$=g\,dx$, cuius integralis eſt $ak(e^{\frac{s}{k}}-1)=gx$; addita conſtante, quo fiat $x=o$ euaneſcente s. Habebitur ergo $e^{\frac{s}{k}}=\frac{ak+gx}{ak}$ atque $\frac{s}{k}=l(ak+gx)-lak$. Quae differentiata dat $\frac{ds}{k}=\frac{g\,dx}{ak+gx}$; ex quo intelligitur curuam eſſe tractoriam filo longitudinis k ſuper baſi horizontali a puncto A deorſum diſtante interuallo $\frac{ak}{g}$. Conſtructur ergo curua hoc modo: ſuper baſi horizontali CE et filo $BC=k$ deſcribatur tractoria BA; tum ducatur horizontalis DA a CE ad diſtantiam $DC=\frac{ak}{g}$; quo facto ſatisfaciet curuae portio BA quaeſito. Ponimus autem BC verticalem et B punctum tractoriae ſummum; ex quo intelligitur a neceſſario minus eſſe debere quam g. Si enim eſſet maior foret $CD>CB$, ideoque punctum A imaginarium. Sin autem eſſet $a=g$, punctum A in B caderet, adeoque nonniſi punctum ſatisfaceret. Si fuerit $a=o$, punctum A infinite diſtaret, et corpus deſcendens omnem amitteret celeritatem. Cum igitur debeat eſſe $a<g$ erit $b<gs$. Tab. XV. Fig. 3.

Exemplum 2.

Tab. XV. Fig. 4. 717. In ſuperiori tam reſiſtentiae quam potentiae ſollicitantis hypotheſi quaeratur curua AMF ſuper qua omnes aſcenſus ex puncto A facti ita ſe habeant; vt toti arcus aſcenſibus ſingulis abſoluti ſint quadratis celeritatum initialium in A proportionales. Erit ergo vt ante $b=as$; atque $db=a\,ds$. Cum autem pro aſcenſibus ſit $db=ge^{\frac{s}{k}}dx$, erit $ae^{\frac{-s}{k}}ds=g\,dx$, atque integrando $ak(1-e^{\frac{-s}{k}})=gx$. Hinc igitur habetur $e^{\frac{-s}{k}}=\frac{ak-gx}{ak}$; atque $\frac{ds}{k}=\frac{g\,dx}{ak-gx}$ ſeu $(\frac{ak}{g}-x)\frac{ds}{dx}=k$. Ex quo apparet curuam ſatisfacientem eſſe iterum tractoriam ſuper baſi horizontali CE filo longitudinis k conſtructam; ſed deorſum ſpectantem, cuius cuſpis ſit in B exiſtente $BC=k$. Sumatur autem $CD=\frac{ak}{g}$; ductaque horizontali DA erit A punctum in quo aſcenſus omnes incipere debent Hinc ergo quoque intelligitur a non poſſe eſſe maius quam g; quia alias punctum A foret imaginarium. At ſi fuerit $a=g$ ſeu $b=gs$ incidet A in B eritque arcus quolibet aſcenſu percurſus $=\frac{b}{g}$.

Scholion 3.

718. Plura huiusmodi exempla, quia tam facile ex vniuerſali formula inuenta reſolui poſſunt, hic praetermitto; neque etiam huiusmodi quaeſtiones pro aliis reſiſtentiae hypotheſibus, quibus ſolutio earum inueniri queat, affero; quoniam tales quaeſtiones neque iam ſunt agitatae, neque ſatis ſunt curioſae, vt earum ſolutiones requirantur. Ad digniora igitur progredior problemata, in quibus curuae quaeruntur tautochronae, ſuper quibus omnes vel aſcenſus vel deſcenſus aequalibus abſoluantur temporibus.

PRO-

PROPOSITIO 81.

Problema.

Tab. XV. Fig. 2.

719. *In hypotheſi potentiae vniformis deorſum directae et medio vniformi, quod reſiſtit in duplicata ratione celeritatum inuenire curuam tautochronam AM, ſuper qua omnes deſcenſus ad punctum A vsque abſoluantur aequalibus temporibus.*

Solutio.

Conſideretur quicunque deſcenſus, in quo celeritas quam corpus in puncto infimo A acquirit, debita ſit altitudini b. Ponantur AP$=x$; AM$=s$; altitudo celeritati in M debita $=v$; atque potentia ſollicitans $=g$ et medii exponens $=k$, ita vt reſiſtentia in M ſit ad vim grauitatis vt $\frac{v}{k}$ ad 1. His poſitis erit $dv=-gdx+\frac{vds}{k}$; quae aequatio integrata dat $v=e^{\frac{s}{k}}(b-\int e^{\frac{-s}{k}}gdx)$ integrali $\int e^{\frac{-s}{k}}gdx$ ita ſumto vt euaneſcat poſito x vel $s=0$. Ex hac ergo aequatione initium deſcenſus inuenitur ponendo $v=0$ ſeu $\int e^{\frac{-s}{k}}gdx=b$. Tempus vero quo arcus MA abſoluitur hinc erit $=\int\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{(b-\int e^{\frac{-s}{k}}gdx)}}$, ex quo prodibit totius deſcenſus tempus, ſi poſt integrationem fiat $\int e^{\frac{-s}{k}}gdx=b$. Ponamus breuitatis gratia $\int e^{\frac{-s}{k}}gdx=t$, et

SUPER DA TV PVNCTI

et $\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}}=du$ … $=\int\frac{du}{\sqrt{(b-t)}}$, … nunc haec … obtineat val… lius dimenſi… ex formula … eſſe functio … quia u a b … ſe eſt $du=$ … non contin… deſcenſus $=$ … $t=b$. Vel … riam 1 : π … valor perpe… ſeu deſcenſu… tochrona qu… $du=\frac{\alpha dt}{\sqrt{t}}=$ … $(1-e^{\frac{-s}{2k}})$ ſeu … te, quae fa… autem ſit t … $(1-e^{\frac{-s}{2k}})e^{\frac{-s}{2k}}$ … erit $adx=$ … $=2k^2(e^{\frac{s}{2k}}$ … Tom. II.

…formis deorſum …it in duplicata …tochronam AM, A vsque ab-… …s, in quo ce-… …no A acqui-… …tur AP$=x$; …bita $=v$; at-… …dii exponen-… …vim grauitatis $-gdx+\frac{vds}{k}$; $b-\int e^{\frac{-s}{k}}gdx)$ …neſcat poſito …e initium de-… $\int e^{\frac{-s}{k}}gdx=b$. …tur hinc erit …it totius de-… …fiat $\int e^{\frac{-s}{k}}gdx$ … $gdx=t$, et

et $\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}}=du$; ita vt ſit tempus totius deſcenſus $=\int\frac{du}{\sqrt{(b-t)}}$, poſito poſt integrationem $t=b$. Quo nunc haec expreſſio perpetuo eundem obtineat obtineat valorem, debebit $\int\frac{du}{\sqrt{(b-t)}}$ eſſe functio nullius dimenſionis ipſarum b et t, vt poſito $t=b$ ex formula b euaneſcat. Hanc ob rem du debet eſſe functio dimidiae dimenſionis ipſius t tantum, quia u a b pendere non poteſt. Fieri ergo neceſſe eſt $du=\frac{\alpha dt}{\sqrt{t}}$ exiſtente α quantitate conſtante b non continente. Hoc poſito erit tempus vnius deſcenſus $=\alpha\int\frac{dt}{\sqrt{(bt-tt)}}$, poſito poſt integrationem $t=b$. Vel poſita ratione diametri ad peripheriam 1 : π erit tempus vnius deſcenſus $=\alpha\pi$; qui valor perpetuo idem manet quomodocunque b ſeu deſcenſus initium mutetur. Curua ergo tautochrona quaeſita determinabitur ex hac aequatione $du=\frac{\alpha dt}{\sqrt{t}}=\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}}$, cuius integralis eſt $2a\sqrt{t}=2k(1-e^{\frac{-s}{2k}})$ ſeu $t=\frac{k^2}{\alpha^2}(1-e^{\frac{-s}{2k}})^2$ addita ſcilicet conſtante, quae faciat t euaneſcere poſito $s=0$. Cum autem ſit $t=\int e^{\frac{-s}{k}}gdx$, erit $dt=e^{\frac{-s}{k}}gdx=\frac{k}{\alpha^2}(1-e^{\frac{-s}{2k}})e^{\frac{-s}{2k}}ds$. Ponamus $\alpha^2g=a$ ſeu $\alpha=\sqrt{\frac{a}{g}}$; erit $adx=k(e^{\frac{s}{2k}}-1)ds$, cuius integralis eſt $ax=2k^2(e^{\frac{s}{2k}}-1)-ks$, quae quidem aequationes, quia

quia variabiles s et x a ſe inuicem ſunt ſeparatae ad curuam conſtruendam ſufficiunt. Sin autem aequatio ab exponentialibus libera deſideretur, quia ex altera aequatione eſt $k(e^{\frac{s}{2k}}-1)=\frac{ax+ks}{2k}$; erit hoc valore in altera ſubſtituto $axds+ksds=2akdx$. Q. E. I.

Corollarium 1.

720. Quia eſt $a=\sqrt{\frac{a}{g}}$; erit tempus vnius deſcenſus $=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$. In vacuo autem et grauitate $=1$, eſt tempus deſcenſus penduli $f=\frac{\pi\sqrt{2f}}{2}$ (166). Quare longitudo penduli iſochroni in vacuo eſt $=\frac{2a}{g}$.

Corollarium 2.

721. Si igitur fuerit $\frac{2a}{g}=3166$ part. milleſimarum pedis Rhenani, deſcenſus abſoluetur dimidio minuto ſecundo; hoc ergo euenit ſi ſit $a=1583g$ ſcrup. ped. Rhen.

Corollarium 3.

722. Altitudo celeritati in M debita ſeu v eſt $=e^{\frac{s}{k}}(b-\int e^{\frac{-s}{k}}gdx)=e^{\frac{s}{k}}(b-t)$ atque ob $t=\frac{gk^2(1-e^{\frac{-s}{2k}})^2}{a}$ erit $v=e^{\frac{s}{k}}(-\frac{gk^2}{a}(1-e^{\frac{-s}{k}})^2)==\frac{abe^{\frac{s}{k}}-gk^2(e^{\frac{s}{2k}}-1)^2}{a}$.

SVPE V PVNCTI
ſunt ſepara-
72 nt. Sin au-
ſcenſus bera deſidere-
ergo $k(e^{\frac{s}{2k}}-1)=$
ibſtituto $axds$
$(1-e^2$
$((1-e$
npus vnius de-
grauitate $=1$,
72 (166). Qua-
$(e^{\frac{s}{2k}}-$ icuo eſt $=\frac{2a}{g}$.
tendo,
etc. al
+ etc 66 part. mille-
etc. abſoluetur di-
euenit ſi ſit a
7
mili a
na aſc debita ſeu v
$at=$
aequat atque ob $t=$
in ho
ibi er $-e^{\frac{-s}{k}})^2)==$
chron
pro t
quoqu
Co-

Corollarium 4.

723. Poſito $v=0$, prodibit totus arcus deſcenſus ex hac aequatione $ab=gk^2(1-e^{\frac{-s}{2k}})^2$. Si ergo arcus deſcenſus ponatur $=f$, erit $ab=gk^2(1-e^{\frac{-f}{2k}})^2$. Quare dato arcu deſcenſus f erit $v=\frac{gk^2e^{\frac{s}{k}}}{a}((1-e^{\frac{-f}{2k}})^2-(1-e^{\frac{-s}{2k}})^2)$.

Corollarium 5.

724. Aequatio pro curua haec $ax=2k(e^{\frac{s}{2k}}-1)-ks$ in ſeriem exponentiali $e^{\frac{s}{2k}}$ conuertendo, quae eſt $1+\frac{s}{2k}+\frac{s^2}{1.2.4k^2}+\frac{s^3}{1.2.3.8k^3}+$ etc. abit in hanc $ax=\frac{s^2}{1.2.2}+\frac{s^3}{1.2.3.4k}+\frac{s^4}{1.2.3.4.8k^2}+$ etc. ſeu $2ax=\frac{s^2}{1.2}+\frac{s^3}{1.2.3.2k}+\frac{s^4}{1.2.3.4.4k^2}+$ etc.

Scholion 1.

725. Notari hic conuenit hanc curuam ſimili aequatione exprimi, qua ſupra brachyſtochrona aſcenſui inſeruiens exprimebatur; ibi enim erat $at=\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3k}+\frac{z^4}{1.2.3.4.k^2}+$ etc. (687), quae aequatio ab hac noſtra pro tautochrona inuenta in hoc tantum differt, quod hic ſit $2a$ quod ibi erat a, atque exponens reſiſtentiae brachyſtochronae duplo maior eſt exponente reſiſtentiae pro tautochrona. Curua ergo brachyſtochrona quoque ad tautochronismum producendum accom-

modari poteſt; arcu aſcenſus deſcenſui tributo, in medio reſiſtente, cuius exponens eſt duplo minor.

Corollarium 6.

726. Ad inueniendam continuationem curuae MA vltra A poni debet s negatiuum, quo ſacto habebitur $ax = 2k^2(e^{\frac{-s}{2k}} - 1) + ks$ vel $2ax = \frac{s^2}{1.2} - \frac{s^3}{1.2.3.2k} + \frac{s^4}{1.2.3\,4.4k^2} - \text{etc.}$ Quae eadem aequatio prodiiſſet, ſi k negatiuum feciſſemus. Facto autem k negatiuo deſcenſus mutatur in aſcenſum; quocirca curua MA vltra A continuata aſcenſui inſeruiet atque ſuper ea omnes aſcenſus eodem abſoluentur tempore ſcilicet $\pi V\frac{a}{g}$.

Corollarium 7.

Tab. XV. Fig. 5. 727. Eadem ergo curua continua BMANC erit tautochrona tam pro deſcenſu quam pro aſcenſu. Namque ſuper arcu BMA omnes deſcenſus eodem tempore abſoluuntur, atque ſuper arcu ANC omnes aſcenſus. Quare omnes dimidiae oſcillationes, quae in arcu BMA incipiunt, erunt inter ſe iſochronae, atque tempus vnius ſemioſcillationis erit $= 2\pi V\frac{a}{g}$.

Corollarium 8.

728. Si reſiſtentia euaneſcit, quo caſu k fit ∞, curua haec in cycloidem abire debet, quae eſt

SVPER
eſt curua
quatio p
$= \frac{s^2}{1.2}$ ſe
729
habebit
inuenienc
BMA, a
que eius
arcu aſce
et CE=
$= a - \frac{2a^2}{3k}$
$+ \frac{2a^3}{4k^2} +$
730
aſcenſus
ſus. Atq
ſi $k = a$;
terum ex
eſſe diam
731
buerit ce
deſcenſus
OTV PVNCTI
ſcenſui tributo,
s eſt duplo minor.
uationem cur-
egatiuum, quo
$- ks$ vel $2ax=$
uae eadem ae-
eciſſemus. Fa-
utatur in aſcen-
continuata aſ-
nes aſcenſus eo-
$\pi V\frac{a}{g}$.
inua BMANC
uam pro aſcen-
mnes deſcenſus
e ſuper arcu A
dimidiae oſcil-
iunt, erunt in-
nius ſemioſcil-
quo caſu k fit
: debet, quae
eſt

eſt curua tautochrona in vacuo. Hoc ipſum aequatio per ſeriem expreſſa indicat, fit enim $2ax = \frac{s^2}{1.2}$ ſeu $4ax = s^2$ aequatio pro cycloide.

Corollarium 9.

729. Curua ergo BMANC prout cyclois habebit cuſpides verticales in B et C, ad quas inueniendas ponatur $dx = ds$, eritque pro arcu BMA, $a = k(e^{\frac{s}{2k}} - 1)$ ſeu $s = 2kl\frac{a+k}{k} = AMB$; atque eius altitudo BD erit $= 2k - \frac{2k^2}{a}l\frac{a+k}{k}$. Pro arcu aſcenſus vero ANC erit $ANC = 2kl\frac{k}{k-a}$, et $CE = \frac{2k^2}{a}l\frac{k}{k-a} - 2k$. Siue per ſeries erit BD $= a - \frac{2a^2}{3k} + \frac{2a^3}{4k^2} - \frac{2a^4}{5k^3} + \text{etc.}$ Atque $CE = a + \frac{2a^2}{3k} + \frac{2a^3}{4k^2} + \frac{2a^4}{5k^3} + \text{etc.}$

Corollarium 10.

730. Ex his perſpicitur cuſpicem C arcus aſcenſus eleuatiorem eſſe cuſpide A arcus deſcenſus. Atque arcus ANC cuſpis in infinitum abit ſi $k = a$; et ſi $a > k$ cuſpis C erit imaginaria. Ceterum ex aequatione patet, tam BC quam CE eſſe diametros curuae inuentae.

Corollarium 11.

731. Si corpus in dimidia oſcillatione habuerit celeritatem altitudini b debitam, erit arcus deſcenſus $= 2kl\frac{kVg}{kVg - Vab}$ ſeu per ſeriem $= \frac{2Vab}{Vg} + \frac{2ab}{2gk}$

$\frac{2ab}{2gk} + \frac{2ab\sqrt{ab}}{3gk^2\sqrt{g}} +$ etc. atque ſequens arcus aſcenſus $=$ $2k\,l\frac{k\sqrt{g}+\sqrt{ab}}{k\sqrt{g}} = \frac{2\sqrt{ab}}{2gk} - \frac{2ab}{2gk} + \frac{2ab\sqrt{ab}}{3gk^2\sqrt{g}} -$ etc.

Corollarium 12.

732. Si ergo deſcenſus fiat ex puncto B ita vt arcus deſcenſus ſit $= \text{AMB} = 2k\,l\frac{a+k}{k}$ erit $b = \frac{ga k^2}{(a+k)^2}$, ſequentis vero aſcenſus arcus erit $= 2k\,l\frac{2a+k}{a+k}$.

Corollarium 13.

733. Ex aequatione pro hac curua apparet curuam in puncto A habituram eſſe tangentem horizontalem. Cum porro poſito ds conſtante radius oſculi in M ſit $= \frac{dsdy}{ddx} = \frac{ds\sqrt{(ds^2-dx^2)}}{ddx}$; quia eſt $dx = \frac{k}{a}(e^{\frac{s}{2k}}-1)ds$, s erit $ddx = \frac{1}{2a}e^{\frac{s}{2k}}ds^2$ et $\sqrt{(ds^2 - dx^2)} = ds\sqrt{(1-\frac{k^2}{a^2}(e^{\frac{s}{2k}}-1)^2)}$; erit radius oſculi in M$=$ $\frac{\sqrt{(4a^2-4k^2(e^{\frac{s}{2k}}-1)^2)}}{e^{\frac{s}{2k}}}$. Poſito ergo $s = o$ erit radius oſculi in puncto infimo A$=2a$. In B vero et C radius oſculi euaneſcit.

Corollarium 14.

734. Radius oſculi non eſt maximus in puncto infimo A; ſed per methodum maximorum maximus inuenitur in arcu aſcenſus, idque in puncto O exiſtente A O $= 2k\,l\frac{k^2}{k^2-a^2}$. In hoc enim puncto eſt radius oſculi $= \frac{2ak}{\sqrt{(k^2-a^2)}}$. Ex quo concluditur niſi ſit $k > a$, curuaturam curuae ANC perpetuo diminui, neque punctum O usquam exiſtere.

SV CV PVNCTI
cto rcus aſcenſus $=$
pun tc.
clud
perp
exiſt x puncto B ita
$k\,l\frac{a+k}{k}$ erit $b=$
us erit $= 2k$
curu
alte
tem
omi curua apparet
gan ſſe tangentem
inci ds conſtante
chr $-dx^2)$; quia eſt
quo
non ds^2 et $\sqrt{(ds^2}$
ſten oſculi in M$=$
alia
rum
bile $s=o$ erit ra-
tocl
ver a. In B ve-
reſi
$-g$
tan
chr aximus in pun-
deſ n maximorum
$s+$ idque in pun-
cto

Scholion 2.

735. Hoc igitur problemate duas inuenimus curuas, ſuper quarum altera omnes deſcenſus, ſuper altera vero omnes aſcenſus aequalibus abſoluuntur temporibus. Atque cum ſuper tota curua BAC omnes itus ſeu ſemioſcillationes aequalibus peragantur temporibus, ſi quidem in curuae portione BA incipiant; haec curua ad oſcillationes in fluido iſochronas faciendas eſſet idonea, ſi modo reditus quoque inter ſe eſſent iſochroni, de quo vero non conſtat. Quia autem in fluidis praeter reſiſtentiam quadratis celeritatum proportionalem alia inſuper obſeruatur, quam momentis temporum proportionalem ſeu conſtantem eſſe probabile eſt; etiam coniunctim cum iſta reſiſtentia tautochronam determinare operae pretium eſt; quod vero facile ex praecedente effici poteſt. Sit enim reſiſtentia conſtans $=b$, erit pro deſcenſu $dv = -gdx + bds + \frac{vds}{k}$. Quare ſi in priore operatione tantum loco gdx vbique $gdx-bds$ ſubſtituatur, tautochrona ſatisfaciens ſimili modo obtinebitur; pro deſcenſu ſcilicet prodibit ita curua $ax = (\frac{ab}{g} - k)$ $s + 2k^2(e^{\frac{s}{2k}} - 1)$; atque pro aſcenſu vero haec $ax =$

$ax = (k - \frac{ab}{g})s + 2k^2(e^{\frac{-s}{2k}} - 1)$, quae curua quoque cum priore eandem curuam continuam conſtituit, abit enim altera in alteram ponendo s negatiuum. Notandum hic eſt ſi fuerit $k = \frac{ab}{g}$ fore curuam tautochronam tractoriam BAF aſymtotam habentem horizontalem CE, quae a puncto A diſtet internallo $AE = \frac{2k^2}{a}$. Fili autem longitudo, quo haec tractoria deſcribitur, eſt $= 2k$. Quod autem ſuper huiusmodi curua tangentem horizontalem nusquam habente ſemioſcillatio abſolui poſſit, atque alicubi punctum aequilibrii A exiſtere, mirum non eſt; cum, vt ſupra iam obſeruauimus, in tali reſiſtentiae hypotheſi, corpus in loco ſubſiſtere queat decliui. His autem caſibus, quibus curua vltra A deſcendere pergit nulli reditus atque ideo nullae oſcillationes peragi poſſunt, quia corpus, quanquam ſuper plano decliui ad quietem peruenire poteſt, tamen ſuper eo aſcendere nequit; in quouis enim curuae portionis AF puncto corpus in quiete perſeuerare poteſt.

Scholion 3.

736. Non multo difficilior fit problematis ſolutio, ſi potentia deorſum tendens non conſtans, ſed variabilis vtcunque P, atque exponens reſiſtentiae etiam variabilis q ponatur. Habebitur enim pro elemento temporis in deſcenſu $\frac{ds}{e^{\frac{1}{2}\int\frac{ds}{q}}\sqrt{(b - \int e^{-\int\frac{ds}{q}}Pdx)}}$. Si nunc vt ante ponatur

$\int e^{-\int\frac{ds}{q}}$

SVPER
$\int e^{-\int\frac{ds}{q}}Pdx$
eſſe $du =$
quatio de
loco dt e
$+ qdPdx$
nos haben
aſcenſibus
737.
ſtentiae qu
mus ego
dem, qua
ro etiam
ſicauit, ſe
iſtam taut
extat in C
vero reſiſt
ipſis celeri
huc, quant
minauit.
in Act. Li
dedi; eae
mannus, q
ego poſtea
thodi huiu
Tom. II.

OTV PVNCTI
e curua quoque
nuam conſtituit,
endo s negati-
r $k = \frac{ab}{g}$ fore cur-
AF aſymtotam
uae a puncto A
utem longitudo,
ſt $= 2k$. Quod
gentem horizon-
atio abſolui poſ-
ibrii A exiſtere,
iam obſeruaui-
ſi, corpus in lo-
autem caſibus,
pergit nulli re-
nes peragi poſ-
er plano decliui
nen ſuper eo a-
curuae portio-
rſeuerare poteſt.
fit problematis
dens non con-
atque exponens
atur. Habebi-
ris in deſcenſu
t ante ponatur
$\int e^{-\int\frac{ds}{q}}$

$\int e^{-\int\frac{ds}{q}}Pdx = t$; et $\frac{ds}{e^{\frac{1}{2}\int\frac{ds}{q}}} = du$; debebit quoque eſſe $du = \frac{\alpha dt}{\sqrt{t}}$ ſeu $t = \frac{\alpha^2 dt^2}{du^2} = \frac{\alpha^2 P^2 dx^2}{e^{\int\frac{ds}{q}}ds^2}$. Quae aequatio denuo differentiata poſito ds conſtante et loco dt eius valore ſubſtituto dabit $\frac{qds^2}{2\alpha^2} = Pqddx + qdPdx - 2Pdxds$ pro curua deſcenſus iſochronos habente; Huiusque curuae continua vltra A aſcenſibus inſeruiet.

Scholion 4.

737. Tautochronam hanc in hypotheſi reſiſtentiae quadratis celeritatum proportionalis primus ego dedi in Comment. Tomo IV. vbi eadem, qua hic, ſum vſus methodo. Deinceps vero etiam Cel. *Ioh. Bernoulli* mihi per literas ſignificauit, ſe quoque in eadem reſiſtentiae hypotheſi iſtam tautochronam reperiſſe; cuius methodus extat in Comm. Acad. Pariſ. A. 1730. In aliis vero reſiſtentiae hypotheſibus, excepta ea, quae ipſis celeritatibus eſt proportionalis, nemo adhuc, quantum mihi conſtat, tautochronas determinauit. Quod enim ad eas curuas attinet, quas in Act. Lipſ. A. 1726. tautochronarum nomine dedi; eae quaeſito non ſatisfaciunt; vti Cel. *Hermannus*, qui primum in easdem inciderat, atque ego poſtea monſtrauimus. Difficultas autem methodi huius tautochronas inueniendi in hoc

couconſiſtit, quod in aliis reſiſtentiae hypotheſibus celeritas non poſſit vniuerſaliter ex aequatione canonica determinari. Quomodo vero nihilominus pro aliis reſiſtentiis tautochronae inueſtigari queant, ex ſequente propoſitione colligi poterit; in qua pro mediis rariſſimis in quacunque celeritatum ratione multiplicata reſiſtentibus tautochronae inueniendae proponuntur.

PROPOSITIO 82.

Problema.

Tab. XV. Fig. 2. 738. *In medio rariſſimo, quod reſiſtit in quacunque multiplicata ratione celeritatum, et hypotheſi potentiae vniformis deorſum tendentis, determinare curuam tautochronam* AM, *ſuper qua vel omnes deſcenſus vel aſcenſus aequalibus abſoluantur temporibus.*

Solutio.

Poſitis abſciſſa $AP = x$ et arcu $AM = s$; ſit totus arcus deſcenſu aliquo deſcriptus $= f$. Potentia ſollicitans deorſum ponatur $= g$ altitudo celeritati in M debita ſit $= v$, exponens reſiſtentiae $= k$, atque ipſa reſiſtentiae vis $= \frac{v^m}{k^m}$, vbi k eſt quantitas, valde magna ita vt fractiones, quae in denominatore k plurium quam m dimenſionum habent, pro euaneſcentibus haberi queant. His poſitis erit ex natura deſcenſus $dv = -g\,dx +$
$v^m ds$

SUPER DA

$\frac{v^m ds}{k^m}$. Iam ſi r
ta eſſet cycloi
autem mediur
multum a cycl
pro curua qu
ro eſt $dv = -$
valde paruum
$\frac{\beta s^n}{k^m}$, vbi con
ſi ſit $s = f$ ſiat
$\frac{\beta}{k^m}(f^n - s^n)$ q
$(f^2 - s^2) + \frac{\beta}{k^m}$
$\frac{n\beta s^{n-1} ds}{k^m} +$
$+ \frac{\alpha^m (f^2 - s^2)}{k^m}$
pro v^m poni
m in denomina
ſequitur fore
ita accepto v
$v = \alpha(f^2 - s^2$

MOTU PUNCTI

e hypotheſibus
r ex aequatione
o vero nihilomi-
hronae inueſtigari
ne colligi poterit;
quacunque celeri-
entibus tautochro-

82.

d reſiſtit in qua-
atum, et hypotheſi
tis, determinare
qua vel omnes de-
antur temporibus.

rcu $AM = s$; ſit
us $= f$. Poten-
$= g$ altitudo ce-
onens reſiſtentiae
$= \frac{v^m}{k^m}$, vbi k eſt
ctiones, quae in
m dimenſionum
queant. His
$v = -g\,dx +$
$v^m ds$

$\frac{v^m ds}{k^m}$. Iam ſi reſiſtentia prorſus abeſſet, curua quaeſita eſſet cyclois, cuius aequatio eſt $gx = \alpha s^2$; quia autem medium eſt rariſſimum, curua quaeſita non multum a cycloide differet; ponatur igitur aequatio pro curua quaeſita haec $gx = \alpha s^2 + \frac{\beta s^n}{k^m}$. Quia vero eſt $dv = -g\,dx + \frac{v^m ds}{k^m}$ propter terminum $\frac{v^m ds}{k^m}$ valde paruum erit proxime $v = C - gx = C\alpha s^2 - \frac{\beta s^n}{k^m}$, vbi conſtans C ex hoc determinatur, quod ſi ſit $s = f$ ſiat $v = o$. Quocirca erit $v = \alpha(f^2 - s^2) + \frac{\beta}{k^m}(f^n - s^n)$ quam proxime. Ponatur ergo $v = \alpha (f^2 - s^2) + \frac{\beta}{k^m}(f^n - s^n) + Q$, erit $dv = -2\alpha s ds - \frac{n\beta s^{n-1} ds}{k^m} + dQ = -g\,dx + \frac{v^m ds}{k^m} = -2\alpha s ds - \frac{n\beta s^{n-1} ds}{k^m} + \frac{\alpha^m (f^2 - s^2)^m ds}{k^m}$, neglectis reliquis terminis qui pro v^m poni deberent; quia in iis k plures quam m in denomitatore habet dimenſiones. Ex his iam ſequitur fore $Q = \frac{\alpha^m}{k^m}\int (f^2 - s^2)^m ds$ integrali hoc ita accepto vt euaneſcat poſito $s = f$. Erit ergo $v = \alpha (f^2 - s^2) + \frac{\beta}{k^m}(f^n - s^n) + \frac{\alpha^m}{k^m}\int (f^2 - s^2)^m ds$;

Eee 2 atque

atque hinc $\frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha(f^2-s^2)}} - \frac{\mathfrak{E}(f^n-s^n)-\alpha^m\int(f^2-s^2)^m ds}{2\alpha^{\frac{3}{2}}k^m(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$ omittendis iterum terminis ſequentibus ob memoratam rationem. Hinc nunc prodibit tempus $\int\frac{ds}{\sqrt{v}} = \int\frac{ds}{\sqrt{\alpha(f^2-s^2)}}$ $- \frac{\mathfrak{E}}{2\alpha^{\frac{3}{2}}k^m}\int\frac{ds(f^n-s^n)}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\alpha^m}{2\alpha^{\frac{3}{2}}k^m}\int\frac{ds\int(f^2-s^2)^m ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$, quod ita integratum, vt euaneſcat poſito $s=0$; dabit tempus, quo corpus deſcendens arcum MA $=s$ abſoluit. Totum ergo deſcenſus tempus per arcum f obtinebitur, ſi poſt integrationem ponatur $s=f$; quod tempus debet eſſe conſtans ſeu ita comparatum, vt non pendeat ab f. Primus autem temporis terminus $\int\frac{ds}{\sqrt{\alpha(f^2-s^2)}}$ poſito poſt integrationem $s=f$ iam dat huiuſmodi expreſſionem, in qua non amplius ineſt f; prodit enim $\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$. Quamobrem ſi duo reliqui termini ita eſſent comparati, vt poſtquam poſitum eſt $s=f$ ſeſe deſtruant; quaeſito foret ſatisfactum; haberetur enim pro integro deſcenſus tempore haec expreſſio $\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$: quae eſt conſtans. Debebit ergo eſſe $\mathfrak{E}\int\frac{ds(f^n-s^n)}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} = -\alpha^m\int\frac{ds\int(f^2-s^2)^m ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$, poſito poſt integrationem $s=f$. Dat autem $\int\frac{ds(f^n-s^n)}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$ poſito $s=f$, multiplum poteſtatis ipſius f, cuius exponens eſt $n-2$, atque alterum integrale $\int\frac{ds\int(f^2-s^2)^m ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$, poſito $s=f$ dat multiplum poteſtatis ipſius f, cuius exponens eſt $2m-1$. Fiat igitur $n=2m+1$, atque $\mathfrak{E}$ ita ſumatur vt hae duae poteſtates ipſius f, quarum vtriusque exponens erit $2m-1$, ſeſe deſtruant. Quo autem appareat quales coefficientes habiturae ſint iſtae ipſius f poteſtates; ex caſibus ſimplicioribus concludemus. Integratis igitur ſequentibus formulis ita vt euaneſcant poſito $s=0$, tumque facto $s=f$ reperietur $\int\frac{(f-s)ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} = f^{-1}$; atque $\int\frac{(f^3-s^3)ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{1}f^1$; et $\int\frac{(f^5-s^5)ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2.4}{1.3}f^3$; hincque erit generaliter $\int\frac{(f^{2m+1}-s^{2m+1})ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2.4.6.\cdots 2m}{1.3.5.\cdots(2m-1)}f^{2m-1}$, vnde erit $\mathfrak{E}\int\frac{ds(f^n-s^n)}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2.4.6.\cdots 2m}{1.3.5.\cdots(2m-1)}\mathfrak{E}f^{2m-1}$. Alterius termini coefficiens ex eadem analogia innoteſcet. Eſt enim integratione ita inſtituta, vt integrale euaneſcat poſito $s=0$; per ſeriem $\int(f^2-s^2)^m ds = -f^{2m}(f-s) + \frac{m}{1.3}f^{2m-2}(f^3-s^3) - \frac{m(m-1)}{1.2.5}f^{2m-4}(f^5-s^5) + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3.\ 7}f^{2m-6}(f^7-s^7) - \text{etc.}$ Haec igitur ſeries in $-\frac{\alpha^m ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$ ducta et integrata atque tum poſito $s=f$, dabit $\alpha^m f^{2m-1}\left(1 - \frac{2m}{1.3} + \frac{4m(m-1)}{1.3.5} - \frac{8m(m-1)(m-2)}{1.3.5.7.} + \text{etc.}\right) = \frac{\alpha^m f^{2m-1}}{2m+1}$. His igitur duobus valoribus inter ſe aequatis prodit $\mathfrak{E} =$

SVPE MOTU PVNCTI

$\frac{1\,3.5.7 \cdots (2m-1)\;a^m}{2.4.6.8 \cdots\; 2m(2m+1)}$, quo valore loco 𝔅 ſubſtituto habebitur pro curua tautochrona ad deſcenſus pertinente, poſito $\frac{1}{a}$ loco a homogeneitatis ergo, ſequens aequatio $gx = \frac{s^2}{a} + \frac{1\,3.5 \cdots (2m-1)\;s^{2m+1}}{2.4.6 \cdots 2m(2m+1)a^m k^m}$. Vel ſi ex x defideretur s hinc oritur iſta aequatio $s = \sqrt{gax} - \frac{1.3.5 \cdots (2m-1)g^m a x^m}{2\,4.6 \cdots 2m(2m+1)2k^m}$. Atque tempus vnius cuiusque deſcenſus ſuper hac curua erit $= \frac{\pi\sqrt{a}}{2}$, ſeu longitudo penduli in vacuo a grauitate naturali $=1$ ſollicitati, eodem tempore deſcenſus abſoluentis erit $= \frac{a}{2}$. Eadem aequatio pro curua tautochrona mutatur in aequationem pro curua ſuper qua omnes aſcenſus aequalibus temporibus, tempore ſcilicet $\frac{\pi\sqrt{a}}{2}$ abſoluuntur, ſi loco k^m ſcribatur $-k^m$. Q. E. I.

Corollarium 1.

739. Si $2m+1 > 2$ ſeu $m > \frac{1}{2}$, curuae radius oſculi in puncto A idem erit, qui pro aequatione $gx = \frac{s^2}{a}$; ſcilicet $\frac{ga}{2}$. In his ergo caſibus corpus minimum deſcenſum abſoluit eodem tempore quo in vacuo; ſeu deſcenſus ſuper infima curuae portiuncula infinite parua, idem erit in vacuo et in medio reſiſtente ſi modo $m > \frac{1}{2}$.

Co-

SVI U PUNCTI

e loco 𝔅 ſub-

rona ad de-

bit homogenei-

non $x = \frac{s^2}{a} +$

ergo

tem ſi ex x defi-

mai $s = \sqrt{gax} -$

empus vnius

radi rit $= \frac{\pi\sqrt{a}}{2}$,

ergo auitate natu-

reru deſcenſus ab-

ſiſte pro curua

pro curua

temporibus,

loco k^m ſcri-

hoc

tur,

tisfa , curuae ra-

term ui pro aequa-

diur caſibus cor-

term em tempore

tanc nfima curuae

in in vacuo et

ver

$\frac{A}{a^m}$

Co-

Corollarium 2.

740. Si $m = \frac{1}{2}$ in vtroque termino s habebit duas dimenſiones. Quare radius oſculi in A non amplius erit $\frac{ga}{2}$ ſed eo erit minor. In hoc ergo medio, quod in ratione celeritatum reſiſtit; tempus deſcenſus minimi per arculum circularem maius erit quam in vacuo; hocque in data ratione.

Corollarium 3.

741. Si m fuerit $< \frac{1}{2}$; verum tamen > 0, radius oſculi in A erit infinite paruus; ſuper hac ergo curua in vacuo minimus deſcenſus abſolueretur tempore infinite paruo; cum in medio reſiſtente finito tempore perficiatur.

Scholion 1.

742. Quod ad hunc caſum $m < \frac{1}{2}$ attinet, hoc quod diximus quidem ex aequatione ſequitur, quam in medio rariſſimo quaeſito plene ſatisfacere ponimus. In caſu autem quo $m < \frac{1}{2}$, tres termini, ex quibus aequatio conſiſtit, etiamſi medium ſit rariſſimum non ſatisfaciunt. Duo enim termini quibus gx aequatur, conſiderari debent tanquam duo termini initiales ſeriei conuergentis, in qua ſequentes prae primis euaneſcant. Tota vero ſeries huiusmodi habebit formam $gx = \frac{s^2}{a} + \frac{As^{2m+1}}{a^m k^m} + \frac{Bs^{4m}}{a^{2m+1}k^{2m}} + \frac{Cs^{6m-1}}{a^{3m-2}k^{3m}} +$ etc. in

qua

qua exponentes ipſius s in progreſſione arithmetica progrediuntur; haecque forma partim ex analogia partim ea ipſa ratione, qua ad ſecundum terminum inueniendum vſi ſumus, colligi poteſt. Ex hac iam forma apparet curuae in puncto infimo A conditionem, ſi $m<\frac{1}{2}$ ex duobus terminis primis cognoſci non poſſe, quantumuis k ſit magnum. Quia enim exponentes ipſius s decreſcunt, in ſequentibus terminis s tandem in denominatorem migrabit, ideoque poſito $s=0$ fiet $x=\infty$, ex quo apparet curuam his caſibus in A, non terminari; neque radium oſculi in hoc loco poſſe definiri. Quod incommodum non habet locum, ſi exponentes ipſius s creſcunt.

Scholion 2.

743. Hinc igitur patet modus curuam tautochronam in medio in quacunque celeritatum ratione multiplicata reſiſtente inueniendi; etiamſi medium non fuerit rariſſimum. Cum enim aequatio pro tautochrona ſit huius formae $gx=\frac{s^2}{a}+\frac{As^{2m+1}}{a^m k^m}+\frac{Bs^{4m}}{a^{2m-1}k^{2m}}+\frac{Cs^{6m-1}}{a^{3m-2}k^{3m}}+$ etc. quemadmodum ex conditione tautochroniſmi valorem coefficientis A determinauimus; eodem modo etiam coefficientes reliquorum terminorum poterunt definiri. At propter tantopere compoſitas formulas integrales labor fere fit inſuperabilis; qui autem forte ſubleuabitur, ſi quis tantum vnicum coefficientem B vel ad ſummum duos B et C determinandi operam adhibuerit, quoniam ſequentes ex analogia concludi poſſent. Ad haec accedit, quod haec ſeries in caſu, quo $m=1$ cognita ſit; quippe ex ſuperioribus (724) habemus $gx=\frac{s^2}{a}+\frac{s^3}{6k}+\frac{s^4}{48ak^2}+\frac{s^5}{480ak^3}+$ etc. quae ſeries ad generalem inueniendam non parum ſubſidii afferet. Terminus vero B inueniri debet ex ſequente aequatione

$$B\int\frac{(f^{4m}-s^{4m})ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}==\frac{3}{4}A^2\int\frac{(f^{2m+1}\ s^{2m+1})^2ds}{(ff-ss)^{\frac{5}{2}}}+\frac{3}{2}A\int\frac{ds(f^{2m+1}\ s^{2m+1})\int d(ff\cdot ss)^m}{(ff-ss)^{\frac{5}{2}}}$$
$$+\frac{3}{4}\int\frac{ds(\int ds(f^2-s^2)^m)^2}{(ff-ss)^{\frac{5}{2}}}-mA\int\frac{ds\int ds(ff-ss)^{m-1}(f^{2m+1}-s^{2m+1})}{(ff-ss\ ^{\frac{3}{2}}}$$
$$-m\int\frac{ds\int ds(ff-ss)^{m-1}\int ds(ff-ss)^m}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}},$$

cuius aequationis integralia ita ſunt ſumenda vt euaneſcant poſito $s=f$, quo facto poni debet $s=0$; atque tum valor ipſius B inuenietur. Coefficiens vero A iam cognitus eſt; inuenimus enim $A==\frac{1.3.5\text{-----}(2m-1)}{2.4.6\text{-----}2m(2m+1)}$. Pro caſu quo $m=1$, ſuperiorem aequationem euolui inuenique $B=\frac{1}{45}$; exiſtente $A=\frac{1}{6}$, id quod egregie congruit. Si autem valores coefficientium in infinitum innoteſcerent, tum haberetur quidem aequatio ſerie infinita conſtans pro tautochrona quaeſita; quae autem ſi eius lex cognita fuerit, per methodum meam ſeries ſummandi, in aequationem terminorum numero finito conſtantem transformari poterit

SUPE)TV PVNCTI
coeffic ſſione arithme-
termin partim ex ana-
tes ex ad ſecundum
cedit, colligi poteſt.
ta ſit; in puncto in-
ries a duobus termi-
ſidii a umuis k ſit ma-
ſequen us s decreſcunt,
in denomina-
$s=0$ fiet
his caſibus
m oſculi in hoc
odum non ha-
creſcunt.
tionis s curuam tau-
poſito e celeritatum
tum v iendi; etiamſi
ro A m enim aequa-
ae $gx=\frac{s^2}{a}+$
riorem
exiſten + etc. quem-
autem niſmi valorem
teſcere eodem modo
infinit norum pote-
autem re compoſitas
meam uperabilis; qui
norum ntum vnicum
Tom. coef-

terit. Atque hanc propemodum vnicam et tutiſſimam indico methodum, cuius ope tautochronae in aliis reſiſtentiae hypotheſibus inueniri queant.

Corollarium 4.

744. Si igitur aequatio $gx = \frac{s^2}{a} + \frac{As^{2m+1}}{a^m k^m} + \frac{B\cdot{}^{4m}}{a^{2m-1}k^{2m}} +$ etc. exprimat tautochronam deſcenſuum; aſcenſus tautochronos producet iſta curua $gx = \frac{s^2}{a} - \frac{As^{2m+1}}{a^m k^m} + \frac{Bs^{4m}}{a^{2m-1}k^{2m}} - \frac{Cs^{6m-1}}{a^{3m-2}k^{3m}}$ $+$ etc. quae oritur ponendo k^m negatiuum.

Corollarium 5.

745. Perſpicitur hinc quoties m fuerit numerus integer, toties tautochronam aſcenſibus inſeruientem ANC eſſe continuam tautochronae deſcenſuum BMA. Eadem enim aequatio oritur ſiue k^m ſiue s ponatur negatiuum.

Corollarium 6.

746 Praeterea intelligitur curuam ANC, ſuper qua omnes aſcenſus eodem tempore abſoluuntur, quo deſcenſus ſuper curua BMA, minus eſſe curuam quam BMA, et cuſpidem C altius habere poſitam quemadmodum in medio quod in duplicata celeritatum ratione reſiſtit.

Corollarium 7.

747. In medio quod in ſimplici ratione celeritatum reſiſtit, omnes ipſius s exponentes fiunt $= 2$; ex quo ſequitur tam tautochronam deſcenſuum quam aſcenſuum eſſe ſemicycloides. Ea vero pro aſcenſu, quia s^2 minorem habet coefficientem, quam pro deſcenſu maiore circulo erit genita; ſi quidem tempora aſcenſuum aequalia eſſe debeant temporibus deſcenſuum. Interim vero eadem cyclois continua ſemioſcillationes quoque producit iſochronas, aſcenſuum vero tempora erunt minora quam tempora deſcenſuum.

Scholion 3.

748. Si m eſt numerus integer facile ex data forma poteſt ipſius A valor definiri. Namque ſi $m = 1$ erit $A = \frac{1}{6}$; ſi $m = 2$ erit $A = \frac{3}{40}$ et ita porro. At ſi m non eſt numerus integer difficilius eſt valorem A exhibere; ſeries enim valorum ipſius A debet interpolari. Pro fractionibus quidem, quarum denominator eſt 2 valor ipſius A per quadraturam circuli poteſt definiri. Poſito enim π pro perimetro circuli, cuius diameter eſt 1, erit vt ſequitur:

$$\begin{array}{l|lllll} m & \frac{1}{2}, & \frac{3}{2}, & \frac{5}{2}, & \frac{7}{2}, & \text{etc.} \\ A & \frac{1}{\pi}, & \frac{2.1}{3.2\pi}, & \frac{2.4.1}{3.5.3\pi}, & \frac{2.4.6.1}{3.5.7.4\pi}, & \text{etc.} \end{array}$$

Ex quo patet ſi fuerit $m = \frac{2n+1}{2}$ fore $A = \frac{2.4.6 \cdots 2n}{3.5.7 \cdots (2n+1)} \frac{1}{(n+1)\pi}$: atque adeo $gx = \frac{s^2}{a} +$

$\frac{2.4.6\cdots\cdots 2n.\ s^{2n+2}}{3.5.7\cdots\cdots(2n+1)(n+1)\pi a^m k^m}$ exiſtente ſcilicet $m = \frac{2n+1}{2}$. Quaecunque autem m fuerit fractio, erit perpetuo $A = \frac{1}{(2m+1)\int dz(1-z)^m}$, hoc integrali ita accepto, vt euaneſcat poſito $z=0$; atque tum poſito $z=1$. Quemadmodum docui in Comment. A. 1730. in Diff. de progreſſionibus transcendentibus.

Corollarium 8.

749. Si nunc pro ſingulis mediis reſiſtentibus rariſſimis quaerantur tautochronae deſcenſuum eae ſe habebunt vt ſequitur:

$$\begin{array}{l|l}
m=0 & gx=\frac{s^2}{a}+s \\
m=\frac{1}{2} & gx=\frac{s^2}{a}+\frac{s^2}{\pi\sqrt{ak}} \\
m=1 & gx=\frac{s^2}{a}+\frac{s^3}{6ak} \\
m=\frac{3}{2} & gx=\frac{s^2}{a}+\frac{s^4}{3\pi ak\sqrt{ak}} \\
m=2 & gx=\frac{s^2}{a}+\frac{3s^5}{40a^2k^2} \\
m=\frac{5}{2} & gx=\frac{s^2}{a}+\frac{8s^6}{45\pi a^2k^2\sqrt{ak}} \\
m=3 & gx=\frac{s^2}{a}+\frac{5s^7}{112a^3k^3}
\end{array}$$

Ex his formabuntur tautochronae aſcenſuum; ſi vltimi termini fiant negatiui.

Scholion 4.

750. Haec igitur ſufficiant de tautochronis ſimplicibus, ſuper quibus vel omnes deſcenſus tantum, vel omnes aſcenſus aequalibus abſoluuntur temporibus. Praeter has autem curuas etiam aliae tautochronarum nomine appellari poſſunt, ſuper quibus vel omnes ſemioſcillationes, vel etiam ſolum omnes integrae oſcillationes ſint iſochronae; quarum curuarum numerus vti etiam in vacuo eſt infinitus. Quod autem ad integras oſcillationes attinet, haec quaeſtio reſiſtentiae propria eſt, in vacuo enim omnes ſemioſcillationes inter ſe ſunt aequales. Quia autem in his quaeſtionibus duae curuae inueniendae proponuntur, quarum altera ad aſcenſus altera ad deſcenſus pertineat; antequam huiusmodi quaeſtiones pro tautochroniſmo ſoluamus, alias faciliores propoſitiones circa binas curuas aſcenſum et deſcenſum ſpectantes praemittemus.

SUPER DA
tum, vel on
temporibus.
tautochronar
quibus vel o
lum omnes
quarum curu
eſt infinitus.
attinet, haec
vacuo enim
aequales. Q
curuae inuen
ad aſcenſus a
quam huiusm
ſoluamus, ali
nas curuas a
mittemus.
]
751. I
tendentis et m
ratione celerit
ram AN illi
pus per arcu
deſcendens ſup
cum AN , q
Poſitis g
ſiſtentiae k,

TU PUNCTI
nte ſcilicet m
fractio, erit
hoc integrali
0; atque tum
in Comment.
ous transcen-
iis reſiſtenti-
e deſcenſuum
cenſuum; ſi
autochronis
ſcenſus tan-
tum

PROPOSITIO 83.

Problema.

Tab. XV. Fig. 6.

751. *In hypotheſi potentiae vniformis deorſum tendentis et medio vniformi, quod reſiſtit in duplicata ratione celeritatum, data curua* MA *inuenire alteram* AN *illi in* A *iungendam huius indolis; vt corpus per arcum quemcunque* MA *ſuper curua data deſcendens ſuper curua quaeſita aſcenſu conficiat arcum* AN *, qui aequalis ſit arcui* MA.

Solutio.

Poſitis potentia ſollicitante g; exponente reſiſtentiae k, et celeritate in A, quam ex deſcenſe acquiſiuit, quaque ſuper curua quaeſita AN aſcenſum inchoat, debita altitudini b; ſit pro curua data abſciſſa AP$=x$; arcus AM$=s$; pro quaeſita vero ſit abſciſſa AQ$=t$ atque arcus AN$=r$. His poſitis erit altitudo celeritati corporis deſcendentis in M debita $=e^{\frac{s}{k}}(b-g\int e^{\frac{-s}{k}}dx)$ et altitudo celeritati corporis aſcendentis in N debita $=c^{\frac{-r}{k}}(b-g\int e^{\frac{r}{k}}dt)$. Integer ergo arcus deſcenſus prouenit ex hac aequatione $b=g\int e^{\frac{-s}{k}}dx$; integer vero arcus aſcenſus ex hac aequatione $b=g\int e^{\frac{r}{k}}dt$. Inter arcus igitur deſcenſus et aſcenſus haec habebitur aequatio: $\int e^{\frac{-s}{k}}dx=\int e^{\frac{r}{k}}dt$ ſeu huius differentialis $e^{\frac{-s}{k}}dx=e^{\frac{r}{k}}dt$. Quare cum arcus aſcenſus aequalis eſſe debeat arcui deſcenſus ponatur $r=s$; quo facto prodibit iſta aequatio $e^{\frac{-2s}{k}}dx=dt$. Cum autem curua MA data ſit, dabitur aequatio inter s et x; ex qua, ſi loco dx eius valor per s et ds ſubſtituatur, prodibit aequatio inter t et s ſeu inter t et r propter $r=s$; quae determinabit naturam curuae quaeſitae AN. Q. E. I.

Corollarium 1.

752. Si curuae datae MA portio infima exprimatur aequatione $x=\alpha s^n$; erit pro portione infima curuae AN haec aequatio $dt=\alpha n e^{\frac{-2s}{k}} s^{n-1} ds$. Eſt vero propter s arcum minimum $e^{\frac{-2s}{k}}=1-\frac{2s}{k}$, vnde erit $t=\alpha s^n-\frac{2\alpha n s^{n+1}}{(n+1)k}$ ſeu tantum $t=\alpha s^n$. Portiones ergo infimae vtriusque curuae erunt inter ſe ſimiles.

SVPER
infima c
ds. Eſt
$1-\frac{2s}{k}$, v
$t=\alpha s^n$.
erunt in
753
eſſe ſem
ſemper l
ſpondens
nus eſſe
754
rit eſſe
caſu pun
terminan
755
dine infi
tantum
nitam a
curua A
vltra da
TV PVNCTI
uaeſita AN aſ-
; ſit pro cur-
$=s$; pro quae-
arcus AN$=r$.
rporis deſcen-
dx) et alti-
in N debita
arcus deſcen-
$g\int e^{\frac{-s}{k}}dx$; in-
aequatione b
ſus et aſcen-
$=\int e^{\frac{r}{k}}dt$ ſeu
Quare cum ar-
cui deſcenſus
iſta aequatio
A data ſit,
qua, ſi loco
ur, prodibit
r propter r
uae quaeſitae
io infima ex-
pro portione
infi-

Corollarium 2.

753. Ex aequatione $e^{\frac{-2s}{k}}dx=dt$ intelligitur eſſe ſemper $dt<dx$ ſeu $t<x$. Punctum ergo N ſemper humilius erit poſitum, quam punctum reſpondens M. Ex quo ſequitur curuam AN minus eſſe curuam verſus AB, quam curuam AM.

Corollarium 3.

754. Hanc ob rem curua ANC non poterit eſſe ſimilis et aequalis curuae AM; quia hoc caſu puncta M et N arcus aequales AM et AN terminantia forent in eadem altitudine ſita.

Corollarium 4.

755. Si corpus ſuper curua MA ex altitudine infinita deſcenderet, quia in A celeritatem tantum finitam acquirit ad altitudinem tantum finitam aſcendere poterit. Hoc ergo caſu, quo curua AM in infinitum porrigitur, curua ANC non vltra datam altitudinem aſcendere poterit, ſed aſym-

aſymtoton habebit horizontalem B C. Id quod etiam ex hoc apparet, ſi ſit $s = \infty$; tum enim prodit $dt = o$.

Scholion I.

756. Quemadmodum ex hac propoſitione intelligitur, quomodo ex data curua deſcenſuum MA inueniri debeat curua aſcenſuum AN; ita viciſſim hinc facile erit ex data curua AN alteram definire. Si enim detur aequatio inter t et s, erit $dx = e^{\frac{2s}{k}} dt$, aequatio pro curua AM.

Corollarium 5.

757. Quia curuae deſcenſuum MA reſpondet curua aſcenſuum AN, cuius haec eſt aequatio $dt = e^{\frac{-2s}{k}} dx$. Ita ſi haec curua AN pro curua deſcenſuum accipiatur, erit reſpondentis curuae aſcenſuum abſciſſa $= \int e^{\frac{-2s}{k}} dt = \int e^{\frac{-4s}{k}} dx$.

Corollarium 6.

758. Si hoc modo vlteriores curuae reſpondentes quaerantur, obtinebitur ſequens aequationum ſeries.

Abſciſſa curuae reſpondens arcui s.

$$\mathrm{I} = x$$

$$\mathrm{II} = \int e^{\frac{-2s}{k}} dx$$

$$\mathrm{III} = \int e^{\frac{-4s}{k}} dx$$

SVPER
755
guae hai
ſimo pu
deſcende
qualem :
ius feriei
lis, quia
ſciſſa.
760
Pro curu
AQ=t
$e^{\frac{-2s}{k}} ds$ ſe
titate e
$\frac{(\frac{1}{2}k-t)d}{dt}$
curuam
rizontali
re altitu
ipſa tract
piatur,
Tom. II
OTV PVNCTI
B C. Id quod
$-\infty$; tum enim
ac propoſitione
rua deſcenſuum
uum AN; ita vi-
rua AN alteram
inter t et s,
rua AM.
MA reſpondet
ſt aequatio $dt =$
pro curua de-
tis curuae aſcen-
x.
s curuae reſpon-
quens aequatio-
arcui s.
IV

$$\mathrm{IV} = \int e^{\frac{-6s}{k}} dx$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$n = \int e^{\frac{-2(n-1)s}{k}} dx.$$

Corollarium 7.

759. Huius igitur ſeriei duae curuae contiguae hanc habebunt proprietatem, vt, iis in infimo puncto A coniunctis, corpus ſuper priori deſcendens, ſuper altera per arcum aſcendat aequalem arcui deſcenſus. Infiniteſima autem huius ſeriei curua facto $n = \infty$, fit recta horizontalis, quia euaneſcit $e^{\frac{-\infty s}{k}}$; ideoque ipſa curuae abſciſſa.

Exemplum I.

760. Sit linea data recta verticalis, erit $x = s$. Tab. XVI. Fig. 1. Pro curua ergo aſcenſuum quaeſita ANE exiſtente $AQ = t$ et $AN = s$ habebitur iſta aequatio $dt = e^{\frac{-2s}{k}} ds$ ſeu $t = \frac{k}{2}(1 - e^{\frac{-2s}{k}})$. Atque eliminata quantitate exponentiali erit $2t\,ds = k\,ds - k\,dt$ ſiue $\frac{(\frac{1}{2}k - t)ds}{dt} = \frac{1}{2}k$. Ex qua aequatione perſpicitur curuam ANE eſſe tractoriam ſuper aſymtoto horizontali BD filo longitudinis $\frac{1}{2}k$ genitam. Quare altitudo aſymtoti AB erit $= \frac{1}{2}k$. Si nunc haec ipſa tractoria ANE pro curua deſcenſuum accipiatur, ei reſpondebit curua quaeſita, cuius ab-

ſciſſa arcui s reſpondens erit $= \int e^{\frac{-4s}{k}} ds$; quae ergo curua iterum erit tractoria aſymtoton horizontalem habens, cuius aſymtotos ſupra A eleuata eſt interuallo $\frac{1}{4}k$, cui longitudo fili aequatur. Seriei vero ſuperioris omnes curuae erunt tractoriae, quae filis generantur, quorum longitudines conſtituunt hanc ſeriem $\frac{k}{0}, \frac{k}{2}, \frac{k}{4}, \frac{k}{6}$ etc. Recta ſcilicet verticalis tanquam tractoria conſiderari poteſt, cuius filum generans eſt $\frac{k}{0}$ ſeu infinitum. Vltima autem huius ſeriei tractoria in rectam abit horizontalem per A ductam.

Exemplum 2.

761. Si linea deſcenſuum data fuerit recta vtcunque ad horizontem inclinata MA, ita vt ſit MA (s): AP(x) $= \alpha : 1$, ſeu $dx = \frac{ds}{\alpha}$; habebitur pro curua quaeſita AN iſta aequatio $\alpha dt = e^{\frac{-2s}{k}} ds$, cuius integralis eſt $\alpha t = \frac{k}{2}(1 - e^{\frac{-2s}{k}})$. Ex quibus aequationibus coniunctis oritur $2\alpha t\, ds = kds - \alpha k dt$ ſeu $\frac{(\frac{k}{2\alpha} - t)ds}{dt} = \frac{k}{2}$. Quae aequatio quoque eſt pro tractoria filo longitudinis $\frac{k}{2}$ ſuper aſymtoto horizontali BD genita; exiſtente AB $= \frac{k}{2\alpha}$; haecque tractoria per A tranſire debet. Seriei ſequentes curuae omnes ſunt quoque tractoriae, vt in praecedente exemplo, quarum fila generantia ſunt $\frac{k}{0}$, $\frac{k}{2}, \frac{k}{4}, \frac{k}{6}$, etc. earum vero aſymtotorm a puncto

SI TV PVNCTI
A $\frac{k}{4\alpha}$, ver gul ds; quae ergo mtoton horizontalem ſupra A ele- fili aequatur. ae erunt tra- rum longitudi- $\frac{k}{4}, \frac{k}{6}$ etc. Re- oria conſidera- ſeu $\frac{k}{0}$ ſeu infini- pri ſtea actoria in re- per tam.
a fuerit recta nen MA, ita vt ſit per habebitur pro ſcri $\alpha dt = e^{\frac{-2s}{k}} ds$, cat ta). Ex quibus ſpo $= kds - \alpha kdt$ ſeu ue eſt pro tra- itoto horizon- pli ; haecque tra- ſuu ſequentes cur- vt in praece- antia ſunt $\frac{k}{0}$, rm a puncto A

A diſtantiae tenent hanc progreſſionem $\frac{k}{0\alpha}, \frac{k}{2\alpha}, \frac{k}{4\alpha}, \frac{k}{6\alpha}$ etc. Hae ſcilicet omnes tractoriae cum axe verticali AB angulum conſtituent aequalem angulo PAM.

Corollarium 8.

762. Tractoriarum harum ea, quae primam ſeu rectam MA praecedit, hanc ergo habebit proprietatem, vt corpus ſuper ea deſcendens, poſteaque ſuper recta AM aſcendens aequalia ſpatia percurrat.

Corollarium 9.

763. Ad curuam igitur deſcenſuum CA inueniendam, cui reſpondeat recta inclinata AM; ſuper aſymtoto horizontali filo longitudinis $\frac{k}{2}$ deſcribatur tractoria CA, in eaque ſumatur applicata A$b = \frac{k}{2\alpha}$ et ex A conſtituatur recta inclinata AM; eritque CA curua deſcenſuum, cui reſpondet recta AM pro aſcenſibus. Tab. XVI. Fig. 2.

Scholion 2.

764. Inſeruire poteſt hic caſus inſtar exempli problematis inuerſi, quo ex data curua aſcenſuum, curua deſcenſuum requiritur.

Exemplum 3.

Tab. XV. Fig. 6.

765. Sit curua descenſuum data cyclois MA, cuius natura hac aequatione ſit expreſſa $2ax = s^2$, ſeu circuli genitoris diameter $= \frac{a}{2}$. Erit ergo $dx = \frac{sds}{a}$, vnde pro curua altera aſcenſuum AN haec inuenitur aequatio $adt = e^{\frac{-2s}{k}} sds$, cuius integralis eſt, $at = \frac{k^2}{4}(1 - e^{\frac{-2s}{k}}) - \frac{k}{2} e^{\frac{-2s}{k}} s$, quae propter $e^{\frac{-2s}{k}} = \frac{adt}{sds}$, abit in hanc $atsds = -\frac{ak^2dt}{4} + \frac{k^2sds}{4} - \frac{aksdt}{2}$. Haec curua in A, vt iam eſt dictum, tangentem habebit horizontalem. Habebit vero etiam aſymtoton BC horizontalem; cuius altitudo BA reperietur ſi s fiat $= \infty$. Fiet autem hoc caſu $e^{\frac{-2s}{k}} = 0$; quare erit $t = AB = \frac{k^2}{4a}$. Ex hoc intelligitur curuam alicubi punctum flexus contrarii habere debere; quod inuenietur ſi poſito dt conſtante, ponatur $dds = 0$. Hinc vero prodibit $1 = \frac{2s}{k}$ ſeu $s = \frac{k}{2}$. Quare ſi ſumatur arcus $AN = \frac{k}{2}$ erit N punctum flexus contrarii; cui reſpondet abſciſſa $AQ = \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{2e}$ ſeu $BQ = \frac{k^2}{2e}$. Quo circa erit ſemper $AB : BQ = e : 2 = 2,71828 : 2$.

Scholion 3.

766. Problema hoc propoſitum extat ab anonymo in Act. Lipſ. A. 1728. eiusque ſolutionem dedit in Comment. Acad. Petrop. A. 1729. Cl. D. *Bernoulli*, alia vſus methodo. Praeter

SVPE
hanc
requiri
mus d
modi
quente
contin
tione,
facta
ſequen
tum
vero
ne,
demc
Sumt
et p
dx.
nua,
comp
−s,
lor

IOTU PVNCTI
lata cyclois MA,
xpreſſa $2ax = s^2$,
$\frac{a}{2}$. Erit ergo dx
enſuum AN haec
, cuius integra-
, quae propter
$-\frac{ak^2dt}{4} + \frac{k^2sds}{4} -$
eſt dictum, tan-
bebit vero etiam
ius altitudo BA
autem hoc caſu
Ex hoc intel-
xus contrarii ha-
poſito dt con-
ero prodibit 1
arcus $AN = \frac{k}{2}$
cui reſpondet
Quo circa erit
8 : 2.
um extat ab a-
eiusque ſolutio-
Petrop. A. 1729.
odo. Praeter
hanc

hanc vero conditionem anonymus ille potiſſimum requirit vnam curuam continuam, cuius alter ramus deſcenſibus alter aſcenſibus inſeruiat, cuiusmodi curuae dantur innumerabiles, quas in ſequente propoſitione detegemus.

PROPOSITIO 84.

Problema.

Tab. XV. Fig. 6.

767. *Iisdem poſitis vt ante, inuenire curuam continuam* MAN *huiusmodi, vt in quauis ſemioſcillatione, quae ſemper in arcu* MA *incipiat, ſuper ea facta arcus deſcenſus* MA *aequalis ſit arcui aſcenſus ſequentis* AN.

Solutio.

Propoſitio haec a praecedente in hoc tantum differt, quod ibi data fuerit curua MA; hic vero ea quoque quaeri debeat ex hac conditione, quod vtraque curua MA et AN vnam eandemque curuam continuam conſtituere debeant. Sumtis igitur arcubus AM et AN aequalibus $= s$, et poſita $AP = x$ atque $AQ = t$, erit $dt = e^{\frac{-2s}{k}} dx$. Quia autem curua MAN debet eſſe continua, aequationem inter s et x ita oportet eſſe comparatam, vt ſi in ea loco s ponatur minus $-s$, quo caſu arcus AM in arcum AN abit, valor ipſius x fiat $= t$ ſeu $= \int e^{\frac{-2s}{k}} dx$. Pono igitur

tur $dx = Mds$, vbi M ſit functio quaedam ipſius s; eaque abeat in N, ſi loco s ponatur $-s$. Ponatur ergo $-s$ loco s quo caſu x abit in t, eritque $dt = -Nds$. Eſt vero quoque $dt = e^{\frac{-2s}{k}} dx = e^{\frac{-2s}{k}} Mds$, quocirca erit $N = -e^{\frac{-2s}{k}} M$. Sit porro $M = e^{\frac{+s}{k}} P$, abeatque P in Q poſito $-s$ loco s eritque $N = e^{\frac{-s}{k}} Q$. Quibus valoribus loco M et N ſubſtitutis prodibit $Q = -P$. Ex quo apparet P huiusmodi eſſe debere functionem ipſius s, quae abeat in $-P$ poſito $-s$ loco s, quas functiones impares appellare conſueui. Sit itaque P functio quaecunque impar ipſius s, cuiusmodi ſunt e.gr. $\alpha s, \alpha s^3, \alpha s^5$ etc. eritque $M = e^{\frac{s}{k}} Pds$ ſeu $x = \int e^{\frac{s}{k}} Pds$. Quae eſt aequatio pro curua quaeſita. Q.E.I.

Corollarium I.

768. Quia eſt $dx = e^{\frac{s}{k}} Pds$ erit ſumendis logarithmis $ldx = \frac{s}{k} + lP + lds$. Differentietur haec aequatio denuo poſito ds conſtante, prodibitque $\frac{ddx}{dx} = \frac{ds}{k} + \frac{dP}{P}$ ſeu $kPddx = Pdxds + kdxdP$. Quae aequatio ab exponentialibus eſt libera.

Corollarium 2.

769. Quoniam P per s dari debet aequatio inuenta non habet variabiles inter ſe permixtas; quamobrem ea ſufficit ad curuas in ea contentas conſtruendas.

Exem-

SVI IOTU PUNCTI
quaedam ipſius s;
ıatur $-s$. Pona-
ıbit in t, erit-
ue $dt = e^{\frac{-2s}{k}} dx$
$= ke$ $\frac{-2s}{k}$M. Sit por-
et ſi poſito $-s$ loco s
vero ibus loco M et
hanc Ex quo apparet
poſit em ipſius s, quae
$\frac{s^2}{2}+$ quas functiones
curu itaque P functio
que modi ſunt e.gr.
ua ſi Pds ſeu $x = \int e^{\frac{s}{k}}$
$e^{\frac{s}{k}}s<$ a quaeſita. Q.E.I.
ſio
curu
punct
loco rit ſumendis lo-
ffeientietur haec
ſeu te, prodibitque
$+kdxd$P. Quae
curua bera.
$s = a$
ſionis debet aequatio
eſt ſi r ſe permixtas;
minu in ea contentas
nitur
Exem-

Exemplum.

770. Ponamus eſſe $P = \frac{s}{a}$, erit $ax = \int e^{\frac{s}{k}} sds = ke^{\frac{s}{k}} s - k^2 e^{\frac{s}{k}} + k^2$, quae eſt aequatio pro vna et fortaſſe ſimpliciſſima curua ſatisfaciente. Haec vero aequatio eliminato exponentiali $e^{\frac{s}{k}}$ abit in hanc $axsds = aksdx - k^2 adx + k^2 sds$. Vel expoſito $e^{\frac{s}{k}}$ per ſeriem prodibit iſta aequatio $ax = \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{1.3k} + \frac{s^4}{1.2.4k^2} + \frac{s^5}{1.3.4.5k^3} +$ etc. Haec ergo curua in A habet tangentem horizontalem, eiusque radius oſculi in hoc loco eſt a. Quia ne curua fiat imaginaria eſſe debet $dx < ds$ debebit eſſe $e^{\frac{s}{k}} s < a$. Quo ergo loco fit $e^{\frac{s}{k}} s$, quae expreſſio creſcente s quoque creſcit, aequalis a, ibi curua AM habebit tangentem verticalem atque punctum reuerſionis. Pro ramo AN poſito $-s$ loco $+s$ haec habetur aequatio $ax = \int e^{\frac{-s}{k}} sds$, ſeu $dx = \frac{e^{\frac{-s}{k}} sds}{a}$. Quare quamdiu fuerit $e^{\frac{-s}{k}} s < a$, curua non fit imaginaria. At ſi vsquam ſi $e^{\frac{-s}{k}} s = a$, ibi curua quoque habebit punctum reuerſionis et diametrum verticalem. Fieri autem poteſt ſi a ſatis magnum accipiatur, vt $e^{\frac{-s}{k}} s$ ſemper minus ſit quam a, quo caſu curua AN in infinitum abibit, aſymtotonque habebit horizontalem

lem BC. Fit autem $e^{\frac{-s}{k}}s = o$ caſibus, $s = o$ et $s = \infty$, habebit ergo valorem maximum, ſi eius differentiale $= o$, hoc vero caſu ſit $k = s$, et $e^{\frac{-s}{k}}s = \frac{k}{e}$. Quare ſi fuerit $a > \frac{k}{e}$ curua habebit aſymtoton BC, cuius altitudo BA erit $= \frac{k^2}{a}$. At ſi fuerit $a < \frac{k}{e}$ curua AN, vti alter ramus, habebit quoque punctum reuerſionis, quod ex hac aequatione determinabitur, $a = e^{\frac{-s}{k}}s$. In priori caſu curua AN habere debet punctum flexus contrarii, quod reperietur ex hac aequatione $1 = \frac{s}{k}$; erit ſcilicet in N ſumto arcu $AN = k$.

PROPOSITIO 85.

Problema.

Tab. XV. Fig. 6.

771. *In hypotheſi grauitatis et reſiſtentiae praecedenti ſi data fuerit curua MA, ſuper qua deſcenſus abſoluantur; inuenire pro aſcenſibus curuam AN huius proprietatis, vt aſcenſus cuiusque tempus aequale ſit tempori deſcenſus praecedentis.*

Solutio.

Poſitis vt ante potentia ſollicitante $= g$; et medii exponente $= k$; ſit pro curua MA abſciſſa $AP = x$; arcus $AM = s$; atque pro curua quaeſita AN, abſciſſa $AQ = t$; arcus $AN = r$. Ponatur altitudo celeritati deſcenſu quodam in A acquiſito debita $= b$, qua celeritate ſequentem aſcenſum in curua AN abſoluet. His poſitis erit altitudo celeritati in M debita $= e^{\frac{s}{k}}(b - g\int e^{\frac{-s}{k}}dx)$ et altitudo in aſcenſu celeritati in N debita $= e^{\frac{-r}{k}}(b - g\int e^{\frac{r}{k}}dt)$. Tempus ergo deſcenſus per arcum MA erit $= \int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{(b - g\int e^{\frac{-s}{k}}dx)}}$, et tempus aſcenſus per arcum $AN = \int \frac{e^{\frac{r}{2k}}dr}{\sqrt{(b - g\int e^{\frac{r}{k}}dt)}}$, quae duo tempora, ſi poſt integrationem ponatur $g\int e^{\frac{-s}{k}}dx = b$, atque $g\int e^{\frac{r}{k}}dt = b$ debent eſſe aequalia. Ponatur ad hoc obtinendum $g\int e^{\frac{-s}{k}}dx = X$; $g\int e^{\frac{r}{k}}dt = T$: atque $\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = dS$ et $e^{\frac{r}{2k}}dr = dR$, vbi X, T, S et R ſint tales functiones, quae euaneſcant poſito x, s, t et $r = o$. Efficiendum ergo eſt, vt haec duo integralia $\int \frac{dS}{\sqrt{(b - X)}}$ et $\int \frac{dR}{\sqrt{(b - T)}}$ fiant inter ſe aequalia, ſi poſt integrationem ponatur $X = b$ et $T = b$. At S et R vti et X et T ſunt quantitates a b prorſus non pendentes, atque eandem inter ſe relationem tenere debent, quemcunque valorem b habuerit. Quaeſito ergo ſatisfiet, ſi R fuerit talis functio ipſius T, qualis S eſt ipſius X. Vel ſumto $R = S$ eſſe quoque debet $T = X$. Eſt vero $S = 2k(1 - e^{\frac{-s}{2k}})$ et $R = 2k(e^{\frac{r}{2k}} - 1)$

SUPER
altitudo
et altit
$(b - g\int e$
MA er
per arc
tempor
$= b$, at
natur a
$= T$: at
T, S e
poſito
vt haec
ter ſe
$X = b$
quantita
eandem
cunque
fiet, ſi
ipſius
$T = X$.
Tom. I

MOTU PVNCTI
caſibus, $s = o$ et
maximum, ſi eius
ſu ſit $k = s$, et
rua habebit aſym-
erit $= \frac{k^2}{a}$. At ſi
er ramus, habebit
od ex hac aequa-
In priori caſu
n flexus contrarii,
ne $1 = \frac{s}{k}$; erit ſci-
85.
et reſiſtentiae prae-
ſuper qua deſcen-
ibus curuam AN
ique tempus aequa-
is.
licitante $= g$; et
curua MA abſciſ-
e pro curua quae-
$AN = r$. Pona-
uodam in A ac-
e ſequentem aſ-
His poſitis erit
alti-

— 1); facto igitur R = S erit $2 = e^{\frac{r}{2k}} + e^{\frac{-s}{2k}}$, atque $r = 2kl(2-e^{\frac{-s}{2k}})$. Quia autem hoc poſito eſſe debet X = T ſeu $e^{\frac{-s}{k}}dx = e^{\frac{r}{k}}dt$ fiet $t = \int e^{\frac{-s-r}{k}}dx$. Cum vero ſit $e^{\frac{r}{k}} = (2-e^{\frac{-s}{2k}})^2 = 4-4e^{\frac{-s}{2k}}+e^{\frac{-s}{k}}$, erit $t = \int\frac{dx}{e^{\frac{s}{k}}(2-e^{\frac{-s}{2k}})^2} = \int\frac{dx}{(2e^{\frac{s}{2k}}-1)^2}$. Ex quibus ergo conſtructio curuae innoteſcit, quia ſumto arcu $AN = r = 2kl(2-e^{\frac{-s}{2k}})$ huic reſpondet abſciſſa $AQ = t = \int\frac{dx}{(2e^{\frac{s}{2k}}-1)^2}$; Aequatio vero pro curua AN commodius inuenietur ex data aequatione inter s et x. Nam quia eſt $s = -2kl(2-e^{\frac{r}{2k}})$ et $x = \int\frac{dt}{(2e^{\frac{-r}{2k}}-1)^2}$; ſi loco s et x hi valores ſubſtituantur, prodibit aequatio inter t et r pro curua quaeſita AN. Q. E. I.

Corollarium 1.

772. Quia eſt $r = 2kl(2-e^{\frac{-s}{2k}})$ erit $dr = \frac{e^{\frac{-s}{2k}}ds}{(2-e^{\frac{-s}{2k}})}$. Cum vero ne curua AN fiat imaginaria eſſe debeat $dr > dt$; curua AN cousque

SUP PUNCTI

erit r $2 = e^{\frac{r}{2k}}$ autem hoc dx $2e^{\frac{s}{2k}}$ $e^{\frac{r}{k}}dt$ fiet $(2-e^{\frac{-s}{2k}})^2$

7 ex qu dx $2e^{\frac{s}{2k}}-$ ſita q ctio curuae $2kl(2-e^{\frac{-s}{2k}})$ dx ;

7 $e^{\frac{r}{2k}}$ (2 – ter d odius inue- x. Nam dt ; ſi , prodibit eſita AN.

7 ret, enim inter mabit erit $dr =$ N fiat ima- $2kl(2$ N cousque erit

erit realis, quouſque $ds > \frac{dx}{e^{\frac{s}{2k}}(2-e^{\frac{-s}{2k}})}$, ſeu $ds > \frac{dx}{2e^{\frac{s}{2k}}-1}$.

Corollarium 2.

773. Eſt vero $e^{\frac{s}{2k}}$ ſemper maius vnitate; ex quo ſequitur vbi fuerit $ds > dx$ eo magis fore $ds > \frac{dx}{2e^{\frac{s}{2k}}-1}$. Quare ſi curua data fuerit realis, quaeſita quoque ſemper erit realis.

Corollarium 3.

774. Cum ſit $s = -2kl(2-e^{\frac{r}{2k}})$ erit $ds = \frac{e^{\frac{r}{2k}}dr}{(2-e^{\frac{r}{2k}})} = \frac{dr}{(2e^{\frac{-r}{2k}}-1)}$, vnde facilius relatio inter ds et dx in computum duci poteſt.

Corollarium 4.

775. Ex ſolutione problematis ſimul apparet, quomodo eius inuerſum ſit ſoluendum. Si enim curua aſcenſuum A N datur, ſeu aequatio inter t et r, ex ea aequatio inter x et s formabitur ope aequationum $t = \int\frac{dx}{(2e^{\frac{s}{2k}}-1)^2}$ et $r = 2kl(2-e^{\frac{-s}{2k}})$.

Corollarium 5.

776. Ad curuae formam circa punctum A indagandam ponantur s et r valde exigua, eritque $e^{\frac{-s}{2k}} = 1$, vnde fiet $dr = ds$ atque $dt = dx$. Ex quo perſpicitur curuarum MA et NA infimas portiones eſſe inter ſe ſimiles et aequales.

Exemplum 1.

Tab. XVI. Fig. 1.

777. Sit linea deſcenſuum data recta MA, vtcunque inclinata, vt ſit $s = \alpha x$ ſeu $ds = \alpha dx$. Cum nunc ſit $ds = \frac{dr}{2e^{\frac{-r}{2k}} - 1}$ et $dx = \frac{dt}{(2e^{\frac{-r}{2k}} - 1)^2}$ habebitur inter t et r pro curua quaeſita iſta aequatio, $dr = \frac{\alpha dt}{2e^{\frac{-r}{2k}} - 1}$ ſeu $\alpha dt = 2e^{\frac{-r}{2k}} dr - dr$ cuius integralis eſt $\alpha t = 4k(1 - e^{\frac{-r}{2k}}) - r$. Quae aequatio in ſeriem conuerſa dat $\alpha t = r - \frac{r^2}{1.2.k} + \frac{r^3}{1.2.3.2k^2}$ $\frac{r^4}{1.2.3.4\ 4k^3} +$ etc. ideoque in puncto infimo A eſt $dr = \alpha dt$. Curua haec alicubi habebit tangentem horizontalem, qui locus inuenietur ponendo $dt = 0$ tum vero erit $2 = e^{\frac{r}{2k}}$ ſeu $r = 2kl2$, cui reſpondet $\alpha t = 2k - 2kl2$. Atque ſi r fiat maius quam $2kl2$ valor ipſius dt fiet negatiuus, ideoque curua iterum deſcendet, donec $-dt$ fiat $= dr$, hoc autem accidit, ſi eſt $1 - \alpha = 2e^{\frac{-r}{2k}}$ ſeu $r = 2k$

SVPER … ſU PUNCTI
$l\frac{2}{1-\alpha}$, … a punctum A
1; ſi eſt … exigua, erit-
A diſtab … que $dt = dx$.
zontalem … t NA infimas
Sed ant … equales.
lem, vb
nea dat
tangens
a recta MA,
u $ds = \alpha dx$.
778 … $= \frac{dt}{(2e^{\frac{-r}{2k}} - 1)^2}$
exprime
na AN … uaeſita iſta ae-
ſus s re … $e^{\frac{-r}{2k}} dr - dr$ cu-
Quoniam
deſcenſu
$-r$. Quae ae-
$\frac{2}{2.k} + \frac{r^3}{1.2.3.2k^2}$
779 … infimo A eſt
deſcenſu … bit tangentem
hypothe … ponendo dt
prietate
abſoluan … $= 2kl2$, cui
ſcenſus … r fiat maius
tautochr … gatiuus, ideo-
iam ant … $-dt$ fiat $= dr$,
culo oſ … $\frac{-r}{2k}$ ſeu $r = 2k$
na taut … $l\frac{2}{1-\alpha}$

$l\frac{2}{1-\alpha}$. At quia α non poteſt eſſe minus quam 1; ſi eſt $\alpha = 1$ tangens verticalis in infinitum ab A diſtabit; atque ſi $\alpha > 1$ vltra tangentem horizontalem nusquam habebit tangentem verticalem. Sed antrorſum vltra tangentem habebit verticalem, vbi eſt $r = -2kl\frac{1+\alpha}{2}$. Caſu ergo quo linea data eſt verticalis, ſeu $\alpha = 1$ fit $r = 0$, ſeu tangens in A erit verticalis.

Corollarium 6.

778. Si s denotet totum arcum deſcenſus, r exprimet totum arcum ſequenti aſcenſu ſuper curua AN deſcriptum. Quare ſi detur arcus deſcenſus s reperietur arcus aſcenſus $r = 2kl(2 - e^{\frac{-s}{2k}})$. Quoniam enim poſuimus T = X integros arcus deſcenſus et aſcenſus litterae s et r denotant.

Tab. XV. Fig. 6.

Exemplum 2.

779. Sit curua data MA ipſa tautochrona deſcenſuum, quam ante pro eadem reſiſtentiae hypotheſi inuenimus; habebit curua AN hanc proprietatem, vt omnes aſcenſus aequalibus quoque abſoluantur temporibus; iisdem nempe quibus deſcenſus ſuper MA. Quare curua AN erit ipſa tautochrona aſcenſuum cum curua MA continua iam ante inuenta. Quo hoc autem ex iſto calculo oſtendatur, ſumamus aequationem pro curua tautochrona deſcenſuum, quae eſt vel $\alpha dx = k$

$(e^{\frac{s}{2k}}-1)ds$ vel $ax=2k^2(e^{\frac{s}{2k}}-1)-ks$. Cum nunc ſit $ds=\frac{dr}{2e^{\frac{-r}{2k}}-1}$ et $e^{\frac{s}{2k}}=\frac{e^{\frac{-r}{2k}}}{2e^{\frac{-r}{2k}}-1}$ atque $dx=\frac{dt}{(2e^{\frac{-r}{2k}}-1)^2}$, his ſubſtitutis erit $\frac{a\,dt}{(2e^{\frac{-r}{2k}}-1)^2}=\frac{kdr(1-e^{\frac{-r}{2k}})}{(2e^{\frac{-r}{2k}}-1)^2}$ ſeu $adt=k(1-e^{\frac{-r}{2k}})dr$. Quae aequatio ex illa formatur, ſi pro x ponatur t atque $-r$ pro s. Quare haec curua AN eſt continua cum MA atque tautochrona aſcenſuum.

Corollarium 7.

780. Dato ergo arcu deſcenſus s ſuper tautochrona deſcenſuum; erit arcus aſcenſus ſequentis ſuper tautochrona aſcenſuum $r=2kl(2-e^{\frac{-s}{2k}})$. Atque ſi deſcenſus a cuſpide tautochronae deſcenſuum incipiat, cuius locum dat $e^{\frac{s}{2k}}=\frac{a+k}{k}$ (729.) erit arcus aſcenſus $r=2kl\frac{2a+k}{a+k}$, vt ſupra inuenimus (732).

Scholion.

781. Cum itaque tautochrona in hac reſiſtentiae hypotheſi quaeſito ſatisfaciat atque ſit curua continua; hinc anſam arripimus inueſtigandi plures

SVPER
plures (
curuaru
in ſeque
78:
bus duae
et ſequen
tur, vn
Ma
in praec
AP=x;
duas ae
$e^{\frac{-s}{k}}dx=$
s et x (
prehend
lem z,
minetur
do obti
ob rem
z, vt e
AN, q
vt s ab
=1+(

)TU PUNCTI
-ks. Cum nunc
- atque dx =
1
lt
(-1)²
)dr. Quae ae-
ponatur t at-
a AN eſt con-
a aſcenſuum.
ius s ſuper tau-
aſcenſus ſequen-
$=2kl(2-e^{\frac{-s}{2k}})$.
hronae deſcen-
$\frac{s}{2k}=\frac{a+k}{k}$(729.)
vt ſupra inueni-
ia in hac reſi-
iat atque ſit cur-
ius inueſtigandi
plures

plures curuas continuas, quarum duo rami vices curuarum MA et AN ſuſtinere queant; id quod in ſequente propoſitione praeſtabimus.

PROPOSITIO 86.

Problema.

782. *Iisdem poſitis vt ante inuenire caſus, quibus duae curuae* MA *et* AN, *ſuper quibus deſcenſus et ſequentes aſcenſus aequalibus temporibus abſoluantur, vnam curuam continuam conſtituunt.*

Tab. XV Fig. 6.

Solutio.

Manentibus iisdem denominationibus, quibus in praecedente propoſitione vſi ſumus, ſcilicet $AP=x$; $AM=s$, $AQ=t$ et $AN=r$; praeter duas aequationes ibi inuentas $2=e^{\frac{r}{2k}}+e^{\frac{-s}{2k}}$ et $e^{\frac{-s}{k}}dx=e^{\frac{r}{k}}dt$ effici debet, vt aequationes inter s et x et inter r et t ſub eadem aequatione comprehendantur. Sumamus ad hoc nouam variabilem z, ex qua punctum M in curua AM determinetur, ita vt ſi z fiat negatiuum, eodem modo obtineatur punctum N in altera curua. Hanc ob rem s huiusmodi eſſe oportet functionem ipſius z, vt eadem, ſi loco z ponatur $-z$, det arcum AN, qui ob poſitionem negatiuam eſt $-r$, ita vt s abeat in $-r$ poſito $-z$ loco z. Ponatur $e^{\frac{-s}{2k}}=1+Q$, erit $e^{\frac{r}{2k}}=1-Q$ propter $2=e^{\frac{r}{2k}}+e^{\frac{-s}{2k}}$ ideo-

ideoque Q erit functio impar ipſius z, quae in ſui negatiuam abit facto z negatiuo. Erit itaque $e^{\frac{-s}{k}} = (1+Q)^2$ et $e^{\frac{x}{k}} = (1-Q)^2$. Porro autem eſſe debet $dx(1+Q)^2 = dt(1-Q)^2$, atque x talis eſſe debet functio ipſius z, quae abit in t poſito z negatiuo. Ponatur $dx = Mdz$, abeatque M in N facto z negatiuo, erit ergo $dt = -Ndz$. Quamobrem fiet $M(1+Q)^2 = -N(1-Q)^2$. Sit ergo $M = P(1-Q)^2$ exiſtente P quoque = functioni impari ipſius z; atque tum fiet $N = -P(1+Q)^2$; ideoque aequalia inter ſe erunt $M(1+Q)^2$ et $-N(1-Q)^2$ vti requiritur. Sumtis ergo pro lubitu loco P et Q functionibus imparibus ipſius z, erit $dx = Pdz(1-Q)^2$ ſeu $x = \int Pdz(1-Q)^2$ atque $s = 2kl\frac{1}{1+Q}$. Vnde innumerabiles oriuntur curuae MA, quarum partes continuae AN aſcenſus producunt iſochronos reſpectiue deſcenſibus ſuper *MA* factis. Quia autem duae functiones occurrunt P et Q, determinetur altera, vt ſit $Q = -z$ erit $s = 2kl\frac{1}{1-z}$ atque $x = \int Pdz(1+z)^2$. In quarum poſteriore aequatione valor ipſius z ex priore, qui eſt $= 1 - e^{\frac{-s}{2k}}$ ſubſtituatur, habebiturque aequatio inter x et s pro curua quaeſita. Q. E. I.

Corollarium 1.

783. Si $z = 0$, fit quoque $s = 0$. Quare integrale ipſius $Pdz(1+z)^2$ ita accipi debet vt euaneſcat poſito $z = 0$. Nam euaneſcente arcu s abſciſſa quoque x euaneſcere debet.

Co-

SVPER DA VNCTI
ue in ſui
784. Cu aque $e^{\frac{-s}{k}}$
quia eſt $dx=$ tem eſſe
niſi ergo P(talis eſſe
curua erit re ito z ne-
in N fa-
mobrem
785. In o M=P
erit $\frac{ds}{dz}=\frac{2k}{P}$. ni impari
par ipſius z, $+Q)^2$;
hoc autem e $1+Q)^2$
rit functio ip rgo pro
hocque caſu ipſius z,
$)^2$ atque
r curuae
ſus pro-
786. Q per *MA*
z, ponatur rrunt P
$\int\frac{azdz}{(1-z)^2}$ ſeu erit $s=$
$dz=\frac{1}{2k}e^{\frac{-s}{2k}}d$ um po-
ore, qui
tutis habebit aequatio
Quae eſt ae
inuenta, ſup Quare in-
aequalibus ab t vt eua-
tem altera A rcu s ab-
Tom. II. Co-

Corollarium 2.

784. Cum ſit $s = 2kl\frac{1}{1-z}$ erit $ds = \frac{2kdz}{1-z}$, et quia eſt $dx = Pdz(1+z)^2$, erit $\frac{ds}{dx} = \frac{2k}{P(1-z^2)(1+z)}$, niſi ergo $P(1-z)^2(1+z)$ maius fuerit quam $2k$ curua erit realis.

Corollarium 3.

785. In puncto infimo A, quia euaneſcit z, erit $\frac{ds}{dz} = \frac{2k}{P}$. Quare P talis eſſe debet functio impar ipſius z, vt ea, ſi $z = 0$, minor ſit quam $2k$: hoc autem euenire non poteſt, niſi P talis fuerit functio ipſius z, quae euaneſcat poſito $z = 0$, hocque caſu tangens in A erit horizontalis.

Exemplum 1.

786. Quia P debet eſſe functio impar ipſius z, ponatur $P = \frac{az}{(1-z^2)^2}$. Quo poſito erit $x = \int\frac{azdz}{(1-z)^2}$ ſeu $dx = \frac{azdz}{(1-z)^2}$. Eſt vero $z = 1 - e^{\frac{-s}{2k}}$ et $dz = \frac{1}{2k}e^{\frac{-s}{2k}}ds$, atque $1 - z = e^{\frac{-s}{2k}}$. Quibus ſubſtitutis habebitur $dx = \frac{ae^{\frac{-s}{2k}}ds(1-e^{\frac{-s}{2k}})}{2ke^{\frac{-s}{k}}} = \frac{ads}{2k}(e^{\frac{s}{2k}}-1)$.

Quae eſt aequatio pro curua tautochrona ſupra inuenta, ſuper cuius parte MA omnes deſcenſus aequalibus abſoluuntur temporibus; ſuper parte autem altera AN omnes aſcenſus iiſdem temporibus.

Exem-

Exemplum 2.

787. Sit $P = \frac{6az - 2az^3}{(1-zz)^2}$; erit $x = \int \frac{6azdz - 2az^3dz}{(1-z)^2} = \frac{3az^2 + az^3}{1-z}$. Cum autem ſit $z = 1 - e^{\frac{-s}{2k}}$ et $1 - z = e^{\frac{-s}{2k}}$; erit $x = \frac{a(1-e^{\frac{-s}{2k}})^2 (4 - e^{\frac{-s}{2k}})}{e^{\frac{-s}{2k}}} = a(1 - e^{\frac{-s}{2k}})^2 (4 e^{\frac{s}{2k}} - 1) = a(4 e^{\frac{s}{2k}} - (3 - e^{\frac{-s}{2k}})^2)$. Quae aequatio in ſeriem conuerſa dat $\frac{4k^2x}{3a} = ss + \frac{s^3}{6k} - \frac{s^4}{48k^2} + \frac{s^5}{96k^3} - \frac{s^6}{640k^4} +$ etc. $= bx$ mutata conſtante a in $\frac{4k^2}{3b}$.

PROPOSITIO 87.

Problema.

Tab. XVI. Fig. 3.

788. *In hypotheſi grauitatis vniformis deorſum tendentis et medio vniformi in duplicata celeritatum ratione reſiſtente, ſi detur curua quaecunque* MA, *ſuper qua corpus deſcenſus abſoluat, inuenire curuam* AN *ei iungendam ad aſcenſus idoneam, ita vt omnes ſemioſcillationes, quae ſuper curua* MAN *fiunt, aequalibus abſoluantur temporibus.*

Solutio.

Poſitis vt hactenus potentia ſollicitante, g, et exponente reſiſtentiae k; ſit curuae datae MA abſciſſa $AP = x$; arcus $AM = s$; curuae vero quaeſitae abſciſſa $AQ = t$; arcus $AN = r$. Incipiat nunc deſcenſus in quocunque curuae MA puncto, ſitque

SVP. OTV PVNCTI
que qua abſoli $= \int \frac{6azdz - 2az^3dz}{(1-z)^2}$ poris $e^{\frac{-s}{2k}}$ et $1 - z$ et alt debit $= a(1 - e^{\frac{-s}{2k}})^2$ quo . Quae aequa- curru $ss + \frac{s^3}{6k} - \frac{s^4}{48k^2}$ quae ta conſtante a pus, 7. atque beat niformis deorſum a qua ata celeritatum ne d uaecunque MA, datae inuenire curuam taris m, ita vt omnes $\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}}$ AN fiunt, ae- re d ſi po ſollicitante, g, Fiat rurae datae MA pend ruae vero quae- $\int \frac{ds+}{\sqrt{(b-}}$. Incipiat nunc integ A puncto, ſit- que

que celeritas in A acquiſita debita altitudini b, qua celeritate ſequentem aſcenſum in curua AN abſoluet. His poſitis erit altitudo celeritati corporis deſcendentis in M debita $= e^{\frac{s}{k}}(b - g\int e^{\frac{-s}{k}} dx)$, et altitudo celeritati corporis aſcendentis in N debita $a = e^{\frac{-r}{k}}(b - g\int e^{\frac{r}{k}} dt)$. Ex his erit tempus, quo in hac ſemioſcillatione arcus MA et AN percurruntur $= \int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}} \sqrt{(b - g\int e^{\frac{-s}{2k}} dx)}} + \int \frac{dr}{e^{\frac{-r}{2k}} \sqrt{(b - g\int e^{\frac{r}{2k}} dt)}}$, quae expreſſio integrum dabit ſemioſcillationis tempus, ſi poſt integrationem ponatur $g\int e^{\frac{-s}{k}} dx = b$, atque $g\int e^{\frac{r}{k}} dt = b$. Cum igitur hoc tempus debeat ſemper habere valorem conſtantem, qui non a quantitate litterae b pendeat, ex hac conditione determinari debebit aequatio inter t et r ope datae aequationis inter x et s. Ponamus breuitatis gratia $g\int e^{\frac{-s}{k}} dx = X$ et $g\int e^{\frac{r}{k}} dt = T$, atque $\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = dS$ et $\frac{dr}{e^{\frac{-r}{2k}}} = dR$. Quibus ſubſtitutis habere debebit $\int \frac{dS}{\sqrt{(b-X)}} + \int \frac{dR}{\sqrt{(b-T)}}$ valorem conſtantem ſi poſt integrationem ponatur $X = b$, et $T = b$. Fiat ergo generaliter $T = X$, quia T ab X non pendet, habebimus pro tempore hanc expreſſionem: $\int \frac{dS + dR}{\sqrt{(b-X)}}$, quae ita debet eſſe comparata, vt poſt integrationem facto $X = b$ littera b prorſus ex calculo

calculo euaneſcat. Hoc autem fiet, ſi fuerit $dS + dR = \frac{adX}{\surd X}$, erit enim tempus ſemioſcillationis $= \int \frac{adX}{\surd(bX - XX)} = \pi a$ denotante π peripheriam circuli, cuius diameter $= 1$. Sit $a = \frac{\surd 2f}{\surd g}$, denotabit f longitudinem penduli in vacuo et grauitate $= g$ ſemioſcillationes minimas eodem tempore abſoluentis, quo hae ſemioſcillationes ſuper curuis MA et AN peraguntur (167). Cum igitur ſit $dS + dR = \frac{dX\surd 2f}{\surd X}$ erit $S + R = 2V\,2fX = 2V\,2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx$. Eſt vero $S = 2k(1 - e^{\frac{-s}{2k}})$ et $R = 2k(e^{\frac{r}{2k}} - 1)$, vnde erit $ke^{\frac{r}{2k}} - ke^{\frac{-s}{2k}} = V\,2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx$, ſeu $e^{\frac{r}{2k}} = e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{1}{k}V\,2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx$, ideoque fiet $r = 2kl(e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{1}{k}V\,2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx)$. Huic vero valori ipſius r reſpondens valor ipſius t ex hac aequatione determinabitur $T = X$ ſeu $e^{\frac{r}{k}}dt = e^{\frac{-s}{k}}dx$. Ex quo inuenitur $t = \int \frac{dx}{(1 + \frac{1}{k}e^{\frac{s}{2k}}V\,2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx)^2}$ ex quibus conſtructio curuae innoteſcit. Aequatio autem pro curua quaeſita AN commodius ex data aequatione inter x et s obtinebitur, ſi loco s ſubſtituatur $-2k(l(e^{\frac{r}{2k}} - \frac{1}{k}V\,2f\int e^{\frac{r}{k}}dt)$ et loco x hic valor $\int \frac{dt}{(1 - \frac{1}{k}e^{\frac{-r}{2k}}V\,2f\int e^{\frac{r}{k}}dt)^2}$. His enim ſubſtitutis orietur haec aequatio inter r et t, quae eſt pro curua quaeſita AN. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

789. Cum oſcillationes minimae congruant cum oſcillationibus in vacuo, ſi curuae MA tangens in A non fuerit horizontalis, vel ſi radius oſculi in A fuerit infinite paruus, curuae quaeſitae AN radius oſculi in A erit $4f$. Erit enim hoc caſu tempus deſcenſus minimi $= 0$ et tempus aſcenſus $= \frac{\pi\surd 2f}{\surd g}$.

Corollarium 2.

790. Sin autem curuae MA in A radius oſculi fuerit finitae magnitudinis ſcilicet b, erit tempus deſcenſus minimi $= \frac{\pi\surd 2b}{2\surd g}$ (166). Quo igitur tempus ſemioſcillationis fit $= \frac{\pi\surd 2f}{\surd g}$ erit radius oſculi curuae AN in $A = (2Vf - Vb)^2$; debet autem eſſe $b < 4f$, ſeu $f > \frac{1}{4}b$, ne curua AN fiat imaginaria.

Corollarium 3.

791. Curuae ergo MA et AN in A et tangentem horizontalem, et radium oſculi communem habebunt, ſi fuerit $f = b$. Hoc enim caſu curuae AN radius oſculi in A fiet quoque $= b$.

Scholion I.

792. Quemadmodum hic ex data curua deſcenſuum curua aſcenſuum determinauimus; ita perſpicitur ſimili modo ex curua aſcenſuum data curuam deſcenſuum inueniri poſſe; ſi enim detur aequatio

tio inter t et r; quia eſt $s = -2kl(e^{\frac{r}{2k}} - \frac{1}{k}\sqrt{2f\int e^{\frac{r}{k}}dt})$ atque $x = \int\frac{dt}{(1 - \frac{1}{k}e^{\frac{-r}{k}}\sqrt{2f\int e^{\frac{r}{k}}dt})^2}$; his valoribus ſubſtituendis aequatio pro curua deſcenſuum inter s et x obtinebitur.

Corollarium 4.

793. Cum f innumerabiles habere poſſit valores, modo ſit $f > \frac{1}{4}b$; ad quamuis curuam ſiue deſcenſuum ſiue aſcenſuum datam innumerae adiungi poſſunt curuae, eiuſmodi, vt ſemioſcillationes ſuper iis factae ſint omnes iſochronae, omnino vti in vacuo fieri poteſt.

Corollarium 5.

794. Quia in ſolutione poſuimus T=X hac aequatione relatio continetur, inter quemque arcum deſcenſus integrum et arcum reſpondentis aſcenſus. Ita ſi arcus deſcenſus fuerit s erit arcus aſcenſus $r = 2kl(e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{1}{k}\sqrt{2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx})$.

Exemplum 1.

795. Sit linea deſcenſuum data recta verticalis **PA** pro qua eſt $s = x$. Erit ergo quoque $ds = dx$, atque $\int e^{\frac{-s}{k}}dx = k(1 - e^{\frac{-s}{k}})$. Vnde igitur fiet $r = 2kl(e^{\frac{-s}{2k}} + \sqrt{\frac{2f}{k}(1 - e^{\frac{-s}{k}})})$ ſeu $e^{\frac{r}{2k}} = e^{\frac{-s}{2k}} + \sqrt{\frac{2f}{k}(1 - e^{\frac{-s}{k}})}$

Porro

SVPE

Porro

$e^{\frac{r+s}{k}}dt$

ua aſcen

$\frac{2kf(2f}{e^{\frac{r}{2k}}}$

les ſunt

uam co

ius aequ

vacuo e

iſta aeq

$2f(2f-$

praec. i

79

chrona

eſt adx

$(e^{\frac{-s}{2k}} - e$

$\int e^{\frac{-s}{k}}dx =$

$\frac{\sqrt{2f} - e}{\sqrt{a}}$

MOTV PVNCTI

$l(e^{\frac{r}{2k}} - \frac{1}{k}\sqrt{2f\int e^{\frac{r}{k}}dt})$

; his valoribus ſub-

deſcenſuum inter s

4.

s habere poſſit va-

amuis curuam ſiue

am innumerae ad-

vt ſemioſcillatio-

iſochronae, omni-

5.

ſuimus T=X hac

inter quemque ar-

m reſpondentis aſ-

fuerit s erit arcus

dx).

1.

data recta verticalis

rgo quoque $ds = dx$,

le igitur fiet $r = 2$

$= e^{\frac{-s}{2k}} + \sqrt{\frac{2f}{k}(1 - e^{\frac{-s}{k}})}$

Porro

Porro autem eſt $t = \int\frac{ds}{(1 + e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{\frac{2f}{k}(1 - e^{\frac{-s}{k}})})^2}$, ſeu $e^{\frac{r+s}{k}}dt = ds$. Eliminato ergo s prodibit pro curua aſcenſuum iſta aequatio: $(2f+k)^2dt = k(2f-k)dr - \frac{2kf(2f+k)dr + 4fk^2e^{\frac{-r}{k}}dr}{e^{\frac{r}{2k}}\sqrt{(4ff + 2fk - 2fke^{\frac{-r}{k}})}}$; in qua variabiles ſunt a ſe inuicem ſeparatae, quare ea ad curuam conſtruendam ſufficit. Integratio vero huius aequationis a quadratura circuli pendet. Pro vacuo ex hac aequatione elicitur faciendo $k = \infty$ iſta aequatio $dt + dr = \frac{dr\sqrt{2f}}{\sqrt{(2f-r)}}$ ſeu $t = 4f - r - 2\sqrt{2f(2f-r)}$, quae aequatio ad eam quam in cap. praec. inuenimus reduci poteſt.

Exemplum 2.

796. Sit linea deſcenſuum data ipſa tautochrona deſcenſuum ſupra inuenta, cuius aequatio eſt $adx = kds(e^{\frac{s}{2k}} - 1)$. Erit ergo $\int e^{\frac{-s}{k}}dx = \frac{k}{a}\int ds(e^{\frac{-s}{2k}} - e^{\frac{-s}{k}}) = \frac{2k^2}{a}(\frac{1}{2} - e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{1}{2}e^{\frac{-s}{k}}) = \frac{k^2}{a}(1 - e^{\frac{-s}{2k}})^2$ et $\sqrt{\int e^{\frac{-s}{k}}dx} = \frac{k(1 - e^{\frac{-s}{2k}})}{\sqrt{a}}$. Quamobrem fiet $e^{\frac{r}{2k}} = e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{\sqrt{2f} - e^{\frac{-s}{2k}}\sqrt{2f}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{2f} + e^{\frac{-s}{2k}}(\sqrt{a} - \sqrt{2f})}{\sqrt{a}}$ atque $e^{\frac{-s}{2k}} =$

$\frac{e^{\frac{r}{2k}}\sqrt{a}-\sqrt{2f}}{\sqrt{a}-\sqrt{2f}}$ et $ds = \frac{e^{\frac{r}{2k}}dr\sqrt{a}}{\sqrt{2f}-e^{\frac{r}{2k}}\sqrt{a}}$ atque $adx = \frac{ake^{\frac{r}{2k}}dr(e^{\frac{r}{2k}}-1)}{(e^{\frac{r}{2k}}\sqrt{a}-\sqrt{2f})^2}$. Cum autem porro ſit $e^{\frac{-s}{k}}dx = e^{\frac{r}{k}}dt$, erit $ae^{\frac{r}{k}}dt = \frac{ake^{\frac{r}{2k}}dr(e^{\frac{r}{2k}}-1)}{(-\sqrt{a}+\sqrt{2f})^2}$ ſiue $adt = \frac{akdr(1-e^{\frac{-r}{2k}})}{(-\sqrt{a}+\sqrt{2f})^2}$ ſeu $(-\sqrt{a}+\sqrt{2f})^2dt = kdr(1-e^{\frac{-r}{2k}})$ vbi $\sqrt{2f}$ maius eſſe debet quam $\sqrt{a}$. Haec autem aequatio inuenta comprehendit omnes tautochronas aſcenſuum; quae enim harumcunque cum tautochrona deſcenſuum iungatur, ſuper curua ex iis compoſita omnes ſemioſcillationes debent eſſe iſochronae. Si ſumatur $f = 2a$, aequatio erit haec $adt = kdr(1-e^{\frac{-r}{2k}})$, quae eſt pro tautochrona aſcenſuum, ſuper qua omnes aſcenſus eodem tempore abſoluuntur, quo deſcenſus ſuper tautochrona deſcenſuum data, atque ea eſt continuatio tautochronae deſcenſuum.

Exemplum 3.

797. Sit linea deſcenſuum data MA tautochrona aſcenſuum, et quaeratur quales curuae cum ea iunctae ſemioſcillationes iſochronas producant. Aequatio vero pro hac curua MA eſt $adx = kds(1-e^{\frac{-s}{2k}})$. Erit ergo $\int e^{\frac{-s}{k}}dx = \frac{k}{a}\int ds(e^{\frac{-s}{k}}-e^{\frac{-3s}{2k}}) = \frac{k^2}{a}(\frac{1}{3}-e^{\frac{-s}{k}}+\frac{2}{3}e^{\frac{-3s}{2k}}) = \frac{k^2}{3a}(1-3e^{\frac{-s}{k}}+2e^{\frac{-3s}{2k}}) = \frac{k^2}{3a}(1+2e^{\frac{-s}{2k}})(1-e^{\frac{-s}{2k}})^2$. Ex his oritur $e^{\frac{r}{2k}} = e^{\frac{-s}{2k}} + (1-e^{\frac{-s}{2k}})\sqrt{\frac{2f}{3a}}(1+2e^{\frac{-s}{2k}})$ atque $t = \frac{k}{a}\int\frac{ds(1-e^{\frac{-s}{2k}})}{(1+(e^{\frac{s}{2k}}-1\sqrt{\frac{2f}{3a}}(1+2e^{\frac{-s}{2k}}))^2}$, ex quibus conſtructio curuae conſequitur.

Scholion 2.

798. Hoc exemplum ideo attulimus, vt appareat, cum quanam curua tautochronam aſcenſuum coniunctam eſſe oporteat, quo ſemioſcillationes omnes aequalibus temporibus abſoluantur. Ex formulis autem inuentis apparet curuam quaeſitam non eſſe tautochronam deſcenſuum; aequatio enim $cdt = kdr(e^{\frac{r}{2k}}-1)$ in illis formulis non continetur, quod periculum facienti ſtatim patebit. Quamobrem ſi MA fuerit tautochrona deſcenſuum et AN aſcenſuum, etiamſi omnes itus per MAN iisdem abſoluantur temporibus, tamen reditus ſeu ſemioſcillationes ſequentes per NAM non erunt iſochronae. Pendulum ergo, quod ſecundum curuas MA et AN oſcillari efficitur, oſcillationes non faciet iſochronas etiamſi alternae ſemioſcillationes, in quibus deſcenſus in curua MA incipit, aequalibus peragantur temporibus. Haec

conſequenter curua compoſita MAN non eſt idonea ad pendulorum motum in medio reſiſtente aequabilem efficiendum. Optimum vero huic incommodo remedium afferretur, ſi caſus determinaretur, quo curua AN ſimilis et aequalis curuae MA prodiret.

PROPOSITIO 88.

Problema.

Tab. XVI. Fig. 3. 799. *Si curuae* MA *et* AN *eam habuerint proprietatem, vt omnes ſemioſcillationes, quae in curua* MA *incipiunt, ſint inter ſe iſochronae in medio quod in duplicata ratione celeritatum reſiſtit; determinare caſus, quibus hae duae curuae coniunctae* MA *et* AN *vnam curuam continuam conſtituunt.*

Solutio.

Manentibus iisdem denominationibus, quas in praecedente Prop. adhibuimus; ſcilicet AP$=x$; AM$=r$; AQ$=t$; et AN$=s$, atque $f=$ longitudini penduli iſochroni in vacuo et grauitate $=g$: inuenimus ibi has duas aequationes $ke^{\frac{r}{2k}}-ke^{\frac{-s}{2k}}=\sqrt{2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx}$ et $e^{\frac{r}{k}}dt=e^{\frac{-s}{k}}dx$, quibus relatio inter vtramque curuam continetur. Iam quia curuae MA et NA duo debent eſſe rami curuae continuae, aequatio inter x et s ita debet eſſe comparata, vt ſi x abeat in t, tum s fiat $=-r$ propter ſitum negatiuum. Ad hoc accipiamus nouam variabilem z, cuius s et x ſint tales functiones, vt facto

SVPER DA

facto z negati

$=z^2$; erit ke

gatiuo, quo

prodibit $ke^{\frac{-s}{2k}}$-

priore congru

ipſius z, quae

natur $-z$; et

poſito quaeſit

gatiuum; abib

$\frac{1}{2}z\sqrt{2f}+$P;

tur. Alteri a

$\int e^{\frac{-s}{k}}dx=z^2$ iar

dt loco dx atqu

Ex variabili e

que par; curu

altera AN ita

$+\frac{P}{k}$, atque dx

$x=8k^2\int\frac{zdz}{(2P-z\sqrt{2}}$

tum ad formul

homogeneitate

debebit eſſe u

ctio par ipſius

habebitur $s=2k$

TU PVNCTI

I non eſt idodio reſiſtente vero huic inaſus determiaequalis cur-

habuerint pro- uae in curua in medio quod ; determinare ae MA *et* AN

ibus, quas in :et AP$=x$; $=$ longitudi- :auitate $=g$: $ke^{\frac{r}{2k}}-ke^{\frac{-s}{2k}}=$

; relatio inter quia curuae curuae conti- et eſſe com- $t=-r$ pro- iamus nouam unctiones, vt facto

facto z negatiuo x abeat in t et s in $-r$. Sit $\int e^{\frac{-s}{k}}dx=z^2$; erit $ke^{\frac{r}{2k}}-ke^{\frac{-s}{2k}}=z\sqrt{2f}$; facto enim z negatiuo, quo caſu r in $-s$ et $-s$ in r tranſit, prodibit $ke^{\frac{-s}{2k}}-ke^{\frac{r}{2k}}=-z\sqrt{2f}$; quae aequatio cum priore congruit. Sit P functio quaecunque par ipſius z, quae non mutatur etiam ſi loco z ponatur $-z$; et ponatur $ke^{\frac{-s}{2k}}=-\frac{1}{2}z\sqrt{2f}+\mathrm{P}$; quo poſito quaeſito ſatisfiet. Namque faciamus z negatiuum; abibit $-s$ in r; atque habebitur $ke^{\frac{r}{2k}}=\frac{1}{2}z\sqrt{2f}+\mathrm{P}$; ac $ke^{\frac{r}{2k}}-ke^{\frac{-s}{2k}}=z\sqrt{2f}$; vti requiritur. Alteri aequationi $\int e^{\frac{r}{k}}dt=\int e^{\frac{-s}{k}}dx$ per hanc $\int e^{\frac{-s}{k}}dx=z^2$ iam ſatisfit; poſito enim z negatiuo et dt loco dx atque r loco $-s$ prodit $\int e^{\frac{r}{k}}dt=z^2=\int e^{\frac{-s}{k}}dx$. Ex variabili ergo z, cuius P eſt functio quaecunque par; curua quaeſita AM, cuius continua eſt altera AN ita determinatur, vt ſit $e^{\frac{-s}{2k}}=-\frac{z\sqrt{2f}}{2k}+\frac{\mathrm{P}}{k}$, atque $dx=2e^{\frac{s}{k}}zdz=\frac{8k^2zdz}{(2\mathrm{P}-z\sqrt{2f})^2}$. Erit ergo $x=8k^2\int\frac{zdz}{(2\mathrm{P}-z\sqrt{2f})^2}$ et $s=2kl\frac{2k}{2\mathrm{P}-z\sqrt{2f}}$. Sit $z=\frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{f}}$ tum ad formulas ſimpliciores efficiendas tum ad homogeneitatem commodius producendam, quia debebit eſſe u vnius dimenſionis, erit ergo P functio par ipſius u vnius dimenſionis quoque. Quare habebitur $s=2kl\frac{k}{\mathrm{P}-u}$ atque $x=\frac{4k^2}{f}\int\frac{udu}{(\mathrm{P}-u)^2}$. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

800. Infinitae ergo curuae tautochronae MAN inuenientur; ſi infiniti varii valores loco P, qui omnes ſint functiones pares ipſius u ſubſtituantur. Aequatio vero inter x et s obtinebitur, ſi ex duabus aequationibus inuentis $s=2kl\frac{k}{P-u}$ atque $x=\frac{4k^2}{f}\int\frac{udu}{(P-u)^2}$, variabilis u quae etiam in P ineſt, elimin̄etur.

Corollarium 2.

801. Quia eſt $s=2kl\frac{k}{P-u}$ erit $ds=\frac{2k(du-dP)}{P-u}$ et $^{\frac{s}{k}}=\frac{k}{P-u}$ ſeu $P-u=ke^{\frac{-s}{2k}}$. Atque $e^{\frac{s}{2k}}ds=\frac{2k^2(du-dP)}{(P-u)^2}$. Cum qua aequatione ſi altera $dx=\frac{4k^2udu}{f(P-u)^2}$ coniungatur, prodibit $\frac{e^{\frac{s}{2k}}ds}{dx}=\frac{f(du-dP)}{2udu}$. Quae aequatio ad eliminandum u eſt ſaepe commodiſſima.

Scholion 1.

802. Quia euaneſcente s quoque x euaneſcere debet; primum inueſtigandum eſt, quo ipſi u dato valore s euaneſcat. Deinde integrale $\int\frac{udu}{(P-u)^2}$ ita accipi debet, vt euaneſcat, ſi loco u idem valor ſubſtituatur. Hocque obſeruandum eſt, cum in conſtructione curuae, quae ope duarum inuentarum aequationum perfici poteſt, tum in concinnatione aequationis inter x et s; ſi quidem ea

ex

SUPER

ex aequ
Ceterum
pla adhi
tionum
$\frac{4k^2}{f}\int\frac{udu}{(P-u)}$
ita deter
ſcat, qu
quia eſt
neſcente
P ſi in
debet eu
ne valor
co P ta
fiat $=c$

803
vacuo c
nes min
ab oſcill
uae in
rit hori

804
ſit P conſ
Erit erg
ob $dP=$

T PVNCTI
chronae MAN
loco P, qui
ſubſtituantur.
bitur, ſi ex
$l\frac{k}{P-u}$ atque x
in P ineſt,
$ds=\frac{2k(du-dP)}{P-u}$
e $e^{\frac{s}{2k}}ds=$
ra $dx=\frac{4k^2udu}{f(P-u)^2}$
Quae ae-
mmodiſſima.
x euaneſcere
quo ipſi u da-
rale $\int\frac{udu}{(P-u)^2}$ ita
u idem valor
eſt, cum in
rum inuenta-
n in concin-
i quidem ea
ex

ex aequatione integrata $x=\frac{4k^2}{f}\int\frac{udu}{(P-u)^2}$ deducatur. Ceterum ſi loco u et P quaelibet eorum multipla adhibeantur, loco duarum inuentarum aequationum adhiberi poſſunt iſtae $s=2kl\frac{c}{P-u}$ et $x=\frac{4k^2}{f}\int\frac{udu}{(P-u)^2}$ vbi conſtans c eſt arbitraria, et idcirco ita determinari poteſt, vt s eodem caſu euaneſcat, quo euaneſcit x. At s euaneſcit ſi $u=0$; quia eſt $\int e^{\frac{-s}{k}}dx=\frac{2u^2}{f}$; atque $\int e^{\frac{-s}{k}}dx$ euaneſcit euaneſcente s; quare c aequale eſſe debet valori ipſius P ſi in eo ponatur $u=0$. Eodem ergo caſu x debet euaneſcere, ex quo conſtans in integratione valoris ipſius x determinatur. Vel etiam loco P talis functio par ipſius u accipi debet, quae fiat $=c$ ſi ponatur $u=0$.

Corollarium 3.

803. Cum longitudo penduli iſochroni in vacuo et grauitate $=g$ ſit $=f$; atque oſcillationes minimae in medio reſiſtente non diſcrepent ab oſcillationibus in vacuo: erit radius oſculi curuae in A$=f$; ſi quidem tangens curuae in A fuerit horizontalis.

Exemplum 1.

804. Quia P eſſe debet functio par ipſius u, ſit P conſtans $=c=k$; quo poſito $u=0$ fiat $s=0$. Erit ergo $k-u=ke^{\frac{-s}{2k}}$ ſeu $u=k(1-e^{\frac{-s}{2k}})$. Atque ob $dP=0$, habebitur $\frac{e^{\frac{s}{2k}}ds}{dx}=\frac{f}{2u}$ ſeu $u=\frac{\int e^{\frac{-s}{2k}}dx}{2ds}$.

Ex

Ex quibus aequationibus conficitur iſta $\frac{fdx}{2} = kds\,(e^{\frac{s}{2k}} - 1)$. Quae aequatio eſt pro ipſa tautochrona deſcenſuum; quae vltra A continuata dat tautochronam aſcenſuum; atque omnes ſemioſcillationes ſuper hac curua continua, ſi modo in ramo MA incipiant, erunt iſochronae.

Exemplum 2.

805. Sit $P = k + \frac{u^2}{a}$; retinebit P eundem valorem facto u negatiuo. Hoc poſito erit $k - u + \frac{u^2}{a} = ke^{\frac{-s}{2k}}$; et propter $dP = \frac{2udu}{a}$ erit $\frac{e^{\frac{s}{2k}}ds}{dx} = \frac{f(a-2u)}{2au}$; ex qua aequatione prodit $u = \frac{fadx}{2(ae^{\frac{s}{2k}}ds + fdx)}$. Qui ipſius u valor in altera aequatione ſubſtitutus dat $2fa^2 e^{\frac{s}{k}} dx\,ds = 4k(e^{\frac{s}{2k}} - 1)(ae^{\frac{s}{2k}}ds + fdx)^2 - f^2 ae^{\frac{s}{2k}}dx^2$; atque extracta radice

$$\frac{ae^{\frac{s}{2k}}ds}{fdx} = \frac{ae^{\frac{s}{2k}}}{4k(e^{\frac{s}{2k}}-1)} - 1 \pm \sqrt{\frac{ae^{\frac{s}{2k}}}{4k(e^{\frac{s}{2k}}-1)}\left(\frac{ae^{\frac{s}{2k}}}{4k(e^{\frac{s}{2k}}-1)} - 1\right)}$$

In caſu ſpeciali ſi fuerit $a = 4k$ iſta aequatio abit in hanc $\frac{4ke^{\frac{s}{2k}}ds}{fdx} = \frac{1 + e^{\frac{s}{4k}}}{e^{\frac{s}{2k}} - 1}$, quae duas aequationes in ſe complectitur, quarum altera eſt $fdx = 4ke^{\frac{s}{2k}}ds(e^{\frac{s}{4k}} - 1)$, et altera $-fdx = 4ke^{\frac{s}{2k}}ds(e^{\frac{s}{4k}} + 1)$

SUPE TV PVNCTI
iſta $\frac{fdx}{2} = kds$
$+1)$. non e tiuum, ipſa tautochro- inuata dat tau- ſemioſcillatio- modo in ramo
Quae mitur vero $+$ etc $= \frac{r^2}{2}$ P eundem va- ito erit $k - u$ erit $\frac{e^{\frac{s}{2k}}ds}{dx}$ prodit $u =$
8 in altera ae-
$ffe^{\frac{-s}{k}}$ $fe^{\frac{-s}{k}}d$ quatio ter s $ds = 4k(e^{\frac{s}{2k}} - 1)$ extracta radice $\frac{ae^{\frac{s}{2k}}}{4k(e^{\frac{s}{2k}}-1)} - 1)$
8 $k^2 +$ aequatio abit
tis, k duas aequatio-
$= k($ era eſt $fdx =$
$2ff e$ $= 4ke^{\frac{s}{2k}}ds(e^{\frac{s}{4k}} + 1)$
Haec

$+1)$. Harum autem poſterior, quia poſito $s = o$, non euaneſcit dx, et ob valorem ipſius dx negatiuum, eſt inutilis. Prior vero integrata dat $fx = 16k^2\left(\frac{e^{\frac{3s}{4k}}}{3} - \frac{e^{\frac{s}{2k}}}{2} + \frac{1}{6}\right)$ ſeu $3fx = 8k^2(2e^{\frac{3s}{4k}} - 3e^{\frac{s}{2k}} + 1)$ Quae vltra A continuata hac aequatione exprimitur $3ft = 8k^2(2e^{\frac{-3r}{4k}} - 3e^{\frac{-r}{2k}} + 1)$. Per ſeriem vero habetur iſta aequatio: $fx = \frac{s^2}{2} + \frac{5s^3}{24k} + \frac{19s^4}{384k^2} +$ etc. et pro altera curuae parte AN haec: $ft = \frac{r^2}{2} - \frac{5r^3}{24k} + \frac{19r^4}{384k^2} -$ etc.

Corollarium 4.

806. Quia eſt $z^2 = \frac{2u^2}{f} = \int e^{\frac{-s}{k}}dx$, erit $u = \sqrt{\frac{f}{2}\int e^{\frac{-s}{k}}dx}$. Eliminato vero u eſt $P = ke^{\frac{-s}{2k}} + \sqrt{\frac{1}{2}f\int e^{\frac{-s}{k}}dx}$. Quare ſi ille valor ipſius u in hac aequatione ſubſtituatur, prodibit ſtatim aequatio inter s et x.

Exemplum 3.

807. Ponamus eſſe $P = \sqrt{(k^2 + u^2)}$, ſeu $P^2 = k^2 + u$; ſubſtitutis loco P et u^2 valoribus ſupra datis, $k^2 e^{\frac{-s}{k}} + ke^{\frac{-s}{2k}}\sqrt{2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx} = k^2$, ſeu $\sqrt{2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx} = k(e^{\frac{s}{2k}} - e^{\frac{-s}{2k}})$. Hinc quadratis ſumendis oritur $2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx = k^2(e^{\frac{s}{2k}} - e^{\frac{-s}{2k}})^2 = k^2(e^{\frac{s}{k}} + e^{\frac{-s}{k}} - 2)$. Haec vero aequatio differentiata dat hanc $2fe^{\frac{-s}{k}}dx = kds$

(e

$(e^{\frac{s}{k}}-e^{\frac{-s}{k}})$ ſeu $2fdx=kds(e^{\frac{2s}{k}}-1)$, cuius integralis eſt $2fx=\frac{k^2e^{\frac{2s}{k}}}{2}-ks-\frac{k^2}{2}$. Quae aequatio in ſeriem conuerſa dat $fx=\frac{s^2}{2}+\frac{s^3}{3k}+\frac{s^4}{6k^2}+\frac{s^5}{15k^3}+\frac{s^6}{45k^4}+$ etc.

Scholion 2.

908. Quas in his exemplis inuenimus curuas tautochronas pro medio quod reſiſtit in duplicata ratione celeritatum, eae ita ſunt comparatae, vt arcus MA et AN ſint diſſimiles. Cum igitur omnes deſcenſus ſuper curua MA incipere debeant, ſequentes ſemioſcillationes, quae in curua NA incipiunt, non erunt tautochronae, id quod in cauſa eſt, quod hae curuae ad motum oſcillatorium accommodari nequeant. Huic autem incommodo remedium afferretur, ſi huiusmodi curuarum MA et NA par inueniretur, quae eſſent inter ſe ſimiles et aequales, hoc enim caſu perinde ſuper vtraque curua deſcenſus fieri poſſet. Dubium quoque nullum eſt, quin talis caſus exiſtat; eiusque inuentio, quia hae duae curuae forte non erunt continuae, ad praecedentem propoſitionem potius pertinet. Indagari ſcilicet debet curua deſcenſuum, cui reſpondens curua aſcenſuum ſimilis et aequalis ſit; haec vero inueſtigatio ob defectum analyſeos ita eſt difficilis, vt dubitem, num quisquam ante inſignem analyſeos promotionem, ad hunc ſcopum pertingere poſſit. Haec vero quaeſtio huc reducitur, vt inueſtigetur aequatio inter s et x huius conditionis, vt ſi in ea ponatur $-2kl(e^{\frac{s}{2k}}-\frac{1}{k}\sqrt{2f\int e^{\frac{s}{k}}dx})$ loco s; et $\int\frac{dx}{(1-\frac{1}{k}\cdot 2k\sqrt{2f\int e^{\frac{s}{k}}dx})^2}$ loco x, eadem prodeat aequatio, quae habebatur ante. Conditio quidem haec multis modis facilior effici poteſt; attamen quomodo ei ſatisfieri poſſit non video. Si medium fuerit rariſſimum, non difficile eſt ex allatis caſum inuenire, quo duae curuae MA et AN ſint inter ſe ſimiles et aequales. Ego quidem ad finem perducto calculo hanc inueni aequationem $fdx=sds+\frac{s^3ds}{9k^2}$, ſeu $fx=\frac{s^2}{2}+\frac{s^4}{36k^2}$; quae curua ſimul vltra A continuata ramum habet AO ſimilem et aequalem arcui AM; quare pendulum in hac curua oſcillans ſingulas ſemioſcillationes abſoluet aequalibus temporibus. Erit autem $s^2=-9k^2+3k\sqrt{(9k^2+4fx)}$ et $s=\sqrt{(-9k^2+3k\sqrt{(9k^2+4fx)})}$. Quia vero k eſt quantitas valde magna, erit $s=\sqrt{2fx}-\frac{fx\sqrt{2fx}}{18k^2}$, atque $ds=\frac{fdx}{\sqrt{2fx}}-\frac{fdx\sqrt{2fx}}{12k^2}$. Hincque fit $dy=dx\sqrt{\frac{f-2x}{2x}}-\frac{f^2dx}{12k^2}\sqrt{\frac{2x}{f-2x}}$. Ponatur $f=2a$ erit $y=\int dx\sqrt{\frac{a-x}{x}}-\int\frac{adx}{3k^2}\sqrt{\frac{x}{a-x}}=\int\frac{adx-xdx}{\sqrt{(ax-xx)}}-\int\frac{a^2xdx}{3k^2\sqrt{(ax-xx)}}$

$$=(1+\frac{a^2}{3k^2})\sqrt{(ax-xx)}+(1-\frac{a^2}{3k^2})\int\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}}.$$

Quae ergo curua eodem fere modo, quo cyclois deſcribi poteſt ope rectificationis circuli.

SUPI)TV PVNCTI

ſtio h tegralis eſt 2fx=
s et x ſeriem conuerſa
2kl(e $\frac{s^6}{45k^4}$ + etc.
loco :
ante.
lior e
poſſit nuenimus curuas
non ſiſtit in duplica-
duae nt comparatae,
aequal s. Cum igitur
hanc i cipere debeant,
$=\frac{s^2}{2}+$ n curua NA in-
tinuata id quod in cau-
lem a m oſcillatorium
oſcilla em in commo-
libus t modi curuarum
(9k²+ eſſent inter ſe
Quia perinde ſuper
V 2fx Dubium quo-
dy=d xiſtat; eiusque
y=∫d rte non erunt
=(1- oſitionem po-
bet curua de-
Quae cenſuum ſimilis
deſcrib io ob defectum
em, num quis-
motionem, ad
haec vero quae-
ſtio
Tom.

Corollarium 5.

809. Si ſumatur $a = k\sqrt{3}$ ſeu $f = 2k\sqrt{3}$; curua haec abit in ellipſin, cuius axis horizontalis eſt duplo maior quam verticalis, qui eſt $= k\sqrt{3}$. Fieri ergo poteſt, vt ellipſis ſit tautochrona in fluido rariſſimo; atque magis ſatisfaciat quam cyclois.

Scholion 3.

Tab. XVI. Fig. 4. 810. Conſtructio autem curuae tautochronae in medio rariſſimo in praec. ſcholio datae eſt vt ſequitur. Super recta verticali $AB = a = \frac{1}{2}f$ deſcribatur ſemicirculus AOB, et ex hoc ſuper baſi BD cyclois AFD; quae eadem inuerſo ſitu deſcribatur AGD. Quibus factis curua quaeſita AMC conſtruetur ſumendis vbique eius applicatis $PM = PF - \frac{a^2}{3k^2}PG$; qua ratione curuae infinita puncta cognoſcuntur. Vel etiam accipi poteſt $PM = (1 + \frac{a^2}{3k^2})PO + (1 - \frac{a^2}{3k^2})AO$, ita vt cycloide non ſit opus. Curua autem haec alicubi habebit tangentem verticalem, ſeu applicatam PM maximam quae inuenitur poſito $dy = 0$. Prodibit autem $\frac{a-x}{x} = \frac{a^2}{3k^2}$ ſeu $x = \frac{3ak^2}{a^2+3k^2}$ cui valori ſi AP aequalis capiatur, inuenietur applicata maxima.

PROPOSITIO 89.

Problema.

Tab. XVI. Fig. 5. 811. *In hypotheſi grauitatis vniformis deorſum tendentis g, data curua quacunque* am *pro deſcenſibus*

SVPI
bus in
in me
leritat
ſint iſ
ſi cele
TU PUNCTI
eu $f = 2k\sqrt{3}$;
axis horizonta-
s, qui eſt $= k$
ſit tautochro-
agis ſatisfaciat
S
ſciſſa
ſcenſu
$= s$;
conſi
quibu
et de
ſus in
ponat
medi
e tautochronae
io datae eſt vt
$B = a = \frac{1}{2}f$ de-
c hoc ſuper ba-
inuerſo ſitu de-
quaeſita AMC
pplicatis PM $=$
infinita puncta
oteſt PM $=$(1
ycloide non ſit
habebit tangen-
M maximam
dibit autem $\frac{a-x}{x}$
AP aequalis ca-
na.
natu
erunt
his
eade
dr,
iformis deorſum
m pro deſcenſibus

bus in vacuo; inuenire curuam AM *pro deſcenſibus in medio reſiſtente vniformi in duplicata ratione celeritatum huius indolis, vt omnes deſcenſus ſuper* MA *ſint iſochroni reſpectiue omnibus deſcenſibus ſuper* ma; *ſi celeritates in punctis imis* a *et* A *fuerint aequales.*

Solutio.

Sit pro curua deſcenſuum in vacuo am abſciſſa $ap = t$; arcus $am = r$; pro curua vero deſcenſuum in medio reſiſtente ſit $AP = x$ et $AM = s$; reſiſtentiae vero exponens ponatur $= k$. Iam conſiderentur bini deſcenſus ſuper his curuis, in quibus celeritates in A et a acquiſitae ſint aequales et debitae altitudini b. Erit ergo tempus deſcenſus in vacuo $= \int \frac{dr}{\sqrt{(b-gt)}}$, ſi poſt integrationem ponatur $gt = b$. At pro tempore deſcenſus in medio reſiſtente ſuper curua MA habebitur $\int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{(b-g\int e^{\frac{-s}{2k}}dx)}}$ ſi item poſt integrationem ponatur $g\int e^{\frac{-s}{k}}dx = b$. Quamobrem haec tempora erunt aequalia ſi fuerit $\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = dr$ et $\int e^{\frac{-s}{k}}dx = t$; his enim poſitis pro vtroque tempore habebitur eadem expreſſio $\int \frac{dr}{\sqrt{(b-gt)}}$. Cum igitur ſit $\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = dr$, erit integrando $2k(1 - e^{\frac{-s}{2k}}) = r$ atque $e^{\frac{-s}{2k}} = \frac{2k-r}{2k}$

$\frac{2k-r}{2k}$; vnde prodit $s = 2kl\frac{2k}{2k-r}$. Altera vero aequatio $\int e^{\frac{-s}{k}}dx = t$ dat $e^{\frac{-s}{k}}dx = dt$. Eſt autem $e^{\frac{-s}{k}} = \frac{(2k-r)^2}{4k^2}$ quo valore ſubſtituto habetur $dx = \frac{4k^2dt}{(2k-r)^2}$ ex quo oritur $x = \int\frac{4k^2dt}{(2k-r)^2}$. Data ergo aequatione inter t et r pro curua am ope duarum harum aequationum, quibus s et x per t et r determinantur, conſtrui poterit curua quaeſita AM. Aequatio vero inter x et s commodius inuenietur ex data aequatione inter t et r; ſi in ea loco r ſubſtituatur $2k(1-e^{\frac{-s}{2k}})$ et $\int e^{\frac{-s}{k}}dx$ loco t. Q. E. I.

Corollarium 1.

812. Circa punctum infimum A vbi t et r ſunt quantitates euaneſcentes fit $s = r + \frac{r^2}{4k}$; et $x = t + \int\frac{rdt}{k}$, ſeu $dx = dt + \frac{rds}{k}$ et $ds = dr + \frac{rdr}{2k}$. Quare inclinatio curuae MA ad axem in A aequalis erit inclinationi curuae ma in A.

Corollarium 2.

813. Porro radius oſculi in puncto infimo a ſi tangens fuerit horizontalis eſt $= \frac{rdr}{dt}$; et in A quia tangens quoque erit horizontalis $= \frac{sds}{dx} = \frac{rdr + \frac{3r^2dr}{4k}}{dt + \frac{rdt}{k}}$. Erit ergo $\frac{sds}{dx} = \frac{rdr}{dt} - \frac{r^2dr}{4kdt} = \frac{rdr}{dt}(1 - \frac{r}{4k})$ Quare ob r infinite paruum erit $\frac{sds}{dx} = \frac{rdr}{dt}$.

Corollarium 3.

814. Si ergo curua ma in a habuerit tangentem horizontalem; erit curuae MA tangens in

A

SUPER DA
A quoque h
aequalis erit
815. Si
na ma; in q
habeant rela
idem proble
na MA, qua
conſtruitur.
816. Si
tautochrona
ſcenſuum in
ſito enim r^2
ſtitutis loco
tio $2ke^{\frac{-s}{2k}}ds($
$(e^{\frac{s}{2k}}-1)$.
817. Sit
ita vt ſit $r=$
leritas altitud
$\frac{2n\sqrt{b}}{g}$. Eanden
MA, vt tem
ſiſtente quo
proportionale
ſit $r = nt$; eri
valores inuen

U PUNCTI
tera vero ae-
Eſt autem $e^{\frac{-s}{k}}$
r $dx = \frac{4k^2dt}{(2k-r)^2}$
go aequatio-
m harum ae-
iinantur, con-
o vero inter
iatione inter
$2k(1-e^{\frac{-s}{2k}})$
vbi t et r
$r + \frac{r^2}{4k}$; et
$= dr + \frac{rdr}{2k}$.
in A aequa-
o infimo a
; et in A
$= \frac{sds}{dx} =$
$\frac{rdr}{dt}(1 - \frac{r}{4k})$
$\frac{rdr}{dt}$.
uerit tan-
tangens in
A

A quoque horizontalis; atque radius oſculi in A aequalis erit radio oſculi in a.

Corollarium 4.

815. Si igitur in vacuo inuenta fuerit curna ma; in qua tempora deſcenſuum quaecunque habeant relationem ad celeritates in a acquiſitas; idem problema pro medio reſiſtente ſoluetur curua MA, quae praeſcripta ratione ex curua ma conſtruitur.

Corollarium 5.

816. Si igitur curua ma fuerit cyclois ſeu tautochrona in vacuo; AM erit tautochrona deſcenſuum in medio reſiſtente ſupra inuenta. Poſito enim $r^2 = 2at$ ſeu $rdr = adt$; prodibit ſubſtitutis loco r et t inuentis valoribus iſta aequatio $2ke^{\frac{-s}{2k}}ds(1-e^{\frac{-s}{2k}}) = ae^{\frac{-s}{k}}dx$ ſeu $adx = 2kds$ $(e^{\frac{s}{2k}}-1)$.

Exemplum.

817. Sit am linea recta vtcunque inclinata, ita vt ſit $r = nt$; erit tempus deſcenſus, quo celeritas altitudini b debita generatur $= \int\frac{ndt}{\sqrt{(b-gt)}} = \frac{2n\sqrt{b}}{g}$. Eandem ergo habebit proprietatem curua MA, vt tempus cuiusque deſcenſus in medio reſiſtente quo celeritas $\sqrt{b}$ generatur, ſit $= \frac{2n\sqrt{b}}{g}$ ſeu proportionale ipſi celeritati genitae. Cum autem ſit $r = nt$; erit $dr = ndt$; in qua ſi loco dr et dt valores inuenti ſubſtituantur prodibit $e^{\frac{-s}{2k}}ds = ne^{\frac{-s}{k}}$

dx

dx ſeu $ndx = e^{\frac{s}{2k}} ds$; quae eſt aequatio pro tractoria filo longitudinis $2k$ generata, qualis repraeſentatur in fig. 2. Tab. XVI. nempe curua C A, quae in A eam habet inclinationem quam recta data ma.

Scholion I.

818. Quemadmodum hic curua MA eſt determinata, ſuper qua omnes deſcenſus in medio reſiſtente iisdem abſoluuntur temporibus, quibus deſcenſus in vacuo ſuper curua ma, ſi celeritates vltimae in A et a fuerit aequales; ita eodem modo curua MA poteſt definiri, ſuper qua omnes aſcenſus in medio reſiſtente iisdem temporibus abſoluuntur, quibus ſimiles iisdem celeritatibus incipientes aſcenſus in vacuo ſuper curua am. Nam cum in medio reſiſtente deſcenſus in aſcenſum mutetur facto k negatiuo; ſi ponantur AP $= x$ et AM $= s$ habebitur $x = \int \frac{4k^2 dt}{(2k+r)^2}$ et $s = 2k\,l\,\frac{2k+r}{2k}$ ſeu inuerſe $t = \int c^{\frac{s}{k}} dx$ et $r = 2k(e^{\frac{s}{2k}} - 1)$. Ex quibus tum facile curua AM poteſt conſtrui et aequatio pro ea inueniri.

Scholion 2.

819. In hoc problemate ex curua deſcenſuum in vacuo data determinauimus curuam deſcenſuum in medio reſiſtente. Facile autem apparet viciſſim ex data curua AM pro medio reſiſtente alteram am pro vacuo inueniri poſſe Cum enim ſit $r = 2k(1 - e^{\frac{-s}{2k}})$ et $t = \int c^{\frac{-s}{k}} dx$ conſtructio curuae am ope harum duarum aequationum perficitur. Aequatio vero pro curua am inter t et r commodius ex data aequatione inter x et s reperitur; ſi in ea loco x ſubſtituatur $\int \frac{4k^2 dt}{(2k-r)^2}$ et $2kl\frac{2k}{2k-r}$ loco s. Quod hic praeterea de deſcenſibus dictum eſt, idem de aſcenſibus valet, ſi modo k ponatur negatiuum vti in Scholio I. monuimus.

Scholion 3.

420. Tradita hic inuentio alterius curuae duarum am et AM ex altera etiam locum habet, ſi datae curuae non habeatur aequatio, ſed ſi manu vtcunque fuerit ducta; ex formulis enim inuentis conſtructio poteſt deduci, quae ab aequatione non amplius pendeat. Quamobrem cum in cap. praec. (432.) in caſum inciderimus pro vacuo quo curuam cm inuenimus cum data ac iungendam, vt omnes deſcenſus ex quouis puncto curuae cm vsque ad a aequalibus abſoluantur temporibus; ſimilia exempla ex iis pro medio reſiſtente erui poterunt, quibus linea ex partibus duarum diuerſarum curuarum compoſita ſit tautochrona. Si enim curua acm fuerit huiusmodi curua tautochrona pro vacuo, ex ea per ſolutionem huius problematis ſimilis curua compoſita pro medio reſiſtente inuenietur. Scilicet ex ac methodo tradita curua AC definiatur; qua inuenta poſita $bp = t$, $cm = r$; et BP $= x$, atque CM $= s$; et praeterea $ab = a$, $ac = c$ et AB $=$ A et AC $=$ C; tum enim cum data ſit aequatio inter t et r erit AP $= A + x = \int \frac{4k^2 dt}{(2k-c-r)^2}$ et AM $= C + s = 2kl\frac{2k}{2k-c-r}$.

Tab. XVI. Fig. 6.

At

At ſi pro medio reſiſtente data fuerit curua AC; atque requiratur altera CM eius proprietatis, vt omnes deſcenſus ſuper MCA aequalibus abſoluantur temporibus; ſolutio non diſſimili modo efficietur. Nam ex data curua AC pro medio reſiſtente, inueniatur curua eiusdem proprietatis pro vacuo *ac* per Scholion 2. Qua inuenta quaeratur curua *cm* ei adiungenda, quae omnes deſcenſus in vacuo iſochronos producat (432.). Denique methodo modo tradita ex curua compoſita *acm* pro vacuo quaeratur ſimilis curua compoſita pro medio reſiſtente ACM, cuius quidem pars AC iam eſt cognita, quippe ex ea lineam *ac* definiuimus. Idem ergo problema quod in vacuo tantum in ſe habebat difficultatis, in medio quoque reſiſtente reſoluitur. Denique hinc caput hoc finiens Lectorem beneuolum rogo, vt antequam ad caput ſequens progrediatur, quae in Cap. I. ab §. 58. vsque ad finem cap. tradita ſunt, repetere velit.

CAPUT

CAP MOTU PUNCTI

MOT

fuerit curua AC; proprietatis, vt ualibus abſoluan- mili modo effi- pro medio re- proprietatis pro inuenta quaera- e omnes deſcen- t (432.). Deni- curua compoſita curua compo- , cuius quidem e ex ea lineam oblema quod in ultatis, in medio e hinc caput hoc , vt antequam uae in Cap. I. radita ſunt, re-

D

quam
em ſi

AP, mina datae perp *ϱ* ad nunc et Q dabit has =P*d*. alia perfi *Tom*

CAPUT

CAPUT QUARTUM
DE
MOTU PUNCTI SUPER DATA SUPERFICIE.

PROPOSITIO 90.
Problema.

§. 821.

Data via in ſuperficie quacunque $Mm\mu$, inuenire eius poſitionem reſpectu plani dati APQ, et radii oſculi illius viae in M tam poſitionem quam longitudinem; nec non normalis in ſuperficiem ſitum. Tab. XVII. Fig. 1.

Solutio.

Sumto pro lubitu plano APQ in eoque axe AP, quorum reſpectu poſitio curuae $Mm\mu$ ſit determinanda; ex tribus punctis proximis M, m et μ datae viae in ſuperficie in planum APQ demittantur perpendicula MQ, mq, $\mu\varrho$; atque ex punctis Q, q, ϱ ad axem AP perpendicula QP, qp et $\varrho\pi$. Poſito nunc initio abſciſſarum in A, ſit AP$=x$; PQ$=y$ et QM$=z$. Quia porro ſuperficies data ponitur, dabitur aequatio eius naturam exprimens inter tres has variabiles x, y et z; quae aequatio ſit haec $dz = Pdx + Qdy$. Cum hac aequatione ſi coniungatur alia aequatio, exprimetur linea quaedam in iſta ſuperficie exiſtens; quare cum linea $Mm\mu$ data po-