)^2)}}{dxddy}$. Anguli vero NMR, quem radius osculi cum normali in superficiem constituit, tangens est $= \frac{ddy(dx+Pdz) - ddz(Pdy - Qdx)}{(ddz - Qddy)\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$ (71). Ex his igitur omnia deduci possunt, quae ad positionem curuae $Mm\mu$ cognoscendam requiruntur. Q.E.I.

Corollarium I.

822. Curuae $Mm\mu$ proiectio in plano APQ est curua $Qq\varrho$, cuius natura exprimitur aequatione inter x et y. Quare ista proiectio habebitur, si ope aequationum $dz = Pdx + Qdy$, et eius, qua ipsa curua in superficie ducta determinatur, noua formetur aequatio eliminanda variabili z, quae sit inter x et y tantum.

Corollarium 2.

823. Simili modo, si eliminetur x, vt prodeat aequatio inter y et z; hac aequatione definietur proiectio curuae $Mm\mu$ in plano quod est normale ad axem AX. Atque aequatio in qua non inest y, sed

ſed tantum x et z dabit proiectionem curuae $Mm\mu$ in plano, quod normaliter planum APQ ſecundum ax in AX interſecat.

Corollarium 3.

824. Curuae autem $Mm\mu$ natura ex duabus eius proiectionibus in duobus planis inuicem normalibus diſtincte cognoſcitur. Qualem cognitionem quoque ſuppeditat vnica proiectio vna cum ipſa ſuperficie.

Corollarium 4.

825. Quamobrem ad curuam in ſuperficie data quamcunque characteribus deſignandam requiritur, vt praeter aequationem $dz = Pdx + Qdy$, qua ſuperficies determinatur, detur aequatio duas tantum variabiles inuoluens pro proiectione quapiam curuae $Mm\mu$.

Corollarium 5.

826. Si ſuperficies ſecetur plano, ſimili modo, quo conus ad ſectiones conicas producendas ſecari ſolet, curua ex hac ſectione orta erit in eodem plano. Quare his caſibus tam poſitio rectae IR erit conſtans, quam plani IMR inclinatio ad planum APQ.

Exemplum.

827. Si igitur detur ſuperficies quaecunque eaque ſecetur plano IMR; quaeratur curua hac ſectio-

tion m curuae $Mm\mu$. angi APQ ſecundum gens zdxd .
√(dx²d ıtura ex duabus iunct ınuicem norma- one m cognitionem duab vna cum ipſa ſu- ddy= $\frac{1}{a}ld$. et p . tion n in ſuperficie ſtitu ;nandam requi- +b. $=Pdx+Qdy$, tegr r aequatio duas quo iectione quapi- ſtan m= ſupe no, ſimili mo- nem .s producendas $\frac{zV(a^2.}{n}$ orta erit in co- curt poſitio rectae ſita ₹ inclinatio ad tur eod M i ies quaecunque IS= · curua hac ſec- V= tio-

tione orta. Ad hoc ponatur AI $= a$; AK $= b$; et anguli inclinationis plani IMR ad planum APQ tangens $= m$; eritque $a = \frac{zdxddy - ydxddz}{azddy - ayddz} - x$ et $b = \frac{zdxddy - ydxddz - xdzddy + xdyddz}{dxddz}$, atque $m = \frac{\sqrt{(dx^2ddz^2 + (dzddy - dyddz)^2)}}{dxddy}$. Ex quibus aequationibus coniunctis cum $dz = Pdx - Qdy$ natura curua hac ſectione genitae determinabitur. Ex prioribus vero duabus aequationibus oritur $\frac{b}{a} = \frac{dzddy - dyddz}{dxddz}$ ſeu $ddz : ddy = adz : bdx + ady$; cuius aequationis integralis eſt $\frac{1}{a} ldz = \frac{1}{a} l(bdx + ady) - \frac{1}{a} lc$, ſeu $cdz = bdx + ady$, et porro $cz = bx + ay + ff$. In prima vero aequatione ſi loco ddz et ddy eorum proportionalia ſubſtituantur, prodibit $a + x = \frac{bzdx + azdy - aydz}{bdz}$ ſeu $abdz + bxdz = bzdx + azdy - aydz$, cuius per zz diuiſae integralis eſt haec $c - \frac{a}{z} = \frac{bx + ay}{z}$ ſeu $cz = bx + ay + ab$ quod ergo ante erat ff hic eſt ab ſeu $ff = ab$. Conſtantem vero c tertia aequatio definiet; erit autem $m = \frac{dz\sqrt{(a^2 + b^2)}}{bdx + ady}$ ſeu $\frac{dz\sqrt{(a^2 + b^2)}}{m} = ady + bdx$. Quare erit ſuperior littera $c = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{m}$, atque praeter aequationem ſuperficiei naturam exprimentem habetur iſta $\frac{z\sqrt{(a^2 + b^2)}}{m} = bx + ay + ab$, ex quibus natura quaeſitae curuae eſt deriuanda. Quia autem tota curua quaeſita eſt in plano IMR, commodiſſime ea exprimetur aequatione inter coordinatas orthogonales in eodem plano ſumtas. Sumto ergo IR pro axe, ex M in eum demittatur perpendiculum MS et vocetur IS $= t$ et MS $= u$. Eſt vero IA : AK $=$ IP : PV ſeu PV $= \frac{ab + bx}{a}$ et QV $= \frac{ab + bx + ay}{a} = \frac{z\sqrt{(a^2 + b^2)}}{ma}$. Porro eſt $\sqrt{(a^2}$

$\sqrt{(a^2+b^2)}: a = \frac{z\sqrt{(a^2+b^2)}}{ma} : QS$; quare erit $QS = \frac{z}{m}$ et $SV = \frac{bz}{ma}$. Ex his prodibit $MS = u = \frac{z\sqrt{(1+m^2)}}{m}$ atque $IS = t = \frac{m(a+x)\sqrt{(a^2+b^2)} - bz}{ma}$. Ex quo oritur $z = \frac{mu}{\sqrt{(1+m^2)}}$ et $x = \frac{bu + at\sqrt{(1+m^2)}}{\sqrt{(a^2+b^2)(1+m^2)}} - a$ et substitutis his valoribus in aequatione $\frac{z\sqrt{(a^2+b^2)}}{m} = bx + ay + ab$ prodibit $y = \frac{au - bt\sqrt{(1+m^2)}}{\sqrt{(1+m^2)(a^2+b^2)}}$. His igitur valoribus loco x, y et z in aequatione superficiei substitutis proueniet aequatio inter t et u seu coordinatas orthogonales curuae quaesitae.

Corollarium 6.

828. Si intersectio plani secantis IR in ipsum axem AX incidat sumaturque I in A; erit $z = \frac{mu}{\sqrt{(1+m^2)}}$; $y = \frac{u}{\sqrt{(1+m^2)}}$ et $x = t$.

Corollarium 7.

829. Si intersectio IR plani secantis SMR cum plano APQ fuerit normalis ad axem AX erit $b = \infty$. Quare prodibunt $z = \frac{mu}{\sqrt{(1+m^2)}}$; $x = \frac{u}{\sqrt{(1+m^2)}} - a$ et $y = -t$.

Corollarium 8.

830. Cum valores loco z, y et x substituendi sint vnius dimensionis ipsarum t et u, perspicuum est aequationem inter t et u non plures habere posse dimensiones, quam ipsam aequationem inter z, y et x.

Co-

SL OTU PUNCTI
erit $QS = \frac{z}{m}$ et
831. $\frac{z\sqrt{(1+m^2)}}{m}$ atque
duarum din itur $z = \frac{mu}{\sqrt{(1+m^2)}}$
innumerabil his valoribus in
plano factae .b prodibit $y =$
s loco x, y et z
832. roueniet aequa-
ne, in qua l thogonales cur-
que determi
nera sum pe
ca et tornat
lis $dz = Pdx$- ntis IR in ipsum
euanescit et erit $z = \frac{mu}{\sqrt{(1+m^2)}}$;
aequationem
x non ingre
parallelae su
aequatio dz
omnes eas i secantis SMR
rectis ex sin l axem AX erit
ctum fixum $x = \frac{u}{\sqrt{(1+m^2)}}$
superficies l
sectiones pa
tera homol
coni. Aeq et x substituendi
bus, si quid t u, perspicuum
comparatae res habere pos-
dem dimens tionem inter z,
cies denique
Co-

Corollarium 9.

831. Quare si aequatio inter z, y et x fuerit duarum dimensionum, cuiusmodi praeter conicam innumerabiles dantur superficies, omnes sectiones plano factae erunt sectiones conicae.

Scholion.

832. In Comment. Tom. III. ea dissertatione, in qua lineam breuissimam in superficie quacunque determinaui, tria praecipue superficierum genera sum persecutus, quae erant cylindrica, conica et tornata seu rotunda. Aequatio vero generalis $dz = Pdx + Qdy$ dat superficies cylindricas si P euanescit et Q tantum ab y et z pendeat, ita vt aequationem pro hoc superficierum genere abscissa x non ingrediatur; omnes enim sectiones inter se parallelae sunt quoque aequales; pro his ergo est aequatio $dz = Qdy$. Ad genus conoidicum refero omnes eas superficies quae genenrantur ducendis rectis ex singulis curuae cuiuspiam punctis ad punctum fixum extra planum eius curuae situm. Quae superficies hanc habent proprietatem, vt omnes sectiones parallelae sint inter se similes earumque latera homologa, vt distantiae sectionum a vertice coni. Aequationes vero pro huiusmodi superficiebus, si quidam vertex poli fuerit in A, ita sunt comparatae, vt x, y et z coniunctim vbique eundem dimensionum numerum constituant. Superficies denique tornatae seu rotundae mihi sunt, quae

gene

ge[illegible]erantur conuerſione cuiuscunque curuae circa axem, qui axis ſi fuerit AX, poſito x conſtante aequatio inter y et z dabit circulum centri P. Quare aequatio pro iis hanc habebit formam $dz = Pdx - \frac{ydy}{z}$, ſeu $zdz + ydy = zPdx$, vbi Pz ab x tantum pendet; ſeu eſt $Q = -\frac{y}{z}$ et $P = \frac{X}{z}$ exiſtente X functione ipſius x. Quemadmodum autem in his ſuperficiebus tornatis omnes ſectiones axi normales ſunt circuli, ita tales ſuperficies concipi poſſunt, quarum ſectiones axi normales ſint curuae quaecunque ſimiles. Tales ſuperficies omnes hac continebuntur proprietate generali vt functio quaecunque ipſius x aequalis ſit functioni eiusdem vbique dimenſionum ipſarum y et z numeri. Vt ſi iſte dimenſionum numerus fuerit n; aequationis $Pdx = Rdz + Qdy$ pro ea haec erit proprietas vt ſit $Rz + Qy = n\int Pdx$, vel $Rdx + Qdy = \frac{zdR + ydQ}{n-1}$. Ex quo, an data aequatio ſit ad huiusmodi ſuperficiem, ſtatim concludi poteſt.

PROPOSITIO 91.

Problema.

833. *In ſuperficie quacunque data lineam determinare, quam corpus in ea motum et a nullis potentiis ſollicitatum deſcribit tam in vacuo quam in medio quocunque reſiſtente.*

So-

OTU PUNCTI
e curuae circa
ito x conſtante
centri P. Quare
mam $dz = Pdx -$
Pz ab x tantum
xiſtente X functione
utem in his ſu-
axi normales
oncipi poſſunt,
uruae quaecun-
es hac contine-
tio quaecunque
vbique dimen-
ſi iſte dimenſi-
s $Pdx = Rdz +$
t ſit $Rz + Qy$
dQ. Ex quo,
perficiem, ſta-
1.
data lineam de-
t a nullis poten-
quam in medio
So-

Solutio.

Quia corpus a nullis potentiis abſolutis ſollicitari ponitur, linea ab eo in ſuperficie deſcripta erit linea breuiſſima in vacuo (62.). Medii autem reſiſtentis vis celeritatem corporis tantum imminuit, neque directionem vllo modo afficit, quare etiam in medio reſiſtente via a corpore in quauis ſuperficie deſcripta erit pariter breuiſſima. Manentibus igitur vt ante $AP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$, ſit $dz = Pdx + Qdy$ aequatio ſuperficiei naturam exprimens, atque Mm, $m\mu$ duo lineae breuiſſimae cuiuſpiam elementa. Ex his ſupra pro linea breuiſſima inuenta eſt haec aequatio $Pdzddy + dxddy = Pdyddz - Qdxddz$ (69.), vnde oritur $ddz = \frac{(Pdz + dx)ddy}{Pdy - Qdx}$. At aequatio ad ſuperficiem differentiata dat $ddz = dPdx + Qddy + dQdy$, ex quibus coniunctis ſit $ddy = \frac{(Pdy - Qdx)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)}$ et $ddz = \frac{(Pdz + dx)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)}$. Dato ergo elemento Mm, ſequens $m\mu$ in linea breuiſſima inuenietur; erit enim $\pi\varrho = PQ + 2dy + ddy$ et $\varrho\mu = QM + 2dz + ddz$, et ipſarum ddy et ddz valores ſunt inuenti. Quare hinc ſequentis cuiusque elementi poſitio determinatur, atque ipſius lineae breuiſſimae natura per quamcunque eius proiectionem cognoſcitur. Q. E. I.

Corollarium I.

834. Si in aequatione pro ſuperficie P et Q tantum per x et y dantur, aequatio $ddy =$

(Pdy

$\frac{(Pdy - Qdx)(dPdx + dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)}$ proiectionem lineae breuissimae in plano APQ denotat.

Corollarium 2.

835. Pro linea ergo breuissima $Mm\mu$ sumtis elementis axis aequalibus erit $\pi\varrho = y + 2dy + \frac{(Pdy - Qdx)(dPdx + dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)}$ atque $\varrho\mu = z + 2dz + \frac{(Pdx + dz)(dPdx + dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)}$, ex quibus aequationibus punctum μ ex duobus praecedentibus M et m cognoscitur.

Corollarium 3.

836. Quia pro linea breuissima angulus RMN euanescit (71.), incidet R in N, positio ergo radii osculi ita se habebit, vt sit $AX = x + Pz$ et $XR = -Qz - y$. Longitudo vero radii osculi erit $= -\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}{dPdx + dQdy}$.

Corollarium 4.

837. Planum vero IMR in quo sita sunt elementa lineae breuissimae $Mm\mu$ ita determinabitur, vt sit $AL = -x + \frac{y(dx+Pdz) - z(Pdy - Qdx)}{Qdz + dy}$; et $AK = -y + \frac{z(Pdy - Qdx) + x(dy + Qdz)}{dx + Pdz}$. Tangens vero anguli quem planum IMR cum plano APQ constituit erit $= \frac{\sqrt{((dx+Pdz)^2 + (dy+Qdz)^2)}}{Pdy - Qdx}$. Huiusque anguli secans est $= \frac{\sqrt{(1+P^2+Q^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}{Pdy - Qdx}$, seu cosinus $= \frac{Pdy - Qdx}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}$.

Exem-

VNCTI
reuissimae
$m\mu$ sum-
$+ 2dy +$
$2dz +$
ibus pun-
et m co-
ilus RMN
ergo ra-
$+ Pz$ et
osculi erit
sita sunt
termina-
$- Qdx)$; et
ens vero
PQ con-
sque an-
seu cosi-
Exem-

Exemplum 1.

838. Sit superficies cylindrica quaecunque axem habens AP, exprimetur eius natura hac aequatione $dz = Qdy$ euanescente P in generali aequatione $dz = Pdx + Qdy$. Quare pro proiectione lineae breuissimae huius superficiei in plano APQ habebitur ob $P = o$ et $dP = o$ haec aequatio $ddy = \frac{-QdQdy}{1+Q^2}$ seu $l\frac{\alpha dx}{dy} = l\sqrt{(1+Q^2)}$ et $\alpha dx = dy\sqrt{(1+Q^2)}$, si quidem Q tantum per y detur; at si Q per y et z detur variabilis z est eliminanda ope aequationis $dz = Qdy$. Vti in cylindro circulari in quo est $z^2 + y^2 = a^2$; erit $z = \sqrt{(a^2 - y^2)}$, et $Q = \frac{y}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$. Quare erit $\alpha dx = \frac{ady}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$. In genere autem $\int dy\sqrt{(1+Q^2)}$ exprimit arcum sectionis ad axem AP normalis; quare dicto hoc arcu $= s$ erit $\alpha x = s$. Ex quo intelligitur, si talis superficies in planum explicetur, fore lineam breuissimam rectam; vti constat.

Exemplum 2.

839. Sit superficies proposita conica quaecunque verticem habens in A; aequatio pro tali superficie ita poterit adaptari, vt z aequetur functioni vnius dimensionis ipsarum x et y. Quare in aequatione $dz = Pdx + Qdy$, litterae P et Q erunt functiones nullius dimensionis ipsarum x et y. Hanc ob rem, vti iam alibi ostendi, erit $Px + Qy = o$, seu $Q = \frac{-Px}{y}$; vnde fiet $dQ = \frac{Pxdy - Pydx - yxdP}{y^2}$;

 et

et $Pdy - Qdx = \frac{P(ydy+xdx)}{y}$; atque $dPdx + dQdy = \frac{y^2dPdx+Pxdy^2-Pydxdy-yxdPdy}{y^2} = \frac{(ydx-xdy)(ydP-Pdy)}{y^2}$ et tandem $(1+P^2+Q^2) = \frac{y^2+P^2y^2+P^2x^2}{y^2}$. Quibus substitutis erit $ddy = \frac{P(ydy+xdx)(ydx-xdy)(ydP-Pdy)}{ydx(y^2+P^2y^2+P^2x^2)}$. Ponatur $y = px$; aequabitur P functioni cuidam ipsius p tantum, quia P est functio nullius dimensionis ipsarum x et y. Erit vero $dy = pdx + xdp$ et $ddy = xddp + 2dxdp = -\frac{P(p^2xdx+px^2dp+xdx)(pxdP-Ppdx-PxdP)x^2dp}{px^3dx(p^2+P^2p^2+P^2)} = \frac{Pdp(p^2dx+pxdp+dx)(Ppdx+PxdP-pxdP)}{pdx(p^2+P^2+P^2p^2)}$. Ex qua aequatione quidem proiectio difficulter cognoscitur. Quomodo autem linea breuissima in tali superficie sit determinanda fusius docui in Comment. III. p. 120. Ceterum idem de linea breuissima est notandum quod ante, scilicet quod ea in planum explicata superficie conica abeat in rectam.

Scholion.

840. Simili modo in determinandis lineis breuissimis super aliis superficierum speciebus non hic immoror, quia in cit. loco hanc materiam plenius exposui. Progredior ergo ad inuestigationem linearum, quae in superficie a corpore a quibuscunque potentiis sollicitato describuntur. Antea vero necesse est, vt in effectus cuiusque potentiae curatius inquiramus.

DEFINITIO 4.

841. *Vim prementem vocabimus in sequentibus eam vim normalem, cuius directio est normalis ad ipsam superficiem in qua corpus mouetur.* Co-

U PUNCTI
Pdx + dQdy
Quibus sub-
. Po-
cuidam ipsius
is dimensionis
dx + xdp et ddy
Ex qua ae-
r cognoscitur.
n tali super-
n Comment.
aea breuissima
uod ea in pla-
in rectam.
inandis lineis
speciebus non
nc materiam
d inuestigatio-
a corpore a
cribuntur. An-
cuiusque po-
in sequentibus
normalis ad
r. Co-

Corollarium.

842. Haec vis premens ergo vel auget vim centrifugam vel minuit, prout eius directio directioni radii osculi lineae breuissimae vel contraria est vel in eam incidit (79.).

DEFINITIO 5.

843. *Vim deflectentem vocabimus in sequentibus eam vim normalem, cuius directio est in plano superficiem tangente et perpendicularis in viam a corpore descriptam.*

Corollarium.

844. Haec ergo vis corpus a linea breuissima, quam a nullis potentiis sollicitatum describeret, deflectit, et vel cis vel vltra eam detrahit pro eius directione vel cis vel vltra tendente.

PROPOSITIO 92.
Problema.

845. *Determinare effectum vis prementis in corpus super superficie quacunque motum, quod praeterea a nullis potentiis sollicitatur.* Tab. XVII. Fig. 1.

Solutio.

Quia haec vis premens est normalis in superficiem, ideoque eius directio MN; ea neque ceteceleritatem, neque directionem motus efficiet, sed tota in pressione superficiei consumetur, corpus igitur in eadem linea progredietur, in qua si haec vis abesset, moueretur; quae autem est linea breuissima in prop. praec. determinata. Mouebitur ergo corpus in linea $Mm\mu$, cuius radius osculi MO incidet in normalem superficiei MN. Sit ergo MN directio huius potentiae prementis, quae propterea superficiem versus interiora secundum MN premet. Ponatur haec vis premens $= M$; premetur ab ea superficies secundum MN vi $= M$. At si radius osculi MO in eandem plagam incidere ponatur, vis centrifuga vi prementi erit contraria eiusque effectum minuet. Cum autem $Mm\mu$ sit linea breuissima, est radius osculi $MO = -\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}{dPdx+dQdy}$, per quem si diuidatur dupla altitudo v celeritati in M debita, prodibit vis centrifuga. Hanc ob rem erit vis, qua superficies secundum MN premitur $= + \frac{2v(dPdx+dQdy)}{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(1+P^2+Q^2)}} + M$. Positio tandem huius vis prementis per superiora inuenta est $AH = x + Pz$ et $HN = -Qz - y$; demisso scilicet ex puncto N, in quo normalis MN plano APQ occurrit, ad axem perpendiculo NH. Q. E. I.

Corollarium 1.

846. Cum neque altera vis normalis deflectens, neque vis tangentialis neque vis resistentiae, si quae adest, pressionem in superficiem afficiant; perspicitur, a quibuscunque potentiis corpus praeterea sollicitetur, pressionem semper tantam esse quantam hic assignauimus.

Corollarium 2.

847. Quantumuis igitur via a corpore descripta a linea breuissima discrepet, tamen pressio in superficiem fit secundum normalem in superficiem, seu secundum radium osculi lineae breuissimae, non vero secundum ipsius curuae descriptae radium osculi, cuius longitudo etiam ad pressionem non requiritur.

Scholion.

848. Ob hanc causam eam radii osculi lineae breuissimae formulam adhibuimus, in qua differentialia secundi gradus non insunt, ne is pendeat a positione duorum elementorum Mm et $m\mu$, per quae corpus reipsa mouetur. Sed iste radius osculi ex vnico elemento Mm innotescere debet: Si enim corpus propter vim deflectentem non lineam breuissimam describat, differentialia secundi gradus ddy et ddz non amplius in radium osculi lineae breuissimae ingredi debent.

PROPOSITIO 93.

Problema.

849. *Vis tangentialis, quae secundum tangentem MT corpus trahit, effectum in corpus in superficie quacunque motum determinare.* Tab. XVII. Fig. 2.

So-

Solutio.

Sit haec vis tangentialis $=T$, corpusque per elementum Mm progrediatur celeritate altitudini v debita; quia haec vis motum diminuit, erit $dv=-T$. $Mm=-T\surd(dx^2+dy^2+dz^2)$, manentibus iisdem denominationibus, quibus ante sumus vsi. Praeterea vero haec vis neque pressionem neque deuiationem a linea breuissima afficit. Ad positionem vero directionis huius vis inueniendam, producatur tangens MT donec occurrat plano APQ in T; erit T punctum in elemento qQ producto. Erit ergo $dz:\surd(dx^2+dy^2)=z:QT$; eritque $QT=\frac{z\surd(dx^2+dy^2)}{dz}$. Ex T demittatur in axem perpendiculum TF; erit $\surd(dx^2+dy^2):dx=QT:PF$; quare habetur $PF=\frac{zdx}{dz}$ et $AF=\frac{zdx-xdz}{dz}$. Porro ob $dx:dy=\frac{zdx}{dz}:y-FT$ erit $FT=y-\frac{zdy}{dz}$; ex quo punctum T determinatur. Q. E. I.

Corollarium.

850. Cum resistentia ad vim tangentialem sit referenda, ex his intelligitur, quomodo resistentiae effectus sit determinandus. Vt si fuerit resistentia $=R$, erit $dv=-(T+R)\surd(dx^2+dy^2+dz^2)$.

PROPOSITIO 94.

Problema.

Tab. XVII. Fig. 3. 851. *Vis normalis deflectentis N effectum in corpus super superficie quacunque motum determinare.*

Solu-

Solutio.

Positis vt ante $AP=x$, $PQ=y$ et $QM=z$, exprimatur superficiei natura hac aequatione $dz=Pdx+Qdy$; et moueatur corpus celeritate altitudini v debita per elementum Mm: quo percurso, nisi vis deflectens adesset, progrederetur per elementum $m\mu$ secundum lineam breuissimam; foretque $\pi\varrho=y+2dy+\frac{(Pdy-Qdx)(dPdx+dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)}$ et $\varrho\mu=z+2dz+\frac{(dx+Pdz)(dPdx+dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)}$ (835.). Iam accedat vis normalis deflectens N, quae directionem habeat antrorsum. Haec ergo vis efficiet, vt corpus descripto elemento Mm non per $m\mu$ incedat, sed ab hac directione antrorsum deflectat. Ponamus igitur pergere per $m\nu$, erunt Mm et $m\nu$ duo elementa curuae a corpore descriptae. Quare demisso ex ν in planum APQ perpendiculo $\nu\sigma$; erit $\pi\sigma=y+2dy+ddy$ et $\sigma\nu=z+2dz+ddz$. Hinc ergo habebitur $\sigma\varrho=\frac{(Pdy-Qdx)(dPdx+dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)}-ddy$ et $\mu\varrho-\nu\sigma=\frac{(dx+Pdz)(dPdx+dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)}-ddz$. Posito vero breuitatis ergo $\frac{(Pdy-Qdx)(dPdx+dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)}=dd\eta$ et $\frac{(dx+Pdz)(dPdx+dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)}=dd\zeta$, inuenietur radius osculi angulo elementari $\mu m\nu$ respondens $=$

$$\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\surd((dz\,dd\eta-dz\,ddy-dy\,dd\zeta+dy\,ddz)^2+dx^2(dd\eta-ddy)^2+dx^2(dd\zeta-ddz)^2)}$$

Hic ergo si dicatur $=r$ erit $N=\frac{2v}{r}$ seu $2v=Nr$, quia hic angulus eodem modo generatur, quo corpus a vi normali in plano a linea recta deflectiflectitur. Est vero $dzdd\eta - dydd\zeta = -\frac{(dy+Qdz)(dPdx+dQdy)}{(1+P^2+Q^2)}$. Atque loco $dd\eta$ et $dd\zeta$ debitis valoribus substitutis fit

$$r = \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx^2(ddy^2+ddz^2)+(dzddy-dyddz)^2-\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)(dPdx+dQdy)^2}{1+P^2+Q^2})}}$$

Cum autem per aequationem $dz = Pdx + Qdy$ sit $dPdx + dQdy = ddz - Qddy$, erit in subsidium hac ipsa aequatione $dz = Pdx + Qdy$ vocata $r = \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}{-ddy(dx+Pdz)+ddz(Pdy-Qdx)}$. Hanc ob rem erit $ddz(Pdy-Qdx) - ddy(dx+Pdz) = \frac{N}{2v}(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}$. Q. E. I.

Scholion I.

852. Congruit haec formula cum ea, quam supra (79) pro effectu huiusmodi vis determinando inuenimus. Differentia enim tantum est in signo litterae N, quam vim ibi negatiue accipiendam esse apparet. Atque hic etiam de signo non certi esse potuissemus, quia ex quantitate radix quadrata, quam hic extraximus, aeque potest esse negatiua ac affirmatiua. Hoc vero dubium, si calculus ad casum specialem accommodetur, statim tollitur; quia formula eiusmodi esse debet, vt punctum ν cis μ cadat si potentia N antrorsum, vt posuimus, fuerit directa. Ex quo ope exempli etiam signum radicis quadratae determinaui; atque hanc ipsam formulam inueni.

Co-

V PVNCTI
substitutis fit
$Pdx + Qdy$
in subsidium
vocata $r =$
Hanc ob rem
$dz) = \frac{N}{2v}(dx^2$
E. I.
m ea, quam
determinando
n est in signo
ipiendam esse
non certi esse
ix quadrata,
esse negatiua
si calculus ad
atim tollitur;
vt punctum ν
n, vt posui-
xempli etiam
i; atque hanc
Co-

Corollarium I.

853. Si vis deflectens N euanescat, corpus motum suum in linea breuissima continuabit; id quod ipsa aequatio quoque indicat. Posito enim $N = o$, habebitur $ddy(dx+Pdz) = ddz(Pdy-Qdx)$, quae aequatio est pro linea breuissima.

Corollarium 2.

854. Quaecunque ergo vis premens, et vis tangentialis atque resistentia corpus in superficie motum sollicitet, si modo nulla affuerit vis deflectens, corpus semper in linea breuissima mouebitur.

Scholion 2.

855. Quod autem ad positionem huius vis deflectentis N attinet, ea ex hoc deducetur, quod ea posita sit in plano tangente superficiem, atque simul sit normalis curuae descriptae; sit ergo MG eius directio et G punctum, in quo plano APQ occurrit; ita vt vis N secundum MG trahere censenda sit, dum eam ante antrorsum vrgere posuimus. Primo ergo determinari debet intersectio plani superficiem in M tangentis intersectio cum plano APQ, quae sit recta TVG; Haec vero inuenietur, si duae tangentes superficiem ad planum APQ vsque producantur, atque puncta, in quibus in planum APQ incidunt linea recta iungantur. Sit ergo MT tangens lineae descriptae, Tab. XVII. Fig. 4.

 quae

quae propterea superficiem quoque tanget; erit vt iam inuenimus $AF = \frac{zdx}{dz} - x$ et $FT = y - \frac{zdy}{dz}$ (849.). Porro superficies secta intelligatur plano PQM, sitque MV sectionis huius tangens; erit $QV = \frac{z}{Q}$, ex aequatione $dz = Pdx + Qdy$ posito $dx = 0$. Innotescit ergo punctum V, quocirca recta TV producta erit intersectio plani tangentis superficiem in M cum plano APQ. Punctum ergo G in quo recta MG plano APQ occurrit, positum erit in recta TV. Porro in recta TQ sumatur $QS = \frac{zdz}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$; eritque MS normalis in elementum Mm descriptum. Atque si ad QS ducatur normalis SG, ex hac recta SG omnes rectae ad M ductae erunt in elementum Mm perpendiculares. Quare cum MG sit quoque normalis in elementum descriptum, punctum G quoque positum erit in recta SG. Punctum ergo G erit in intersectione rectarum TV et SG. Est vero $PL = \frac{ydy+zdz}{dx}$, et ang. ELG = ang. PQT. Ponatur $GE = t$, erit $LE = \frac{tdy}{dx}$, et $PE = \frac{ydy+tdy+zdz}{dx}$. Deinde etiam propter triangula similia est $FP : FT + PV = PE : GE - PV$, hoc est $\frac{zdx}{dz} : \frac{z}{Q} - \frac{zdy}{dz} = \frac{ydy+tdy+zdz}{dx} : t - \frac{z}{Q} + y$. Hinc prouenit $t = \frac{z(dx+Pdz)}{Qdx-Pdy} - y = GE$, et $AE = x + \frac{z(dy+Qdz)}{Qdx-Pdy}$, vnde punctum G determinatur. Si ergo ducatur recta QG erit $QG^2 = \frac{z^2(dx+Pdz)^2}{(Qdx-Pdy)^2} + \frac{z^2(dy+Qdz)^2}{(Qdx-Pdy)^2}$, et $QG = \frac{z\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2+dz^2(1+P^2+Q^2))}}{Qdx-Pdy}$ atque ipsa $MG = \frac{z(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}{Qdx-Pdy}$.

PRO-

' PUNCTI
anget; erit
$T = y - \frac{zdy}{dz}$
gitur plano
is; erit QV
osito $dx = 0$.
a recta TV
ntis superfi-
im ergo G
it, positum
TQ sumatur
in elemen-
QS ducatur
es rectae ad
rpendicula-
malis in ele-
que positum
erit in in-
vero PL =
Ponatur GE
. Deinde
: FT + PV
$\frac{ydy+tdy+zdz}{dx}$
$-y = GE$,
G deter-
erit $QG^2 =$
$+P^2+Q^2)$
$P^2+Q^2)$
PRO-

PROPOSITIO 95.
Problema.

856. *Si corpus super superficie motum a quotcunque potentiis sollicitetur; definire vires normales prementem scilicet et deflectentem, atque vim tangentialem ex resolutione omnium ortam.*

Solutio.

Quaecunque fuerint potentiae sollicitantes eae ad tres reduci possunt, quarum directiones sint secundum tres coordinatas x, y, z. Sit nunc vis corpus in M secundum parallelam abscissae PA trahens $= E$; vis secundum parallelam ipsi QP trahens $= F$, et vis secundum MQ trahens $= G$. Singulae ergo hae vires resoluendae sunt in ternas, normalem prementem scilicet, normalem deflectentem et tangentialem. Quia autem hae tres directiones sunt inter se normales, ex quaque ipsarum E, F et G vires normales et tangentialis prodibunt, si illae ducantur in cosinum anguli, quem illarum virium directiones cum istis constituunt. Incipiamus a vi tangentiali, cuius directio est MT existente $AF = \frac{zdx}{dz} - x$ et $FT = y - \frac{zdy}{dz}$, atque $QT = \frac{z\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dz}$ et $MT = \frac{z\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{dz}$. Vnde erit cosinus anguli QMT, quem directio vis G cum vi tangentiali constituit $= \frac{QM}{MT} = \frac{dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. In quem si ducatur vis G, prodibit vis tangentialis ex ea orta $= \frac{Gdz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Cosinus vero anguli, quem MT Tab. XVII. Fig. 2.

con-

constituit cum directione vis F, quae est ipsi QP parallela est $=$ cos. PQT. ſQMT $= \frac{PQ-FT}{QT} \cdot \frac{QT}{MT} = \frac{dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Vis ergo tangentialis ex F orta est $= \frac{Fdy}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Cosinus porro anguli, quem directio vis E constituit cum MT est $= \frac{dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$ ideoque vis tangentialis ex vi E orta $= \frac{Edx}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$

Tab. XVII. Fig. 1. Iam consideretur vis premens, cuius directio est MN, existente $AH = x + Pz$ et $HN = -y - Qz$, seu $PH = Pz$ et $QP + HN = -Qz$. Ex quo erit $QN = z\sqrt{(P^2+Q^2)}$ et $MN = z\sqrt{(1+P^2+Q^2)}$. Anguli ergo, quem directio potentiae G cum MN constituit, cosinus est $\frac{MQ}{MN} = \frac{1}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$, ideoque vis premens ex G orta $= \frac{G}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$. Porro anguli, quem directio vis F, quae est parallela ipsi QP, cum MN constituit, cosinus est $=$ cos. PQN. ſQMN $= \frac{(PQ+HN)QN}{QN.MN} = -\frac{Q}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$. Ergo vis premens ex vi F orta est

Tab. XVII. Tab. 4. $= -\frac{FQ}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$. Atque simili modo vis premens ex vi E orta est $= -\frac{EP}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$. Denique cum vis deflectentis directio sit MG, atque $PE = \frac{z(dy+Qdz)}{Qdx-Pdy}$ et $QP + EG = \frac{z(dx+Pdz)}{Qdx-Pdy}$; erit anguli, quem MG cum directione vis G constituit, cosinus $= \frac{Qdx - Pdy}{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1+P^2+Q_2)}}$; quare vis deflectens ex vi G orta est $= \frac{G(Qdx-Pdy)}{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$

Porro anguli, quem MG cum directione vis F con-

PUNCTI

ipsi QP pa- $\frac{PQ-FT}{QT} \cdot \frac{QT}{MT} =$ F orta est , quem di- ctio est MN, , seu PH= QN=$z\sqrt{(P^2}$ nguli ergo, stituit, co- emens ex G m directio MN consti- $\frac{(PQ+HN)QN}{QN.MN} =$ F orta est premens ex cum vis de $\frac{z(dy+Qdz)}{Qdx-Pdy}$ et m MG cum vis defle- $1+P^2+Q^2)$ ione vis F con-

constituit, cosinus est $= \frac{PQ+EG}{MG} = \frac{dx + Pdz}{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$; quamobrem vis deflectens ex vi F orta est $= \frac{F(dx+Pdz)}{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+P^2+Q^2)}}$

Denique anguli, quem directio vis E cum MG constituit, cosinus est $= \frac{-PE}{MG} = \frac{-dy - Qdz}{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$. Vis ergo deflectens ex vi E orta est $= \frac{-E(dy+Qdz)}{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$.

Cum autem ante vim tangentialem vocauerimus T; vim prementem $=$ M et vim deflectentem $=$ N: ad has vires tres propositas E, F, et G reduximus; erit namque $T = \frac{Edx+Fdy+Gdz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$ et $M = \frac{-EP-FQ+G}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$ atque $N = \frac{-E(dy+Qdz)+F(dx+Pdz)+G(Qdx-Pdy)}{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$.

Q. E. I.

Corollarium I.

857. Si igitur corpus a tribus potentiis E, F et G sollicitetur; erit, posito v pro altitudine debita celeritati in M, $dv = -Edx - Fdy - Gdz$ (849.), si loco T ponatur vis tangentialis ex resolutione potentiarum E, F et G orta.

Co-

Corollarium 2.

858. Si praeterea corpus in medio resistente mouetur, atque resistentia in M fuerit $= R$; erit $dv = -Edx - Fdy - Gdz - R\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$.

Corollarium 3.

859. Si in aequatione §. 851. inuenta, in qua effectus vis deflectentis N est determinatus, loco N substituatur vis deflectens ex resolutione virium E, F et G orta, prodibit $\frac{2vddz(Pdy - Qdx) - 2vddy(dx + Pdz)}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = -E(dy + Qdz) + F(dx + Pdz) - G(Pdy - Qdx)$.

Corollarium 4.

860. Si ergo ex istis duabus aequationibus confletur vna eliminanda v; prodibit aequatio, quae cum locali ad superficiem $dz = Pdx + Qdy$ coniuncta determinabit viam a corpore in superficie descriptam.

Corollarium 5.

861. Vis autem, qua superficies secundum normalem in eam premitur, tam ex vi normali premente M, quam ex vi centrifuga orta est $= \frac{(G - EP - FQ)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2v(dPdx + dQdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$ (845), substituto loco M valore inuento.

Corollarium 6.

862. Est vero ex aequatione coroll. 3. inuenta $2v = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)(E(dy + Qdz) - F(dx + Pdz) + G(Pdy - Qdx))}{-ddz(Pdy - Qdx) + ddy(dx + Pdz)}$

quo

quo valore ibi substituto prodibit tota pressio $= \frac{(Gdxddy - Pdxddz + Edyddz - Edzddy)\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}{ddz(Pdy - Qdx) - ddy(dx + Pdz)}$.

Scholion.

863. Quia tres potentiae E, F, G directiones habent inuicem normales, erit potentia iis aequiualens $= \sqrt{(E^2 + F^2 + G^2)}$. His vero tribus viribus aequiualere inuenimus tres M, N et T, quarum directiones sunt quoque inuicem normales; quare istis tribus aequiualens vis erit $= \sqrt{(M^2 + N^2 + T^2)}$. Quamobrem si loco M, N et T substituantur valores inuenti ex E, F et G, prodire debet quoque $\sqrt{(E^2 + F^2 + G^2)}$; id quod calculo instituto re ipsa se habere deprehendetur. Inseruit autem hoc instar probationis, verum calculus prolixus, quo haec resolutio est absoluta, recte fuerit institutus, an vero secus. Hac vero probatione instituta reperientur se hae formulae recte habere.

PROPOSITIO 96.

Problema.

864. *In hypothesi grauitatis uniformis et deorsum directae g, determinare lineam, quam corpus super quacunque superficie proiectum in vacuo describit.*

Solutio.

Sit APQ planum horizontale, et M punctum tam in superficie data, quam in linea a corpore Tab. XVII Fig. 2.

 de-

descripta. Erit ergo MQ verticalis et propterea directio vis grauitatis g. Positis $AP = x$, $PQ = y$, et $QM = z$, atque aequatione superficiei naturam exprimente $dz = Pdx + Qdy$; sit celeritas in M, qua elementum Mm percurritur, debita altitudini v. Cum igitur problema hoc sit casus praecedentis; fit enim $G = g$, $E = o$ et $F = o$; habebuntur hae duae aequationes $dv = -g\,dz$ (857.), atque $2v\,ddz\,(Pdy - Qdx) - 2v\,ddy\,(dx + Pdz) + g(Pdy - Qdx)(dx^2 + dy^2 + dz^2) = o$. Sit porro altitudo debita celeritati, quam corpus habiturum esset, si in planum horizontale APQ perueniret, $= b$; erit $v = b - gz$. Per alteram vero aequationem est $2v = \frac{g(Pdy - Qdx)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{ddy(dx + Pdz) - ddz(Pdy - Qdx)}$. Vnde erit $\frac{dv}{2v} = \frac{dz\,ddz(Pdy - Qdx) - dz\,ddy(dx + Pdz)}{(Pdy - Qdx)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$. Quae aequatio ope aequationis $dz = Pdx + Qdy$ transmutatur in hanc $\frac{dv}{2v} = \frac{dy\,ddy + dz\,ddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2} - \frac{Pddy}{Pdy - Qdx}$; quae integrata dat $lv = l(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2\int \frac{Pddy}{Pdy - Qdx}$. In quouis ergo casu speciali inuestigari debet, an $\frac{Pddy}{Pdy - Qdx}$ integrationem admittat. Quod si contigerit, habebitur v in differentialibus primi gradus; atque cum sit $v = b - gz$, orietur aequatio differentialis primi gradus curuae descriptae naturam exprimens. Pressio vero in superficiem secundum normalem erit $= \frac{g\,dx\,dy\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}{ddz(Pdy - Qdx) - ddy(dx + Pdz)}$, quae sublatis differentialibus secundi gradus abit in hanc $\frac{-g}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}} - \frac{2(b - gz)(dPdx + dQdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$. Q. E. I.

Co-

S PVNCTI
865. propterea grauitatis x, $PQ = y$, perficie qu ei naturam sci potest, itas in M, moueretur. ltitudini v. ecedentis; untur hae que $2v\,ddz$
866. $dy - Qdx$) absoluitur, tudo debiaequatione esset, si in atque $\frac{ddt}{dt}$ = $= b$; erit nem est $2v$
867. atio ope $= \frac{g(Pdy - Qd}{2dx(b - g}$ ur in hanc $ddz = \frac{gQ(P}{2d}$ ita dat lv Hinc erit uouis ergo $- \frac{(dPdx + dQd}{1 + P^2}$ integrahabebitur dius osculi ie cum sit alis primi ens. Pres-
868. em erit = ticularibus, rentialibus ficierum co fusius expor exempla ac
Co-

Corollarium 1.

865. Celeritas ergo corporis in hypothesi grauitatis vniformis g et deorsum directae in superficie quacunque moti ex sola altitudine cognosci potest, omnino vt si corpus in eodem plano moueretur.

Corollarium 2.

866. Si tempusculum, quo elementum Mm absoluitur, ponatur dt, erit $dt = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{\sqrt{v}}$. Per aequationem ergo inuentam erit $ldt = \int \frac{Pddy}{Pdy - Qdx}$; atque $\frac{ddt}{dt} = \frac{Pddy}{Pdy - Qdx}$.

Corollarium 3.

867. Ex inuentis aequationibus reperietur $ddy = \frac{g(Pdy - Qdx)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{2dx(b - gz)(1 + P^2 + Q^2)} + \frac{(dPdx + dQdy)(Pdy - Qdx)}{(1 + P^2 + Q^2)dx}$ atque $ddz = \frac{gQ(Pdy - Qdx)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{2dx(b - gz)(1 + P^2 + Q^2)} + \frac{(dPdx + dQdy)(dx + Pdz)}{(1 + P^2 + Q^2)dx}$. Hinc erit $dz\,ddy - dy\,ddz = \frac{gP(Pdy - Qdx)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{2(b - gz)(1 + P^2 + Q^2)} - \frac{(dPdx + dQdy)(dy + Qdz)}{1 + P^2 + Q^2}$. Curuae vero descriptae radius osculi erit $= \frac{2(dx^2 + dy^2 + dz^2)(b - gz)\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}{\sqrt{(g^2(Pdy - Qdx)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 4(b - gz)^2(dPdx + dQdy)^2)}}$

Scholion.

868. Harum formularum vsum in casibus particularibus, quibus certa quaedam species superficierum consideratur, in sequentibus problematis fusius exponemus, quibus singularium superficierum exempla adiungemus.

PRO-

PROPOSITIO 97.
Problema.

Tab. XVIII. Fig. 1. 869. *In hypothesi grauitatis uniformis deorsum tendentis g, determinare motum corporis in superficie cuiuscunque cylindri, cuius axis sit verticalis.*

Solutio.

Quia axis cylindri ponitur verticalis, erunt omnes sectiones horizontales inter se aequales; sit igitur ABQC basis cylindri, in cuius superficie mouetur corpus. Ponatur $AP = x$, $PQ = y$, sitque z corporis altitudo super puncto Q in superficie cylindri. Natura ergo huius superficiei cylindricae hac exprimetur aequatione $o = Pdx + Qdy$ seu $Qdy = -Pdx$. Haec autem aequatio orietur ex generali $dz = Pdx + Qdy$, si P et Q fiant quantitates infinite magnae, seu euanescente coefficiente ipsius dz, si quem assumsissemus. Quamobrem in aequationibus ante inuentis P et Q quasi quantitates infinite magnae considerari debent, etiamsi sint finitae magnitudinis. Erunt autem P et Q functiones ipsarum x et y tantum, neque in iis inerit z. His ergo in calculum deductis, habebitur $v = b - gz$; atque $2v = \frac{g(Pdy - Qdx)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{Pdzddy - Pdyddz + Qdxddz} = \frac{g(dx^2 + dy^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dydzddy - dy^2ddz - dx^2ddz}$ propter analogiam $P : Q = dy : -dx$. At posterior aequatio logarithmica erit $lv = l(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2\int \frac{dyddy}{dx^2 + dy^2} = l(dx^2 + dy^2 + dz^2)$

PVNCTI
mis deorsum
in superficie
icalis.
alis, erunt
e aequales;
is superficie
Q=y, sitque
n superficie
ei cylindri-
dx + Qdy
itio orietur
et Q fiant
tescente co-
nus. Quam-
P et Q quasi
debent, etia-
atem P et Q
neque in iis
is, habebi-
giam P:Q=
ithmica erit
$+dy^2+dz^2)$

$-l(dx^2 + dy^2) + lc$. Vnde fit $\frac{v}{c} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dx^2 + dy^2} = \frac{b - gz}{c} = 1 + \frac{dz^2}{dx^2 + dy^2}$. Hinc oritur $(b - c - gz)(dx^2 + dy^2) = c\,dz^2$ seu $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dz\sqrt{c}}{\sqrt{(b - c - gz)}}$, cuius integralis est $\int\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = -\frac{\sqrt{c(b - c - gz)}}{g}$, vbi $\int\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ denotat arcum basis BQC motu horizontali percursum. Si tempusculum quo elementum Mm absoluitur ponatur dt, erit $\frac{ddt}{dt} = \frac{dyddy}{dx^2 + dy^2}$ atque $adt = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, porroque $at = \int\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Quare tempora erunt proportionalia arcubus in basi respondentibus. Aequatio autem $\int\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = -\frac{\sqrt{c(b - c - gz)}}{g}$, dabit aequationem pro curua in superficie cylindrica descripta, si haec superficies in planum concipiatur explicata: denotabit enim tum $\int\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ abscissam in axe horizontali et z applicatam verticalem. Proiectionem vero curuae descriptae in plano verticali planum horizontale iuxta AC secante habebimus, si ope aequationis $Pdx + Qdy = o$ eliminetur y, vt prodeat aequatio inter x et z, quae erunt coordinatae huius proiectionis. Scilicet ob $dy = -\frac{Pdx}{Q}$ erit $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx}{Q}\sqrt{(P^2 + Q^2)}$, ideoque $\int\frac{dx\sqrt{(P^2 + Q^2)}}{Q} = \frac{\sqrt{c(b - c - gz)}}{g}$, vbi in P et Q loco y eius valor in x debet substitui. Pressio vero quam superficies sustinebit a sola vi centrifuga orietur, propter potentiam g in ipsa superficie sitam, eritque $= \frac{2(b - gz)(dPdx + dQdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(P^2 + Q^2)}}$, qua vi corpus ab axe

 cylin-

cylindri recedere conabitur, si haec expressio fuerit affirmatiua. Q. E. I.

Corollarium 1.

870. Curua ergo, quam corpus in superficie cylindri describit, si superficies in planum explicetur, abibit in parabolam, ipsam scilicet proiectoriam, quam corpus proiectum in plano verticali describeret.

Corollarium 2.

871. Si motus corporis super superficie cylindrica compositus consideretur ex motu verticali, quod vel sursum vel deorsum progreditur, et ex horizontali; erit motus horizontalis aequabilis, quia tempora t proportionalia sunt $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ i. e. arcubus horizontali motu percursis. Motus vero verticalis erit vel aequabiliter acceleratus vel retardatus.

Corollarium 3.

872. Si ergo motus horizontalis euanescit, corpus recta vel ascendet vel descendet, omnino ac si libere ascenderet vel descenderet. Hicque casus prodit, si fuerit $c = o$, quo $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ euanescit.

Ex-

TV PVNCTI
expressio fue-
is in superficie
lanum expli-
scilicet proie-
plano verti-
superficie cy-
motu verti-
progreditur,
ontalis aequa-
sunt $\int \sqrt{(dx^2}$
otu percursis.
abiliter acce-
lis euanescit,
ndet, omni-
nderet. Hic-
uo $\sqrt{(dx^2 +}$
Ex-

Exemplum.

873. Sit basis cylindri circulus cuius, quadrans sit BQC et radius AB $= a$; erit $x^2 + y^2 = a^2$ et $x dx + y dy = o$. Fiet ergo P $= x$ et Q $= y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$. Proiectio vero lineae in superficie cylindrica hac descriptae in plano verticali ex AC erecto exprimetur aequatione $\int \frac{a dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{\sqrt{c(b - c - gz)}}{g}$. Si ergo fuerit $c = o$, fiet $dx = o$, atque $x =$ constanti; quare hoc casu proiectio erit linea recta. Curua vero, quae est proiectio pro quocunque ipsius c valore, ope rectificationis circuli construetur. Pressio autem, quam superficies cylindri sustinet est $= \frac{2(b - gz)(dx^2 + dy^2)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)a} = \frac{2c}{a}$, propter aequationem $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dx^2 + dy^2} = \frac{b - gz}{c}$. Quare pressio vbique erit constans et ipsi c proportionalis.

Corollarium 4.

874. Propter eandem aequationem erit generaliter pressio, quam cylinder quicunque sustinet $=$

$$\frac{2c(dP dx + dQ dy)}{(dx^2 + dy^2)\sqrt{(P^2 + Q^2)}} = \frac{2Q^2 c(dP dx + dQ dy)}{dx^2 (P^2 + Q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2Qc(Q dP - P dQ)}{dx (P^2 + Q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Scholion.

875. Non solum autem ope resolutionis motus super superficie cylindrica erecta corporis mo-

tus

tus facile poteſt determinari; ſed etiam ſi cylindri axis fuerit horizontalis eadem facilitate motus corporis cognoſcetur. Namque ſi corpus non habeat motum horizontalem iuxta axem cylindri corpus perpetuo in eadem cylindri ſectione permanebit, in eaque mouebitur tanquam ſuper linea data. Sin vero accedat motus horizontalis, is perpetuo idem manebit, neque alterum motum perturbabit; atque his motibus coniungendis verus corporis motus facile cognoſcetur.

PROPOSITIO 98.
Problema.

Tab. XVIII. Fig. 2.

876. ***Si corpus moueatur in ſuperficie ſolidi rotundi, cuius axis eſt verticalis*** AL, ***in vacuo a grauitate vniformi g ſollicitatum; determinare motum corporis ſuper huiusmodi ſuperficie.***

Solutio.

Generetur ſolidum rotundum conuerſione curuae AM circa axem verticalem AL, erunt omnes eius ſectiones horizontales circuli, quorum radii ſunt applicatae curuae AM. Aequatio ergo naturam huius ſuperficiei exprimens erit $dz = \frac{xdx+ydy}{Z}$ denotante Z functionem quamcunque ipſius z; erit enim $2\int Zdz = x^2+y^2 = LM^2$. Si ergo detur aequatio pro curua AM, inter $AL = z$ et $LM = \sqrt{2\int Zdz}$; dabitur quoque Z. His praemiſſis erit itaque

V PVNCTI
um ſi cylin-
ilitate mo-
corpus non
em cylindri
ſectione per-
ſuper linea
zontalis, is
um motum
agendis ve-
ie ſolidi ro-
vacuo a gra-
motum cor-
erſione cur-
runt omnes
orum radii
ergo na-
$z = \frac{xdx+ydy}{Z}$
pſius z; erit
o detur ae-
et LM =
aemiſſis erit
itaque

itaque $P = \frac{x}{Z}$ et $Q = \frac{y}{Z}$; qui valores ſi ſubſtituantur, habebuntur quae ſequentes aequationes, ex quibus tam curua deſcripta quam motus ſuper ea cognoſcetur, $v = b - gz$ atque $lv = l(dx^2+dy^2+dz^2) - 2\int\frac{xddy}{xdy-ydx} = l(dx^2+dy^2+dz^2) - 2l(xdy-ydx) + \text{conſt.}$ Quare erit $v = \frac{c^2(dx^2+dy^2+dz^2)}{(xdy-ydx)^2} = b - gz$. Ponatur $x^2+y^2 = u^2$; erit u functio quaedam ipſius z, nempe $u^2 = 2\int Zdz$; atque ſuperior aequatio abibit in hanc $\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{\sqrt{(c^2dz^2+u^2du^2(b-gz))}}{\sqrt{(u^2(b-gz)-c^2)}}$. Proiectio vero in plano horizontali per aequationem inter x et y habebitur, ſi ex aequatione $x^2+y^2 = 2\int Zdz$ valor ipſius z in x et y ſubſtituatur; huiusque proiectionis arcus eſt $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$. In plano autem verticali habebitur proiectio eliminanda y; quo facto prodit aequatio $\frac{udx-xdu}{c\sqrt{(u^2-x^2)}} = \sqrt{\frac{du^2+dz^2}{u^2(b-gz)-c^2}}$, quae aequatio ſi per u diuidatur conſtructionem admittit. Preſſio vero quam ſuperficies ſuſtinet axem verſus erit $= \frac{-gZ}{\sqrt{(x^2+y^2+Z^2)}} - \frac{2c^2Z(dx^2+dy^2)+2c^2dZ(xdx+ydy)}{Z(xdy-ydx)^2\sqrt{(x^2+y^2+Z^2)}}$. Q. E. I.

Corollarium I.

877. Si tempuſculum, quo elementum Mm abſoluitur ponatur dt; erit $\frac{ddt}{dt} = \frac{xddy}{xdy-ydx}$, cuius integralis eſt $adt = xdy - ydx$. Ipſum ergo tempus erit vt $xy - 2\int ydx$, denotante $\int ydx$ aream proiectionis in plano horizontali.

Corollarium 2.

878. Si corpus in proiectione in plano horizontali moueri concipitur, erit celeritas eius in Q debita altitudini $\frac{c^3(dx^2+dy^2)}{(ydx-xdy)^2}$; ex quo motu in proiectione ipse motus in superficie inuenietur.

Corollarium 3.

Tab. XVIII. Fig. 3. 879. Sit igitur BQC proiectio curuae in plano horizontali, in qua moueatur corpus ita vt motus eius respondeat motui corporis in superficie ipsa; erit tempus quo arcus BQ absoluitur vt $\frac{xy}{2} - \int ydx$ seu negatiue vt $\int ydx - \frac{xy}{2}$ i. e. vt area BAQ ducto radio AQ.

Corollarium 4.

880. Areae autem BAQ elementum est $\frac{ydx-xdy}{2}$. Ducta ergo tangente QT et demisso in eam ex A perpendiculo AT erit $AT = \frac{ydx-xdy}{\surd(dx^2+dy^2)}$. Quare altitudo celeritati in Q debita est $= \frac{c^3}{AT^2} = \frac{c^3}{p^2}$, posito $AT = p$.

Corollarium 5.

881. Corpus ergo in proiectione motum perinde in ea mouebitur, ac si libere moueretur attractum vi quadam centripeta ad centrum A.

Corollarium 6.

882. Respondeat punctum B motus in superficie facti initio, et cum detur directio prima

PVNCTI

n plano ho-
leritas eius
quo motu in
uenietur.

ruae in pla-
rpus ita vt
s in superfi-
absoluitur vt
e. vt area

m est $\frac{ydx-xdy}{2}$
in eam ex
Quare
po-

motum per-
moueretur at-
trum A.

otus in su-
irectio pri-
ma

ma motus in superficie, dabitur perpendiculum in tangentem in B. Sit ergo $AB = f$, et perpendiculum in tangentem $= b$; erit altitudo celeritati in B debita $= \frac{c^3}{b^2}$.

Corollarium 7.

883. Vis ergo centripeta versus A tendens, quae faciet, vt corpus in proiectione BQC libere moueatur, erit $= \frac{2c^3dp}{p^3du}$, posito u pro $\surd(x^2+y^2)$. Aequatio vero inter u et z exprimet naturam curuae, cuius conuersione genita est superficies proposita, ideoque datur.

Corollarium 8.

884. Est porro $\surd(dx^2+dy^2) = \frac{udu}{\surd(u^2-p^2)}$ et $ydx - xdy = \frac{pudu}{\surd(u^2-p^2)}$. Hi valores si in aequatione inuenta substituantur, dabunt $c^3u^2du^2 + c^3u^2dz^2 - c^3p^2dz^2 = (b-gz)p^2u^2du^2$, seu $p^2 = \frac{c^3u^2(du^2+dz^2)}{c^3dz^2+u^2du^2(b-gz)}$.

Corollarium 9.

885. Huius ergo quantitatis $-\frac{c^3dz^2-u^2du^2(b-gz)}{u^2(du^2+dz^2)}$ differentiale per du diuisum dabit vim centripetam in A requisitam, vt corpus in proiectione BQC moueatur libere, motu respondente motui corporis in superficie.

Corollarium 10.

886. Si $c=0$, fiet quoque $p=0$. Quare hoc casu proiectio in plano horizontali erit recta per A

A transiens. Super qua corpus ad A accedens ita attrahetur vt sit vis centripeta $\frac{1}{du} d. \frac{-du^2(b-gz)}{(du^2+dz^2)}$.

Corollarium 11.

887. Si corporis directio prima fuerit horizontalis tangens in B ad AB erit normalis; ideoque $b=f$. Hoc vero casu celeritas in superficie aequalis erit celeritati in proiectione; quare si fuerit i valor ipsius z, si est $u=f$; erit $b-gi=\frac{c^3}{f^2}$.

Corollarium 12.

888. Si praeterea vis centripeta in B aequalis fuerit vi centrifugae, curua BQC erit circulus, et propterea ipsa quoque curua in superficie descripta, atque motus tam in superficie quam in proiectione aequabilis. Sit vbi est $u=f$ et $z=i$, $dz=mdu$; erit ob $p=f$, et $u=f$ et $z=y$ in casu, quo circulus describitur, $2c^3=gmf^3$.

Corollarium 13.

889 Si ponatur $\pi:1$ vt peripheria ad diametrum erit circuli nostri peripheria $=2\pi f$, quae diuisa per celeritatem $\sqrt{\frac{c^3}{f^2}}$ i. e. $\sqrt{\frac{gmf}{2}}$, dat tempus vnius periodi in circulo, quod ergo erit $=\frac{2\pi\sqrt{2f}}{\sqrt{gm}}$. Pendulum ergo integras oscillationes his periodis isochronas absoluens erit $=\frac{f}{m}$ in eadem grauitatis hypothesi.

Corollarium 14.

890. In superficie ergo, quae generatur conuersione curuae AM circa axem verticalem AL, Co-

PVNCTI
accedens $\frac{-du^2(b-gz)}{(du^2+dz^2)}$.
ierit hori- alis; ideo- superficie are si fue- $-gi=\frac{c^3}{f^2}$.
B aequa- t circulus, erficie de- quam in f et $z=i$, $=y$ in ca-
a ad dia- $2\pi f$, quae at tempus $=\frac{2\pi\sqrt{2f}}{\sqrt{gm}}$. s periodis grauita-
atur con- lem AL, Co-

corpus proiectum circulum radii LM describere potest eodem tempore, quo pendulum longitudinis = subnormali LS integram oscillationem absoluit.

Corollarium 15.

891. Si ergo curua AM fuerit parabola omnes periodi per circulos horizontales in conoide parabolica aequalibus absoluentur temporibus; atque penduli, iisdem temporibus oscillationes integras peragentis longitudo aequabitur dimidiae parti parametri.

Scholion 1.

892. Quaecunque assumatur curua AM; si vis centripeta motus in proiectione versus A ex data formula definiatur, eaque aequalis ponatur vi centrifugae, atque coniungatur cum aequatione $b-gi=\frac{c^3}{f^2}$; prodibit $2c^3=gmf^3$; hoc enim casu tam proiectio erit circulus, quam ipsa curua in superficie descripta. Quo vero hoc melius appareat ponatur $dz=qdu$, prouenietque vis centripeta $=\frac{2qdq(bu^2-gzu^2-c^3)}{u^2du(1+q^2)^2}+\frac{2c^3q^2+gqu^3}{u^3(1+q^2)}$. Iam ponatur $u=f$; $z=i$; et $bf^2=gf^2i+c^3$; atque $q=m$; erit vis centripeta $=\frac{2c^3m^2+gmf^3}{f^3(1+m^2)}$, aequalis posita vi centrifugae $\frac{2c^3}{f^3}$ dat $2c^3=gmf^3$.

Exemplum.

893. Sit superficies conica circularis seu AM linea recta vtcunque inclinata ad axem AL; quare Tab. XVIII. Fig. 2. et 3. erit

erit $z = mu$ et $dz = mdu$. Vis ergo centripeta ad A tendens, quae faciet vt corpus libere in proiectione BQC moueatur, erit $= \frac{2c^3m^2 + gmu^3}{u^3(1+m^2)}$. Haec ergo vis erit composita ex vi constante et vi reciproce cubis distantiarum a centro A proportionali. Si $c = 0$, tum proiectio erit linea recta per A transiens, atque vis centripeta erit $= \frac{gm}{1+m^2}$ siue constans. Corpus ergo motu aequabiliter accelerato ad A accedet, motus vero in superficie conica congruet cum descensu vel ascensu super recta inclinata eritque pariter aequabiliter acceleratus. Sin autem proiectio fuerit curuilinea et tangens in B normalis ad AB, erit $i = mf$, atque $b - mf = \frac{c^3}{f^2}$, posito $AB = f$. Erit ergo hoc casu $b = \frac{c^3 + mf^3}{f^2}$ atque si corpus in circulo horizontali reuoluitur, erit insuper $2c^3 = gmf^3$. Quo ergo hoc accidat debet esse celeritas corporis debita altitudini $\frac{c^3}{f^2} = \frac{gmf}{2}$. Atque periodi in hoc circulo iisdem absoluentur temporibus, quibus penduli longitudinis $\frac{f}{m}$ integrae oscillationes. At si non fuerit $2c^3 = gmf^3$, verum tamen $b = \frac{c^3 + mf^3}{f}$, curua BQC habebit quidem in B tangentem ad AB normalem, sed proiectio haec non erit circulus. At si $2c^3$ proxime aequale fuerit ipsi gmf^3, curua quoque a circulo non multum discrepabit; habebit autem absides varias, in quibus tangens ad radium est perpendicularis. Harum absidum vero positio per prop. 91 Libr. praeced. determinatur. Quoniam enim vis centripeta est $\frac{2c^3m^2 + gmu^3}{u^3(1+m^2)}$, si haec comparetur cum illa vi centripeta $\frac{P}{y^3}$ ob $y = u$, erit $P =$

$2c^3$

I PUNCT
ipeta ad A
proiectione
ec ergo vis
proce cubis
Si $c = 0$,
siens, atque
s. Corpus
A accedet,
r cum des-
ritque pari-
1 proiectio
lis ad AB,
$= f$. Erit
s in circulo
$c^3 = gmf^3$.
as corporis
. in hoc cir-
ibus pendu-
At si non
, curua
d AB nor-
rculus. At
mf^3, curua
it; habebit
s ad radium
ero positio
r. Quoni-
si haec com-
, erit $P =$
$2c^3$

$\frac{2c^3m^2 + gmu^3}{1+m^2}$, atque $\frac{dP}{P} = \frac{3gmu^2du}{2c^3m^2 + gmu^3}$ atque $\frac{Pdy}{ydP} = \frac{2mc^3 + gu^3}{3gu^3}$; ideoque posito $u = f$, distabit quoque linea absidum a praecedente abside angulo $180 \sqrt{\frac{2mc^3 + gf^3}{3gf^3}}$ graduum. Quoniam autem proxime est $2c^3 = gmf^3$, erit angulus inter duas absides interceptus $= 180 \sqrt{\frac{m^2+1}{3}}$ graduum. Cum ergo $\frac{m^2+1}{3}$ semper sit maius quam $\frac{1}{3}$ erit angulus inter duas absides interceptus maior quam 103 grad. 55′.

Scholion 2.

894. Exemplum superficiei sphaericae hic non adiungo, sed motus super ea determinationi sequentem propositionem destino, quia haec materia particulari pertractatione est digna. Si enim pendulum non secundum planum verticale impellitur, tum corpus in superficie sphaerae mouebitur, et vel circulos describet vel alias curuas non parum elegantes, quemadmodum cuiuis experimentum instituenti innotescet. Casus quidem, quo pendulum circulos absoluit, a Cel. *Ioh. Bernoullio* in Act. Lips. A. 1719 iam est expositus sub titulo motus turbinatorii. At si curua non fuerit circulus, nemo quantum scio, hunc penduli motum vel considerauit vel determinauit.

DEFINITIO 6.

895. Motus turbinatorius vocatur penduli non in plano verticali impulsi motus. *Hoc ergo casu pendulum non in eodem plano verticali mouetur, sed curuam*

uam quandam describet in superficie sphaerica, cuius radius est ipsa pendulo longitudo, suam.

PROPOSITIO 99.

Probl.ma.

Tab. XVIII. Fig. 2. et 3. 896. *Penduli ad motum turbinatorium incitati, determinare motum et lineam curuam, quam in superficie sphaerica describit.*

Solutio.

Quia corpus motum pendulo est alligatum in superficie sphaerica mouebitur, cuius radius est longitudo penduli. Sit haec longitudo seu radius sphaerae $= a$, erit $z = a - \sqrt{(a^2 - u^2)}$ ex natura circuli AM. Erit ergo $q = \frac{u}{\sqrt{(a^2-u^2)}}$ et $dq = \frac{a^2 du}{(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}}$ ideoque $\frac{2qdq}{u^2 du} = \frac{2a^2}{u(a^2-u^2)^2}$. Ex his inuenitur vis centripeta ad A tendens, quae facit, vt corpus in proiectione BQC libere moueatur, $= \frac{2bu - 2gau + 3gu\sqrt{(a^2-u^2)}}{a^2}$. Atque pro curua BQC haec habebitur aequatio $p^2 = \frac{a^2 c^3}{c^3 + (b-ga)(a^2-u^2) + g(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}}$, quae ad proiectionem BQC construendam sufficit. Sit tangens in B perpendicularis ad radium AB, id quod semper alicubi contingere debet, nisi proiectio sit linea recta, quia vis centripeta decrescit, decrescente u. Ponatur $AB = f$; erit $i = a - \sqrt{(a^2 - f^2)}$, atque $b - ga + g\sqrt{}$

$+ g\sqrt{(a^2-f^2)} = \frac{c^3}{f^2}$. Si praeterea fuerit $2c^3 = \frac{gf^4}{\sqrt{(a^2-f^2)}}$, corpus in circulo reuoluetur, cuius radius est f, celeritate debita altitudini $\frac{c^3}{f^2} = \frac{gf^2}{2\sqrt{(a^2-f^2)}}$. Penduli vero integras oscillationes iisdem temporibus absoluentis longitudo est $= \sqrt{(a^2 - f^2)}$. Sin autem non fuerit $2c^3 = \frac{gf^4}{\sqrt{(a^2-f^2)}}$, differentia vero sit valde exigua; curua BQC a circulo non multum discrepabit. Cuius curuae, quo positiones absidum inueniantur, erit iuxta prop. 91. Libri praeced. $y = u$ et $P = \frac{u^4}{a^2}(2b - 2ga + 3g\sqrt{(a^2-u^2)})$. Hinc est $\frac{dP}{P} = \frac{4du}{u} - \frac{3gudu}{(2b-2ga)\sqrt{(a^2-u^2)} + 3g(a^2-u^2)}$, atque $\frac{ydP}{Pdy} = 4 - \frac{3gu^2}{(2b-2ga)\sqrt{(a^2-u^2)} + 3g(a^2-u^2)}$. Quia curua fere est circulus, ponatur $u = f$, atque $2b - 2ga = \frac{gf^2}{\sqrt{(a^2-f^2)}} - 2g\sqrt{(a^2-f^2)} = \frac{3gf^2 - 2ga^2}{\sqrt{(a^2-f^2)}}$, quo facto prodibit $\frac{ydP}{Pdy} = 4 - \frac{3f^2}{a^2}$. Hinc sequitur interuallum inter duas absides esse angulum $\frac{180a}{\sqrt{(4a^2-3f^2)}}$ graduum. Tanto scilicet angulo locus, in quo pendulum ab axe maxime distat, dissitus est a loco, in quo pendulum axi est proximum. Q. E. I.

Corollarium I.

897. Quo igitur pendulum $AB = a$ motu turbinatorio circulum BDCE describat, oporteat vt eius celeritas debita sit altitudini $\frac{g.BO^2}{2.AO}$. Tab. XVIII Fig. 4.

Corollarium 2.

898. Longitudo vero penduli, quod oscillationes minimas integras eodem tempore absol-

unit, quo periodus in circulo BDCE conficitur, est $= AO$.

Corollarium 3.

899. Tempora ergo, quibus diuersi circuli motu turbinatorio a pendulo AB percurruntur, sunt in subduplicata ratione altitudinum AO.

Corollarium 4.

900. Quo igitur pendulum longitudinis a circulum horizontalem maximum conficiat, cuius radius est a, celeritas infinite magna requiritur; atque quaeque periodus tempore infinite paruo absoluitur.

Corollarium 5.

901. Si radius circuli BO fuerit valde paruus respectu penduli $AB = a$, congruent periodi motus turbinatorii cum oscillationibus integris eiusdem penduli.

Corollarium 6.

902. Si curua descripta non fuerit circulus, sed figura proxima, atque BO valde paruum; erit angulus inter duas absides 90°, seu rectus.

Corollarium 7.

903. Hoc vero casu curua a corpore descripta erit ellipsis centrum habens in A. Quod ex vi

PVNCTI
v conficitur,
fi
erfi circuli
m currruntur,
tc AO.
gi
dinis a cir-
iat, cuius
B requiritur;
du iite paruo
5c
er
m
valde par-
it periodi
tegris eius-
ue
cit
t circulus,
e paruum;
u rectus.
fu
ab ore descri-
lo Quod ex
vi

vi centripeta colligitur, quae tum ipsis distantiis fit proportionalis.

Corollarium 8.

904. Quo maior autem est radius BO; eo maior quoque erit angulus inter duas absides interceptus. Atque si fiat $BO = BA$, erit hic angulus 180°.

Corollarium 9.

905. Si angulus BAO fuerit 30. grad. erit $BO = \frac{1}{2}$ BA seu $f = \frac{1}{2}a$. Angulus ergo inter duas absides interceptus erit $\frac{360}{\sqrt{13}}$ graduum seu 99°, 50′. Proiectionis ergo in plano horizontali haec erit figura $abcdefgbik$ etc. in qua absides summae sunt in a, c, e, g, i, et imae in b, d, f, b, k. Fig. 5.

Corollarium 10.

906. In hac igitur figura linea absidum mouetur in consequentia; singulis enim periodis circiter 39° progredietur in consequentia.

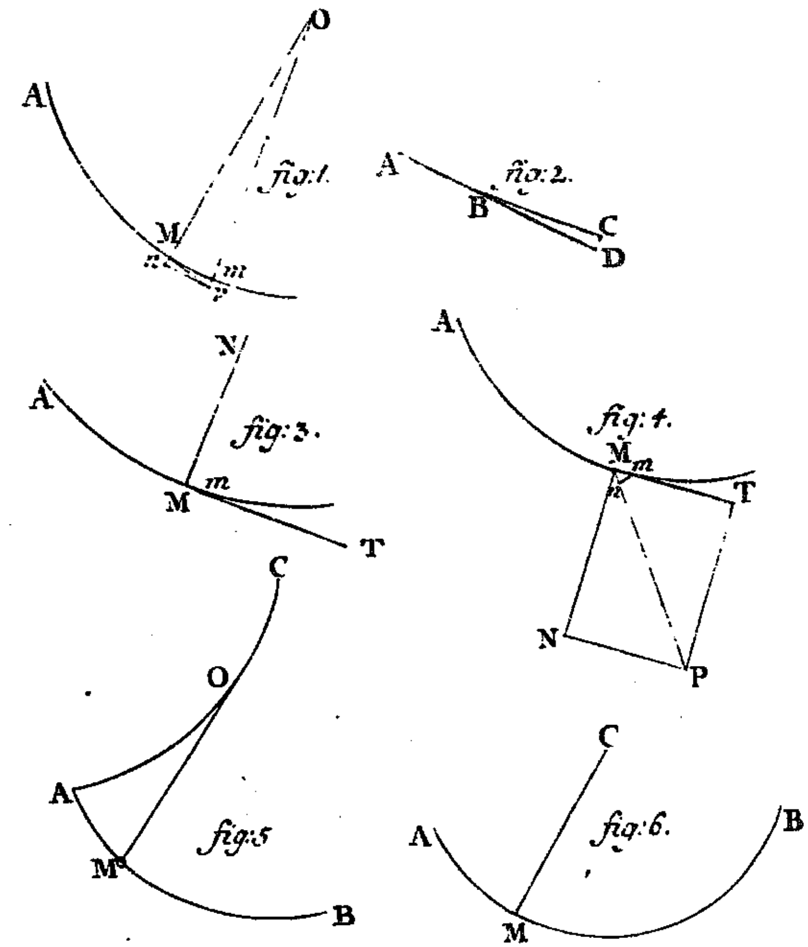
Corollarium 11.

907. Sin autem ille angulus BAO minor fuerit quam 30. graduum; tum minor etiam erit absidum progressio. Quae quo pro quouis angulo BAO statim cognoscatur, fractionem $\frac{a}{\sqrt{(4g^2-3f^2)}}$ in

in feriem refoluo, quae erit fequens, $\frac{1}{2} + \frac{3ff}{16aa} + \frac{27f^4}{256a^4} +$ etc. Vna ergo periodo linea abfidum promouetur angulo $\frac{135ff}{aa}$ graduum, q. pr. fi f valde eft paruum.

Corollarium 12.

908. Ex his apparet promotionem lineae abfidum in fingulis periodis proxime effe in duplicata ratione finus anguli BAO.



Tom:II. Tabula I.