Ponatur celeritas in C debita altitudini b et celeritas in M altitudini v. Potentia corpus perpetuo deorſum trahens ſit $= g$; et reſiſtentia $= \frac{v\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Fiat ſuper parte AMC deſcenſus, erit ex natura deſcenſus $dv = -g\,dx + \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = -\frac{gsds}{a} + \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Ponatur $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = \frac{u}{a}$, erit $v = \frac{ku^2}{a^2}$ et $dv = \frac{2kudu}{a^2}$, vnde ſit $2kudu = -gasds + auds$, quae aequatio ita debet integrari vt facto $s = o$ fiat $u = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{k}}$. Pro aſcenſu vero ſuper arcu CN haec habetur aequatio $2kudu = -gasds - auds$. Ponatur $u = ps$, habebitur pro deſcenſu $2kp^2sds + 2kps^2dp = -gasds + apsds$, ſeu $\frac{2kpdp}{ap - ga - 2kp^2} = \frac{ds}{s}$. Hinc ſit integrando $ls = lC - \frac{1}{2}l(p^2 - \frac{ap}{2k} + \frac{ga}{2k}) + \frac{a}{2\sqrt{(a^2-8gak)}}\, l\frac{4kp - a + \sqrt{(a^2-8gak)}}{4kp - a - \sqrt{(a^2-8gak)}} = lC - \frac{1}{2}l\frac{2a^2v\sqrt{k} - a^2s\sqrt{v} + gas^2\sqrt{k}}{2ks^2\sqrt{k}} + \frac{a}{2\sqrt{(a^2-8gak)}}\, l\frac{4a\sqrt{kv} - as + s\sqrt{(a^2-8gak)}}{4a\sqrt{kv} - as - s\sqrt{(a^2-8gak)}}$, ſeu $lC = l(2a^2v\sqrt{k} - a^2s\sqrt{v} + gas^2\sqrt{k}) - \frac{a}{\sqrt{(a^2-8gak)}}\, l\frac{4a\sqrt{kv} - as + s\sqrt{(a^2-8gak)}}{4a\sqrt{kv} - as - s\sqrt{(a^2-8gak)}}$ Ponatur $s = o$ et $v = b$ fiet $lC = l2a^2b\sqrt{k}$; hinc fiet $\frac{2av\sqrt{k} - as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k}}{2ab\sqrt{k}} = (\frac{4a\sqrt{kv} - as + s\sqrt{(a^2-8gak)}}{4a\sqrt{kv} - as - s\sqrt{(a^2-8gak)}})^{\frac{a}{\sqrt{(a^2-8gak)}}}$

In altera vero curuae parte CN pro aſcenſu corporis poſito $CN = s$ habetur haec aequatio $\frac{2av\sqrt{k} + as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k}}{2ab\sqrt{k}} = (\frac{4a\sqrt{kv} + as - s\sqrt{(a^2-8gak)}}{4a\sqrt{kv} + as + s\sqrt{(a^2-8gak)}})^{\frac{a}{\sqrt{(a^2-8gak)}}}$. Si altitudo celeritati maximae, quae ſit in O, debita dicatur c, erit $CO = \frac{c\sqrt{c}}{g\sqrt{k}}$, atque $c = b\,(\frac{4gk - a + \sqrt{(a^2-8gak)}}{4gk - a - \sqrt{(a^2-8gak)}})^{\frac{a}{\sqrt{(a^2-8gak)}}}$. Hae autem aequationes locum non habent, niſi ſit $a^2 > 8gak$, ſeu

$k <$

$k < \frac{a}{8g}$. Nam ſi $k > \frac{a}{8g}$ aequationes a logarithmis et quadratura circuli ſimul pendebunt. Ponamus eſſe $k = \frac{a}{8g}$, eritque $\frac{ds}{s} = \frac{-pdp}{(p-\frac{a}{4k})^2} = \frac{-dp}{p-\frac{a}{4k}} - \frac{adp}{4k(p-\frac{a}{4k})^2}$. Integrando ergo prodibit $ls = lC - l(p-\frac{a}{4k}) + \frac{a}{4kp-a} = lC - l(\frac{a\sqrt{v}}{s\sqrt{k}} - \frac{a}{4k}) + \frac{as}{4a\sqrt{kv}-as} = lC - l(4a\sqrt{kv} - as) + ls + \frac{as}{4a\sqrt{kv}-as}$. Fit igitur $lC = l4a\sqrt{kb}$, vnde habebitur $l\frac{4\sqrt{kv}-s}{4\sqrt{kb}} = \frac{s}{4\sqrt{kv}-s}$. Apparet hinc in deſcenſu celeritatem nunquam eſſe poſſe $= o$, ſemper enim $4\sqrt{kv}$ maius eſſe debet quam s. Hoc ergo caſu, ſi celeritas in puncto C ſit realis deſcenſus initium ſit imaginarium. Quare vbicunque corpus deſcenſum inceperit celeritas in puncto infimo C erit $= o$. Ad motum igitur inueſtigandum ſi deſcenſus ſit ex puncto dato E fueritque $CE = f$, erit $lC = l - af + 1$, idenque $l\frac{s-4\sqrt{kv}}{f} = \frac{4\sqrt{kv}}{4\sqrt{kv}-s}$. Ex quo intelligitur ſemper eſſe debere $4\sqrt{kv} < s$, quamobrem in puncto C vbi $s = o$ debet quoque eſſe $v = o$. Maxima celeritas, quae ſit in O habetur ponendo $\sqrt{v} = \frac{gs\sqrt{k}}{a}$ ſeu $s = 8\sqrt{kv}$, quo poſito prodit $l\frac{s}{2f} = -1$, ſeu $s = \frac{2f}{e} = CO$ denotante e numerum, cuius logarithmus eſt $= 1$. His igitur caſibus, quibus ergo deſcenſus eſt realis, nullus eſt arcus aſcenſus. At ſi corpus per arcum CN celeritate initiali in C altitudini b debita aſcendat, motus

linehac aequatione exprimetur $l\frac{4\sqrt{kv}+s}{4\sqrt{kb}} = \frac{-s}{4\sqrt{kv}+s}$, ex qua patet esse $s + 4\sqrt{kv} < 4\sqrt{kb}$ et $\sqrt{v} < \sqrt{b}\frac{s}{4\sqrt{k}}$. Totus arcus ascensus CN reperitur faciendo $v=0$, tumque erit $l\frac{s}{4\sqrt{kb}} = -1$, seu $CN = \frac{4\sqrt{kb}}{e}$. Si est $k < \frac{a}{8g}$, quem casum iam tractauimus, resistentia adhuc fit maior, quamobrem multo magis celeritas in C erit $=0$, si quidem descensus ex puncto dato fiat; atque pro data celeritate in C initium descensus erit imaginarium. Quamobrem aequatio quam pro descensu dedimus est imaginaria, nisi constans determinetur ex dato descensus initio. Sit igitur arcus $CE = f$, erit $lC = lgaf^2\sqrt{k} - \frac{a}{\sqrt{(a^2-8gak)}}\, l\frac{a-\sqrt{(a^2-8gak)}}{a+\sqrt{(a^2-8gak)}}$ factoque $s=0$ erit $l\frac{gf^2}{av} = \frac{a}{\sqrt{(a^2-8gak)}}\, l\frac{a-\sqrt{(a^2-8gak)}}{a+\sqrt{(a^2-8gak)}}$ si v non esset $=0$, nam si v est $=0$ haec aequatio non valet. Apparet autem hanc aequationem contradictionem continere, quia av maius esse deberet quam gff seu $v > \frac{gss}{a}$ posito s pro f. At est $\frac{ss}{a} = 2x$ atque ita esset $v > 2gx$, quod est absurdum, nam in vacuo est tantum $v = gx$, atque in medio resistente adhuc minor esse debet. Pro ascensu autem inseruit aequatio inuenta atque ex ea totus arcus ascensus CN reperitur faciendo $v=0$, quo posito prodit $\frac{as^2}{2ab} = \left(\frac{a-\sqrt{(a^2-8gak)}}{a+\sqrt{(a^2-8gak)}}\right)^{\frac{a}{\sqrt{(a^2-8gak)}}} = \frac{g.CQ}{b}$. Ex his igitur perspicitur si fuerit vel $k < \frac{a}{8g}$ vel $k = \frac{a}{8g}$ oscillationes peragi, non posse, quia post nullum descensum ascensus sequi potest. Quare nobis potissimum reliqui casus, quibus est $k > \frac{a}{8g}$, sunt inuesti-

SUPER 1 : MOTV PVNCTI
uestigandi / atque qua / nes vtique / ribus subst / quae aequ / $=\frac{qdq+}{qq+\frac{ga}{2k}}$ / est quantit / $+B^2)+$ / vbi $At.\frac{q}{B}$ / stente sinu / valore deb / $\sqrt{k})+\frac{a}{4B}$ / niendum s / $\frac{a}{4Bk}At.\infty$, / $At.\frac{4Bks}{4a\sqrt{kv}-}$ / inuenitur l / Posito nun / MC ex h / $l\sqrt{\frac{b}{g.CP}}$. A / tur ex hac / $l\sqrt{\frac{b}{g.CQ}}$. E / tur arcus / tamen sun / quorum ta / su alius ac
$l\frac{4\sqrt{kv}+s}{4\sqrt{kb}} = \frac{-s}{4\sqrt{kv}+s}$, ex $4\sqrt{kb}$ et $\sqrt{v} < \sqrt{b}\frac{s}{4\sqrt{k}}$. peritur faciendo $v=0$, u $CN = \frac{4\sqrt{kb}}{e}$. Si est tractauimus, resistentia n multo magis celesem descensus ex punta celeritate in C iniim Quamobrem aededimus est imaginatur ex dato descensus $=f$, erit $lC = lgaf^2$ factoque $s=0$ erit $l\frac{gf^2}{av}$ non esset $=0$, nam non valet. Apparet ontradictionem contideberet quam gff seu est $\frac{ss}{a} = 2x$ atque ita urdum, nam in vacuo in medio resistente adascensu autem inferx ea totus arcus ascen$v=0$, quo posito pro$= \frac{g.CQ}{b}$. Ex his igi$k < \frac{a}{8g}$ vel $k = \frac{a}{8g}$ oscilquia post nullum deest. Quare nobis pous est $k > \frac{a}{8g}$, sunt inuesti-

uestigandi; quia enim in his resistentia est minor, atque quantumuis parua assumi potest, oscillationes vtique perfici poterunt. Factis ergo superioribus substitutionibus habemus $\frac{-ds}{s} = \frac{pdp}{p^2 - \frac{ap}{2k} + \frac{ga}{2k}}$ quae aequatio posito $q = p - \frac{a}{4k}$ abit in hanc $\frac{-ds}{s} = \frac{qdq + \frac{adq}{4k}}{qq + \frac{ga}{2k} - \frac{a^2}{16k^2}}$. Ponatur $\frac{ga}{2k} - \frac{a^2}{16k^2} = B^2$, quia est quantitas affirmatiua, eritque $lC - ls = l\sqrt{(q^2+B^2)} + \frac{a}{4k}\int\frac{dq}{q^2+B^2} = l\sqrt{(q^2+B^2)} + \frac{a}{4Bk}At.\frac{q}{B}$, vbi $At.\frac{q}{B}$ est arcus circuli cuius tangens est $\frac{q}{B}$ existente sinu toto $=1$. Restituto autem pro q valore debito erit $lC = l\sqrt{(2av\sqrt{k} - as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k})} + \frac{a}{4Bk}At.\frac{4a\sqrt{kv}-as}{4Bks}$. Ponatur ad lC definiendum $s=0$ et $v=b$, erit $lC = l\sqrt{2ab\sqrt{k}} + \frac{a}{4Bk}At.\infty$, quare erit $l\frac{\sqrt{2ab\sqrt{k}}}{\sqrt{(2av\sqrt{k}-as\sqrt{v}+gs^2\sqrt{k})}} = -\frac{a}{4Bk}At.\frac{4Bks}{4a\sqrt{kv}-as}$. Pro ascensu vero per arcum CN inuenitur $l\frac{\sqrt{2ab\sqrt{k}}}{\sqrt{(2av\sqrt{k}+as\sqrt{v}+gs^2\sqrt{k})}} = \frac{a}{4Bk}At.\frac{4Bks}{4a\sqrt{kv}+as}$. Posito nunc $v=0$ prodit integer arcus descensus MC ex hac aequatione $l\sqrt{\frac{2ab}{gss}} = \frac{a}{4Bk}At.\frac{4Bk}{a} = l\sqrt{\frac{b}{g.CP}}$. Atque totus arcus ascensus CN inuenietur ex hac aequatione $l\sqrt{\frac{2ab}{gss}} = \frac{a}{4Bk}At.\frac{4Bk}{a} = l\sqrt{\frac{b}{g.CQ}}$. Ex his aequationibus quanquam videantur arcus ascensus et descensus inter se aequales, tamen sunt inaequales; dantur enim infiniti arcus quorum tangens est eadem $\frac{4Bk}{a}$, atque pro ascensu alius accipi debet alius prodescensu. Atque cum

cum infiniti dentur arcus tangentis $\frac{4Bk}{a}$, quilibet eorum ad propositum accommodari potest. His enim sumtis arcubus in ordine prodeunt successiue omnes arcus tam ascensus quam descensus, quam diu corpus oscillationes peragit; nam quia aequatio inuenta est generalis ea omnia loca ostendere debet, in quibus corporis oscillantis celeritas vnquam est $=o$. Quare in hac resistentiae hypothesi hoc habetur commodum, quod statim pro qualibet oscillatione centesima v. gr. arcus tam descensus quam ascensus possit definiri. Sit arcus D cuius tangens est $\frac{4Bk}{a}$, et posita ratione diametri ad peripheriam $1:\pi$, erit eadem tangens $\frac{4Bk}{a}$ omnium horum arcuum D; $\pi+D$; $2\pi+D$; $3\pi+D$; etc. Pro arcu descensus nunc primae oscillationis MC sumi debet arcus D, eritque $\frac{2ab}{gss} = e^{\frac{Da}{2Bk}}$ seu abscissa arcus $MC = \frac{b}{g}e^{\frac{-Da}{2Bk}}$. Abscissa autem arcus ascensus sequentis seu abscissa arcus descensus secundae semioscillationis erit $\frac{b}{g}e^{\frac{-a(\pi+D)}{2Bk}}$. Simili modo abscissa arcus descensus in tertia semioscillatione erit $=\frac{b}{g}e^{\frac{-a(2\pi+D)}{2Bk}}$. Atque generaliter abscissa arcus descensus in oscillatione quae indicatur per $n+1$ est $\frac{b}{g}e^{\frac{-a(n\pi+D)}{2Bk}}$, quae simul est abscissa arcus ascensus in oscillatione quae indicatur numero n. Quod ad tempora oscillationum attinet, ea sequenti propositioni reseruamus. Q.E.I.

Co-

SUPER 1 MOTU PVNCTI
574. solui non corpus ad $=\frac{a}{8g}$. A quia expr que negat
575. quentem scissarum ipsorum a det a cele
576. semioscill. numero n. haec ratio illationun
577. tionun. se geometric que ideo
Tom. II.
entis $\frac{4Bk}{a}$, quilibet odari potest. His prodeunt successi- m descensus, quam ; nam quia aequa- mia loca ostende- oscillantis celeritas c resistentiae hypo- quod statim pro r. gr. arcus tam de- finiri. Sit arcus D a ratione diame- eadem tangens $\frac{4Bk}{a}$ + D; $2\pi+D$; nsus nunc primae cus D, eritque $\frac{2ab}{gss}$ $e^{\frac{-Da}{2Bk}}$. Abscissa autem a arcus descensus se- $e^{\frac{-a(\pi+D)}{2Bk}}$. Simi- is in tertia semi- . Atque genera- scillatione quae in- , quae simul est ab- one quae indicatur oscillationum at- reseruamus. Q.E.I.
Co-

Corollarium 1.

574. Nisi ergo fuerit $k > \frac{a}{8g}$, oscillationes absolui non possunt; quia finito primo descensu corpus ad quietem redigitur, si vel $k < \frac{a}{8g}$ vel $k = \frac{a}{8g}$. At si $k > \frac{a}{8g}$ oscillationes perpetuo durabunt, quia expressio $\frac{b}{g}e^{\frac{-a(n\pi+D)}{2Bk}}$ neque euanescere neque negatiua fieri potest.

Corollarium 2.

575. Arcus descensus se habet ad arcum sequentem ascensus in data ratione; est enim abscissarum ratio $\frac{b}{g}e^{\frac{-Da}{2Bk}}$ ad $\frac{b}{g}e^{\frac{-a(\pi+D)}{2Bk}}$, ideoque ipsorum arcuum 1 ad $e^{\frac{-\pi a}{4Bk}}$, quae ratio non pendet a celeritate data Vb.

Corollarium 3.

576. Atque simili modo arcus descensus primae semioscillationis ad arcum ascensus semioscillationis numero n indicatae datam habet rationem, est enim haec ratio vt $e^{\frac{\pi n a}{4Bk}}$ ad 1. Quare si numerus semioscillationum duplo sit maior haec ratio fit duplicata.

Corollarium 4.

577. Arcus descensus quotcunque semioscillationum se insequentium constituunt progressionem geometricam decrescentem in ratione 1 ad $e^{\frac{-\pi a}{4Bk}}$. Atque ideo integri etiam arcus semioscillationibus descripti

scripti erunt in progressione geometrica eiusdem denominatoris.

Scholion I.

578. Quia autem pro D infiniti arcus accipi possunt, quo appareat quinam ex iis pro arcu descensus accipi debeat; sumo casum quo $k = \frac{a}{8g}$, atque arcus ascensus $= \frac{4\sqrt{kb}}{e}$; seu eius abscissa $= \frac{8kb}{ae^2} = \frac{b}{g}e^{-2}$. Hoc autem casu est $B = o$ atque abscissa arcus ascensus $= \frac{b}{g}e^{\frac{-a(\pi+D)}{2Bk}}$. Debet ergo esse $\frac{a(\pi+D)}{2Bk} = 2$ et $\pi + D = \frac{4Bk}{a} = o$. Est vero $\frac{4Bk}{a}$ tangens arcus $\pi + D$, et cum $\frac{4Bk}{a}$ fit $= o$, debet $\pi + D$ esse $= o$. Ex quo intelligitur $\pi + D$ esse minimum arcum tangenti $\frac{4Bk}{a}$ respondentem. Dicatur ergo minimus arcus tangenti $\frac{4Bk}{a}$ respondens E, erit $D = E - \pi$. Quocirca in prima semioscillatione erit abscissa arcus descensus $= \frac{b}{g}e^{\frac{a(\pi-E)}{2Bk}} = \frac{MC^2}{2a}$, ideoque ipse arcus $MC = e^{\frac{a(\pi-E)}{4Bk}}\sqrt{\frac{2ab}{g}}$. Ponatur $\frac{4Bk}{a}$ seu tangens arcus $E = \tau$, erit arcus descensus primae semioscillationis $= e^{\frac{\pi-E}{\tau}}\sqrt{\frac{2ab}{g}}$. Arcus ascensus primae seu arcus descensus secundae semioscillationis $= e^{\frac{-E}{\tau}}\sqrt{\frac{2ab}{g}}$. Atque arcus descensus in semioscillatione quae indicatur numero $n+1$ erit $= e^{\frac{-E-(n+1)\pi}{\tau}}\sqrt{\frac{2ab}{g}}$, qui est simul arcus ascensus in semioscillatione numero n indicata. Progressionis geometricae ergo, quam hi arcus ascensus constituunt, denominator est $e^{\frac{-\pi}{\tau}}$.

Co-

SVPER MOTV PVNCTI
geometrica eiusdem
579. celeritas ... enim in ... tur, cel... ascensus $e^{\frac{-E-(n-}{\tau}}$ Celerita... bus succ... constitu...
infiniti arcus acciiam ex iis pro armo casum quo $k=$ $\frac{kb}{}$; seu eius abscissa asu est $B=o$ atque $\frac{\pi+D)}{2Bk}$. Debet ergo $\frac{4Bk}{a}=o$. Est vero cum $\frac{4Bk}{a}$ fit $=o$, Ex quo intelligi arcum tangenti ergo minimus arcus rit $D=E-\pi$. Quo e erit abscissa arcus
58... oscillati... sent, c... mam p... $=e^{\frac{2\pi-}{\tau}}$
ideoque ipse arcus
58 fiat ex descens... tas in
ur $\frac{4Bk}{a}$ seu tangens us primae semioscil ascensus primae seu niosicillationis $= e^{\frac{-E}{\tau}}$ in semioscillatione r erit $= e^{\frac{-E-(n+1)\pi}{\tau}}$
58 rit qua
ensus in semioscilla ogressionis geome census constituunt,
Co-

Corollarium 5.

579. Ex his etiam in qualibet semioscillatione celeritas in puncto infimo C potest definiri. Sit enim in semioscillatione, quae numero n indicatur, celeritas in C debita altitudini β, erit arcus ascensus $= e^{\frac{-E}{\tau}}\sqrt{\frac{2ab}{g}}$, qui aequalis esse debet ipsi $e^{\frac{-E-(n-1)\pi}{\tau}}\sqrt{\frac{2ab}{g}}$. Hinc fit $\sqrt{\beta} = e^{\frac{-(n-1)\pi}{\tau}}\sqrt{b}$. Celeritates ergo in puncto C in semioscillationibus successiuis progressionem geometricam quoque constituunt cuius denominator est $e^{\frac{-\pi}{\tau}}$.

Corollarium 6.

580. Si n ponatur numerus negatiuus semioscillationes, quae ante primam factae esse possent, cognoscuntur. Vt in semioscillatione primam praecedente arcus descensus esse debuisset $= e^{\frac{2\pi-E}{\tau}}\sqrt{\frac{2ab}{g}}$.

Corollarium 7.

581. Si in prima semioscillatione descensus fiat ex puncto cycloidis supremo A, erit arcus descensus $= a$. Quare est $\sqrt{\frac{ag}{2b}} = e^{\frac{\pi-E}{\tau}}$ et celeritas in puncto infimo C seu $\sqrt{b}$ erit $e^{\frac{E-\pi}{\tau}}\sqrt{\frac{ga}{2}}$.

Corollarium 8.

582. Si resistentia fere evanescat, seu k fuerit quantitas vehementer magna erit $B = \sqrt{\frac{ga}{2k}}$ et $\tau =$

$\tau = \frac{4\sqrt{gk}}{\sqrt{2c}} = \frac{2\sqrt{2gk}}{\sqrt{c}}$. Cum igitur sit τ valde magnum erit $E = \frac{\pi}{2}$, atque arcus descensus primae semioscillationis $= e^{\frac{\pi}{2\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}} = (1 + \frac{\pi}{2\tau}) \sqrt{\frac{2ab}{g}}$ et arcus ascensus $= (1 - \frac{\pi}{2\tau}) \sqrt{\frac{2ab}{g}}$.

Scholion 2.

583. Ex solutione huius propositionis inter cetera intelligi potest, quanta circumspectione saepe opus sit ad conclusiones ex aequationibus deducendas. Nam in casu $k > \frac{a}{8g}$, aequationes quas pro descensu et ascensu inuenimus ita sunt comparatae, vt ex iis sequi videatur arcum ascensus aequalem esse arcui descensus; nam facto $v = o$ ex vtraque aequatione prodit $\frac{gs^2}{2ab} = \left(\frac{a - \sqrt{(a^2 - 8gak)}}{a + \sqrt{(a^2 - 8gak)}}\right)^{\frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}}}$. Atque hoc ita se quoque haberet, nisi descensus necessario faceret $b = o$. Posito autem $b = o$, nullus datur ascensus et aequatio pro descensu prorsus est immutanda. Quare nisi ex casu quo $k = \frac{a}{8g}$ aduertissemus b esse $= o$, difficulter ex aequatione veritas cognosci potuisset. Idem quoque accidit, vbi in eadem hypothesi $k < \frac{a}{8g}$ descensu ex dato puncto facto celeritatem in puncto C inuestigauimus, posito enim $s = o$, aequatio ad absurdum deduxit. Ita enim est comparata illa aequatio, vt facto $s = o$ non ostendat esse quoque $v = o$, etiamsi reuera sit $v = o$; ii enim tantum termini sunt neglecti, in quibus reperiebatur s, cum reliqui v continentes eodem iure negligi

negligi debuissent. Inueniri ergo non potest esse $v = o$ si $s = o$, sed quia ex aequatione absurdum sequitur, nisi esset $v = o$, ex hoc concludi potest esse $v = o$ si $s = o$. In aliis vero casibus, in quibus absurdum non tam facile perspicitur, difficulter lapsus euitari poterit.

PROPOSITIO 66.

Theorema.

584. *In medio uniformi, quod resistit in simplici celeritatum ratione, omnes descensus super cycloide* AMC *fiunt aequalibus temporibus: atque similiter etiam omnes ascensus super cycloide* CNB *aequalibus temporibus absoluuntur; si quidem potentia sollicitans fuerit vniformis et deorsum directa.* Tab. XIII. Fig. 1.

Demonstratio.

Pro descensu si dicatur arcus $CM = s$ et altitudo debita celeritati in M, v, habetur ista aequatio $dv = -\frac{gsds}{a} + \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Ponatur $\sqrt{v} = u$, erit u vt ipsa celeritas in M, atque ob $dv = 2udu$ habetur ista aequatio $2udu = -\frac{gsds}{a} + \frac{uds}{\sqrt{k}}$, in qua u et s vbique eundem tenent dimensionum numerum. Quare si ponatur initium descensus in E et arcus $CE = f$, et integretur aequatio proposita ita vt fiat $u = o$ posito $s = f$, prodibit aequatio integralis in qua u, f et s vbique eundem dimensionum numerum constituunt. Ex hac igitur aequabitur

bitur u functioni vnius dimenſionis ipſarum f et s. Quocirca elementum temporis $\frac{ds}{u}$ erit functio nullius dimenſionis ipſarum f, s atque elementi ds. Eius ergo integrale ita acceptum vt euaneſcat poſito $s=o$, erit functio quoque nullius dimenſionis ipſarum f et s, et exhibebit tempus per arcum CM. In hac igitur functione ſi ponatur $s=f$, euaneſcet f vbique ex ea functione, aequabiturque tempus totius deſcenſus per EC functioni ex quantitatibus conſtantibus g, a et k tantum compoſitae, in quam neque f neque alia quantitas punctum E reſpiciens ingredietur. Quamobrem tempus deſcenſus per EC eadem exprimetur quantitate, vbicunque punctum E accipiatur, atque ideo omnes deſcenſus aequalibus abſoluentur temporibus. Si in formula tempus deſcenſus exhibente ponatur $-\sqrt{k}$ loco $\sqrt{k}$ prodibit tempus aſcenſus in arcu CNB, quod propterea quoque erit conſtans, quantuscunque fuerit arcus aſcenſu percurſus. Q. E. D.

Corollarium 1.

585. Quia u aequalis eſt functio vnius dimenſionis ipſarum f et s aequabitur $\frac{u}{f}$ functioni nullius dimenſionis ipſarum f et s. Quare ſi ponatur $s=nf$ aequabitur $\frac{u}{f}$ quantitati conſtanti, in qua non inerit f. In variis ergo deſcenſibus celeritates in punctis homologis totorum arcuum, erunt ipſis arcubus f proportionales.

Co-

SUPER
586.
vbi eſt u
CO ex
dimenſio
erit s ſe
ergo deſ
quam ar
proporti
587.
ctioni nu
quoque p
menſioni
arcus EM
588.
integroru
ſcenſuum
inter ſe
habet in
589.
ſint iſoc
ſemioſcil
bus. At
IOTV PVNCTI
is ipſarum f et s.
erit functio nullius elementi ds.
vt euaneſcat poſito nullius dimenſionis tempus per arcum ne ſi ponatur s nctione, aequaper EC functio a et k tantum que alia quantietur. Quamobeadem exprimem E accipiatur, alibus abſoluentempus deſcenſus k prodibit tempropterea quouerit arcus aſcen-
tio vnius dimen- functioni nul- Quare ſi pona- i conſtanti, in deſcenſibus ce- torum arcuum, les.
Co-

Corollarium 2.

586. Cum in deſcenſu maxima celeritas ſit vbi eſt $u=\frac{gs\sqrt{k}}{a}$, inuenietur punctum O ſeu arcus CO ex aequatione in qua f et s vbique eundem dimenſionum numerum conſtituunt; ex qua ergo erit s ſeu CO ipſi f proportionalis. In pluribus ergo deſcenſibus tam maximae celeritates ipſae, quam arcus CO arcubus deſcenſuum totis erunt proportionales.

Corollarium 3.

587. Quia tempus per MC aequale eſt functioni nullius dimenſionis ipſarum f et s; tempus quoque per EM aequabitur functioni nullius dimenſionis ipſarum f et s, ſeu etiam ipſius f et arcus EM.

Corollarium 4.

588. Hinc conſequitur non ſolum tempora integrorum deſcenſuum, ſed etiam tempora deſcenſuum per partes ſimiles arcuum totorum eſſe inter ſe aequalia. Similique modo hoc locum habet in aſcenſibus.

Corollarium 5.

589. Cum igitur tam omnes deſcenſus ſint iſochroni quam omnes aſcenſus; etiam omnes ſemioſcillationes aequalibus abſoluentur temporibus. Atque in caſu $k > \frac{a}{gg}$, quo corpus perpetuo oſcil-

oſcillationes continuat, omnes abſoluentur temporibus aequalibus.

Corollarium 6.

590. Cyclois ergo, quae eſt curua tautochrona in vacuo, eandem proprietatem retinet in medio quod reſiſtit in ſimplici ratione celeritatum. Praeterea cyclois quoque tautochronismum obtinet in medio, cuius reſiſtentia eſt conſtans, ſeu momentis temporum, vt *Newtonus* loquitur, proportionalis. (570.)

Scholion 1.

591. Hunc triplicem cycloidis tautochronismum *Newtonus* quoque demonſtrauit in Princ. Phil. atque quod ad reſiſtentiam ipſis celeritatibus proportionalem attinet, ex hoc demonſtrationem formauit, quod in diuerſis deſcenſibus; ſi arcuum partes totis arcubus proportionales accipiantur, in iis locis celeritates ſint totis arcubus quoque proportionales. Nam ſi celeritates totis arcubus fuerint proportionales, ſi elementa quoque capiantur totis arcubus proportionalia, tempora per ea erunt inter ſe aequalia.

Scholion 2.

592. Etſi autem ex his appareat, tempora tam aſcenſuum quam deſcenſuum inter ſe eſſe aequalia, tamen determinari non poteſt, quantum ſit tempus ſiue deſcenſuum ſiue aſcenſuum neque etiam

SVPER D… …U PUNCTI
etiam temp… poſſunt com… ter s et u … elementum … non poſſit … nite paruae … ribus calculu… reſiſtentiae … ſi arcus totu… in aequation… quae ex ſup… minus euaneſ… pus aſcenſus … do ex his ſi… tamen hoc … paribus, min… pus quoque … quia reſiſten… tiae hypoth… non euaneſc… dratis celeri… qui videtur, … cata celerita… diſſimis reſiſt… tia fuerit in … tardiſſimis r…
…luentur tem- …a tautochro- …retinet in …ne celerita- …chronismum …ſt conſtans, …nus loquitur, …autochronis- …Princ. Phil. …itatibus pro- …nſtrationem …s; ſi arcuum …accipiantur, …ubus quoque …totis arcubus …quoque ca- …tempora per …, tempora …r ſe eſſe ae- …l, quantum …uum neque etiam
Tom. II.

etiam tempora deſcenſuum et aſcenſuum inter ſe poſſunt comparari. Aequatio enim relationem inter s et u definiens ita eſt complicata, vt ex ea elementum temporis $\frac{ds}{u}$, per vnicam variabilem non poſſit exprimi. Praeterea oſcillationes infinite paruae, quae ante in determinandis temporibus calculum valde facilem reddiderunt, in hac reſiſtentiae hypotheſi nihil adiuuant. Nam etiam ſi arcus totus deſcriptus ponatur infinite paruus, in aequatione $l\frac{\sqrt{2ac^2}\sqrt{k}}{\sqrt{(2au^2\sqrt{k}-aus+gss\sqrt{k})}} = \frac{a}{4Bk}$ A. $t. \frac{4Bks}{as-4au\sqrt{k}}$ quae ex ſuperiori integrata oritur, ne vnicus terminus euaneſcit prae ceteris. Pendebit autem tempus aſcenſus a quantitatibus a, k et g, at quomodo ex his ſit compoſitum non liquet. Interim tamen hoc certum eſt, quo maior ſit g ceteris paribus, minus eſſe tempus, at creſcente a tempus quoque creſcere; k vero creſcente diminui, quia reſiſtentia ſit minor. In hac igitur reſiſtentiae hypotheſi reſiſtentia in motibus tardiſſimis non euaneſcit, quemadmodum in reſiſtentia quadratis celeritatum proportionali. Ex quo conſequi videtur, ſi reſiſtentia in maiore quam duplicata celeritatum ratione creſcat, in motibus tardiſſimis reſiſtentiam negligi poſſe; at ſi reſiſtentia fuerit in minore ratione, etiam in motibus tardiſſimis reſiſtentiam conſiderari debere.

PROPOSITIO 67.

Problema.

Tab. XII. Fig. 1. 593. *In medio uniformi, quod resistit in ratione multiplicata celeritatum, cuius exponens est* $2m$, *determinare motum corporis super curua* CMA, *in qua arcus quisque* CM *proportionalis est potestati abscissae* CP, *cuius exponens est* $1-m$.

Solutio.

Positis abscissa $CP = x$ et arcu $CM = s$ erit $ds = \frac{a^m dx}{x^m}$. Sit celeritas in M debita altitudini v, erit resistentia in $M = \frac{v^m}{k^m}$; atque ideo si corpus descendere ponatur super arcu CM habebitur ista aequatio $dv = -g dx + \frac{a^m v^m dx}{k^m x^m}$. Pro ascensu autem super eadem curua inseruit ista aequatio: $dv = -g dx - \frac{a^m v^m dx}{k^m x^m}$. Vtraque vero aequatio separationem admittet, si ponatur $v = tx$; prodibit enim pro descensu $x dt = -t dx - g dx + \frac{a^m t^m dx}{k^m}$ seu $\frac{-k^m dt}{k^m(g+t) - a^m t^m} = \frac{dx}{x}$, atq; pro ascensu haec aequatio $\frac{-k^m dt}{k^m(g+t) + a^m t^m} = \frac{dx}{x}$. In quibus aequationibus variabiles t et x a se inuicem sunt separatae; ita vt

vt t per x ope quadraturarum possit determinari. Constans in integratione addenda definiri debet vel ex data celeritate in puncto C vel ex loco curuae in quo vel descensus incipit vel ascensus finitur. Si ponatur abscissa toti arcui descensus vel ascensus respondens f; aequalis erit v functioni vnius dimensionis ipsarum f et x tam in descensu quam ascensu propter aequationes differentiales homogeneas. Hanc ob rem $\sqrt{v}$ aequabitur functioni dimidiae dimensionis ipsarum f et x. Tempus igitur descensus per MC, quod est $= \int \frac{ds}{\sqrt{v}} = a^m \int \frac{dx}{x^m \sqrt{v}}$ aequale erit functioni $\frac{1}{2} - m$ dimensionum ipsarum f et x. Quia autem posito $x = f$ prodit tempus totius descensus vt $f^{\frac{1}{2}-m}$; cui etiam proportionale est tempus totius ascensus, si quidem f abscissam arcus totius ascensus designat. Si ponatur totus arcus vel descensus vel ascensus $= A$, quia est A vt f^{1-m}, erit tempus totum vel ascensus vel descensus vt $\frac{A}{f^{\frac{1}{2}}}$ vel vt $A^{\frac{1-2m}{2-2m}}$. Plurium ergo descensuum tempora sunt in ratione $\frac{1-2m}{2-2m}$ multiplicata tororum arcuum descriptorum. Atque in eadem ratione sunt quoque tempora ascensuum inter se; sed tempora ascensuum et descensuum inter se non comparantur. Q.E.I.

Corollarium I.

594. Quia celeritas seu $\sqrt{v}$ aequalis est functioni dimidiae dimensionis ipsarum f et x; in

pluri-

pluribus descensibus celeritates in puncto C acquisitae sunt in subduplicata ratione altitudinum, ex quibus corpus descendit. Atque altitudines, ad quas corpus ascendens pertingit, sunt in duplicata ratione celeritatum initialium in C.

Corollarium 2.

595. Cum tam tempora descensus quam ascensus sint vt $f^{\frac{1}{2}-m}$; omnes descensus aequalibus absoluentur temporibus, si fuerit $m=\frac{1}{2}$ seu resistentia ipsis celeritatibus proportionalis. Atque hac hypothesi pariter tempora ascensuum inter se erunt aequalia. Curua autem erit cyclois, vt ante ostendimus

Corollarium 3.

596. Quia est $ds=\frac{a^m dx}{x^m}$ erit $s=\frac{a^m x^{1-m}}{1-m}$

Ex quo perspicitur, nisi sit $m<1$, curuam AMC fore negatiuam seu quod perinde est imaginariam. Semper enim curua maior esse debet quam abscissa.

Corollarium 4.

597. Praeterea semper debet esse $ds>dx$; quare quo hoc accidat si $x=o$ debet m esse numerus positiuus. Hinc nostra propositio requirit vt m inter limites o et 1 contineatur.

Co-

Corollarium 5.

598. In his casibus maximus ipsius x valor erit a; ibique erit $ds=dx$, seu tangens verticalis. Hocque loco curua habebit cuspidem, altius enim ascendere nequit, quia si $x>a$, foret $ds<dx$, quod fieri nequit.

Corollarium 6.

599. Si m continetur intra limites o et 1, curua in C habebit tangentem horizontalem, atque radius osculi in C erit $=\frac{s\,ds}{dx}=\frac{a^{2m}x^{1-2m}}{1-m}$. posito $x=o$. Quare radius osculi in C erit infinite paruus si $m<\frac{1}{2}$ finitus si $m=\frac{1}{2}$ et infinite magnus si $m>\frac{1}{2}$.

Corollarium 7.

600. Tempora minimorum descensuum et ascensuum sunt infinite parua, si $m<\frac{1}{2}$, at finita si $m=\frac{1}{2}$. Infinite magna denique erunt, si $m>\frac{1}{2}$. Tenent ergo radiorum osculi in infimo puncto C rationem.

Scholion.

601. Habemus hic ergo exempla curuarum pro resistentia minorem quam duplicatam rationem celeritatum tenente, super quibus motus corporis potest determinari. At si medium in maiore

ione quam duplicata ratione resistit, curua nusquam habebit tangentem horizontalem, atque ideo descensus et ascensus nunquam finiri possunt Quo autem in exemplo appareat, qualis sit motus corporis in medio, quod in maiore quam duplicata ratione celeritatum resistit, inuestigare lubet motum corporis super cycloide saltem in medio, quod resistit in quadruplicata ratione celeritatum. Hanc vero resistentiae hypothesin prae aliis eligo, quia in ea celeritas commode per seriem potest definiri.

PROPOSITIO 68.

Problema.

Tab. XIII. Fig. 1. 602. *In medio uniformi, quod resistit in quadruplicata ratione celeritatum, determinare tam descensum quam ascensum corporis quaecunque super cycloide* ACB.

Solutio.

Posita potentia uniformi corpus perpetuo deorsum trahente g, et abscissa $CP = x$, et arcu $CM = s$, erit ex natura cycloidis $dx = \frac{sds}{a}$. Sit celeritas in C debita altitudini b, et in M altitudini v; atque exponens resistentiae k, erit resistentia in $M = \frac{v^2}{k^2}$. Pro descensu ergo habebitur haec aequatio $dv = -gdx + \frac{v^2 ds}{k^2} = -\frac{gsds}{a} + \frac{v^2 ds}{k^2}$; at pro ascensu ista: $dv = -\frac{gsds}{a} - \frac{v^2 ds}{k^2}$. Pro descensu po-

SUPER … DE MOTU PUNCTI
ponatur … resistit, curua nusquam … to ds con… ontalem, atque ideo … finiri possunt Quo … qualis sit motus cor… ore quam duplicata … inuestigare lubet mo… terminan… saltem in medio, … erit ergo … ratione celeritatum … tesin prae aliis eli… ommode per seriem … Hoc …) 68. … Pro ascen… quod resistit in quadruplicata … determinare tam de… quaecunque super cy… aequatio… sus inuen… s inuestig… gna erit … corpus perpetuo de… $CP = x$, et arcu … cloidis $dx = \frac{sds}{a}$. Sit … in b, et in M alti… stentiae k, erit re… ensu ergo habebitur … $= -\frac{gsds}{a} + \frac{v^2 ds}{k^2}$; at … $\frac{v^2 ds}{k^2}$. Pro descensu po-
qui sit I … Q. E. I.
603 … erit sum…

ponatur $v = \frac{-k^2 dz}{z ds}$; erit $dv = \frac{-k^2 ddz}{z ds} + \frac{k^2 dz^2}{z^2 ds}$ posito ds constante. Quamobrem habebitur $k^2 ddz = \frac{gzsds^2}{a}$; quae aequatio in seriem conuersa dat $z = f + bs + \frac{fgs^3}{2.3\,ak^2} + \frac{bgs^4}{3.4.ak^2} + \frac{fg^2s^6}{2.3.5.6a^2k^4} + \frac{bg^2s^7}{3.4.6.7a^2k^4} + \frac{fg^3s^9}{2.3.5.6.8.9a^3k^6} +$ etc. Ad constantes f et b determinandas quaeratur valor ipsius v posito $s = 0$; erit ergo $b = -\frac{k^2 b}{f}$. Et quia si $s = 0$ est $dv = \frac{v^2 ds}{k^2} = \frac{b^2 ds}{k^2}$, propter $dv = \frac{-k^2 ddz}{z ds} + \frac{k^2 dz^2}{z^2 ds}$, erit $\frac{b^2}{k^2} = \frac{k^2 b^2}{ff}$ quae aequatio cum illa congruit erit ergo $b = -\frac{bf}{k^2}$. Hoc substituto erit $v =$

$$\frac{b - \frac{gs^2}{2a} + \frac{bgs^3}{3ak^2} - \frac{g^2s^5}{2.3.5a^2k^2} + \frac{bg^2s^6}{3.4.6a^2k^4}\ \text{etc.}}{1 - \frac{bs}{k^2} + \frac{gs^3}{2.3ak^2} - \frac{bgs^4}{3.4.ak^4} + \frac{g^2s^6}{2.3.5.6a^2k^4}\ \text{etc.}}$$

Pro ascensu vero posito $-s$ loco s habebitur $v =$

$$\frac{b - \frac{gs^2}{2a} - \frac{bgs^3}{3ak^2} + \frac{g^2s^5}{2.3.5a^2k^2} + \frac{bg^2s^6}{3.4.6a^2k^4} - \text{etc.}}{1 + \frac{bs}{k^2} - \frac{gs^3}{2.3ak^2} - \frac{bgs^4}{3.4ak^4} + \frac{g^2s^6}{2.3.5.6a^2k^4} + \text{etc.}}$$

Ex his aequationibus totus arcus vel descensus vel ascensus inuenitur, si ponatur $v = 0$, atque valor ipsius s inuestigatur. Vt si k fuerit quantitas valde magna erit arcus descensus qui sit $E = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + \frac{8ab^2}{15gk^2} + \frac{17a^2b^4\sqrt{g}}{25g^2k^4\sqrt{2ab}} +$ etc. At sequens arcus ascensus qui sit F erit $= \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} - \frac{8ab^2}{15gk^2} + \frac{17a^2b^4\sqrt{g}}{25g^2k^4\sqrt{2ab}} -$ etc.
Q. E. I.

Corollarium I.

603. Si ergo resistentia est quam minima erit summa arcuum descensus et ascensus seu arcus

cus vna semioscillatione descriptus, i. e. $E+F=\frac{2\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$, quam proxime.

Corollarium 2.

604. Differentia autem inter arcum ascensus et descensus scilicet $E-F=\frac{16ab^2}{15gk^2}=\frac{g(E+F)^4}{60ak^2}$. Quare differentia inter arcuum descensus et ascensus est vt biquadratum summae arcuum.

Scholion I.

605. Ex his perspicitur in medio rarissimo, quod resistit in quadruplicata ratione celeritatum differentiam inter arcus ascensus et descensus proportionalem esse biquadrato summae arcuum, seu $E-F=\frac{g(E+F)^4}{60ak^2}$. Supra autem vidimus in medio rarissimo, quod in duplicata ratione celeritatum resistit, esse arcum descensus $E=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}+\frac{2ab}{3gk}$, et arcum ascensus $F=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}-\frac{2ab}{3gk}$; hinc erit $E+F=\frac{2\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$ et $E-F=\frac{4ab}{3gk}=\frac{(E+F)^2}{6k}$ (557.). Quare in hac resistentia est differentia inter arcus ascensus et descensus vt quadratum summae arcuum. Atque in medio quod in simplici ratione celeritatum resistit, si fuerit rarissimum est $E=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}+\frac{\pi a\sqrt{b}}{4g\sqrt{k}}$ et $F=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}-\frac{\pi a\sqrt{b}}{4g\sqrt{k}}$ (582). Quare erit $E-F=\frac{\pi a\sqrt{b}}{2g\sqrt{k}}=\frac{\pi(E+F)\sqrt{a}}{4\sqrt{2kg}}$. Seu differentia inter arcus descensus et ascensus est ipsi summae arcuum proportionalis.

Ex

SVPER MOTU PVNCTI

Ex quo rissimo, celeritat descensu testati si ius expo hypothe $E=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{g}}$ census I fit E−I ties erg rus par E+F: ctionis tionem, A. 1730 stat si fractioni modum 60 attinet, et ascc ne sun Tom.

cus, i. e. E+F=

2.

er arcum ascensus $=\frac{g(E+F)^4}{60ak^2}$. Quare us et ascensus est

medio rarissimo, tione celeritatum et descensus proummae arcuum, seu vidimus in medio tione celeritatum $\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}+\frac{2ab}{3gk}$, et arerit $E+F=\frac{2\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$ Quare in hac reus ascensus et dearcuum. Atque in e celeritatum re$=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}+\frac{\pi a\sqrt{b}}{4g\sqrt{k}}$ et it $E-F=\frac{\pi a\sqrt{b}}{2g\sqrt{k}}=$ arcus descensus et m proportionalis.

Ex

Ex quo consequi videtur in medio quocunque rarissimo, quod resistit in $2m$ multiplicata ratione celeritatum, differentiam inter arcus ascensus et descensus super cycloide proportionalem esse potestati summae arcuum ascensus et descensus, cuius exponens sit $2m$. Atque in hac resistentiae hypothesi coniectare licet, fore arcum descensus $E=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}+\frac{2.4.6\cdots 2m.ab^m}{3.5.7\cdots(2m+1)gk^m}$ et arcum ascensus $F=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}-\frac{2.4.6\cdots 2m.ab^m}{3.5.7\cdots(2m+1)gk^m}$. Vnde fit $E-F=\frac{1.2.3\cdots m.g^{m-1}(E+F)^{2m}}{3.5.7\cdots(2m+1)2^{2m-1}a^{m-1}k^m}$. Quoties ergo m est numerus integer seu $2m$ numerus par, assignari potest aequatio inter $E-F$ et $E+F$: at si m fuerit numerus fractus valor fractionis $\frac{1.2.3\cdots m}{3.5.7\cdots(2m+1)}$ per methodum interpolationem, quam exhibui in Comment. Acad. Petrop. A. 1730, inuestigari potest. Ex qua quidem constat si $2m$ fuerit numerus impar valorem huius fractionis inuoluere quadraturam circuli, quemadmodum etiam in casu, quo $2m=1$ reperimus.

Scholion 2.

606. Quod quidem ad ipsam propositionem attinet, esse differentiam inter arcus descensus et ascensus super cycloide in totuplicata ratione summae arcuum, in quotuplicata ratione ce-

 leri-

leritatum ſit reſiſtentia, ſi quidem fuerit minima *Newtonus* in Princ. demonſtrauit. Atque demonſtrationem etiam ex ipſa aequatione $dv = -\frac{gsds}{a} \pm \frac{v^m ds}{k^m}$ deriuare licet. Ponatur enim $v = b - \frac{gs^2}{2a} + Q$, vbi Q erit quantitas valde parua prae b et $\frac{gs^2}{2a}$. Hanc ob rem habebitur $-\frac{gsds}{a} + dQ = \frac{-gsds}{a} + \frac{(b-\frac{gs^2}{2a})^m ds}{k^m}$ pro deſcenſu ſeu $Q = \int \frac{(2ab-gs^2)^m ds}{(2ak)^m}$ hoc integrali ita accepto vt euaneſcat poſito $s=0$. Pro deſcenſu ergo erit $v = b - \frac{gs^2}{2a} + \int \frac{(2ab-gs^2)^m ds}{(2ak)^m}$ et pro aſcenſu $v = b - \frac{gs^2}{2a} - \int \frac{(2ab-gs^2)^m ds}{(2ak)^m}$. Ponatur $v=0$, et quia tunc proxime eſt $s = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$ ponatur $s = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + q$, erit $0 = \frac{-gq\sqrt{2ab}}{a\sqrt{g}} + \int \frac{(2ab-gss)^m ds}{(2ak)^m}$, atque $q = \sqrt{\frac{a}{2gb}} \int \frac{(2ab-gss)^m ds}{(2ak)^m}$ ſiquidem poſt integrationem ponatur $s = \sqrt{\frac{2ab}{g}}$. At quia in hoc ipſius q valore ipſarum $\sqrt{b}$ et s ſunt $2m$ dimenſiones habebit q huiusmodi formam Nb^m. Quocirca erit arcus deſcenſus $E = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + Nb^m$ et arcus aſcenſus $F = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} - Nb^m$. Hinc ergo habebitur $E - F = 2Nb^m = \frac{Ng^m(E+F)^{2m}}{2^{3m-1}a^m}$. At numerus N obtinebitur ex formula $\sqrt{\frac{a}{2gb}} \int (\frac{2ab-gss}{2abk})^m ds$ ſi

ſi poſt integrationem ponatur $s = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$. Atque haec eſt demonſtratio illius ipſius, quod in praecedente ſcholio ex inductione deriuabamus. Erit enim N numerus rationalis, quoties m fuerit numerus integer affirmatiuus; at ſi $2m$ fuerit numerus integer impar inuentio numeri N a quadratura circuli pendebit. Generaliter autem valor ipſius q cum hac expreſſione $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m\, ab^m}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2m+1) gk^m}$ congruit.

PROPOSITIO 69.

Problema.

607. *In medio, quo reſiſtit in quadruplicata ratione celeritatum, ſi detur corporis ſuper curua* AMC *ex dato puncto* A. *deſcendentis in ſingulis locis celeritas, inuenire celeritatem eiusdem corporis deſcenſum in quocunque alio puncto* E *incipientis.* Tab. XIII. Fig. 2.

Solutio.

Poſito CP$=x$ et CM$=s$, ſit corporis ex A delapſi celeritas in M debita altitudini u, quae quantitas u ergo per hyp. datur per x et s. Iam ſi corpus deſcenſum ex quocunque puncto E incipiat, ſit celeritas in M debita altitudini v. Aequatio vero motum determinans erit $dv = -gdx + \frac{v^2 ds}{k^2}$, quae dat valorem ipſius v vbicunque deſcenſus inceperit; erit ergo etiam $du = -gdx + \frac{u^2 ds}{k^2}$

$\frac{u^2 ds}{k^2}$. Ponatur $v = u - q$, erit $du - dq = -g dx + \frac{u^2 ds}{k^2} - \frac{2qu\,ds}{k^2} + \frac{q^2 ds}{k^2}$; ex qua aequatione propter $du = -g dx + \frac{u^2 ds}{k^2}$ oritur $-dq = -\frac{2qu\,ds}{k^2} + \frac{q^2 ds}{k^2}$ seu $-\frac{dq}{q^2} + \frac{2u\,ds}{k^2 q} = \frac{ds}{k^2}$, quae multiplicata per $e^{\frac{2\int u ds}{k^2}}$ dat hanc integralem $e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} = c\,q + q \int \frac{e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} ds}{k^2}$, ex qua prodit $q = \frac{k^2 e^{\frac{2\int u ds}{k^2}}}{c + \int e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} ds}$. Quocirca erit $v = u - \frac{k^2 e^{\frac{2\int u ds}{k^2}}}{c + \int e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} ds}$, in qua aequatione integralia $\int \frac{u\,ds}{k^2}$ et $\int e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} ds$ ita sint accepta vt euanescant posito $s = 0$. Sit nunc altitudo celeritati in C debita $= a$, si descensus ex A fiat; at altitudo celeritati in C debita si descensus ex E fit $= b$; erit $b = a - \frac{k^2}{c}$. Ex quo habebitur $v = u - \frac{(a-b)k^2 e^{\frac{2\int u ds}{k^2}}}{k^2 + (a-b)\int e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} ds}$. Data ergo celeritate in C nempe $\sqrt{b}$ inuenietur punctum E, in quo descensus incepit ex hac aequatione $u = \frac{(a-b)k^2 e^{\frac{2\int u ds}{k^2}}}{k^2 + (a-b)\int e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} ds}$, ex qua valor ipsius s dabit arcum C M E. Quia igitur datur u per s ex hac aequatione celeritas corporis ex quocunque

SUPER MOTU PUNCTI
que alio $u - dq = -g dx +$
nietur. tione propter du
608 per e dat
in nume
efficient
(b−a+ uocirca erit $v = u -$
(b−a− integralia $\int \frac{u ds}{k^2}$ et
si est a escant posito $s = 0$. C debita $= a$, si celeritati in C ; erit $b = a - \frac{k^2}{c}$
609. tionis p pe $\sqrt{b}$ inuenietur vt euan cepit ex hac aequa- qua valor ipsius s
erit ur datur u per s
ne supe poris ex quocunque

que alio puncto delapsi super curua AMC inuenietur. Q. E. I.

Corollarium I.

608. Si valor ipsius v ita immutetur vt tam in numeratore quam in denominatore b sine coefficiente appareat, prodibit $v = \frac{(u\int e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} ds - k^2 e^{\frac{2\int u ds}{k^2}})}{\int e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} ds}$

$$\frac{\left(b - a + \frac{k^2 u}{k^2 e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} - u\int e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} ds}\right)}{\left(b - a - \frac{k^2}{\int e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} ds}\right)}.$$ Atque erit $v = 0$ si est $a + \frac{k^2 u}{u\int e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} ds - k^2 e^{\frac{2\int u ds}{k^2}}} = b$.

Corollarium 2.

609. Quia est $du - \frac{u^2 ds}{k^2} = -g dx$, erit huius aequationis per $e^{\frac{2\int u ds}{k^2}}$ multiplicatae integralis haec $u = a e^{\frac{\int u ds}{k^2}} - g e^{\frac{\int u ds}{k^2}} \int e^{\frac{-\int u ds}{k^2}} dx$; integralibus ita sumtis vt euanescant posito s vel $x = 0$. Vel etiam est $\frac{du}{u} + \frac{g dx}{u} = \frac{u ds}{k^2}$, atque hinc $\int \frac{u ds}{k^2} = l\frac{u}{a} + \int \frac{g dx}{u}$. Quare erit $e^{\frac{\int u ds}{k^2}} = \frac{e^{\int \frac{g dx}{u}} u}{a}$; vnde dx loco ds in aequatione superiore potest introduci.

 Co-

Corollarium 3.

610. Si resistentia fuerit quam minima, euanescet $\int e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} ds$ prae k^2; et ideo erit $v = u - (a-b) e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} = u - (a-b)(1 + 2\int \frac{u ds}{k^2})$, propter k quantitatem maximam. Quamobrem erit $v = b + \frac{2b\int u ds}{k^2} - a - 2\int \frac{u ds}{k^2} + u = (1 + \frac{2\int u ds}{k^2})(b - a + \frac{u}{1 + \frac{2\int u ds}{k^2}})$.

Corollarium 4.

611. Cum autem sit $\sqrt{(1 + \frac{2\int u ds}{k^2})} = 1 + \frac{\int u ds}{k^2}$ erit elementum temporis $\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{k^2 ds}{(k^2 + \int u ds)\sqrt{(b - a + \frac{k^2 u}{k^2 + 2\int u ds})}}$. Per aequationem autem $du = -g dx + \frac{u^2 ds}{k^2}$ est quam proxime $u = a - gx + \int \frac{(a-gx)^2 ds}{k^2}$, vnde erit $\int u ds = \int (a-gx) ds$, atque $\frac{ds}{\sqrt{v}} =$

$$\frac{k^2 ds}{(k^2 + \int (a-gx) ds)\sqrt{(b - a + \frac{k^2 a - g k^2 x + \int (a-gx)^2 ds}{k^2 + 2\int (a-gx) ds})}} =$$

$$\frac{k^2 ds}{(k^2 + \int (a-gx) ds \sqrt{(b - \frac{g k^2 x - \int (a^2 - g^2 x^2) ds}{k^2 + 2\int (a-gx) ds})}}.$$

Scholion.

612. Quemadmodum hypothesis resistentiae quadratis celeritatum proportionalis prae aliis hypothesibus excepta ea, quae est constans, hanc habet praerogatiuam, vt corporis super quacunque curua

SVPER … TV PVNCTI
curua m…
tione cu…
hypothe… m minima, eua-
dato vn… erit $v = u -$
scensus e…
enim re… propter k quan-
non succ… rit $v = b + \frac{2b\int u ds}{k^2}$
in qua i… $-a + \frac{u}{1 + \frac{2\int u ds}{k^2}}$).
sunt. …
simplici…
celerita…
simplici… $\frac{2\int u ds}{k^2}) = 1 + \frac{\int u ds}{k^2}$
ea, quae …
Videtur …
tum in … uationem autem
tineri, … $u = a - gx +$
tur, qui …
que alius … $)ds$, atque $\frac{ds}{\sqrt{v}} =$
et inter …
$\frac{v^2 ds}{k^2}$ reip…
ter v et …
in variis …
tionem …
$= -g dx$ …
scensum …
bilium h… hesis resistentiae
artificii … lis prae aliis hy-
sunt, qu… onstans, hanc ha-
quidem … uper quacunque
curua

curua moti celeritas in omnibus locis ex aequatione curuae possit definiri; ita haec resistentiae hypothesis in hoc prae reliquis excellit, quod ex dato vnico descensu vel ascensu, simul omnes descensus et ascensus possint determinari. In aliis enim resistentiis operatio, qua hic vsi sumus, non succedit, neque ad aequationem deducit, in qua indeterminatae a se inuicem separari possunt. Hanc ob rem vti resistentia constans est simplicissima, eamque sequitur ea, quae quadratis celeritatum est proportionalis, ita post has pro simplicissima resistentiae hypothesi est habenda ea, quae sit in quadruplicata ratione celeritatum. Videtur quidem ex his parum commodi ad motum in hac resistentiae hypothesi definiendum obtineri, quia vnus descensus tanquam datus accipitur, qui autem inuentu aeque est difficilis ac quisque alius. At si plures descensus considerantur, et inter se comparantur, aequatio $dv = -g dx + \frac{v^2 ds}{k^2}$ reipsa tres variabiles implicat, nempe praeter v et s seu x celeritatem in puncto C, quae in variis descensibus variatur. Quare cum resolutionem huius aequationis ad hanc aequationem $du = -g dx + \frac{u^2 ds}{k^2}$ reduxerimus, quae ad vnicum descensum spectat, illud incommodum trium variabilium hoc modo tollitur. Praeterea ope istius artificii plures descensus inter se comparari possunt, quod in aliis resistentiae hypothesibus ne quidem fieri potest. Atque hinc etiam multa probleblemata inuersa pro hac resistentiae hypothesi resolui possunt, quae in aliis omnino tractari nequeunt.

PROPOSITIO 70.
Problema.

Tab. XIII. Fig. 3. 613. *Si resistentia fuerit quam minima respectu potentiae sollicitantis absolutae, et proportionalis potestati cuicunque celeritatum determinare motum corporis super quacunque curua* AM.

Solutio.

Descendat corpus super curua AM, descensus initio in A existente; ponatur super axe verticali abscissa $AP = x$, arcus $AM = s$; et potentia perpetuo deorsum trahens $= g$. Sit celeritas in M debita altitudini v et resistentia ibidem $= \frac{v^m}{k^m}$, ita vt resistentia sit proportionalis potestati exponentis $2m$ celeritatum. His positis erit $dv = g\,dx - \frac{v^m ds}{k^m}$; at quia resistentia ponitur valde parua, erit terminus $\frac{v^m ds}{k^m}$ vehementer exiguus, atque propterea $v = gx$ quam proxime. Substituatur gx loco v in termino $\frac{v^m ds}{k^m}$ erit $v = gx - \frac{g^m}{k^m}\int x^m ds$ at-

SUPER MOTV PVNCTI
atque si ... tiae hypothesi re- ... nino tractari ne-
$+\frac{mg^{2m}}{k^{2m}}$
sunt acc ... 70.
ergo erit
$+\frac{3g^{2x}}{8k^{2m}}$ ... am minima respectu ... proportionalis po- ... minare motum cor-
AM er ...
At si d ... deretur, ... natur p ... ua AM, descensus ... abscissa ... er axe verticali ab- ... hic casu ... potentia perpe- ... ponatur ... celeritas in M de- ... do cele ... ibidem $= \frac{v^m}{k^m}$, ita
$(a-x)+$ ... potestati exponen- ... $\int(a-x)^m$ ... s erit $dv = g\,dx -$ ... accipien ... r valde parua, erit ... tempus ... $\frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m}\int($ ... guus, atque pro- ... omnia ... Substituatur gx lo- ... posito ... per cur ... $= gx - \frac{g^m}{k^m}\int x^m ds$ ... at-
Tom. I

atque simili modo adhuc propius $v = gx - \frac{g^m}{k^m}\int x^m ds + \frac{mg^{2m-1}}{k^{2m}}\int x^{m-1} ds \int x^m ds$. Quae integralia ita sunt accipienda vt euanescant posito $x = o$. Hinc ergo erit $\frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{gx}} + \frac{g^m \int x^m ds}{2k^m gx\sqrt{gx}} - \frac{mg^{2m}\int x^{m-1} ds \int x^m ds}{2k^{2m} g^2 x \sqrt{gx}} + \frac{3g^{2m}(\int x^m ds)^2}{8k^{2m} g^2 x^2 \sqrt{gx}}$. Atque tempus descensus per AM erit $= \int \frac{ds}{\sqrt{gx}} + \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m}\int x^{-\frac{3}{2}} ds \int x^m ds$. q. pr.

At si descensus ad fixum punctum C vsque desideretur, initio descensus ex puncto E facto, ponatur puncti E supra C altitudo verticalis $CD = a$; abscissa $CP = x$ et arcus $CM = s$; quibus positis hic casus ad superiorem reducetur, si ibi loco x ponatur $a - x$ et $-ds$ loco ds. Quare si altitudo celeritati in M debita vocetur v, erit $v = g(a-x) + \frac{g^m}{k^m}\int (a-x)^m ds + \frac{mg^{2m-1}}{k^{2m}}\int (a-x)^{m-1} ds \int (a-x)^m ds$; q. p. Haec vero integralia ita sunt accipienda vt euanescant posito $x = a$. Atque tempus per arcum EM est $= -\int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} + \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m}\int (a-x)^{-\frac{3}{2}} ds \int (a-x)^m ds$. q. pr. vbi iterum omnia integralia ita sunt capienda, vt euanescant posito $x = a$. Similiter modo si corpus ex C super curua CME ascendat tanta celeritate, qua ad pun- Fig. 2.

punctum E vsque pertingere possit, caedem aequationes locum habebunt si modo loco k^m ponatur $-k^m$. Hanc ob rem erit $v = g(a-x) - \frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds + \frac{mg^{2m-1}}{k^{2m}}\int(a-x)^{m-1}ds\int(a-x)^m ds$, q. p. atque tempus ascensus per ME $= -\int\frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} - \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m}\int(a-x)^{-\frac{3}{2}}ds\int(a-x)^m ds$ q. pr. omnibus his integralibus quoque ita acceptis, vt euanescant posito $x=a$. Atque hoc modo tam descensus corporis super curua quacunque, quam oscillationes super curua idonea in medio rarissimo poterunt determinari. Q. E. I.

Corollarium 1.

Fig. 3. **614.** Apparet ex his, quod quidem per se intelligitur, si corpus in medio resistente super curua AM descendat, fore celeritatem in M minorem, quam si corpus in vacuo super eadem curua descendisset. Atque tempus in medio resistente maius est, quam tempus descensus per AM in vacuo.

Corollarium 2.

Fig. 2. **615.** Altitudo celeritati in puncto infimo C debita prodibit, si in expressione ipsius v ponatur $x=0$. Hoc autem facto fit $v = ga + \frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds$ q. pr. posito post integrationem su-

pra

SVPER … OTU PUNCTI
pra pr… ossit, caedem ae-
$\int(a-x)^m$ … odo loco k^m po-
tum erit … $v = g(a-x)$ –
post int… $ds\int(a-x)^m ds$, q. p.
descensu… $= -\int\frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}}$ –
…r. omnibus his in-
61… vt euanescant po-
qua ad … am descensus cor-
tudini = … quam oscillationes
accipiat… arissimo poterunt
integrat…
I.
…d quidem per se
61… refistente super
quam i… ritatem in M mi-
qua ite… uo super eadem
altitudo … pus in medio re-
titudo … pus descensus per
d quant…
2.
$\int(a-x)$ … n puncto infimo
… essione ipsius v po-
$\int(a-x)^m$ … o fit $v = ga$ +
… t integrationem su-
pra

pra praescripto modo peractam $x=0$. At si $\int(a-x)^m ds$ ita capiatur vt euanescat posito $x=0$, tum erit in puncto C, $v = ga - \frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds$, si post integrationem ponatur $x=a$. Id quod ad descensum pertinet.

Corollarium 3.

616. At pro ascensu celeritas corporis in C qua ad E vsque ascendere valet debita erit altitudini $= ga + \frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds$, si hoc integrale ita accipiatur vt euanescat posito $x=0$, atque post integrationem ponatur $x=a$.

Corollarium 4.

617. Sit altitudo debita celeritati in C $=b$ quam iam descendendo per EMC acquisiuit, et qua iterum super eadem curua ascendet; ponatur altitudo DC descensu percursa vt ante a, et altitudo ad quam quam ascensu pertinget $a-d$, erit d quantitas valde parua; atque ideo $b = ga - \frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds = ga - gd + \frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds$, et $d = \frac{2g^{m-1}}{k^m}\int(a-x)^m ds$. Vel etiam $d = \frac{2ga-2b}{g}$.

Co-

Corollarium 5.

618. Quia tempus descensus per EM est $= -\int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} + \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m} \int (a-x)^{-\frac{3}{2}} ds \int (a-x)^m ds$ his integralibus ita acceptis vt euanescant posito $x=a$; erit tempus per $CM = \int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} - \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m} \int (a-x)^{-\frac{3}{2}} ds \int (a-x)^m ds$, si integralia ita accipiantur vt euanescant posito $x=o$. Atque simili modo in ascensu erit tempus per $CM = \int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} + \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m} \int (a-x)^{-\frac{3}{2}} ds \int (a-x)^m ds$.

Corollarium 6.

619. Integrum ergo tempus vel descensus vel ascensus per CME habebitur, si in his posterioribus formulis ponatur post integrationem $x=a$.

Scholion.

620. Satis iam expositis iis, quae ad motum corporis super data curua inueniendum pertinent, progredior ad quaestiones inuersas, in quibus ex aliis datis, quae incognita sunt, inuestigantur. Et primum quidem occurrunt huiusmodi problemata, in quibus lex accelerationis seu scala celeritatum datur, et curua quaeritur, quae motum illi scalae conuenientem producat in medio

SVPER DATA … MOTV PVNCTI
dio quocunque … 5.
tam vt hactenus … s per EM est $=-$
assumemus. … $a-x)^m ds$ his in-
PR … cant posito $x=a$;
621. In me … $v) - \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m}\int(a-x)^{-\frac{3}{2}}$
cunque multiplica … ccipiantur vt eua-
super qua corpus … nili modo in as-
ctis M celeritate … $\frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} + \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m}$
aequalis sit applic
Posita AP= … 5.
ter x et v pro … us vel descensus
arcus AM$=s$, e … , si in his poste-
celeritatum $2m$ … grationem $x=a$.
nalis; quibus pc
notante g potent
et k exponente … , quae ad mo-
quatione est ds: … nueniendum per-
… es inuersas, in
x dari ponitur … nita sunt, inue-
paratas, atque … occurrunt huius-
tam AM constru … accelerationis seu
ius esse debet q … quaeritur, quae
ginaria, oporte … producat in me-
dio

dio quocunque resistente; potentiam vero absolutam vt hactenus constantem et deorsum directam assumemus.

PROPOSITIO 71.

Problema.

621. *In medio, quod resistit in ratione quacunque multiplicata celeritatum, inuenire curuam* AM, *super qua corpus ita descendat, vt in singulis punctis* M *celeritatem habeat debitam altitudini, quae aequalis sit applicatae respondenti* PL *datae curuae* BL. Tab. XIII. Fig. 4.

Solutio.

Posita AP$=x$ et PL$=v$ dabitur aequatio inter x et v propter curuam BL datam. Iam sit arcus AM$=s$, et exponens rationis multiplicatae celeritatum $2m$, cui resistentia est proportionalis; quibus positis erit $dv = g\,dx - \frac{v^m ds}{k^m}$; denotante g potentiam vniformem deorsum trahentem et k exponentem resistentiae. Ex hac igitur aequatione est $ds = \frac{gk^m dx - k^m dv}{v^m}$, quae quia v per x dari ponitur, variabiles habet a se inuicem separatas, atque idcirco sufficit ad curuam quaesitam AM construendam. At quia ds semper maius esse debet quam dx; ne curua AM fiat imaginaria, oportet vt sit $gk^m dx - k^m dv > v^m dx$, seu

 $dx >$

$dx > \frac{k^m dv}{gk^m - v^m}$. Namque vbi eſt $dx = \frac{k^m dv}{gk^m - v^m}$ ibi curuae AM tangens fit verticalis; et vbi $dx < \frac{k^m dv}{gk^m - v^m}$, ibi curua AM omnino partem habere nequit. Q. E. I.

Corollarium 1.

622. Cum vbi curuae BL tangens eſt verticalis, ſit $dv = 0$, erit in loco reſpondente curuae AL, $ds = \frac{gk^m dx}{v^m}$, in quo puncto corpus deſcendens maximam vel minimam habebit celeritatem. Ne igitur hoc curuae AL punctum ſit imaginarium, oportet ſit $gk^m > v^m$, ſeu $v < k\sqrt[m]{g}$.

Corollarium 2.

623. Si curua BL alicubi incidat in axem AP, vt ibi ſit $v = 0$; erit in loco curuae AM reſpondente $ds = \infty$; ſi quidem m fuerit numerus affirmatiuus. Hoc ergo loco curua AM habebit tangentem horizontalem, in quam curua deſinet.

Corollarium 3.

624. Habeat curua AM alicubi tangentem horizontalem, euaneſcet illo loco dx prae ds. Quamobrem erit $ds = \frac{-k^m dv}{v^m}$. Ex quo apparet

in

SUPER D OTV PVNCTI
in loco c ſt $dx = \frac{k^m dv}{gk^m - v^m}$
ſcere debe alis; et vbi $dx <$
re horizon
ius erit qu no partem habe-
625. I.
verticalis, tangens eſt ver-
ua in initi reſpondente cur-
tangentem
gdx, ſeu puncto corpus de-
li, quem habebit celerita-
erit $= g$. punctum ſit ima-
ſeu $v < k\sqrt[m]{g}$.
626.
incidat in axem
mentum t curuae AM re-
fuerit numerus
ca tempus ua AM habebit
n curua deſinet.
$+gk^m \int$
627. icubi tangentem
tum curu o dx prae ds.
loco deſc x quo apparet
in

in loco curuae BL reſpondente applicatas decreſcere debere, atque ibi curuae BL tangentem fore horizontalem, quia dv infinities quoque maius erit quam dx.

Corollarium 4.

625. Curuae AM tangens, vt vidimus, eſt verticalis, vbi eſt $dx = \frac{k^m dv}{gk^m - v^m}$. Quo igitur curua in initio A, vbi celeritas ſit nulla, habeat tangentem verticalem, oportet vt ibi ſit $dv = gdx$, ſeu $v = gx$. Hoc ergo caſu tangens anguli, quem curua BL in A cum AP conſtituet, erit $= g$.

Corollarium 5.

626. Cum ſit $ds = \frac{gk^m dx - k^m dv}{v^m}$, erit elementum temporis $\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{gk^m dx - k^m dv}{v^{m+\frac{1}{2}}}$. Quocirca tempus deſcenſus per AM erit $= \frac{2k^m}{(2m-1)v^{m-\frac{1}{2}}} + gk^m \int \frac{dx}{v^{m+\frac{1}{2}}}$.

Scholion 1.

627. Si curua BL ſuper AB aſcenderet, tum curua AM quoque ſurſum vergeret; atque loco deſcenſus problemati ſatisfaceret aſcenſus ſuper

per

per illa curua. Fit enim hoc casu abscissa x negatiua ideoque et eius elementum dx; quamobrem habebitur ista aequatio $ds = \frac{-gk^m dx - k^m dv}{v^m}$ quae oritur ex aequatione $dv = -g\,dx - \frac{v^m ds}{k^m}$ naturam ascensus continente. Simili modo si curua BL ita est comparata, vt rursus ascendat; tum curua AM quoque sursum dirigetur; et partim descensu partim ascensu conditioni praescriptae satisfaciet.

Exemplum I.

628. Si quaeratur curua AM super qua corpus aequabiliter moueatur celeritate scilicet altitudini b debita; erit BL linea recta parallela axi AP atque $v = b$. Hanc ob rem erit $ds = \frac{gk^m dx}{b^m}$. Vnde sequitur lineam AM fore rectam inclinatam, et cosinum anguli, quem cum verticali AP constituet fore $= \frac{b^m}{gk^m}$ posito 1 pro sinu toto. Quo igitur maior fuerit b, seu celeritas, qua corpus ferri debet, eo minor erit angulus cum verticali AP, atque si fuerit $b^m = gk^m$, tum linea quaesita ipsa erit verticalis AP. At si b^m maior poneretur quam gk^m, tum solutio perduceret ad imaginarium, ad angulum scilicet, cuius cosinus esset maior

maior sinu toto. Tempus porro, quo lineae portio AM descensu absoluitur, erit $= \frac{gk^m x}{b^m \sqrt{b}} = \frac{s}{\sqrt{b}}$.

Exemplum 2.

629. Quaeratur curua AM super qua corpus ita descendat, vt eius celeritas in singulis punctis sit vt radix quadrata ex altitudine AP, quae est proprietas omni motui in vacuo competens. Erit igitur $v = \alpha x$, et $dv = \alpha dx$; hisque substitutis habebitur $ds = \frac{gk^m dx - \alpha k^m dx}{\alpha^m x^m}$ et $s = \frac{(g-\alpha)k^m x^{1-m}}{(1-m)\alpha^m}$, vbi constantis additione non est opus si $m < 1$. At si $m = 1$. curua est tractoria super linea horizontali per A transeunte descripta; super qua corpus ab infinita distantia, concursu scilicet tractoriae cum asymtoto, descensum incipit. Simili modo si $m > 1$, curua formam habebit tractoriae similem. Semper autem esse debet $\alpha < g$; ex quo perspicitur corpus in medio resistente non tantam acquirere posse celeritatem quantam in vacuo. Deinde quia ds maius esse debet quam dx, erit $(g-\alpha)k^m > \alpha^m x^m$; corpus igitur profundius descendere nequit, quam per altitudinem $= \frac{k}{\alpha}\sqrt[m]{(g-\alpha)}$; quo loco curuae tangens erit verticalis, curuaque punctum reuersionis habebit. Tempus autem, quo corpus per arcum AM

AM descendit est $=\int \frac{ds}{\sqrt{\alpha x}} = \frac{2(g-\alpha)k^m x^{\frac{1}{2}-m}}{(1-2m)k^{m+\frac{1}{2}}}$.
Quare nisi sit $m < \frac{1}{2}$ tempus non potest esse finitum; sed est infinite magnum; nam si $m = \frac{1}{2}$ curua erit cyclois deorsum versa, super cuius vertice A corpus perpetuo permanebit.

Corollarium 6.

630. Perspicitur ergo in medio resistente motum non vltra datum punctum posse continuari, ita vt celeritates semper sint in subduplicata ratione altitudinum.

Corollarium 7.

631. Ex his apparet omnes curuas hoc modo inuentas habere in A tangentem horizontalem. Quamdiu ergo radius osculi in A est finitae magnitudinis, corpus nunquam descendet. At si radius osculi sit infinite paruus, quod euenit si $m < \frac{1}{2}$, tum corpus descendere poterit; id quod ex eo, quod tempus sit finitum, intelligitur.

Scholion 2.

632. Si corpus ex A descensum incipiat, atque curuae AM in A tangens non fuerit horizontalis, tum ipso motus initio resistentia est nulla, erit ergo ibi $dv = g\,dx$. Quamobrem quo loco AM curua prodeat non habens in A tangentem

SUPER I
tem horiz
niet cum
ipso initio
A cum ax
ius tangens
angulum ac
tem descen
medio eni
titudine ac
vacuo ex
medio resi
quirere no
lem delaber
uissima, et
quam mini
Quamobren
bet esse co
altitudo de
dem medi
Vbi enim
AM fit in
633.
si detur c
titudines d
tis super c
Dictis enin
$\frac{-gk^m dx-}{v^m}$
MOTU PVNCTI
$\frac{(g-\alpha)k^m x^{\frac{1}{2}-m}}{(1-2m)k^{m+\frac{1}{2}}}$.
n potest esse fininam si $m=\frac{1}{2}$ cursuper cuius verti-
bit.
5.
dio resistente mo-
posse continuari,
a subduplicata ra-
7.
s curuas hoc mo-
ntem horizonta-
uli in A est fini-
m descendet. At
us, quod euenit
poterit; id quod
, intelligitur.
nsum incipiat, at-
non fuerit hori-
resistentia est nul-
amobrem quo lo-
ens in A tangen-
tem

tem horizontalem, curua BL, quae in A conueniet cum AP, ita debet esse comparata, vt in ipso initio sit $v = gx$; seu tangens curuae BL in A cum axe AP angulum constituere debet, cuius tangens sit $= g$; alioquin enim curua AM non angulum acutum cum AP conficeret. Magis autem descendendo semper esse debet $v < gx$, in medio enim resistente celeritas ex quacunque altitudine acquisita minor est celeritate, quae in vacuo ex eadem altitudine acquiritur. Porro in medio resistente corpus maiorem celeritatem acquirere non potest, quam si per lineam verticalem delaberetur, quia enim linea verticalis est breuissima, et citissime descensu absoluitur, corpus quam minime resistentiae actioni est expositum. Quamobrem in medio resistente curua BL ita debet esse comparata, vt v vbique sit minor, quam altitudo debita celeritati, quae a corpore in eodem medio resistente per AP cadendo acquiritur. Vbi enim v hanc altitudinem superat, ibi curua AM fit imaginaria.

Scholion 3.

633. Simili modo res se habet si pro ascensu detur curua BLD, cuius applicatae PL sint altitudines debitae celeritatibus corporis ascendentis super curua inuenienda AME in punctis M. Dictis enim $AP = x$; $PL = v$ et $AM = s$, erit $ds = \frac{-gk^m dx - k^m dv}{v^m}$. Ne igitur ds sit negatiuum, Tab. XIII. Fig. 5.

 opor-

oportet, vt dv habeat valorem negatiuum, i.e. vt curua BL continuo ad axem AD conuergat. Deinde etiam $-dv$ maius esse debet quam gdx seu tangens curuae BL vbique cum axe AP maiorem angulum constituere debet, quam est is, cuius tangens est $=g$. Neque vero hoc sufficit, sed praeterea $-dv-gdx$ maius esse debet quam $\frac{v^m dx}{k^m}$; seu $-dv > \frac{(gk^m+v^m)dx}{k^m}$, siue differentia inter $-dv$ et gdx maior esse debet quam $\frac{v^m dx}{k^m}$. Haec postrema conditio huc redit, vt PL sit minor, quam altitudo debita celeritati, quam corpus in P haberet, si ex A celeritate alt. AB debita, per AP ascendisset. In ascensu enim per lineam verticalem corpus pro ratione altitudinis percursae minimum celeritatis detrimentum a resistentia patitur. In ipso autem puncto D, angulus ADB tantus esse debet vt eius tangens sit $=g$; quia prope punctum E, in quo celeritas est nulla, resistentiae effectus euanescit: sin vero iste angulus esset maior, curua AME in E tangentem haberet horizontalem, vti in praeced. scholio quoque de descensu monuimus.

PROPOSITIO 72.
Problema.

Tab. XIII. Fig. 6. 634. *Si detur curua* AM *super qua corpus in vacuo moueatur; inuenire curuam* am, *super qua corpus in medio resistente ita descendat, vt celeritas in* a *aequalis sit celeritati in* A, *et sumtis arcubs* AM *et* am *aequalibus, vt celeritates in singulis punctis* M *et* m *sint quoque aequales.*

SVPER ... OTU PUNCTI
pus in n ... negatiuum, i.e. a aequal ... AD conuergat. et am a ... ebet quam gdx M et m ... m axe AP ma- ... t, quam est is, ... ro hoc sufficit, Duc ... esse debet quam rizontali ... siue differen- et $ap=$ ... se debet quam aequatio ... punctis ... huc redit, vt tes in ... tia abso ... ebita celeritati, potestas ... A celeritate alt. erit pro ... In ascensu enim $-gdt$, ... o ratione altitu- resistent ... tis detrimentum ... em puncto D, ... eius tangens sit stituanti ... quo celeritas est ... it: sin vero iste prodibit ... E in E tangen- ... n praeced. scho- ... s. $+\frac{(b-}{g}$ t et s; ... 2. bebitur am. Q ... er qua corpus in ... , super qua corpus

Solutio.

Ductis axibus verticalibus AP et ap, et horizontalibus MP, mp; sit $AM=am=s$; $AP=t$, et $ap=x$; propter curuam AM datam dabitur aequatio inter s et t. Iam sint celeritates in punctis A et a debitae altitudini b, et celeritates in M et m debitae altitudini v. Sit potentia absoluta deorsum sollicitans g, et resistentia vt potestas exponentis $2m$ celeritatum. His positis erit pro motu in vacuo super curua AM, $dv=-gdt$, seu $v=b-gt$; et pro descensu in medio resistente super curua ma erit $dv=-gdx+\frac{v^m ds}{k^m}$; in qua aequatione si loco dv et v substituantur valores ex priori aequatione inuenti, prodibit $-gdt=-gdx+\frac{(b-gt)^m ds}{k^m}$; seu $dx=dt+\frac{(b-gt)^m ds}{gk^m}$. Quia autem datur aequatio inter t et s; si loco t eius valor in s substituatur, habebitur aequatio inter x et s pro curua quaesita am. Q. E. I.

Corollarium 1.

635. Si in curua AM punctum B fuerit initium descensus, ideoque eius altitudo supra A$=\frac{b}{g}$; habebitur quoque in curua am initium descensus b, sumendo arcum $amb=$AMB.

Corollarium 2.

636. Ex solutione apparet esse semper $dx>dt$: quare altitudo ap maior erit quam altitudo AP; in medio enim resistente maiore opus est altitudine ad eandem celeritatem generandam quam in vacuo.

Corollarium 3.

637. Quia in curuis AM et am sumtis aequalibus arcubus, celeritates in illis locis sunt aequales; tempora quoque, quibus aequales arcus AM et am describuntur, erunt aequalia. Atque ideo tempus descensus in medio resistente per bma aequale est tempori descensus in vacuo per BMA.

Corollarium 4.

637. Ne curua bma fiat imaginaria, oportet vt sit vbique $dx<ds$. Hanc ob rem debet esse $dt+\frac{(b-gt)^m ds}{gk^m}<ds$ seu $gk^m dt<gk^m ds-(b-gt)^m ds$. Hoc autem ita se habet si fuerit $\frac{gk^m}{dt}$

SVPER DAT MOTU PVNCTI
$<(gk^m-b^m)d$ tinet ad punct rem negatiuu spiciendum vt si $gk^m dt$ non
1. tum B fuerit initudo supra A$=$ m initium descen- MB.
639. Ne i te omnia nec cto A $ds=ad$ et ideo erit g Si ergo curua sizontalem del
effe semper $dx>$: quam altitudo maiore opus est em generandam
am sumtis aequalocis sunt aequaluales arcus AM a. Atque ideo stente per bma cuo per BMA.
640. Sit cto A, $b^m=g$ $=\frac{ds}{\alpha}+\frac{(\alpha-1)ds}{\alpha}=$ a tangentem h
641. In $t=\frac{b}{g}$. Pro p rum elementis tes in punctis tae.
aginaria, oporob rem debet $k^m dt<gk^m ds-$ habet si fuerit $\frac{gk^m}{dt}$

$<(gk^m-b^m)ds$, qui est casus si t euanescit et pertinet ad punctum a, nisi t alicubi habeat valorem negatiuum. Quocirca ad hoc tantum est respiciendum vt punctum a fiat reale, quod euenit si $gk^m dt$ non maius fuerit quam $(gk^m-b^m)ds$.

Corollarium 5.

639. Ne igitur curua am fiat imaginaria, ante omnia necesse est, vt sit $b<k\sqrt[m]{g}$. Sit in puncto A $ds=\alpha dt$, erit α numerus vnitate maior; et ideo erit $gk^m<\alpha(gk^m-b^m)$ seu $b<k\sqrt[m]{\frac{g(\alpha-1)}{\alpha}}$. Si ergo curua MA in A habeat tangentem horizontalem debet esse $b<k\sqrt[m]{g}$ propter $\alpha=\infty$.

Corollarium 6.

640. Sit autem, si fuerit $ds=\alpha dt$ in puncto A, $b^m=\frac{g(\alpha-1)}{\alpha}k^m$; erit in ipso puncto a, $dx=\frac{ds}{\alpha}+\frac{(\alpha-1)ds}{\alpha}=ds$. Hoc ergo casu curua am in a tangentem habebit verticalem.

Corollarium 7.

641. In initio motus in B fit $b=gt$, seu $t=\frac{b}{g}$. Pro puncto b igitur erit $dx=dt$ curuarum elementis sumtis aequalibus. Quare tangentes in punctis B et b aequaliter erunt inclinatae.

Scho-

Scholion I.

642. Quia curua am non abſolute ex curua AM conſtrui poteſt, ſed praeterea noſſe oportet celeritatem in puncto A ſeu deſcenſus initium B; ſi in curua AM aliud deſcenſus initium accipiatur, alia inuenietur curua am. Curuae ergo BMA et bma ratione vnici deſcenſus tantum ita congruunt, vt celeritates aequalibus percurſis ſpatiis ſint inter ſe aequales; et ſi in aliis punctis initia deſcenſus ponantur, haec conuenientia non amplius locum habebit. Non igitur dantur duae curuae ſuper quibus deſcenſus omnes ad datum punctum vsque inter ſe congruant, altera in vacuo altera in medio reſiſtente conſtituta.

Exemplum I.

642. Sit AMB linea recta vtcunque inclinata ita vt ſit $s = at$; et quaeratur curua amb ſuper qua corpus ſimili modo progrediatur in medio reſiſtente, quo ſuper AMB in vacuo. Poſito autem $\frac{s}{a}$ loco t prodibit ſequens aequatio inter x et s pro curua quaeſita amb: $dx = \frac{ds}{a} + \frac{(ab-gs)^m}{ga^mk^m}ds$, cuius integralis eſt $x = \frac{s}{a} + \frac{ab^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} - \frac{(ab-gs)^{m+1}}{(m+1)g^2a^mk^m}$. Ne punctum a fiat ima-

SVPER D. TU PUNCTI
imaginariun lute ex curua
fuerit $b^m =$ noſſe oportet ... nſus initium B;
gentem ve m accipiatur,
habere pot ergo BMA et
ſuper linea ita congruunt,
ſcendiſſe, patiis ſint inter ... ctis initia de-
$(k\sqrt[m]{ga^{m-1}}$ a non amplius
g duae curuae
curua amb, atum punctum
piendum, v vacuo altera
$\sqrt[m]{\frac{a^{m-1}(a-}{g^{m-1}}}$
ritatum pro tcunque incli-
$\frac{(gk(a-1)-gs)ds}{gak}$ ur curua amb
Quae eſt a ediatur in me-
rizontali d vacuo. Poſi-
meter eſt s aequatio in-
644. b: $dx = \frac{ds}{a} +$
ſcripta cyc
et ſit med ſt $x = \frac{s}{a} +$
leritatum,
circulo A punctum a fiat
que horizo ima-
atque duo
Tom.II.

imaginarium oportet vt $\frac{1}{a} + \frac{b^m}{gk^m} < 1$. Nam ſi fuerit $b^m = \frac{(a-1)gk^m}{a}$ curua in a habebit tangentem verticalem; neque propterea b maiorem habere poterit valorem. Ponatur igitur corpus ſuper linea inclinata BMA ex tanta altitudine deſcendiſſe, vt fiat $b = k\sqrt[m]{\frac{g(a-1)}{a}}$, erit $dx = \frac{ds}{a} + \frac{(k\sqrt[m]{ga^{m-1}}(a-1)-gs)^m ds}{ga^mk^m}$, quae eſt aequatio pro curua amb, in qua initium deſcenſus in b eſt capiendum, vbi eſt $ds = adx$, ſeu arcus amb erit $= k\sqrt[m]{\frac{a^{m-1}(a-1)}{g^{m-1}}}$. Si reſiſtentia fuerit quadratis celeritatum proportionalis erit $m=1$, ideoque $dx = \frac{ds}{a} + \frac{(gk(a-1)-gs)ds}{gak} = ds - \frac{sds}{ak}$ et integrando $x = s - \frac{ss}{2ak}$. Quae eſt aequatio pro cycloide ſuper baſi horizontali deſcripta, cuius circuli generatoris diameter eſt $\frac{ak}{2}$.

Corollarium 8.

644. Sit ergo ſuper baſi horizontali CB deſcripta cyclois AMB circulo generatore ANC, et ſit medium reſiſtens in duplicata ratione celeritatum, cuius exponens ſit $= k$. Si nunc in circulo ANC ſumatur chorda AN $= \frac{k}{2}$ ducaturque horizontalis PNM, et ex M tangens MT: atque duo corpora ponantur deſcendere alterum Tab. XIII. Fig 7.

 ſuper

ſuper MT in vacuo et alterum ſuper curua MB in medio reſiſtente, ambo haec corpora aequalibus temporibus aequalia ſpatia abſoluent.

Exemplum 2.

Fig. 6 645. Sit curua AMB cyclois deorſum ſpectans, cuius circuli generatoris diameter $=\frac{a}{2}$; erit $ss=2at$ et $t=\frac{ss}{2a}$ atque $dt=\frac{sds}{a}$. His ergo ſubſtitutis prodibit pro curua amb ſequens aequatio $dx=\frac{sds}{a}+\frac{(2ab-gss)^m ds}{2^m g a^m k^m}$; vel ſi totus arcus AMB, qui in vacuo deſcenſu abſolui ponitur, vocetur c erit $b=\frac{gcc}{2a}$; ideoque pro curua amb orietur iſta aequatio $dx=\frac{sds}{a}+\frac{g^{m-1}(cc-ss)^m ds}{2^m a^m k^m}$. Ne igitur haec curua in puncto a fiat imaginaria, oportet ſit $g^{m-1}c^{2m} < 2^m a^m k^m$, vel altitudo arcus AB minor eſſe debet quam $\frac{k}{g}\sqrt[m]{g}$; nam ſi fuerit altitudo arcus $AB=\frac{k}{g}\sqrt[m]{g}$, tum curuae amb tangens in b erit verticalis. Si ergo B ſit cuſpis cycloidis, erit $\frac{cc}{2a}=\frac{a}{2}$ ſeu $c=a$; et ſi ſit praeterea $g^{m-1}a^m=2^m k^m$, quo curuae amb in a tangens fiat verticalis, habebitur iſta aequatio $dx=\frac{sds}{a}+\frac{(aa-ss)^m ds}{a^{2m}}$; quae curua in duobus punctis a et b habebit tangentes verticales.

Cc

SVPER I
646. cloide ita ſpatiis per prietatem ſuper curu puncto b, determinat
647. tium B ca quia in eiu continetur. tochrona i erit in me ſuper AM reſiſtente r
648. ipſae, quas pro tautoc ſed ſimul i re non po li modo ir niri, ſuper moueatur,
OTV PVNCTI
ſuper curua MB corpora aequali- abſoluent.
ois deorſum ſpeiameter $=\frac{a}{2}$; erit His ergo ſubſequens aequatio
l ſi totus arcus
olui ponitur, vocurua amb orie- $\frac{-1(cc-ss)^m ds}{2^m a^m k^m}$.
a fiat imagina- k^m, vel altituquam $\frac{k}{g}\sqrt[m]{g}$; nam
g, tum curuae
Si ergo B ſit $c=a$; et ſi ſit curuae amb in a iſta aequatio dx
urua in duobus
verticales.
Cc

Corollarium 9.

646. Cum igitur corpus in vacuo ſuper cycloide ita deſcendat, vt eius accelerationes ſint ſpatiis percurrendis proportionales; eandem proprietatem habebit deſcenſus in medio reſiſtente ſuper curua bma, ſi initium deſcenſus ſumatur in puncto b, quod per aequationem ad curuam amb, determinatur, erit ſcilicet $amb=c$.

Corollarium 10.

647. Si in curua AMB aliud deſcenſus initium B capiatur; tota curua amb alia reperietur, quia in eius aequatione longitudo arcus $AMB=c$ continetur. Quare etiamſi cyclois ſit curua tautochrona in vacuo, curua amb talis tamen non erit in medio reſiſtente: quia pluribus deſcenſibus ſuper AMB totidem curuae diuerſae in medio reſiſtente reſpondent.

Scholion 2.

648. Curuae hoc exemplo erutae ſunt eae ipſae, quas Clar. Hermannus in Comm. Tom. II. pro tautochronis in mediis reſiſtentibus inuenit; ſed ſimul ipſe demonſtrauit eas quaeſito ſatisfacere non poſſe. Ceterum ex his intelligitur, ſimili modo in medio reſiſtente curuam poſſe inueniri, ſuper qua corpus aſcendendo eodem modo moueatur, quo ſuper dato curua in vacuo. Sint

Xx 2 enim

enim puncta Ae t a initia ascensus illud in vacuo hoc in medio resistente; sitque celeritas initialis debita altitudini b; habebitur pro curua amb ista aequatio $dx = dt - \frac{(b-gt)^m ds}{gk^m}$; ex qua aequatione intelligitur, curuam amb non fieri posse imaginariam, nisi ipsa curua AMB talis fuerit. Nam quia, ne curua amb fit imaginaria, esse debet $dx < ds$; hic dx minus est quam dt, quod per se minus est quam ds. Vt si linea AMB fit linea verticalis, altera amb poterit assignari; nam posita $AB = c$, erit $b = gc$, et $s = t$; quare pro curua amb inuenitur ista aequatio $dx = ds - \frac{g^{m-1}(c-s)^m ds}{k^m}$, cuius integralis est $x = s + \frac{g^{m-1}(c-s)^{m+1} - g^{m-1} c^{m+1}}{(m+1)k^m}$. Accommodetur haec aequatio ad resistentiam quadratis celeritatum proportionalem fiet $m = 1$, ideoque erit $x = s +$
Fig. 7. $\frac{(c-s)^2 - c^2}{2k} = \frac{2(k-c)s + ss}{2k}$, quae est ad cycloidem hoc modo: describatur cyclois AMB circulo generatore diametri $AC = \frac{k}{2}$, super basi horizontali BC, tum capiatur arcus $AM = k - c$; erit M initium ascensus, ex quo puncto, si corpus MA ascendat celeritate altitudini gc debita, in medio resistente in duplicata ratione celeritatum eodem modo mouebitur, quo in vacuo eadem celeritate initiali sursum ascendens verticaliter.

PRO-

SVPEI
64
recta,
celeritat
qua co
aequabili
Sit
ducatur
pus ho
dini b.
=y et
ritas de
mentum
dy ita
Vv ad
tur v=
ponens
positis
loco v
curuae
et dx=
V(p²-1

OTV PVNCTI
sus illud in vaque celeritas iniar pro curua amb
-; ex qua aequanon fieri posse
MB talis fuerit.
imaginaria, esse
quam dt, quod
si linea AMB fit
rit assignari; nam
s=t; quare pro
itio dx=ds-
s est x=s+
ommodetur haec
celeritatum proe erit x=s+
cycloidem hoc
circulo generahorizontali BC,
erit M initium
us MA ascendat
medio resistenm eodem moeadem celeritate
iter.
PRO-

PROPOSITIO 73.
Problema.

649. Si potentia fuerit uniformis et deorsum directa, mediumque in ratione quacunque multiplicata celeritatum resistat; determinare curuam AM, super qua corpus descendendo secundum horizontalem AH aequabiliter progrediatur. Tab. XIV. Fig. 2.

Solutio.

Sit A curuae punctum supremum, per quod ducatur axis verticalis AP; celeritasque, qua corpus horizontaliter progreditur, sit debita altitudini b. Sumatur abscissa $AP = x$, applicata $PM = y$ et arcus $AM = s$; sitque corporis in M celeritas debita altitudini v; qua celeritate corporis elementum $Mm = ds$ percurret. Erit ergo vt ds ad dy ita corporis celeritas per Mm, quae est vt $\sqrt{v}$ ad celeritatem horizontalem $\sqrt{b}$, vnde oritur $v = \frac{bds^2}{dy^2}$. Iam sit potentia sollicitans $= g$; exponens resistentiae k, et ipsa resistentia $= \frac{v^m}{k^m}$. His positis erit $dv = g\,dx - \frac{v^m ds}{k^m}$, quae aequatio, si loco v valor $\frac{bds^2}{dy^2}$ substituatur, exprimet naturam curuae quaesitae. Sit autem $ds = p\,dy$, erit $v = bp^2$ et $dx = dy\sqrt{(p^2-1)}$. Quocirca habebitur $2bp\,dp = gdy \sqrt{(p^2-1)} - \frac{b^m p^{2m+1} dy}{k^m}$, quae separata dat $dy =$

 2bk

$\frac{2bk^m p\,dp}{gk^m\sqrt{(p^2-1)}-b^m p^{2m+1}}$. Curuae igitur quaesitae sequens erit constructio; sumto $y = \int\frac{2bk^m p\,dp}{gk^m\sqrt{(p^2-1)}-b^m p^{2m+1}}$ erit $x = \int\frac{2bk^m p\,dp\sqrt{(p^2-1)}}{g^m\sqrt{(p^2-1)}-b^m p^{2m+1}}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

650. Si loco pp restituatur $\frac{v}{b}$, atque per v definiantur y et x, erit $y=\int\frac{k^m dv\sqrt{b}}{gk^m\sqrt{(v-b)}-v^m\sqrt{v}}$ atque $x=\int\frac{k^m dv\sqrt{(v-b)}}{gk^m\sqrt{(v-b)}-v^m\sqrt{v}}$. Similique modo hinc erit arcus $s=\int\frac{k^m dv\sqrt{v}}{gk^m\sqrt{(v-b)}-v^m\sqrt{v}}$. Sumto autem $\frac{v}{b}$ loco pp erit $ds=\frac{dy\sqrt{v}}{\sqrt{b}}$ et $dx=\frac{dy\sqrt{(v-b)}}{\sqrt{b}}$ atque $ds=\frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{(v-b)}}$.

Corollarium 2.

651. Quia aequatio $dy=\frac{k^m dv\sqrt{b}}{gk^m\sqrt{(v-b)}-v^m\sqrt{v}}$ est separata; ex ea solutio particularis quaesito satisfaciens erui potest, faciendo denominatorem $gk^m\sqrt{(v-b)}-v^m\sqrt{v}=o$, vnde erit ipsa celeritas $\sqrt{v}$ constans. Sit ergo $v=c$ erit $\sqrt{(v-b)}=\frac{c^m\sqrt{c}}{gk^m}$; atque

SUPER D. MOTU PUNCTI
atque ideo ... igitur quaesitae se-
vt supra ia ... o y
652. ...
debita est a
ex aequatio ... I.
titudo c. ... $\frac{v}{b}$, atque per v
satisfacientis ... $v\sqrt{b}$
A; qua aeq ... $-b)-v^m\sqrt{v}$ atque
... que modo hinc
653. S ... Sumto autem
cuo moueat ... $=\frac{dy\sqrt{(v-b)}}{\sqrt{v}}$ atque
$=g(a+x)$,
do ergo fic
quae est ae
iectum liber
... $\frac{k^m dv\sqrt{b}}{\sqrt{(v-b)}-v^m\sqrt{v}}$ est
... ris quaesito satis-
... ominatorem gk^m
654. ... psa celeritas $\sqrt{v}$
ideo k vald
$=\frac{1}{gk^m\sqrt{(v-}}$ ... $(v-b)=\frac{c^m\sqrt{c}}{gk^m}$;
atque

atque ideo $ds=\frac{gk^m dx}{c^m}$ pro linea recta inclinata vt supra iam inuenimus (627).

Corollarium 3.

652. Quo autem corpus data celeritate, quae debita est altitudini b horizontaliter progrediatur, ex aequatione $\sqrt{(c-b)}=\frac{c^m\sqrt{c}}{gk^m}$ definiri debet altitudo c. Qua inuenta habebitur inclinatio rectae satisfacientis, et celeritas corporis initialis $\sqrt{c}$ in A; qua aequabiliter per rectam descendet.

Corollarium 4.

653. Si resistentia euanescat corpusque in vacuo moueatur fiet $k=\infty$ ideoque $x=\int\frac{dv}{g}$ seu $v=g(a+x)$, atque $dy=\frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(ga+gx-b)}}$. Integrando ergo fiet $y=\frac{2}{g}\sqrt{b(ga+gx-b)}-\frac{2}{g}\sqrt{b(ga-b)}$ quae est aequatio pro parabola, quam corpus proiectum libere describit.

Exemplum.

654. Si medium fuerit rarissimum, atque ideo k valde magnum, erit $\frac{1}{gk^m\sqrt{(v-b)}-v^m\sqrt{v}} = \frac{1}{gk^m\sqrt{(v-b)}}+\frac{v^m\sqrt{v}}{g^2k^{2m}(v-b)}$ q. pr. Hanc ob rem ha-

habebitur $y = \frac{2\sqrt{b(v-b)}}{g} + \int \frac{v^m dv \sqrt{bv}}{g^2 k^m (v-b)}$ et $x = \frac{v}{g} + \int \frac{v^m dv \sqrt{v}}{g^2 k^m \sqrt{(v-b)}}$. Ex hac posteriori aequatione est quam proxime $v = gx - \int \frac{g^{m-1} x^m dx \sqrt{gx}}{k^m \sqrt{(gx-b)}}$, qui valor in aequatione $dy = \frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(v-b)}}$ substitutus dat aequationem inter x et y pro curua quaesita.

PROPOSITIO 74.
Problema.

Tab. XIV. Fig. 2. 655. *Inuenire curuam AM super qua corpus descendens in medio quocunque resistente aequabiliter deorsum progrediatur existente potentia absoluta uniformi et deorsum directa.*

Solutio.

Posita abscissa $AP = x$, $AM = s$, sit celeritas qua corpus vniformiter descendere debet debita altitudini b. Potentia porro vniformis deorsum directa sit g, et altitudo debita celeritati $M = v$ atque resistentia $= \frac{v^m}{k^m}$, erit ergo $dv = g dx - \frac{v^m ds}{k^m}$. Debebit autem esse vt $Mm : MN = \sqrt{v} : \sqrt{b}$, vnde erit $v = \frac{b ds^2}{dx^2}$. Ex hac ergo aequatione erit $ds = \frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{b}}$, quo valore in aequatione substituto habebitur $dx = g dx - \frac{v^{m+\frac{1}{2}} dx}{k^m \sqrt{b}}$ seu $dx = \frac{k^m dv \sqrt{b}}{g k^m \sqrt{b} - v^m \sqrt{v}}$

Quam-

SVPER DATA E MOTV PVNCTI
Quamobrem erit ... et x = ... posteriori aequatione ... qui ... substitutus dat aequationem ... curua quaesita.
656. Ex his ... O 74. ... M super qua corpus ... resistente aequabiliter ... potentia absoluta uni-
657. Quia a... AM = s, sit celeritas ... descendere debet debita ... vniformis deorsum ... debita celeritati ... ergo dv = g dx − v^m ds/k^m ... MN = √v : √b, vnde ... ergo aequatione erit ... aequatione substituto habebitur ... seu dx = k^m dv √b/(g k^m √b − v^m √v)
Quam-
Tom. II.

Quamobrem erit $x = \int \frac{k^m dv \sqrt{b}}{g k^m \sqrt{b} - v^m \sqrt{v}}$; $s = \int \frac{k^m dv \sqrt{v}}{g k^m \sqrt{b} - v^m \sqrt{v}}$, atque applicata $PM = y = \int \frac{k^m dv \sqrt{(v-b)}}{g k^m \sqrt{b} - v^m \sqrt{v}}$. Ex quibus aequationibus constructio curuae quaesitae conficitur. Q. E. I.

Corollarium 1.

656. Ex his tribus aequationibus, si desideretur aequatio ex x, y et s tantum consistens, accipi potest ea, ex qua valor ipsius v commodissime poterit inueniri, isque deinceps in alterutra reliquarum substitui.

Corollarium 2.

657. Quia aequatio $dx = \frac{k^m dv \sqrt{b}}{g k^m \sqrt{b} - v^m \sqrt{v}}$ indeterminitas a se inuicem habet separatas, poterit solutio particularis obtineri ponendo $g k^m \sqrt{b} - v^m \sqrt{v} = 0$. Hinc igitur erit $v = g^{\frac{2}{2m+1}} k^{\frac{2m}{2m+1}} b^{\frac{1}{2m+1}}$ ideoque $ds = \frac{g^{\frac{1}{2m+1}} k^{\frac{m}{2m+1}} dx}{b^{\frac{m}{2m+1}}}$. Satisfacit ergo linea recta inclinata, si corpus data celeritate $\sqrt{v}$ super ea moueatur.

Scho-

Scholion 1.

658. Quod in praecedente et hoc problemate linea recta inclinata solutionem praebeat particularem, ex eo intelligi potest, quod in medio resistente recta inclinata inueniri possit, super qua corpus aequabiliter moueatur, vt supra (627) ostendimus. Hic autem ipse casus vtrique problemati satisfacit; si enim corpus super recta aequabili motu incedit, tam horizontaliter, quam verticaliter aequabiliter quoque promouetur; quin etiam secundum quamcunque plagam aequabiliter fertur.

Corollarium 3.

659. Pro vacuo fit $k=\infty$. Quamobrem erit $x=\frac{v}{g}$ seu $v=gx$ atque $ds=\frac{dx\sqrt{gx}}{\sqrt{b}}$ et $dy=\frac{dx\sqrt{(gx-b)}}{\sqrt{b}}$ quae aequatio integrata dat $y=\frac{2(gx-b)^{\frac{3}{2}}}{3g\sqrt{b}}$, et praebet parabolam cubicalem rectificabilem vt supra iam inuenimus.

Exemplum 1.

660. Ponamus resistentiam ipsis celeritatibus proportionalem erit $m=\frac{1}{2}$, ideoque $x=\int\frac{dv\sqrt{bk}}{g\sqrt{bk}-v}=\sqrt{bk}\,l\frac{g\sqrt{bk}}{g\sqrt{bk}-v}$, si initium abscissarum in eo puncto accipiatur, vbi v euanescit. Ex hac autem aequatione prodit $e^{\frac{x}{\sqrt{bk}}}=\frac{g\sqrt{bk}}{g\sqrt{bk}-v}$ seu $v=e^{\frac{-x}{\sqrt{bk}}}$ $(e^{\frac{x}{\sqrt{bk}}}$

$(e^{\frac{x}{\sqrt{bk}}}-1)g\sqrt{bk}=g\sqrt{bk}\,(1-e^{\frac{-x}{\sqrt{bk}}})$. Valore hoc ipsius v substituto habebitur $ds=\frac{dx\sqrt{g(1-e^{\frac{-x}{\sqrt{bk}}})\sqrt{bk}}}{\sqrt{b}}$ Vel cum sit $ds=\frac{dv\sqrt{kv}}{g\sqrt{bk}-v}$, ponatur $v=u^2$ erit $ds=\frac{2u^2du\sqrt{k}}{g\sqrt{bk}-uu}=\frac{2gkdu\sqrt{b}}{g\sqrt{bk}-uu}-2du\sqrt{k}$, quae integrata dat $s=\sqrt[4]{g^2bk^3}\,l\frac{\sqrt[4]{g^2bk}+\sqrt{v}}{\sqrt[4]{g^2bk}-\sqrt{v}}-2\sqrt{kv}$, in qua valor ipsius v ante inuentus substitui potest, quo prodeat aequatio inter x et s.

Exemplum 2.

661. Resistat nunc medium in duplicata celeritatum ratione, erit $m=1$; ideoque $dx=\frac{kdv\sqrt{b}}{gk\sqrt{b}-v\sqrt{v}}$ et $ds=\frac{kdv\sqrt{v}}{gk\sqrt{b}-v\sqrt{v}}$. Huius posterioris aequationis integrale est $s=\frac{2k}{3}\,l\frac{gk\sqrt{b}}{gk\sqrt{b}-v\sqrt{v}}$, ex qua oritur $e^{\frac{3s}{2k}}=\frac{gk\sqrt{b}}{gk\sqrt{b}-v\sqrt{v}}$; atque $v^{\frac{3}{2}}=gk(e^{\frac{3s}{2k}}-1)e^{\frac{-3s}{2k}}\sqrt{b}=gk(1-e^{\frac{-3s}{2k}})\sqrt{b}$. Quocirca erit $\sqrt{v}=\sqrt[3]{gk(1-e^{\frac{-3s}{2k}})\sqrt{b}}$; qui valor in aequatione $dx=\frac{ds\sqrt{b}}{\sqrt{v}}$ substitutus dat aequationem inter s et x pro curua quaesita.

Scholion 2.

662. Quemadmodum in his duobus problematibus curuas determinauimus super quibus corpus motum vel secundum horizontem vel deorsum aequabiliter feratur, ita simili modo proble-

 ma

ma resolui potest, si corpus secundum quamuis aliam plagam aequabiliter progredi debeat; ipsam autem quaestionem, quia nihil concinni ex solutione deduci potest, hic omisi; atque ob eandem causam problema isochronae paracentricae in medio resistente non attingo. Adiungam vero his, in quibus celeritatum quaedam lex proponitur, non parum curiosum problema, quod a nemine adhuc est tractatum, pro mediis resistentibus; quod pro vacuo propositum ne problema quidem est. Quaeritur scilicet curua super qua corpus ad datum punctum maxima celeritate pertingat; in vacuo enim corpus super quacunque curua motum in eodem loco semper eandem obtinet celeritatem.

PROPOSITIO 75.
Problema.

Tab. XIV. Fig. 3. 663. ***Inter omnes curuas puncta* A *et* C *iungentes determinare eam* AMC, *super qua corpus ex* A *ad* C *descendens maximam acquirat celeritatem existente resistentia in quacunque multiplicata rat. ne celeritatum, et potentia vniformi deorsum tendente.***

Solutio.

Quo corpus ad punctum C maxima cum celeritate perueniat, curuae quaesitae AMC duo quaeque elementa $Mm, m\mu$ ita posita esse debent, vt corpus ea percurrendo maximum accipiat celeritatis incrementum.

SVPER D... TV PVNCTI
leritatis in ... elementa ... tum, maio... leritatem. sitio eleme... ta haec cu... celeritatis ... tur, inter ... ad axem ... $\mu\pi$ sintque ... cantur quo... elementa n... licitans = ... sistentia in ... altitudo ce... erit increm... et i... tae dum c... $(v+g.MF$ ... elementa ... augmentum ... $(v+g.MF$ ... percurrend...
...undum quamuis ...di debeat; ipsam ...ncinni ex solu... atque ob eandem ...centricae in me... ...ungam vero his, ...ex proponitur, ...od a nemine ad... ...istentibus; quod ...ma quidem est. ...t corpus ad da... ...ertingat; in va... ...ne curua motum ...inet celeritatem. 75. ...cta A et C iun... ...er qua corpus ex ...uirat celeritatem ...itiplicata rat. ne ...eorsum tendente. maxima cum ce... ...tae AMC duo ...osita esse debent, ...num accipiat ce... leri-

Nam si corpus per alia elementa $Mn\mu$ maius acquireret celeritatis augmentum, maiorem quoque in C habiturum esset celeritatem. Per methodum igitur maximorum positio elementorum $Mm, m\mu$ inuenietur, si elementa haec cum proximis Mn, $n\mu$ comparentur et celeritatis augmenta, quae per vtraque generantur, inter se aequalia ponantur. Ducantur ad hoc ad axem verticalem AP *plicatae* MP, nmp et $\mu\pi$ sintque elementa axis Pp, $p\pi$ aequalia. Ducantur quoque verticales MF, mg, et in curuae elementa normales mf, ng. Iam sit potentia sollicitans $=g$, exponens resistentiae $=k$, ipsa resistentia in $2m$ multiplicata ratione celeritatum, et altitudo celeritati in M debita $=v$. His positis erit incrementum ipsius v per $Mm = g.\,MF - \frac{v^m Mm}{k^m}$ et incrementum altitudinis celeritati debitae dum corpus per $m\mu$ progreditur $= g.\,mG - \frac{(v + g.\,MF - \frac{v^m.\,Mm}{k^m})^m m\mu}{k^m}$. Dum ergo corpus elementa Mm et $m\mu$ conficit altitudo v accipit augmentum $= g\,(MF + mG) - \frac{v^m.\,Mm}{k^m} - \frac{(v + g.\,MF - \frac{v^m}{k^m} Mm)^m\, m\mu}{k^m}$. At elementa $Mn, n\mu$ percurrendo accipiet v augmentum $= g(MF + mG) - \frac{v^m.\,Mn}{}$

$\frac{v^m Mn}{k^m} - \frac{(v+g.MF-\frac{v^m}{k^m}.Mn)^m n\mu}{k^m}$. Quibus sibi aequalibus positis habebitur $o = v^m(Mn - Mm) + (v+g.MF-\frac{v^m}{k^m}.Mn)^m n\mu - (v+g.MF-\frac{v^m}{k^m}.Mm)^m m\mu$. Est vero $Mn - Mm = nf$ et $(v+g.MF-\frac{v^m}{k^m}Mn)^m = v^m + mgv^{m-1}MF - \frac{mv^{2m-1}}{k^m}Mn$ atque $(v+g.MF-\frac{v^m}{k^m}.Mm)^m = v^m + mgv^{m-1}.MF - \frac{mv^{2m-1}}{k^m}Mm$. Nunc vero his valoribus substituendis proueniet haec aequatio $v(nf-mg) - mg.MF.mg + \frac{mv^m}{k^m}(Mn.n\mu - Mm.m\mu) = o$. At est $Mn.n\mu - Mm.m\mu = m\mu.nf - Mm.mg$, atque ob triangula nfm, mFM et mgn, μGm similia est $nf = \frac{mF.mn}{Mm}$ atque $mg = \frac{\mu G.mn}{m\mu}$. His substitutis et per mn diuiso prodit $v(\frac{mF}{Mm} - \frac{\mu G}{m\mu}) - mg.\frac{MF.\mu G}{m\mu} + \frac{mv^m}{k^m}(\frac{m\mu.mF}{Mm} - \frac{Mm.\mu G}{m\mu}) = o$. Huius aequationis duo priora membra sunt differentialia primi gradus, tertium vero, quia differentiali secundi gradus aequipollet, reiici potest; fiet ergo $\frac{mg.MF.\mu G}{m\mu} + v(\frac{\mu G}{m\mu} - \frac{mF}{Mm}) = o$, siue $\frac{mg.MF.mF}{Mm} + vd.\frac{mF}{Mm} = o$. Ex qua aequatione determinatur positio elementorum Mm et $m\mu$.

SUP. MOTV PVNCTI
$m\mu$. PM: Quibus sibi ae- et M $^m(Mn - Mm) +$ quati $+g.MF-\frac{v^m}{k^m}.Mm)^m$ si lo et $(v+g.MF-$ $\frac{-vds}{mdy}$ $\frac{mv^{2m-1}}{k^m}Mn$ atque seu $+mgv^{m-1}.MF-$ et v $(1-m$ k^m aloribus substituen- $nf-mg)-mg.MF.$ $(m-1$ k $)=o$. At est Mn. g, atque ob trian- go vi n similia est $nf=$ quati bstitutis et per mn dabit inter $\frac{F.\mu G}{m\mu} + \frac{mv^m}{k^m}$ hoc $=pd$ uationis duo prio- $(1-p$ rimi gradus, ter- cundi gradus aequi Ex il $\frac{ng.MF.\mu G}{m\mu}+v(\frac{\mu G}{m\mu}-\frac{mF}{Mm})$ tus d . Ex qua aequa- per nentorum Mm et $m\mu$.

$m\mu$. Quo autem symbolis vtamur, sit $AP = x$, $PM = y$ et $AM = s$ erit $Pp = p\pi = dx$, $mF = dy$, et $Mm = ds$, prodibitque $\frac{mgdxdy}{ds} + vd.\frac{dy}{ds} = o$. Aequatio vero canonica est $dv = gdx - \frac{v^m ds}{k^m}$, in qua si loco gdx ex superiore aequatione substituatur $\frac{-vds}{mdy}d.\frac{dy}{ds}$ habebitur $dv + \frac{vds}{mdy}d.\frac{dy}{ds} + \frac{v^m ds}{k^m} = o$, seu $\frac{mdvdy}{ds} + vd.\frac{dy}{ds} + \frac{mv^m dy}{k^m} = o$. Sit $dy = pds$ et $v^{1-m} = u$, erit vt sequitur $pdu + \frac{(1-m)}{m}udp + \frac{(1-m)pds}{k^m} = o$, ex qua integrata prodit $u = \frac{(m-1)p^{\frac{m-1}{m}}}{k^m}\int p^{\frac{1-m}{m}}ds$. Ex hoc u obtinebitur ergo vicissim $v = u^{\frac{1}{1-m}}$, qui valor in superiori aequatione $mgpds\sqrt{(1-pp)} + vdp = o$ substitutus, dabit aequationem inter p et s, et consequenter inter y et s. Ad curuam autem construendam hoc modo computum institui expedit: Posito $dy = pds$ habentur hae duae aequationes $mgpds\sqrt{(1-pp)} + vdp = o$ et $dv = gds\sqrt{(1-pp)} - \frac{v^m ds}{k^m}$. Ex illa est $ds = \frac{-vdp}{mgp\sqrt{(1-p^2)}}$ qui in hac substitutus dat $mpdv + vdp = \frac{v^{m+1}dp}{gk^m\sqrt{(1-pp)}}$. Haec diuisa per $v^{m+1}p^2$ fit integrabilis eritque integrale $1 =$

$\frac{1}{v^m p} = C + \frac{\sqrt{(1-pp)}}{gk^m p}$ seu $v^m = \frac{gk^m}{ap+\sqrt{(1-pp)}}$ et $v = \frac{k\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{(ap+\sqrt{(1-pp)})}}$. Quocirca erit $mgds = \frac{-kdp\sqrt[m]{g}}{p(1-pp)^{\frac{1}{2}}\sqrt[m]{(ap+\sqrt{(1-pp)})}}$ et $mgdx = \frac{-kdp\sqrt[m]{g}}{p\sqrt[m]{(ap+\sqrt{(1-pp)})}}$ atque $mgdy = \frac{-kdp\sqrt[m]{g}}{(1-pp)^{\frac{1}{2}}\sqrt[m]{(ap+\sqrt{(1-pp)})}}$. Ex quibus aequationibus facile est curuam quaesitam construere. Q. E. I.

Corollarium 1.

664. Si radius osculi curuae in M versus axem directus vocetur r, erit d. $\frac{dy}{ds} = -\frac{dx}{r}$. Hocque valore substituto habetur $\frac{mgdy}{ds} = \frac{v}{r}$ seu $\frac{2mgdy}{ds} = \frac{2v}{r}$. Est vero $\frac{2v}{r}$ vis centrifuga corporis in hac curua moti, cuius directio est ab axe directa et $\frac{gdy}{ds}$ est vis normalis. Quare in curua quaesita vis centrifuga est contraria vi normali et se habet ad vim normalem vt $2m$ ad 1, id est, vt exponens potestatis celeritatis, cui resistentia est proportionalis ad vnitatem.

Corollarium 2.

665. Hae igitur omnes curuae parte concaua sunt deorsum directae. Quia enim vis normalis

SVPER MOTU PUNCTI
malis di in cande que deo
$\frac{gk^m}{ap+\sqrt{(1-pp)}}$ et v erit $mgds =$
666 ne celer centrifug Quamob proiecto scribit.
$v = \frac{-kdp\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{p(ap+\sqrt{(1-pp)})}}$ Ex qui- (1-pp)) am quaesitam con-
667. $-kdp$ $p(1-pp)^{\frac{1}{2}}$ separatae, nentur. quo casu satisfacit. est pro pro recta prietatem celeritatis
1. in M versus axem $-\frac{dx}{r}$. Hocque va- $\frac{v}{r}$ seu $\frac{2mgdy}{ds} = \frac{2v}{r}$. poris in hac curua directa et $\frac{gdy}{ds}$ est quaesita vis cen- et se habet ad d est, vt exponens entia est propor-
2. ruae parte conca- ia enim vis normalis
668. leritatum Tom. II.

malis directio deorsum respicit, et radius osculi in eandem plagam tendit, concauitas curuae quoque deorsum respicere debet.

Corollarium 3.

666. In medio resistente in simplici ratione celeritatum erit $2m = 1$. Hoc ergo casu vis centrifuga aequalis est et contraria vi normali. Quamobrem curua quaesito satisfaciens, erit ipsa proiectoria, quam corpus proiectum libere describit.

Corollarium 4.

667. Quia in aequatione $mgds = \frac{-kdp\sqrt[m]{g}}{p(1-pp)^{\frac{1}{2}}\sqrt[m]{(ap+\sqrt{(1-pp)})}}$ indeterminatae sunt separatae, tres solutiones particulares inde obtinentur. Primam dat aequatio $ap+\sqrt{(1-pp)}=0$, quo casu celeritas fit infinita, et quaeuis recta satisfacit. Secunda est $p=1$, seu $dy=ds$, quae est pro recta horizontali, et tertia est $p=0$, pro recta verticali; quae semper hanc habet proprietatem, vt corpus in ea descendens maxima celeritatis augmenta accipiat.

Exemplum 1.

668. Resistat medium in simplici ratione celeritatum erit $m = \frac{1}{2}$. Sumatur ex tribus inuentis aequa-

aequationibus ea, quae dy continet, erit $dy = \frac{-2gkdp}{(\alpha p+\sqrt{(1-pp)})^2\sqrt{(1-pp)}}$, cuius integralis est $y = C - \frac{2gkp}{\alpha p+\sqrt{(1-pp)}}$. Cum autem sit $p = \frac{dy}{ds}$ et $\sqrt{(1-pp)} = \frac{dx}{ds}$, erit $y = C - \frac{2gkdy}{\alpha dy+dx}$ seu neglecta constante C, quia curuam non immutat, erit $\alpha y dy + y dx + 2gkdy = 0$. Quae aequatio per y diuisa et denuo integrata dat $\alpha y + x + 2gkly = C$. Quae est aequatio pro curua logarithmicali ea ipsa, quam Libr. I. proiectoriam in hac resistentiae hypothesi inuenimus.

Exemplum 2.

669. Sit nunc resistentia quadratis celeritatum proportionalis erit $m = 1$. Sumatur aequatio ista $ds = \frac{-kdp}{p(1-pp)^{\frac{1}{2}}(\alpha p+\sqrt{(1-pp)})}$. Huius autem integralis est $s = kl\frac{\alpha p+\sqrt{(1-pp)}}{\mathfrak{E}p}$, siue $e^{\frac{s}{k}} = \frac{\alpha p+\sqrt{(1-pp)}}{\mathfrak{E}p} = \frac{\alpha dy+dx}{\mathfrak{E}dy}$. Hinc fit $\mathfrak{E}e^{\frac{s}{k}}dy - \alpha dy = dx$, atque $ds = dy\sqrt{(1+(\mathfrak{E}e^{\frac{s}{k}}-\alpha)^2)}$. Quae est aequatio pro curua quaesita, quae hanc habebit proprietatem, vt vis centrifuga corporis sit duplo maior quam vis normalis. Curua igitur perpetuo sursum premetur vi aequali vel ipsi vi normali vel dimidio vis centrifugae. In hac vero curua corpus ita mouebitur vt altitudo celeritati in M debita sit $= \frac{gk}{e^{\frac{s}{k}}\mathfrak{E}p} = \frac{gkds}{\mathfrak{E}e^{\frac{s}{k}}dy} = \frac{gkds}{dx+\alpha dy}$.

Scho-

SVPER DAT.
670. Cum peculiaris ratio normalem locu casus cuiusque re tur in vacuo q Omnes enim cu prietatem, vt bus aequales ge la potest defini sito satisfaciant.
671. Nota his curuis inuen aequalis nihilo. thodo non ita inter omnes de ctos is, in quo ritatem; cui q C transiens et iuncta satisfacit comparata, vt contiguorum pc ximum vel min ducat. Quamob nitur, super c minus celeritatis per alia quacun

MOTU PVNCTI
ntinet, erit $dy =$ egralis est $y = C -$ $p = \frac{dy}{ds}$ et $\sqrt{(1-pp)}$ neglecta constante C, erit $\alpha y dy + y dx +$ per y diuisa et de- $gkly = C$. Quae est icali ea ipsa, quam esistentiae hypothe-
2.
quadratis celerita- 1. Sumatur aequa- 1-pp)). Huius au- , siue $e^{\frac{s}{k}} =$ $\mathfrak{E}e^{\frac{s}{k}}dy - \alpha dy = dx$,). Quae est aequa- hanc habebit pro- corporis sit duplo Curua igitur perpe- ali vel ipsi vi nor- gae. In hac vero t altitudo celeritati $= \frac{gkds}{dx+\alpha dy}$.
Scho-

Scholion 1.

670. Cum in quauis resistentiae hypothesi peculiaris ratio inter vim centrifugam et vim normalem locum habeat; vacuum autem tanquam casus cuiusque resistentiae considerari queat: sequitur in vacuo quamvis curuam satisfacere debere. Omnes enim curuae in vacuo hanc habent proprietatem, vt super iis ex aequalibus altitudinibus aequales generentur celeritates; ideoque nulla potest definiri, quae potius quam reliquae quaesito satisfaciant.

Scholion 2.

671. Notatu dignum est, quod in omnibus his curuis inuentis nusquam corporis celeritas sit aequalis nihilo. Atque idcirco problema hac methodo non ita resolui potest, vt determinetur inter omnes descensus ex A ad C ex quiete factos is, in quo corpus maximam acquirit celeritatem; cui quaestioni sola recta verticalis per C transiens et cum horizontali per A ducta coniuncta satisfacit. Nostra autem solutio ita est comparata, vt duorum elementorum quorumque contiguorum positionem eam definiat, quae maximum vel minimum celeritatis augmentum producat. Quamobrem hac methodo ea curua inuenitur, super qua corpus motum vel maius vel minus celeritatis augmentum acquirit, quam super alia quacunque curua A et C iungente, si

cor-

corpus ex A eadem celeritate descensum inchoet. Ex inuentis autem colligi potest, hac ratione eam prodire curuam, super qua minimum celeritatis incrementum generetur, vel super qua corpus motu maxime vniformi feratur. Atque hoc sensu facile perspicitur, motum ex quiete incipere non posse. Quanquam enim certum est, si puncta A et C in linea verticali sint posita, super hac verticali motu in A ex quiete facto maximam in C generari celeritatem; tamen calculus non hanc dat solutionem, etiamsi praebeat lineam verticalem; sed celeritatem initialem in A facit debitam alt. $k\overset{m}{V}g$, quae celeritas tanta est, vt non amplius augmentum accipere queat. Hac igitur celeritate corpus aequabiliter ex A ad C descendet; hacque ratione nullum, hoc est minimum capit celeritatis incrementum. Problema ergo, vt solutioni consentaneum fuisset, ita proponi debuisset; inter omnes lineas puncta A et C iungentes eam determinare, super qua corpus motum minima accipiat celeritatis augmenta; atque simul celeritatem initialem in A huic quaesito accommodatam definire.

Scholion 3.

672. Secundum ordinem praescriptum sequi deberent nunc huiusmodi problemata, in quibus temporum quadam lege data curuae essent inuestigandae idoneae; sed cum temporum leges pleraeque

SUPER ... OTU PVNCTI
raeque ac ... escensum inchoet. quaestion ... hac ratione eam gotio qu ... um celeritatis in- ctabo, q ... qua corpus mo- ditio ad ... Atque hoc sensu uimus, r ... iete incipere non missis vt ... est, si puncta A vacuo sui ... , super hac ver- ... maximam in C ... culus non hanc ... lineam vertica- ... a A facit debi- ... ita est, vt non ... eat. Hac igitur ... A ad C descen- ... c est minimum ... Problema ergo, ... , ita proponi ... cta A et C iun- ... ua corpus mo- ... ugmenta; atque ... huic quaesito ac-
673. rum absolu est brachy ducit desce normali,
Quae pus in M males po altera M ds, ducti $=dx$ et ritati in atque rad directum, His positi
escriptum sequi ... ata, in quibus ... uae essent inue- ... orum leges ple- raeque

raeque ad celeritatum leges possint reduci, huiusmodi quaestiones non profero. Sed vnicam in hoc negotio quaestionem de curuis brachystochronis tractabo, quia ea etsi temporis praescripta est conditio ad celeritatum rationes, quas iam peruoluimus, reduci non potest. Qua in re iisdem praemissis vtar, quae supra circa brachystochronas in vacuo sunt tradita.

PROPOSITIO 76.
Theorema.

673. *In medio quocunque resistente et potentiarum absolutarum hypothesi quacunque ea curua* AMC *est brachystochrona seu breuissimum ab* A *ad* C *producit descensum; in qua vis centrifuga est aequalis vi normali, et in eandem plagam directa.* Tab. XIV. Fig. 4.

Demonstratio.

Quaecunque fuerint potentiae absolutae in corpus in M agentes, eae in duas inter se normales possunt resolui, quarum altera sit $ML = P$, altera $MN = Q$. Sumto curuae elemento $Mm = ds$, ductisque perpendiculis ml, mn, sit $Ml = mn = dx$ et $ml = Mn = dy$. Ponatur altitudo celeritati in M debita $= v$ et vis resistentiae $= R$, atque radius osculi in $M = r$, quem pono sursum directum, ita vt posito dx constante sit $r = \frac{ds^3}{dxddy}$ His positis erit $dv = Pdx + Qdy - Rds$, quia Pdx

$\frac{Pdx+Qdy}{ds}$ est vis tangentialis ex potentiis P et Q orta. At supra ex natura brachystochronismi si fuerit $dv = Pdx + Qdy + Rds$ inuenimus fore $\frac{2v}{r} = \frac{Pdy-Qdx}{ds}$ (364), quae formulae ab hac nostra tantum in signo literae R differunt, haecque in computum non venit. Denotat autem $\frac{2v}{r}$ vim centrifugam secundum normalem MO agentem atque $\frac{Pdy-Qdx}{ds}$ est vis normalis iuxta MO agens ex vtraque vi P et Q orta. Quare si fuerit vis centrifuga vi normali aequalis, et in eandem plagam directa, curua erit brachystochrona. Q.E.D.

Corollarium 1.

674. Si vis normalis, quae oritur ex resolutione potentiarum absolutarum corpus sollicitantium, vocetur N et vis tangentialis ex eadem resolutione orta ponatur T, erit $dv = (T-R)ds$ et $\frac{2v}{r} = N$, quae duae aequationes coniunctae dabunt curuam brachystochronam.

Corollarium 2.

675. Quaecunque igitur fuerit resistentia, erit semper $v = \frac{Nr}{2}$, vnde celeritas corporis super brachystochrona facile inuenitur. Erit enim vt vis grauitatis 1 ad vim normalem N ita dimidium radii osculi ad altitudinem celeritati in M debitam.

Scho-

SVP MOTU PUNCTI
potentiis P et Q
hystochronismi si
inuenimus fore $\frac{2v}{r}$
ac ab hac nostra
runt, haecque in
t autem $\frac{2v}{r}$ vim
MO agentem at-
ta MO agens ex
e si fuerit vis cen-
n eandem plagam
ona. Q.E.D.
habet enim qualis sistit, malis stoch bero coinc contr cum
1.
oritur ex reso-
corpus solici-
entialis ex eadem
it $dv = (T-R)ds$
ies coniunctae da-
6 dolem vbique ds sub uae b
2.
it resistentia, erit
orporis super bra-
Erit enim vt vis
N ita dimidium
eritati in M de-
6 quibus curuae tota, vel so sollicit
Scho-

Scholion.

676. Haec eadem proportio quoque locum habet in motu corporum proiectorum libero, est enim pariter pro motu libero vis centrifuga aequalis vi normali. Discrimen autem in hoc consistit, vt in motu libero vires centrifuga et normalis sint inter se oppositae; pro curuis brachystochronis autem conspirantes. Siue in motu libero directiones radii osculi r et vis normalis N coincidunt; in brachystochronis vero inter se sunt contrariae. Hanc ob rem hic sumsimus $r = \frac{ds^3}{dx\,ddy}$ cum in motu libero sit $r = \frac{-ds^3}{dx\,ddy}$.

Corollarium 3.

677. Cum ex formula brachystochronismi indolem continente prodeat $v = \frac{Nr}{2}$; si hic valor vbique loco v in altera aequatione $dv = (T-R)ds$ substituatur, habebitur aequatio naturam curuae brachystochronae exhibens.

Corollarium 4.

678. In quocunque ergo medio resistente et quibuscunque sollicitantibus corpus potentiis, eae curuae omnes erunt brachystochronae, in quibus tota, quam sustinent, pressio duplo maior est quam vel sola vis centrifuga vel sola ex potentiarum sollicitantium resolutione orta vis normalis.

PRO-

PROPOSITIO 77.

Problema.

Tab. XIV. Fig. 2.

679. *In medio vniformi quod refiſtit in ratione quacunque multiplicata celeritatum, et potentia abſoluta exiſtente vniformi et deorſum directa; determinare curuam brachyſtochronam* A M, *ſuper qua corpus deſcendens tempore breuiſſimo ex* A *ad* M *perueniat.*

Solutio.

Poſitis in axe verticali abſciſſa $AP = x$, eique reſpondente applicata $PM = y$, arcuque curuae quaſitae $AM = s$; ſit g potentia deorſum ſollicitans, et $\frac{v^m}{k^m}$ reſiſtentia in M, ſi quidem celeritas in M fuerit debita altitudini v. His poſitis erit vis normalis $= \frac{gdy}{ds}$; cui aequalis eſſe debet vis centrifuga, quae eſt $\frac{2v}{r} = \frac{2vdxddy}{ds^3}$ (676), ſumto dx pro conſtante. Facta ergo aequatione eſt $v = \frac{gds^2dy}{2dxddy}$. Aequatio vero canonica pro deſcenſu in hoc medio reſiſtente dat $dv = gdx - \frac{v^m ds}{k^m}$. Prior autem aequatio poſito $dsdds$ loco $dyddy$ propter dx conſtans abit in hanc $v = \frac{gdsdy^2}{2dxdds}$, ex qua fit $dv = \frac{gdy^2}{2dx} + \frac{gdsdyddy}{dxdds} - \frac{gdsdy^2d^3s}{2dxdds^2} = \frac{gdy^2}{2dx} + \frac{gds^2}{dx} - \frac{gdsdy^2d^3s}{2dxdds^2} = gdx - \frac{v^m ds}{k^m}$, quae aequatio reducta dat $\frac{gdsdy^2d^3s}{2dxdds^2} -$

$\frac{3gdy^2}{2dx}$

$\frac{3gdy^2}{2dx} = \frac{g^m ds^{m+1} dy^{2m}}{2^m k^m dx^m dds^m}$, ſeu $dsd^3s - 3dds^2 = \frac{g^{m-1} ds^{m-1} dy^{2m-2}}{2^{m-1} k^m dx^{m-1} dds^{m-2}}$; haecque aequatio exponit naturam curuae quaeſitae. Quae aequatio quo reducatur et ad conſtructionem praeparetur, pono $ds = pdx$, vt ſit $dy = dx\sqrt{(p^2 - 1)}$, eritque $dds = dpdx$ et $d^3s = dxddp$. His ſubſtitutis habebitur iſta aequatio $pddp - 3dp^2 = \frac{g^{m-1} p^{m+1} dx^m (pp-1)^{m-1}}{2^{m-1} k^m dp^{m-2}}$. Nunc ſit porro $dx = qdp$; erit $ddx = 0 = dqdp + qddp$ ſeu $ddp = \frac{-dpdq}{q}$, orieturque haec aequatio $-\frac{pdq}{q} - 3dp = \frac{g^{m-1} p^{m+1} q^m dp (p^2-1)^{m-1}}{2^{m-1} k^m}$ ſeu $\frac{-pdq - 3qdp}{q^{m+1}} = \frac{g^{m-1} p^{m+1} dp (p^2-1)^{m-1}}{2^{m-1} k^m}$. Multiplicetur haec aequatio quo integrabilis fiat per mp^{-3m-1} et habebitur $-mp^{-3m} q^{-m-1} dq - 3mp^{-3m-1} q^{-m} dp = \frac{mg^{m-1} p^{-2m} dp (p^2-1)^{m-1}}{2^{m-1} k^m}$, cuius integralis eſt $p^{-3m} q^{-m} = \frac{mg^{m-1}}{2^{m-1} k^m} \int \frac{(p^2-1)^{m-1} dp}{p^{2m}}$. Ponatur $\frac{mg^{m-1}}{2^{m-1} k^m} \int \frac{(p^2-1)^{m-1} dp}{p^{2m}} = P^{-m}$, erit P functio quaedam ipſius p, et proinde dabitur conceſſis ſaltem quadraturis. His igitur poſitis erit $p^3 q = P$, atque $q = \frac{P}{p^3}$. Quia vero eſt $dx = qdp$ erit $x = \int \frac{Pdp}{p^3}$

et

et $s=\int\frac{Pdp}{p^2}$ atque $y=\int\frac{Pdp\sqrt{(p^2-1)}}{p^2}$. Unde constructio curuae brachystochronae sequitur. Q. E. I.

Corollarium 1.

680. Sit A punctum in quo motus incipit atque celeritas est nulla; erit ibi $v=0$ seu $\frac{gdsdy^2}{2dxdds}=0$, vnde fit $dy=0$, quia ds euanescere non potest. In puncto A ergo curua habebit tangentem verticalem.

Corollarium 2.

681. Quia in ipso motus initio motus in medio resistente a motu in vacuo non discrepat, curuae AM initium A a cycloidis cuspide, quae est brachystochrona in vacuo non discrepabit. Ideoque in A non solum tangens erit verticalis, sed etiam radius osculi in eo loco erit infinite paruus.

Corollarium 3.

682. Quia in A est $dy=0$; atque est $dy=dx\sqrt{(p^2-1)}$, erit pro puncto A, $p=1$. Ex data ergo curuae constructione punctum A obtinebitur, si fiat $p=1$. Integralia ergo illa ita debebunt accipi vt x, s et y euanescant posito $p=1$.

Corollarium 4.

683. Quoniam est $v=\frac{gdsdy^2}{2dxdds}$, erit propter $ds=pdx$ et $dds=dpdx$; $v=\frac{gpdx(p^2-1)}{2dp}$, atque ob

SUPER MOTU PUNCTI
ob $dx=$ … Unde constru- patet v … sequitur. Q. E. I.
1. … quo motus incipit … ibi $v=0$ seu $\frac{gdsdy^2}{2dxdds}$ … ds euanescere non … curua habebit tan-
2. … us initio motus in … acuo non discrepat, … idis cuspide, quae … non discrepabit. … gens erit verticalis, … loco erit infinite
3. … 0; atque est $dy=$ … A, $p=1$. Ex da- … punctum A obtine- … ergo illa ita de- … escant posito $p=1$.
4. … $\frac{dy^2}{dds}$, erit propter … $=\frac{gpdx(p^2-1)}{2dp}$, atque ob

ob $dx=qdp$, erit $v=\frac{gpq(pp-1)}{2}=\frac{gP(pp-1)}{2p^2}$. Vnde patet v euanescere si fit $p=1$.

Corollarium 5.

684. Radius osculi in puncto quocunque M est $=\frac{ds^3}{dxddy}=\frac{ds^2dy}{dxdds}$. Quare ob $ds=pdx$ erit radius osculi $r=\frac{p^2dx\sqrt{(p^2-1)}}{dp}=p^2q\sqrt{(p^2-1)}=\frac{P\sqrt{(p^2-1)}}{p}$. In puncto ergo A vbi est $p=1$ erit radius osculi $r=0$.

Corollarium 6.

685. Sit B punctum brachystochronae, in quo tangens est horizontalis; erit ibi $dy=\infty$ ideoque $p=\infty$. Punctum igitur B inuenietur ponendo $p=\infty$. Erit ergo in hoc puncto $v=\frac{gP}{2}$ et radius osculi $r=P$.

Exemplum 1.

686. Ponamus resistentiam euanescentem ita vt motus fiat in vacuo, erit $k=\infty$, ideoque habebitur $dsd^3s-3dds^2=0$. Quae aequatio diuisa per $dsdds$ et integrata dat $ldds-3lds=lC$ seu $\frac{dds}{ds^3}=\frac{1}{adx}=\frac{dx}{adx^2}$. Haec aequatio denuo integrata dat $-\frac{1}{2ds^2}=\frac{x}{adx^2}+C$. Vel mutatis constantibus positoque $ds=pdx$; erit $-a=ppx+Cpp$, quae quia posito $p=1$, x debet euanescere, abit in hanc $x=\frac{a(pp-1)}{pp}$ seu $p=\frac{\sqrt a}{\sqrt{(a-x)}}$, ideoque $ds=\frac{dx\sqrt a}{\sqrt{(a-x)}}$, quae est aequatio pro cycloide vt constat.

Exemplum 2.

687. Resistat medium in duplicata ratione celeritatum, erit $m=1$; atque $\frac{1}{P}=\frac{1}{k}\int\frac{dp}{p^3}=C-\frac{1}{kp}$. Vnde fit $P=\frac{kp}{Ckp-1}=\frac{akp}{kp-a}$. Hanc ob rem erit $x=\int\frac{akdp}{p^2(kp-a)}$ et $s=\int\frac{akdp}{p(kp-a)}$. Fit ergo $s=kl\frac{kp-a}{(k-a)p}$ atque $e^{\frac{s}{k}}=\frac{kp-a}{(k-a)p}=\frac{kds-adx}{(k-a)ds}$ ob $ds=pdx$. Porro ergo habebitur $(k-a)e^{\frac{s}{k}}ds=kds-adx$, quae integrata dat $k(k-a)e^{\frac{s}{k}}=ks-ax+k(k-a)$. Vel eliminata quantitate exponentiali $e^{\frac{s}{k}}$ erit $ksds-axds-akds+akdx=0$. At si exponentialem $e^{\frac{s}{k}}$ per seriem exprimere velimus, erit $k(k-a)e^{\frac{s}{k}}-k(k-a)=k(k-a)(\frac{s}{k}+\frac{ss}{1.2k^2}+\frac{s^3}{1.2.3k^3}+\frac{s^4}{1.2.3.4k^4}+$ etc.). Quae series substituta dat $\frac{a(s-x)}{k-a}=\frac{s^2}{1.2.k}+\frac{s^3}{1.2.3k^2}+\frac{s^4}{1.2.3.4k^3}+$ etc.. In quouis puncto M est $v=\frac{gak(pp-1)}{2p(kp-a)}$. Pro puncto B vero in quo tangens est horizontalis erit $s=kl\frac{k}{k-a}$, atque $e^{\frac{s}{k}}$

Tab. XIV. Fig 5. $=\frac{k}{k-a}$ et idcirco $x=-k+\frac{kk}{a}l\frac{k}{k-a}$. Continuetur nunc curua vltra B in BNC, cuius natura vt inueniatur in axe BQ ponatur abscissa BQ$=t$, et arcus BN$=z$. His positis erit AP$=x=-k-t+\frac{k^2}{a}l\frac{k}{k-a}$ et AMN$=s=z+kl\frac{k}{k-a}$. Erit ergo $e^{\frac{s}{k}}=\frac{k}{k-a}e^{\frac{z}{k}}$; quibus valoribus in superiore aequatione substitutis prodibit: $k^2e^{\frac{z}{k}}=kz+k^2+at$, seu

at=

SVPER DA
$at=k^2(e^{\frac{z}{k}}-1$
pro ramo B
tiuus erit $at=$
quoque tangen
uenitur ponen
$a=ke^{\frac{z}{k}}-k$; se
AD$=\frac{a}{2}+\frac{a^2}{3k}+$
A esse altius
A et E curuar
sionis, ita v
diametri; id q
affirmatiuum q
688. Infra
chronam congr
resistentiae hyp
tochronos et
vt ad tautochr
ramo CND d
beat, cum e
descensus per
MOTV PVNCTI
2.
in duplicata ratione
Hanc ob rem erit
Porro er-
quae inte-
Vel eli-
erit
si exponentialem
In quouis puncto
cto B vero in quo
atque
Continuetur
cuius natura vt in-
abscissa BQ$=t$, et
Erit ergo
superiore aequatio-
$kz+k^2+at$, seu
at=

$at=k^2(e^{\frac{z}{k}}-1)-kz$. Atque per seriem $at=\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3k}+\frac{z^4}{1.2.3.4k^2}+$ etc. pro curua BNC; at pro ramo BMA in quo erit arcus BM, z negatiuus erit $at=k^2(e^{\frac{-z}{k}}-1)+kz=\frac{z^2}{1.2}-\frac{z^3}{1.2.3.k}+\frac{z^4}{1.2.3.4.k^2}-$ etc. Curua vero BNC in C habebit quoque tangentem verticalem, quod punctum inuenitur ponendo $dz=dt$. Fiet vero hoc posito $a=ke^{\frac{z}{k}}-k$; seu $z=kl\frac{a+k}{k}=$BNC. Atque $t=$CE $=k-\frac{kk}{a}l\frac{a+k}{k}=\frac{a}{2}-\frac{a^2}{3k}+\frac{a^3}{4k^2}-$ etc. cum contra sit AD$=\frac{a}{2}+\frac{a^2}{3k}+\frac{a^3}{4k^2}+$ etc. Ex quo apparet punctum A esse altius positum quam punctum C; atque in A et E curuam habere cuspides seu puncta reuersionis, ita vt tam AD quam CE sint curuae diametri; id quod ex hoc intelligitur, quod sit $y=\int\frac{Pdp\sqrt{(pp-1)}}{p^3}$, vbi $\sqrt{(p^2-1)}$ valorem habet tam affirmatiuum quam negatiuum.

Scholion 1.

688. Infra perspicietur hanc curuam brachystochronam congruere cum curua tautochrona in eadem resistentiae hypothesi. Haec vero inter motus tautochronos et brachystochronos interest differentia; vt ad tautochronismum obtinendum corpus in ramo CND descendere in altero ascendere debeat, cum e contrario pro brachystochronismo descensus per AMB fieri debeat. Interim tamen

haec vtriusque curuae conuenientia attentione digna videtur, cum et in vacuo eadem congruentia obferuetur.

Exemplum 3.

689. Refiftat medium in quadruplicata ratione celeritatum, ita vt fit $m = 2$. Habebitur ergo pro curua quaefita ifta aequatio: $dsd^2s - 3dds^2 = \frac{gds^2dy^2}{2k^2dx}$. Ad conftruendam vero curuam $\frac{1}{p^2} = \frac{g}{k^2}\int(\frac{dp}{p^2} - \frac{dp}{p^4})$; vnde fit $P = \frac{kp\sqrt{3np}}{\sqrt{g(p^4 - 3np^3 + n)}}$ atque $s = \int\frac{kdp\sqrt{3n}}{\sqrt{g(p^4 - 3np^3 + np)}}$; et $x = \int\frac{kdp\sqrt{3n}}{p\sqrt{g(p^4 - 3np^3 + np)}}$ ac $y = \int\frac{kdp\sqrt{3n}(pp-1)}{p\sqrt{g(p^4 - 3np^3 + np)}}$. Huius ergo curuae conftructio vti generalis habetur. Quia autem n numerum quemcunque denotat, fit $n = \frac{1}{2}$ erit $y = \int\frac{kdp\sqrt{3}}{p\sqrt{g(2p^2 - p)}} = \frac{2k\sqrt{3(2p-1)}}{\sqrt{gp}} - \frac{2k\sqrt{3}}{\sqrt{g}}$; quam conftantem ideo adiecimus, quo fiat $y = 0$ pofito $p = 1$. Atque pofito $p = \infty$ erit applicata $DB = \frac{2k(\sqrt{6} - \sqrt{3})}{\sqrt{g}}$. Fit autem $p = \frac{12k^2}{12k^2 - 4ky\sqrt{3g} - gy^2}$ atque $\sqrt{(p^2 - 1)} = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(96k^3y\sqrt{3g} - 24gk^2y^2 - 8gky^3\sqrt{3g} - g^2y^4)}}{12k^2 - 4ky\sqrt{3g} - gy^2}$. Ex quo oritur $x = \int\frac{12k^2dy - 4kydy\sqrt{3g} - gy^2dy}{\sqrt{(96k^3y\sqrt{3g} - 24gk^2y^2 - 8gky^3\sqrt{3g} - g^2y^4)}} = \int\frac{12k^2dy - 4kydy\sqrt{3g} - gy^2dy}{\sqrt{(9y^2 + 4ky\sqrt{3g})(24k^2 - 4ky\sqrt{3g} - gy^2)}}$, quae eft aequatio inter coordinatas x et y pro curua quaefita.

Scholion 2.

690. In medio, quod in fimplici celeritatum ratione refiftit, brachyftochronam fimplicius determinare non licet, quam ftatim ex vniuerfali conftructione confequitur. Quamobrem hunc refiftentiae cafum exemplo non fumus profecuti. Quod autem ad reliquas huc pertinentes propofitiones attinet, in quibus curua quaeritur, fuper qua corpus defcendens citiffime ad datam lineam fiue rectam fiue curuam perueniat; ea fimili modo pro refiftente medio foluuntur, quo pro vacuo. Cum fcilicet ex eodem puncto A innumerabiles egrediantur curuae brachyftochronae; ex iis ea eft eligenda, quae datae lineae fiue rectae fiue curuae ad angulos rectos occurrat; fuper hac enim corpus ad iftam lineam breuiffimo tempore peruenire capite praec. eft demonftratum. Simili ratione curua, quae omnes brachyftochronas ad angulos rectos traiicit, ab omnibus arcus abfcindet ifochronos, feu quos corpus defcendens aequalibus temporibus abfoluit. Haecque omnia eodem fe habent modo, quaecunque fuerit refiftentia, et quaecunque potentiae abfolutae. Problema autem brachyftochronarum generaliffime conceptum euoluemus.

PROPOSITIO 78.

Problema.

691. *In medio refiftente quocunque, et potentiis follicitantibus quibuscunque, inuenire curuam brachyftochronam* AM, *fuper qua corpus defcendens ex* A *ad* M *citiffime perueniat.* Tab. XIV, Fig. 6.

So-

Solutio.

Sit A motus initium; per quod ducatur recta quaecunque AP pro axe habenda, in qua sumatur abscissa $AP = x$; cui respondeat applicata $PM = y$ et arcus $AM = s$. Sit porro corporis in M celeritas debita altitudini v; et resistentia vtcunque a celeritate pendens $= R$. Quaecunque nunc corpus sollicitent potentiae absolutae, earum loco duae potentiae substitui possunt in datis directionibus ML et MN, quarum illa axi AP sit parallela, haec vero ad illum normalis. Vis autem corpus secundum ML sollicitans sit $= P$ et vis secundum $MN = Q$. Ex his viribus oritur $dv = Pdx + Qdy - Rds$. Atque natura brachystochronismi dat $\frac{2v}{r} = \frac{2vdxddy}{ds^3} = \frac{Pdy - Qdx}{ds}$ (673.) denotante r radium osculi curuae in M versus superiora directum; pro quo ergo sumto dx constante ponimus $\frac{+ds^3}{dxddy}$, cum alias deberet esse $r = \frac{-ds^3}{dxddy}$. Ex his ergo duabus aequationibus $dv = Pdx + Qdy - Rds$ et $\frac{2vdxddy}{ds^2} = Pdy - Qdx$; si eliminetur v, habebitur aequatio pro curua brachystochrona quaesita; est nempe $v = \frac{Pdyds^2 - Qdxds^2}{2dxddy}$: cuius differentiale loco dv, atque ipsum v in resistentia R substitutum dabit aequationem pro curua quaesita. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

692. Aequatio pro curua, si dicto modo v eliminetur fit differentialis tertii gradus. Quare si triplex integratio adhibeatur, tres quoque constantes adiici poterunt, quibus effici potest vt euanescente x simul quoque y et s et v euanescant, atque praeterea curua per datum punctum M transeat.

Corollarium 2.

693. Quia igitur semper curua brachystochrona potest exhiberi, quae initium habeat in A et per datum punctum transeat; infinitae curuae brachystochronae ex puncto A educi possunt.

Corollarium 3.

694. Inuenta aequatione pro curua brachystochrona AM, innotescet simul corporis super ea descendentis celeritas in singulis punctis; erit namque $v = \frac{Pdyds^2 - Qdxds^2}{2dxddy}$.

Corollarium 4.

695. Data celeritate determinari ex ea poterit tempus, quo corpus arcum AM absoluit: erit scilicet tempus per $AM = \int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \int \frac{\sqrt{2dxddy}}{\sqrt{(Pdy - Qdx)}}$; quod propter aequationem inter x et y iam inuentam poterit saltem per quadraturas exhiberi.

Corollarium 5.

696. Si igitur curua esset inuenienda, quae omnes brachystochronas ex A eductas ad angu-

 los

los rectos traiicere deberet; tum eius lineae constructio haberetur, si ab omnibus abscinderetur $\int \frac{\sqrt{2dxddy}}{\sqrt{(Pdy-Qdx)}}$ eiusdem magnitudinis. Hac enim ratione ab istis curuis infinitis arcus isochroni abscinduntur, qui, quoniam omnes curuae sunt brachystochronae, terminabuntur ad traiectoriam orthogonalem.

Exemplum.

697. Sit resistentia quadratis celeritatum proportionalis; atque exponens resistentiae vtcunque variabilis q; erit $R = \frac{v}{q}$. Cum ergo sit $dv = Pdx + Qdy - \frac{vds}{q}$, erit integrando $e^{\int \frac{ds}{q}} v = \int e^{\int \frac{ds}{q}} (Pdx + Qdy)$. Cum autem sit $v = \frac{Pdyds^2 - Qdxds^2}{2dxddy}$ erit $2dxddy \int e^{\int \frac{ds}{q}} (Pdx + Qdy) = e^{\int \frac{ds}{q}} ds^2 (Pdy + Qdx)$, in qua aequatione non amplius inest v. Interim tamen haec aequatio fit differentialis tertii gradus, si differentiatione signa integralia tollantur. Indeterminati praeterea ipsarum P, Q et q valores in causa sunt, quo minus aequatio ad constructionem praeparari queat.

Scholion.

698. Quae hic ex duabus potentiis P et Q circa curuas brachystochronas sunt deducta, latissime patent; quia, quotcunque potentiae corpus sollicitauerint, eae omnes in huiusmodi duas possunt

SVPE MOTU PUNCTI
sunt r… i eius lineae con-
dem p… ius abscinderetur
quoque … Hac enim ra-
nae pr… us isochroni ab-
thesi, … curuae sunt bra-
constru… traiectoriam or-
persequ
tatum
sequent
tur, qu
neant … celeritatum pro-
lentiae vtcunque
rgo sit $dv = Pdx$
$v = \int e^{\int \frac{ds}{q}} (Pdx +$
69 … $\frac{-Qdxds^2}{ddy}$ erit $2dx$
dio vni… $+ Qdx$), in qua
resistit, … Interim tamen
quae a … ii gradus, si dif-
sustineat … antur, Indeter-
et q valores in
i constructionem
Po
tati in
pus de
resisten
otentiis P et Q
t deducta, latis-
per ele … otentiae corpus
Ponamu … ismodi duas pos-
sunt

sunt resolui; si modo omnium directiones in eodem plano fuerint positae. Quamobrem in hac quoque propositione continentur brachystochronae pro quacunque virium centripetarum hypothesi, quas autem, quia neque concinnae, neque construibiles aequationes proueniunt, vlterius non persequimur. Missis igitur his, in quibus celeritatum quaedam lex praescribitur, progredimur ad sequentes quaestiones, in quibus curuae requiruntur, quae a corpore super iis moto datam sustineant pressionem.

PROPOSITIO 79.
Problema.

699. *In hypothesi grauitatis vniformis, et medio vniformi, quod in ratione quacunque celeritatum resistit, determinare curuam aequabilis pressionis* AM, *quae a corpore super ea descendente, vbique eandem sustineat pressionem.* Tab. XV. Fig. 1.

Solutio.

Positis $AP = x$; $PM = y$; $AM = s$, et celeritati in M altitudine debita $= v$; sit potentia corpus deorsum secundum ML trahens $= g$ et vis resistentiae in $M = \frac{v^m}{k^m}$. Erit ergo dum corpus per elementum Mm progreditur $dv = gdx - \frac{v^m ds}{k^m}$. Ponamus curuam deorsum esse conuexam, ita vt

MR sit radii osculi directio, atque ipse radius osculi $MR = \frac{ds^3}{dxddy}$ posito dx constante. Vis ergo centrifugae directio erit in normali MN; eiusque quantitas est $= \frac{2vdxddy}{ds^3}$. Secundum eandem vero directionem curua premitur a vi normali ex resolutione potentiae $ML = g$ orta, quae est $= \frac{gdy}{ds}$. Tota ergo vis qua curua secundum MN premitur est $= \frac{gdy}{ds} + \frac{2vdxddy}{ds^3}$; quae cum debeat esse constans ponatur ea aequalis αg, habebiturque $\alpha g ds^3 = gdy ds^2 + 2vdxddy$, atque hinc $v = \frac{\alpha g ds^3 - gdyds^2}{2dxddy}$. Sit $ds = pdx$, atque $dy = dx\sqrt{(p^2-1)}$; erit $ddy = \frac{pdpdx}{\sqrt{(p^2-1)}}$. His substitutis erit $v = \frac{(\alpha g p^3 dx - gp^2 dx\sqrt{(p^2-1)})\sqrt{(pp-1)}}{2pdp} = \frac{\alpha g p^2 dx\sqrt{(p^2-1)} - gpdx(p^2-1)}{2dp}$. Sit porro $dx = 2qdp$ erit $v = gpq(\alpha p\sqrt{(p^2-1)} - p^2 + 1))$ vel $v = Pq$, posito $gp(\alpha p\sqrt{(p^2-1)} - p^2 + 1) = P$. Erit ergo $dv = Pdq + qdP$ et $v^m = P^m q^m$. Quibus valoribus in aequatione $dv = gdx - \frac{v^m ds}{k^m}$ substitutis prodibit $Pdq + qdP = gdx - \frac{P^m q^m ds}{k^m}$. Est vero $dx = 2qdp$ et $ds = pdx = 2pdqdp$. Quamobrem proueniet ista aequatio: $Pdq + qdP = 2gqdp - \frac{2P^m q^{m+1} pdp}{k^m}$, quae duas tantum continet variabilem p et q, quia P per p datur. Ad hanc aequationem construendam ponatur $q = \frac{1}{Pu^{\frac{1}{m}}}$; quo facto obtinebitur ista aequatio $du + \frac{2mgudp}{P} = \frac{2mp}{}$

SVPER . MOTU PUNCTI

$\frac{2mpdp}{k^m P}$; atque ipse radius stante. Vis ergo mali MN; eius- in hanc u ecundum eandem r a vi normali ex go inueni orta, quae est = lum MN premitur $\frac{1}{Pu^{\frac{1}{m}}}$ atque esse constans po- Cum autem que $\alpha g ds^3 = gdy$ $= \frac{dp}{p} + \frac{}{\alpha\sqrt{}}$ $\frac{\alpha g ds^3 - gdyds^2}{2dxddy}$. Sit $l(p + \sqrt{(}$ 1); erit $ddy =$ $p^{2m}(p-$ porro $dx = 2qdp$ 1)) vel $v = Pq$, Est vero = P. Erit ergo Quibus valori- Quocirca substitutis pro- $-\frac{\int p^{2m}(p}{gk^m p^{2m}}$ Est vero dx p. Quamobrem Cum igitur $dP = 2gqdp -$ curuae qu m continet varia- ur. Ad hanc ae- 700. $q = \frac{1}{Pu^{\frac{1}{m}}}$; quo prietatem $u + \frac{2mgudp}{P} = 2mp$

$\frac{2mpdp}{k^m P}$; quae ducta in $e^{2mg\int\frac{dp}{P}}$ et integrata abit in hanc $u = \frac{2me^{-2mg\int\frac{dp}{P}}}{k^m}\int\frac{e^{2mg\int\frac{dp}{P}}pdp}{P}$. Hinc ergo inuenitur u per p, atque u inuento erit $q = \frac{1}{Pu^{\frac{1}{m}}}$ atque $x = \int\frac{2dp}{Pu^{\frac{1}{m}}}$ et $s = \int\frac{2pdp}{Pu^{\frac{1}{m}}}$ et $y = \int\frac{2dp\sqrt{(p^2-1)}}{Pu^{\frac{1}{m}}}$. Cum autem sit $P = gp(\alpha p\sqrt{(p^2-1)} - p^2 + 1)$ erit $\frac{gdp}{P} = \frac{dp}{p} + \frac{dp}{\alpha\sqrt{(p^2-1)}} + \frac{(1-\alpha^2)dp}{\alpha^2 p - \alpha\sqrt{(p^2-1)}}$ atque $\int\frac{gdp}{P} = lp + \frac{1}{\alpha} l(p + \sqrt{(p^2-1)}) - \frac{(\alpha+1)}{2\alpha} l\frac{\alpha p - \sqrt{(p^2-1)}}{p - \sqrt{(p^2-1)}}$ et $e^{2mg\int\frac{dp}{P}} = p^{2m}(p - \sqrt{(p^2-1)})^{\frac{m(\alpha-1)}{\alpha}}(\alpha p - \sqrt{(p^2-1)})^{\frac{-m(\alpha+1)}{\alpha}}$.

Est vero $\int\frac{e^{2mg\int\frac{dp}{P}}pdp}{P} = \frac{e^{2mg\int\frac{dp}{P}}p}{2mg} - \frac{1}{2mg}\int e^{2mg\int\frac{dp}{P}}dp$.

Quocirca erit $u = \frac{p}{gk^m} - \frac{e^{-2mg\int\frac{dp}{P}}}{gk^m}\int e^{2mg\int\frac{dp}{P}}dp = \frac{p}{gk^m}$

$$-\frac{\int p^{2m}(p-\sqrt{(p^2-1)})^{\frac{m(\alpha-1)}{\alpha}}(\alpha p-\sqrt{(p^2-1)})^{\frac{-m(\alpha+1)}{\alpha}}dp}{gk^m p^{2m}(p-\sqrt{(p^2-1)})^{\frac{m(\alpha-1)}{\alpha}}(\alpha p-\sqrt{(p^2-1)})^{\frac{-m(\alpha+1)}{\alpha}}}$$

Cum igitur hoc modo ex p inueniri possit u; curuae quaesitae constructio hinc perficietur. Q.E.I.

Corollarium I.

700. Curua inuenta ergo hanc habebit proprietatem, vt in quouis puncto M prematur versus

fus MN vi conftanti, quae eft ad vim grauitatis ML, g vt α ad 1.

Corollarium 2.

701. Si pro α fumatur numerus negatiuus, curua vbique fecundum MR directionem priori oppofitam aequabiliter premetur. Hoc ergo cafu curua debet effe concaua deorfum, quia vis centrifuga contraria atque maior effe debet quam vis normalis, cuius directio femper in MN eft fita.

Corollarium 3.

702. Si $\alpha = 0$; tum curua prodibit, quae nullam omnino preffionem a corpore fuftinet: Quae ergo curua eft ea ipfa, quam corpus proiectum libere motum defcribit.

Corollarium 4.

703. Si $\alpha = 1$ feu tota preffio $= g$, tum curua erit conuexa deorfum vbique. Nam quia vis normalis fola vbique eft minor quam g nifi cafu quo $ds = dy$; vis centrifuga cum ea confpirare debet, ideoque radius ofculi in plagam ipfi MN oppofitam cadere.

Corollarium 5.

704. Si ponatur $k^m e^{\frac{2mg\int dp}{P}} u = 2mz$, erit $dz = e^{2mg}$

SUPER DATA

$\dfrac{e^{\frac{2mg\int dp}{P}} p\,dp}{P}$. Par

aequatione indete
paratae, habebitu
fit $gp(\alpha p \surd\ p^2-1$
$-1)$ fiue $\alpha ds = d$
facit ergo recta
ftituens, cuius fin
to. Hoc enim c
vis normalis fit

705. Sit $\alpha =$
vbique vi $= g$ pre
$\frac{gdp}{P}$ fimplicior eu
$(p - \surd(p^2-1))^{-2m}$.
Hanc ob rem erit u.
Quae aequatio
integrationem ad
$(p^2-1) = \frac{r+1}{2}$;
$-\frac{1}{4gk^m(r+1)^{2m}}\int$
pofitione $r = 2p$
$p + \surd(p^2-1)$. V
celeritatibus prop

MOTU PVNCTI

ad vim grauitatis

2.

umerus negatiuus,
directionem priori
ur. Hoc ergo ca-
leorfum, quia vis
or effe debet quam
emper in MN eft

3.

a prodibit, quae
corpore fuftinet:
quam corpus pro-

4.

reffio $= g$, tum
oique. Nam quia
ninor quam g nifi
a cum ea confpi-
uli in plagam ipfi

5.

$u = 2mz$, erit $dz = e^{2mg}$

$\dfrac{e^{\frac{2mg\int dp}{P}} p\,dp}{P}$. Particularis ergo folutio, quia in hac aequatione indeterminatae funt a fe inuicem feparatae, habebitur fi ponatur $P = 0$. Hinc autem fit $gp(\alpha p \surd\ p^2-1) - p^2 + 1) = 0$, feu $\alpha p = \surd(p^2 - 1)$ fiue $\alpha ds = dy$. Vnde prodit $\alpha s = y$. Satisfacit ergo recta angulum cum verticali AP conftituens, cuius finus eft α fumto 1 pro finu toto. Hoc enim cafu vis centrifuga euanefcit, et vis normalis fit $= \alpha g$.

Exemplum

705. Sit $\alpha = 1$, feu quaeratur curua, quae vbique vi $= g$ prematur; quo cafu integratio ipfius $\frac{gdp}{P}$ fimplicior euadit: erit enim $e^{\frac{2mg\int dp}{P}} = p^{2m}(p - \surd(p^2-1))^{-2m} = (\frac{p}{p-\surd(p^2-1)})^{2m} = (p^2 + p\surd(p^2-1))^{2m}$. Hanc ob rem erit $u = \frac{p}{gk^m} - \frac{\int (p^2 + p\surd(p^2-1))^{2m} dp}{gk^m (p^2 + p\surd(p^2-1))^{2m}}$. Quae aequatio quoties $2m$ eft numerus integer integrationem admittit. Pofito enim $p^2 + p\surd(p^2-1) = \frac{r+1}{2}$; erit $p = \frac{r+1}{2\surd r}$ atque $u = \frac{r+1}{2gk^m\surd r} - \frac{1}{4gk^m(r+1)^{2m}}\int \frac{(r-1)(r+1)^{2m}dr}{r\surd r}$. Eft autem hac pofitione $r = 2p^2 - 1 + 2p\surd(p^2-1)$, feu $\surd r = p + \surd(p^2-1)$. Vt fi fuerit $m = \frac{1}{2}$ feu refiftentia celeritatibus proportionalis erit $u = \frac{r+1}{2g\surd kr} - \frac{1}{4g(r+1)\surd k}\int \frac{(r^2-1)dr}{r\surd r}$

$\int \frac{(r^2-1)dr}{r\sqrt{r}} = \frac{1}{2g\sqrt{k}}\left(\frac{r+1}{\sqrt{r}} - \frac{r^2+6\sqrt{r}-3}{3(r+1)\sqrt{r}}\right) = \frac{2rr+6r+8\sqrt{r}}{6g(r+1)\sqrt{kr}}$ seu mutata constante $\mathfrak{C}$ est $u = \frac{r\sqrt{r}+3\sqrt{r}+2\mathfrak{C}}{3g(r+1)\sqrt{k}}$. Posito autem loco r eius valore erit $u = \frac{p^2+1+p\sqrt{(p^2-1)}}{3gp\sqrt{k}} + \frac{\mathfrak{C}}{3g(p^2+p\sqrt{(p^2-1)})\sqrt{k}}$. Sit $\mathfrak{C}=0$; erit $u^{\frac{1}{m}} = u^2 = \frac{(p^2+1+p\sqrt{(p^2-1)})^2}{9g^2kp^2}$, et propter $P = gp(p-\sqrt{(p^2-1)})\sqrt{(p^2-1)})$, erit $Pu^{\frac{1}{m}} = \frac{(p-\sqrt{(p^2-1)})(p^2+1+p\sqrt{(p^2-1)})^2\sqrt{(p^2-1)}}{9gkp}$ atque $x = \frac{2gk}{3p^2-1-3p\sqrt{(p^2-1)}} - 2gkl(3p^2-1-3p\sqrt{(p^2-1)})$.

Scholion.

706. Similis integratio formulae, cui u est aequalis, etiam succedit si $\alpha=-1$, quo casu prodit, concaua deorsum in qua vis centrifuga contraria est et maior quam vis normalis, quippe excessus est $=g$. Eadem vero ipsa prodit aequatio, quae pro casu $\alpha=1$, nisi quod signum ipsius $\sqrt{(p^2-1)}$ debet immutari. Quod ad reliquas quaestiones huc pertinentes attinet, in quibus aliae pressionum leges proponuntur; eae vel ad nimis prolixos calculos deducunt; vel iam sunt pertractatae. Vidimus enim curuas, in quibus pressio totalis sit duplo maior, quam vel sola vis centrifuga vel sola normalis, esse brachystochronas, atque curuas in quibus alia obtinet ratio, supra quoque iam pertractauimus, cum curuas inuestigaremus, super quibus motus quam minime acceleraretur. Sequitur ergo, vt ad curuas inueniendas

das progrediamur, super quibus plures diuersi descensus vel ascensus datam inter se teneant leges, quae quaestiones plurimum difficultatis in se habent. Necesse enim est ad huiusmodi problemata soluenda, vt celeritas corporis in singulis locis possit exprimi per quantitates, quibus curuae natura determinatur. Quod autem cum non in quauis resistentiae hypothesi possit perfici, vti supra notauimus; tales quaestiones tantum pro specialibus resistentiae hypothesibus poterunt proponi. Praecipue ergo ista tractatio ad resistentiam quadratis celeritatum proportionalem est accommodanda; quia hoc casu aequatio canonica, qua celeritas determinatur, separationem variabilium admittit, atque ipsa celeritas potest exhiberi. Tum etiam considerari potest resistentia, quae biquadratis celeritatum est proportionalis; cum pro hac hypothesi celeritas quodammodo cognoscatur. Denique quaecunque fuerit resistentiae lex, si modo resistentia est valde parua, huiusmodi quaestiones solutu faciliores euadent. In his vero problematis vel ratio celeritatum, quae in diuersis descensibus super eadem curua acquiruntur, inuestigatur; vel temporum, quibus diuersi descensus aut ascensus absoluuntur, ratio. Atque in vtroque genere, ex data vel temporum vel celeritatum variis descensibus acquisitarum ratione ipsae curuae sunt inueniendae.

PRO-

PROPOSITIO 80.
Problema.

Tab. XV. Fig. 2. 707. *In medio vniformi, quod resistit in duplicata ratione celeritatum, atque potentia absoluta deorsum tendente; comparare inter se celeritates in puncto A, quae in diuersis descensibus corporis super curua MA acquiruntur.*

Solutio.

Sit celeritas in A quam vno descensu acquisiuit debita altitudini b, et celeritas in M debita altitudini v. Ponantur $AP = x$, $AM = s$, potentia sollicitans in M quae sit vtcunque variabilis $= P$; atque exponens resistentiae $= k$. His positis erit $dv = -Pdx + \frac{vds}{k}$, quae aequatio integrata dat $v = e^{\frac{s}{k}}(b - \int e^{\frac{-s}{k}} Pdx)$ integrali $\int e^{\frac{-s}{k}} Pdx$ ita accepto vt euanescat posito $x = o$. Sit nunc M initium descensus vbi est $v = o$, inuenietur hoc punctum ex aequatione $b = \int e^{\frac{-s}{k}} Pdx$. Iam ponatur alius descensus fieri ex puncto proximo m, atque celeritas in A acquisita sit debita altitud. $b + db$. Erit ergo $b + db = \int e^{\frac{-s}{k}} Pdx =$ summae omnium $e^{\frac{-s}{k}} Pdx$ ab A vsque ad m; in aequatione vero priore $\int e^{\frac{-s}{k}} Pdx$ significat summam omnium $e^{\frac{-s}{k}} Pdx$ ab A vsque ad M tantum. Illa ergo summa superat hanc summam vltimo elemento $e^{\frac{-s}{k}}$ Pdx

SVPER ... OTU PVNCTI.
Pdx exi ... O.
$= e^{\frac{-s}{k}} P$ ... resistit in dupli-
ter arcu ... ntia absoluta de-
leritatem ... celeritates in pun-
... corporis super
708
altitudo ... descensu acqui-
Pdx. S ... as in M debita
quam v ... AM = s, poten-
aequatio ... nque variabilis
... = k. His positis
... io integrata dat
709 ... Pdx ita acce-
fuerit qu ... it nunc M ini-
celeritat ... uietur hoc pun-
quatio p ... Iam ponatur
tisfaciens ... ximo m, atque
... altitud. b + db.
710
difforme ... mmae omnium
loco aec ... equatione vero
db = e ... omnium $e^{\frac{-s}{k}}$
... Illa ergo sum-
711.(... elemento $e^{\frac{-s}{k}}$
2, 7182 ... Pdx

Pdx existente $AM = s$ et $Pp = dx$. Erit ergo $db = e^{\frac{-s}{k}} Pdx$. Ex qua aequatione datur relatio inter arcum MA descensu percursum et inter celeritatem in puncto infimo A acquisitam. Q.E.I.

Corollarium 1.

708. Dato ergo arcu descensus $AM = s$; erit altitudo celeritati in A acquisitae debita, $b = \int e^{\frac{-s}{k}} Pdx$. Seu si punctum M et celeritas in A tanquam variabiles quantitates considerantur, erit aequatio inter eas $db = e^{\frac{-s}{k}} Pdx$.

Corollarium 2.

709. Ex hac ergo aequatione, si proposita fuerit quaecunque ratio inter arcus descensus et celeritates in puncto A acquisitas; inuenietur aequatio pro curua AM propositae conditioni satisfaciens.

Corollarium 3.

710. Si medium non fuerit vniforme sed difforme vtcunque, existente eius exponente $= q$; loco aequationis inuentae prodibit ista aequatio $db = e^{-\int \frac{ds}{q}} Pdx$, cuius similis est vsus.

Corollarium 4.

711. Quia valor ipsius e est vnitate maior, quippe $2,718281828 4$, erit $e^{-\int \frac{ds}{q}}$ seu $e^{\frac{-s}{k}}$ vnitate minor; et

et hanc ob rem $db < Pdx$. In vacuo vero esset $db = Pdx$.

Scholion 1.

712. Simili modo res se habet in ascensu, quando corpus celeritate altitudini b debita ex A per arcum $AM = s$ ascendit. Tum enim erit $db = e^{\frac{s}{k}} Pdx$ vel in medio difformi $db = e^{\frac{\int ds}{q}} Pdx$. Quae formulae ex illis descensui inseruientibus inuenientur ponendo $-s$ loco $+s$; qua substitutione semper descensus in ascensum transmutatur. Hinc apparet quemadmodum pro descensu semper erat $db < Pdx$, ita fore pro ascensu semper $db > Pdx$, quia $e^{\frac{s}{k}}$ seu $e^{\frac{\int ds}{q}}$ est vnitate maior.

Corollarium 5.

713. In medio ergo resistente neque pro ascensu neque pro descensu esse potest $b = \int Pdx$ vel $b = \alpha \int Pdx$; tum enim foret $e^{\frac{s}{k}} = \alpha$; seu $s =$ const. in qua aequatione nulla linea continetur.

Corollarium 6.

714. Neque etiam curua poterit inueniri, pro qua vel in descensu vel in ascensu foret $b = \int Qdx$; denotante Q functionem quamcunq; ipsarum s et x; nisi Q ita sit comparata vt $\frac{Q}{P}$ fiat $= 1$ positis s et $x = 0$. Fit

SVPER … TU PUNCTI
Fit en … acuo vero esset
$s = 0$.
71 … et in ascensu,
nescere … b debita ex A
tio db … n enim erit db
scat pc … $db = e^{\frac{\int ds}{q}} Pdx$.
per dx … nseruientibus in-
terit. … ; qua substitu-
accom … n transmutatur.
prietat … descensu semper
valor … u semper $db >$
euanesc … maior.
na qua
pro cu
rem af … nte neque pro
$P > R$. … otest $b = \int Pdx$
… $= \alpha$; seu $s =$
… a continetur.
71
$P = g$,
que cu
corpus … t inueniri, pro
rat ce … oret $b = \int Qdx$;
arcuum … arum s et x; nisi
Vs seu … itis s et $x = 0$.
Fit

Fit enim $e^{\frac{\pm \int ds}{q}} P = Q$ et $e^{\frac{\pm \int ds}{q}}$ abit in 1 posito $s = 0$.

Scholion 2.

715. Ratio huius est, quod posuimus s euanescere euanescente x; atque hanc ob rem aequatio $db = e^{\frac{\pm \int ds}{q}} Pdx$ ita debet integrari, vt euanescat posito $x = 0$. Si autem b ita detur, vt db per dx exprimatur, aequatio per dx diuidi poterit. Quocirca ea ad hanc legem non potest accommodari, nisi forte sponte aequatio hac proprietate iam gaudeat. Sin autem datus ipsius b valor talis fuerit, vt esset $db = Rds$, seu $b = \int Rds$ euanescente b facto $s = 0$; tum aequatio pro curua quaesita erit $Rds = e^{\frac{\pm \int ds}{q}} Pdx$, quae semper est pro curua reali, dummodo $\int Rds$ habeat valorem affirmatiuum, prodeatque $ds > dx$ seu $e^{\frac{\pm \int ds}{q}} P > R$.

Exemplum 1.

716. Sit potentia sollicitans vniformis, seu $P = g$, et medium resistens vniforme, requiraturque curua MA hanc habens proprietatem, vt corpus in singulis descensibus ad A vsque acquirat celeritates, quae sint in subduplicata ratione arcuum descensu percursorum. Erit ergo Vb vt Vs seu $b = \alpha s$; vnde fit $\alpha ds = g e^{\frac{-s}{k}} dx$ seu $\alpha e^{\frac{s}{k}} ds = g dx$