## Corollarium 8.

463. Si fuerit $S = o$ et $T = o$, erit $s = \sqrt{2ax}$. Quare curua erit cyclois atque portio AN aequalis et similis curuae AM. Est ergo cyclois curua continua super qua omnes oscillationes absoluuntur eodem tempore.

## Exemplum.

464. Sit $T = \sqrt{2bx}$, quo casu curua AN quoq; est tautochrona cum recta angulum AD constituente, cuius cosinus est $\sqrt{\frac{a}{b}}$; erit $ds = \frac{adx - dx\sqrt{2bx}}{\sqrt{2ax}}$, atque $s = \sqrt{2ax} - \frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$. Habebitur autem $dy = \frac{dx\sqrt{(a^2 - 2a\sqrt{2bx} + 2bx - 2ax)}}{\sqrt{2ax}}$. Quae aequatio etiam congruit cum ea, quam in prop. praec. pro curua inuenimus, quae cum recta tautochronam constituat (452), si modo scribatur L pro $a$ et $n$ pro $\sqrt{\frac{b}{a}}$. Quare si fuerit $b = a$, curua quoque algebraica inuenitur NAM, quae est tautochrona, cuius aequatio est $dy = dx\sqrt{\frac{a - 2\sqrt{ax}}{2x}}$, et integralis haec $3y = a - (\sqrt{a} - 2\sqrt{2x})\sqrt{(a - 2\sqrt{2ax})}$. Quae est ea ipsa curua, quae cum recta verticali tautochronam constituit, vt supra inuenimus (452). Longitudo vero penduli isochroni est $= a$, si corpus in hac curua oscilletur. At si moveatur super recta AC et parte curuae AN, longitudo penduli isochroni erit $\frac{1}{4}a$. Atque si D fuerit cuspis curuae, erit $AC = \frac{1}{8}a$, alter vero ramus AM in infinitum ascendit. Praeter hanc curuam tautochronam algebraicam aliae vix inueniri poterunt.

CAPUT

CAPUT T... [V PVNCTI &c.
C... DE MOTU ... IN
, erit $s = \sqrt{2ax}$. ortio AN aequa- rgo cyclois curua tiones absoluun-
SI corpus g, in med corporis et pressionem, net.
Ponatur eata PM=y leritati corpo in M =R. cedente si n Resistentia ve tum, et aequ solius effectus −Rds. Qua et resistentia dv=gdx−R poris in quo corpus in A Tom. II.
curua AN quoq; AD constituen- $\frac{adx - dx\sqrt{2bx}}{\sqrt{2ax}}$, atque dy = etiam congruit curua inuenimus, stituat (452), si $\frac{b}{a}$. Quare si fue- inuenitur NAM, tio est dy=dx ($\sqrt{a}-2\sqrt{2x}$)$\sqrt{}$(a− , quae cum recta , vt supra inueni- duli isochroni est etur. At si mo- uruae AN, longi- Atque si D fue- lter vero ramus ter hanc curuam vix inueniri po-
CAPUT



# CAPUT TERTIUM.

## DE MOTU PUNCTI SUPER DATA LINEA IN MEDIO RESISTENTE.

## PROPOSITIO 53.

### Problema.

465.

*Si corpus sollicitetur deorsum a potentia vniformi g, in medio quocunque resistente; determinare motum corporis descendentis super data curua AM, et pressionem, quam curua in singulis punctis sustinet.* Tabula XII. Fig. 1.

## Solutio.

Ponatur in verticali AP abscissa $= x$, applicata $PM = y$ et arcus $AM = s$; sitque altitudo celeritati corporis in M debita $= v$ et resistentia in M $= R$. Manifestum jam est ex capite praecedente si nulla esset resistentia fore $dv = gdx$. Resistentia vero minuit hoc celeritatis incrementum, et aequipollet vi tangentiali $= R$; eiusque solius effectus in hoc consisteret, vt foret $dv = -Rds$. Quamobrem si et potentia sollicitans $g$, et resistentia R ambae simul in corpus agunt, erit $dv = gdx - Rds$, ex qua aequatione celeritas corporis in quouis puncto M est eruenda. Atque si corpus in A ex quiete descendat, integratio ita est

est instituenda, vt facto $x=o$ prodeat quoque $v=o$. Verum si data cum celeritate corpus in A descensum inceperit, in integratione effici debet, vt posito $x=o$, fiat $v$ aequalis altitudini debitae illi celeritati initiali. Cum autem inuenta fuerit celeritas corporis, habebitur simul tempus, quo quiuis arcus AM absoluitur sumendo $\int\frac{ds}{\sqrt{v}}$. Quod ad pressionem, quam curua in M sustinet, spectat, curua in M duplici vi premitur, vi centrifuga scilicet, et vi normali. Ponamus curuam esse conuexam deorsum, et elementum $dx$ constans, erit longitudo radii osculi in contrariam partem normalis MN directi $=\frac{ds^3}{dxddy}$, vnde vis centrifuga erit $=\frac{2vdxddy}{ds^3}$, qua curua secundum directionem MN premitur. Secundum eandem vero directionem curua premetur a vi normali, quae est $=\frac{gdy}{ds}$; vis normalis enim a potentia absoluta $g$ tantum oritur, quia directio vis resistentiae est in tangente sita, ideoque nullam vim normalem generat. Consequenter tota vis, qua curua in M secundum directionem normalis MN premitur est $=\frac{gdy}{ds}+\frac{2vdxddy}{ds^3}$. Q. E. I.

## Corollarium 1.

466. Expressio ergo vis curuam prementis congruit cum ea, quam in vacuo inuenimus. Neque tamen curua in medio resistente eadem vi premitur qua in vacuo, ob celeritatem a qua vis centrifuga pendet, quae a medio resistente variatur.



## Corollarium 2.

467. Insito descensu corpus non vt in vacuo maximam habet celeritatem in puncto B, in quo tangens est horizontalis; sed posito $dv=o$, locus in quo corpus maximam habet celeritatem inuenitur ex hac aequatione $gdx=Rds$ seu $\frac{dx}{ds}=\frac{R}{g}$ in eo puncto, vbi sinus anguli, quem tangens curuae cum linea horizontali constituit, est ad sinum totum vt potentia absoluta $g$ ad resistentiam in eo loco.

## Corollarium 3.

468. Celeritas corporis igitur augetur vsque ad hoc punctum, in quo celeritas est maxima; vltra vero hoc punctum celeritas iterum decrescit, quia tum $Rds$ excedit $gdx$, et hanc ob rem fit $dv$ negatiuum.

## Corollarium 4.

469. Si resistentia fuerit vt potestas quaecunque celeritatum, cuius exponens est $2m$, et si medium resistens fuerit vniforme, cuius exponens sit $k$; vbi $k$ est altitudo celeritati debita, qua cum corpus mouetur, resistentiam patitur vi grauitati aequalem. Hoc ergo casu erit $R=\frac{v^m}{k^m}$

$\frac{v^m}{k^m}$, atque ista habebitur aequatio ad motum definiendum: $dv = g\,dx - \frac{v^m\,ds}{k^m}$.

## Corollarium 5.

470. Si autem abscissae in axe BQ capiantur, fueritque $BQ = x$, $QM = y$, et $BM = s$, propter harum quantitatum differentialia negatiua respectu priorum, habebitur $dv = -g\,dx + R\,ds$. Quae aequatio ita est integranda, vt posito $x = 0$ fiat $v = b$, si quidem celeritas in B, quam corpus in hoc puncto obtinet, huic altitudini fuerit debita. At pressio secundum MN, quam curua sustinet, est $= \frac{g\,dy}{ds} - \frac{2v\,dx\,ddy}{ds^2}$.

## Corollarium 6.

471. Si medium fuerit vniforme cuius exponens sit $k$, resistentia vero functioni cuicunque ipsius $v$, quae sit V, proportionalis. Sumatur K talis functio ipsius $k$, qualis V est ipsius $v$, erit resistentia $R = \frac{V}{K}$; ideoque habebitur ista aequatio $dv = -g\,dx + \frac{V\,ds}{K}$, sumto axe BQ.

## Scholion I.

472. Formulam hic duplicem incrementum celeritatis exhibentem dedi pro duobus axibus AP et BQ, quia in sequentibus mox hac mox illa vtemur.

SUPER
vtemur.
fixo punc
axe sume
scensus ad
vt in mo
mula vte
473.
ris super
comparata
inuicem s
ad motum
eos tantu
quatio $dv$
grari pot
casus gene
linea supe
enim ob
$= dx$, in
separatae.
cam tantu
aequatio i
quando tan
parata, vt
dimensionr
regulam n
inuicem p
in $V\,ds$ vi
Praeter ho
grationem
OTU PVNCTI
ad motum de-
capiantur, fue-
propter ha-
gatiua respectu
$ds$. Quae ae-
to $x = 0$ fiat $v$
uam corpus in
dini fuerit de-
uam curua su-
rme cuius ex-
cuicunque ipsius
umatur K talis
is $v$, erit resi-
ista aequatio
2.
incrementum
obus axibus AP
hac mox illa
vtemur.



vtemur. Scilicet quando descensus semper fit ex fixo puncto vt A, vtemur priore formula AP pro axe sumente. At si in eadem curua plures descensus ad punctum fixum vsque B sint considerandi, vt in motu oscillatorio vsu venit, posteriore formula vtemur, in qua BQ pro axe habetur.

## Scholion 2.

473. Quia formula, ex qua motus corporis super data curua determinari debet, ita est comparata, vt indeterminatae paucis casibus a se inuicem separari queant, saepe ex ea nihil, quod ad motum spectat, concludi licet. Quamobrem eos tantum casus euoluere conuenit, quibus aequatio $dv = \pm g\,dx \mp \frac{V\,ds}{K}$ vel separari vel integrari potest. Hi autem casus omnino ad tres casus generales reducentur. Primus est, quando linea super qua corpus mouetur est recta, tum enim ob $ds = n\,dx$, aequatio transit in hanc $\frac{\pm K\,dv}{gK - nV} = dx$, in qua indeterminatae sunt a se inuicem separatae. Secundus casus est, quando in V vnicam tantum obtinet dimensionem $v$, tum enim aequatio integrationem admittit. Tertius casus est, quando tam $v$ quam aequatio pro curua ita est comparata, vt in aequatione $v$ et $x$, vbique eundem dimensionum numerum constituant; tum enim per regulam notam Bernoullianam indeterminatae a se inuicem possunt separari. Hoc autem euenit, si in $V\,ds$ vnica fuerit dimensio ipsarum $v$ et $x$. Praeter hos quidem casus essent duo alii, integrationem admittentes, sed qui huc non pertinent.

nent. Primus est si resistentia euanescit, qui vero casus in praecedente Capite iam sufficienter est pertractatus. Alter casus est, si potentia sollicitans $g$ euanescit; de quo autem non est opus vt agamus, quia motus super quacunque linea congruit cum motu super linea recta, de quo in praecedente libro iam satis est dictum. Praeterea quoque multis casibus aequatio separationem admittit, si fuerit $V = v^2$, quoties scilicet aequatio pro curua ita est comparata, vt aequatio ad casum aequationis, quam quondam Com. Riccati proposuit, potest reduci. Generaliter vero etiam potest in hoc casu celeritas per seriem exhiberi, atque finita expressione definiri, quemadmodum ego generalem aequationis Riccatianae dedi constructionem. Quoties igitur natura rei requiret, praeter tres casus expositos, subinde quoque hunc casum, in quo resistentia biquadrato celeritatis est proportionalis, euoluemus.

## Scholion 3.

474. Quia haec de motu in medio resistente tractatio per se est difficilis et intricata, non ad plures vis sollicitantis hypotheses, vt capite praecedente fecimus, eam accommodabimus; sed nobis perpetuo potentia sollicitans erit vniformis et deorsum directa; neque de viribus centripetis multum erimus solliciti. Atque cum potentia sollicitans ponatur vniformis, medium resistens quo-



que tale poni conueniet; fluidum enim quod resistentiam generat, ipsam corporis grauitatem minuit, et si id non esset vniforme, potentia absoluta non recte vniformis poneretur. Deinde etiam propter eandem rationem curuam in qua corpus mouetur, totam in eodem plano positam assumemus, quo multas difficultates nullam vtilitatem afferentes remoueamus.

## PROPOSITIO 54.
### Problema.

475. *Si corpus perpetuo sollicitetur deorsum a potentia vniformi* g, *in medio quocunque resistente; determinare motum corporis super data curua* AM *ascendentis et pressionem, quam curua in singulis punctis* M *patitur.* Tabula XII. Fig. 2.

### Solutio.

In verticali AP posita abscissa $AP = x$; $PM = y$ et $AM = s$; sit altitudo celeritati in A debita $= b$; eique in M debita $= v$; atque resistentia in $M = R$. Erit igitur dum corpus ascendit tam potentia sollicitans $g$, quam resistentia R motui contraria. Hanc ob rem erit simili modo, quo in praecedente prop. $dv = -g\,dx - R\,ds$. Ex qua aequatione $v$ ita debet determinari, vt facto $x = o$ fiat $v = b$. Deinde cum resistentia in pressionem, quam curua patitur, non ingrediatur, erit

erit vt ſupra preſſio tota, quam curua in M ſecundum directionem normalis MN ſuſtinet $= \frac{gdy}{ds} - \frac{2vdxddy}{ds^2}$ poſito $dx$ conſtante; vbi $\frac{gdy}{ds}$ denotat vim normalem, et $-\frac{2vdxddy}{ds^2}$ vim centrifugam, vtramque juxta MN directam. Q. E. I.

## Corollarium 1.

476. In aſcenſu corporis ergo ſuper quacunque curua celeritas corporis perpetuo imminuitur; atque punctum curuae D reperietur, in quo corporis aſcendentis celeritas euaneſcit, ſi in aequatione $dv = -gdx - Rds$ poſt integrationem ponatur $v = 0$.

## Corollarium 2.

477. Si corpus ſuper curua DMA deſcenderet, haberetur iſta aequatio $dv = -gdx + Rds$, (470.) ex qua intelligitur aſcenſum non eſſe ſimilem deſcenſui, vt in vacuo. Sed ſi reſiſtentia fieret negatiua ſeu accelerans, tum aſcenſus ſimilis foret deſcenſui. Quare deſcenſus in medio reſiſtente congruet cum aſcenſu in medio tantumdem accelerante et viciſſim.

## Corollarium 3.

478. Quoniam aequatio pro aſcenſu hoc tantum differt ab aequatione pro deſcenſu, quod reſiſtentia R valorem induat negatiuum; intelligitur iisdem caſibus, quibus aequatio pro deſcenſu

SVPE. OTU PUNCTI
ſu ſepa curua in M ſe-
aequati N ſuſtinet $= \frac{gdy}{ds}$
vbi $\frac{gdy}{ds}$ denotat
m centrifugam,
47 Q. E. I.
per cu
At pr
Quare o ſuper quacun-
que hu uo imminuitur;
do tan r, in quo cor-
it, ſi in aequa-
ionem ponatur $v = 0$.
48
morato
vel int DMA deſcende-
ſum pe $-gdx + Rds$,
motus m non eſſe ſi-
tentia ed ſi reſiſtentia
inueſtig aſcenſus ſimilis
prietas in medio reſi-
quae i medio tantum-
Praeter
harum
nes et
runtur.
indeter aſcenſu hoc tan-
ſuper q deſcenſu, quod
ritatem tiuum; intelli-
Tom. I. atio pro deſcen-
ſu



ſu ſeparari vel integrari poteſt, iisdem quoque aequationem pro aſcenſu ſimili modo tractari poſſe.

## Corollarium 4.

479. Si fuerit $R = \frac{v}{K}$, erit pro aſcenſu ſuper curua AM haec aequatio $dv = -gdx - \frac{vds}{K}$. At pro deſcenſu habetur $dv = -gdx + \frac{vds}{K}$. Quare ſi illa aequatio poterit integrari ſimul quoque huius aequationis habebitur integrale ponendo tantum $-K$ loco K.

## Scholion.

480. Secundum tres igitur caſus ſupra memoratos, quibus aequatio inuenta vel ſeparari vel integrari poteſt, tam deſcenſum quam aſcenſum pertractabimus, ſi ſcilicet detur curua ſuper qua motus fieri ponitur. Deinde autem ex datis potentia ſollicitante, reſiſtentia et preſſione curuam inueſtigabimus. Tertio ſi motus quaedam proprietas fuerit propoſita, curuam determinabimus, quae in data reſiſtentiae hypotheſi ſatisfaciat. Praeterea ſequentur alia problemata, in quibus harum quatuor rerum reſiſtentiae, motus, preſſiones et curuae duae dantur, reliquae duae requiruntur. Habebimus deinceps quoque problemata indeterminata, quibus omnes curuae requiruntur, ſuper quibus corpus deſcendens vel eandem celeritatem acquirit vel eas eodem tempore abſoluit.

Tum sequetur doctrina de lineis brachystochronis, atque tandem caput concludet de motu oscillatorio tractatio.

## PROPOSITIO 55.
### Problema.

Tabula XII. Fig. 3.

481. *In medio resistente vniformi quocunque et hypothesi grauitatis vniformis* g, *determinare motum corporis descendentis super linea recta* AMB *ad horizontem vtcunque inclinata.*

### Solutio.

Posita $AP = x$ erit $AM = s = nx$; et quia medium resistens est vniforme, erit resistentia $R = \frac{V}{K}$. Posita ergo altitudine celeritati in M debita $= v$, erit $dv = g\,dx - \frac{nV\,dx}{K}$ (465.). Vnde fit $\frac{K\,dv}{gK - nV} = dx$, in qua aequatione indeterminatae sunt a se inuicem separatae: erit ergo $x = \int \frac{K\,dv}{gK - nV}$, in qua integratione efficiendum est vt posito $x = 0$ fiat $v = 0$, si quidem descensus in A ex quiete incipiat. Sin vero habeat celeritatem initialem haec per integrationem est introducenda. Tempus per spatium AM est $= \int \frac{n\,dx}{\sqrt{v}}$. Posito ergo loco $dx$ eius valore in $v$, habebitur tempus per $AM = \int \frac{nK\,dv}{(gK - nV)\sqrt{v}}$ quod integrale ita est sumendum, vt posita $\sqrt{v} =$ celeritati initiali in A euanescat. Pressio vero quam linea in quouis puncto M sustinet, est

SUPER

est constan $\frac{g\sqrt{(n^2-1)}}{n}$, q
Q. E. I.

482. leratur, q rit $gK =$ retardabitu si in initic

483. incipiat m semper fit leritas, qu mum acqu

484. minor est celeritas. qua aequab per recta v

485. cis $2m$ cele

OTV PVNCTI

is brachystochro- det de motu os-

55.

ormi quocunque et leterminare motum cta AMB ad ho-

$nx$; et quia me- resistentia $R =$ ati in M debita Vnde fit $\frac{K\,dv}{gK - nV}$ rminatae sunt a $= \int \frac{K\,dv}{gK - nV}$, in vt posito $x = 0$ A ex quiete in- m initialem haec a. Tempus per ergo loco $dx$ us per $AM =$ sumendum, vt A euanescat. ncto M sustinet, est



est constans nempe aequalis vi normali $= \frac{g\,dy}{ds} = \frac{g\sqrt{(n^2-1)}}{n}$, quia vis centrifuga euanescit ob $ddy = 0$.
Q. E. I.

### Corollarium 1.

482. Celeritas corporis ergo tam diu acceleratur, quam diu est $gK > nV$. At si semel fuerit $gK = nV$ corpus neque accelerabitur neque retardabitur. Diminuetur vero corporis celeritas si in initio A fuerit $nV > gK$.

### Corollarium 2.

483. Si ergo corpus in A descensum a quiete incipiat motus perpetuo crescet, ita tamen vt semper sit $gK > nV$, quippe quae est vltima celeritas, quam descensu per infinitum spatium demum acquirit.

### Corollarium 3.

484. Quo maior ergo est angulus BAC, eo minor est vltima, quam corpus acquirere potest celeritas. Maximam vero celeritatem vltimam, qua aequabiliter progreditur, acquirit descensu super recta verticali AC.

### Corollarium 4.

485. Si resistentia fuerit vt potestas indicis $2m$ celeritatum, erit $V = v^m$ et $K = k^m$, vnde

 ista

ista habebitur aequatio $x = \int \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$, atque tempus per $AM = \int \frac{nk^m dv}{(gk^m - nv^m)\sqrt{v}}$

## Exemplum 1.

486. Resistat medium in simplici ratione celeritatum, erit $2m = 1$, atque $dv = g\,dx - \frac{n\,dx\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Hinc fit $x = \int \frac{dv\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - n\sqrt{v}} = -\frac{2\sqrt{kv}}{n} + \frac{2gk}{n^2}\, l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - n\sqrt{v}}$: vel per seriem $x = \frac{2v}{2g} + \frac{2nv\sqrt{v}}{3g^2\sqrt{k}} + \frac{2n^2v}{4g^3k} + \frac{2n^3v^2\sqrt{v}}{5g^4k\sqrt{k}} +$ etc. si quidem descensus in A ex quiete incipiat. Tempus autem per spatium AM erit $= \int \frac{n\,dv\sqrt{k}}{g\sqrt{kv} - nv} = 2\sqrt{k}\, l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - n\sqrt{v}}$. Quare si tempus per AM ponatur $= t$, erit $nx + 2\sqrt{kv} = \frac{gt\sqrt{k}}{n}$. Atque in serie $t = \frac{2n\sqrt{v}}{g} + \frac{2n^2v}{2g^2\sqrt{k}} + \frac{2n^3v\sqrt{v}}{3g^3k} + \frac{2n^4v^2}{4g^4k\sqrt{k}}$ + etc. Si ergo corpus in descensu per AB acquisiuit celeritatem altitudini $b$ debitam, ex hac reperitur altitudo $AC = \frac{-2\sqrt{bk}}{n} + \frac{2gk}{n^2}\, l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - n\sqrt{b}}$.

## Exemplum 2.

478. Resistat medium in duplicata ratione celeritatum, erit $m = 1$ et $x = \int \frac{k\,dv}{gk - nv} = \frac{k}{n}\, l\frac{gk}{gk - nv}$, si quidem corpus in A ex quiete ascensum inchoauerit. Quare si $e$ sit numerus, cuius logarithmus est vnita, erit $e^{\frac{nx}{k}} = \frac{gk}{gk - nv}$; atque $v =$

gk



$\frac{gk(e^{\frac{nx}{k}} - 1)}{ne^{\frac{nx}{k}}} = \frac{gk}{n}(1 - e^{\frac{-nx}{k}})$. Hanc ob rem si corpus in B habuerit celeritatem altitudini $b$ debitam, erit $AC = \frac{k}{n}\, l\frac{gk}{gk - nb}$. Atque si corpus per spatium infinitum descendat, habebit celeritatem altitudini $\frac{gk}{n}$ debitam. Tempus vero per spatium AM erit $= \int \frac{nk\,dv}{(gk - nv)\sqrt{v}} = \frac{\sqrt{nk}}{\sqrt{g}}\, l\frac{\sqrt{gk} + \sqrt{nv}}{\sqrt{gk} - \sqrt{nv}}$. Per series tam spatium $x$, quam tempus commode exprimitur; id quod generaliter pro quouis valore litterae $m$ in sequente exemplo monstrabimus.

## Exemplum 3.

488. Sit resistentia vt potestas exponentis $2m$ celeritatum, erit $dx = \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$; quae expressio in seriem conuersa dat $dx = \frac{dv}{g} + \frac{nv^m dv}{g^2k^m} + \frac{n^2v^{2m}dv}{g^3k^{2m}}$ + etc. Ex qua inuenitur $x = \frac{v}{g} + \frac{nv^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} + \frac{n^2v^{2m+1}}{(2m+1)g^3k^{2m}} + \frac{n^3v^{3m+1}}{(3m+1)g^4k^{3m}} +$ etc. Atque si ponatur tempus per $AM = dt$, quia est $dt = \frac{ndx}{\sqrt{v}}$ erit $t = \frac{2n\sqrt{v}}{g} + \frac{2n^2v^m\sqrt{v}}{(2m+1)g^2k^m} + \frac{2n^3v^{2m}\sqrt{v}}{(4m+1)g^3k^{2m}} + \frac{2n^4v^{3m}\sqrt{v}}{(6m+1)g^4k^{3m}}$ + etc.

 PRO-

# PROPOSITIO 56.

## Problema.

Tabula XII. Fig. 4.

489. *Resistat medium in ratione quacunque multiplicata celeritatum; datumque sit punctum* A, *ex quo infinitae rectae* AM *sint eductae: determinare curuam* CMD *huiusmodi, vt corpus per quamlibet rectam* AM *descendens in puncto* M *eandem habeat celeritatem.*

## Solutio.

Sit $2m$ exponens potestatis celeritatis, cui resistentia est proportionalis, dicaturque AP $= x$ et AM $= z$, et ponatur $z = nx$. Sit altitudo celeritati in M debita $= v$, quae debet esse constans scilicet $= b$. Erit ergo $dx = \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$ (485.) denotante, vt supra $k$ exponentem resistentiae, et $g$ potentiam sollicitantem deorsum tendentem. Ad naturam curuae CM ergo inueniendam oportet integrare aequationem $dx = \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$ ita vt posito $v = o$ fiat quoque $x = o$; tum autem poni $b$ loco $v$ atque $\frac{z}{x}$ loco $n$, hocque modo obtinebitur aequatio inter $x$ et $z$ naturam curuae exponens. Per seriem autem supra aequationem propositam integrauimus (488), vnde posito $b$ loco $v$ habebimus $x = \frac{b}{g} + \frac{nb^{m+1}}{(m+1)g^2k^m}$

SUPER ... 56. ... ione quacunque mul- ... it punctum A, ex ... ctae: determinare ... pus per quamlibet ... M eandem habeat ... is celeritatis, cui ... icaturque AP = x ... Sit altitudo ce- ... e debet esse con- ... fiat quoque x = ... atque z/x loco n, ... tio inter x et z ... feriem autem su- ... tegrauimus (488), ... imus x = b/g + nb



$\frac{nb^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} + \frac{n^2b^{2m+1}}{(2m+1)g^3k^{2m}} +$ etc. Ponatur $q^m$ loco $n$ et multiplicetur vbique per $q$, quo facto habebimus $qx = \frac{bq}{g} + \frac{b^{m+1}q^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} + \frac{b^{2m+1}q^{2m+1}}{(2m+1)g^3k^{2m}} +$ etc. Sumantur differentialia et diuidatur per $bdq$ habebitur $\frac{qdx+xdq}{bdq} = \frac{1}{g} + \frac{b^m q^m}{g^2k^m} + \frac{b^{2m}q^{2m}}{g^3k^{2m}} = \frac{k^m}{gk^m - b^m q^m}$, seu $qdx + xdq = \frac{bk^m dq}{gk^m - b^m q^m}$. At quia est $q^m = n$ et $n = \frac{z}{x}$ ponatur $\frac{z^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{m}}}$ loco $q$ et prodibit $z^{\frac{m-1}{m}} x^{\frac{m-1}{m}} dz +$

$$(m-1)z^{\frac{1}{m}}x^{-\frac{1}{m}}dx = \frac{bk^m z^{\frac{1-m}{m}} x^{\frac{m-1}{m}} dz - bk^m z^{\frac{1}{m}} x^{\frac{-1}{m}} dx}{gk^m x - b^m z}.$$

Quae multiplicata per $x^{\frac{1}{m}}z^{\frac{m-1}{m}}$ abit in hanc $xdz + (m-1)zdx = \frac{bk^m x dz - bk^m z dx}{gk^m x - b^m z}$. Constructio autem curuae facilius sequitur ex aequatione $qx = \int \frac{bk^m dq}{gk^m - b^m q^m}$. Supra autem habuimus seriem ipsi $qx$ aequalem, ex qua patet si fuerit $q^m = \frac{gk^m}{b^m}$, tum $\frac{gx}{b}$ aequari seriei harmonicae

1 +

$1 + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{2m+1}$ etc. ideoque esse $x$ infinitum. Si igitur $x$ est infinitum, erit $q^m = \frac{z}{x} = \frac{gk^m}{b^m}$, ex quo perspicitur rectam AE fore curuae asymtoton et cosinum ang. CAE fore $= \frac{b^m}{gk^m}$. Verticis autem curuae C a puncto A distantia AC aequalis erit huic seriei $\frac{b}{g} + \frac{b^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} + \frac{b^{2m+1}}{(2m+1)g^3k^{2m}} +$ etc. Debet autem esse necessario $b^m < gk^m$, alias enim vertex C a puncto A infinite distaret. Q. E. I.

## Corollarium 1.

490. Si applicata PM vocetur $y$, erit $z = \sqrt{(x^2+y^2)}$ et $dz = \frac{xdx+ydy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$, quibus valoribus in aequatione inuenta substitutis habebitur $xydy + mx^2dx + (m-1)y^2dx = \frac{bk^m y(xdy - ydx)}{gk^m x - b^m\sqrt{(x^2+y^2)}}$.

## Corollarium 2.

491. Ponatur in hac aequatione $y = px$, transmutabitur ista aequatio in hanc $xpdp + mdx + mp^2dx = \frac{bk^m pdp}{gk^m - b^m\sqrt{(1+pp)}}$, quae aequatio per $(1+pp)^{\frac{1-2m}{2m}}$ mul-



multiplicata fit integrabilis, habebitur enim $m(1+pp)^{\frac{1}{2m}}x = \int \frac{bk^m pdp(1+pp)^{\frac{1-2m}{2m}}}{gk^m - b^m\sqrt{(1+pp)}}$, quae expressio per quadraturas effici potest.

## Corollarium 3.

492. Si resistentia euanescat, corpusque in vacuo moueatur fit $k$ infinitum; atque ex supra data serie inuenitur $qx = \frac{bq}{g}$ seu $x = \frac{b}{g}$, vnde cognoscitur lineam CM fieri rectam horizontalem.

## Scholion 1.

493. Quia autem ex hac aequatione generali parum ad cognitionem curuae potest concludi, in exemplis specialibus hanc disquisitionem vlterius prosequemur. Talia autem assumemus exempla, in quibus formula $\frac{bk^m dq}{gk^m - b^m q^m}$ integrationem saltem per logarithmos admittit, quo ad expressiones finitas perueniamus, ex quibus facile erit curuae naturam perspicere.

## Exemplum 1.

494. Sit igitur resistentia ipsis celeritatibus proportionalis, erit $m = \frac{1}{2}$. Ponatur AC $= a$; quia celeritas, quam corpus per AC cadendo acquirit, debita esse debet altitudini $b$ erit $a = -$

 $2\sqrt{bk}$

$2\sqrt{bk} + 2gk\, l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{b}}$ (486.). Deinde vero erit $\sqrt{q} = \frac{z}{x}$ seu $q = \frac{z^2}{x^2}$, atque $qx = \int \frac{bdq\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{bq}}$, quod integrale ita est accipiendum vt posito $z = x$ seu $q = 1$ fiat $x = a$ vel eius valori assignato. Erit ergo $qx = -2\sqrt{bkq} + 2gk\, l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{bq}}$, quae aequatio loco $q$ substituto $\frac{z^2}{x^2}$ abit in hanc $z^2 = -2z\sqrt{bk} + 2gkx\, l\frac{gx\sqrt{k}}{gx\sqrt{k}-z\sqrt{b}}$. Si $q = 1$ fit $x = a = -2\sqrt{bk} + 2gk\, l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{b}}$. Fiat autem $q = 1 + dq$ habebitur $dx + xdq = -dq\sqrt{bk} + \frac{gkdq\sqrt{b}}{g\sqrt{k}-\sqrt{b}} = \frac{bdq\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{b}}$. At quia $\frac{1}{\sqrt{q}}$ est cosinus anguli MAC erit $\sqrt{dq}$ = sinui huius anguli. Quamobrem incrementum ipsius $x$ infinities minus est, quam incrementum anguli MAC, incidente MA in CA, ex quo sequitur tangentem curuae in C esse horizontalem: huiusque curuae tangens in infinito seu asymtota erit AE existente ang. EAC cosinu $\frac{\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$. Ceterum haec curua ex altera verticalis AC parte arcum habebit similem et aequalem ipsi CMD.

## Scholion 2.

495. Generaliter quidem etiam ostendi potest curuae tangentem in C esse debere horizontalem. Posita enim $n = 1$, in serie $x$ exprimente habetur $AC = \frac{b}{g} + \frac{b^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} +$ etc. augeatur $n$ elemento $dn$ habebitur incrementum momentaneum ipsius $AC = \frac{b^{m+1}dn}{(m+1)g^2k^m} +$ $\frac{2b^{2m+1}dn}{(m+1)g^3k^{2m}} +$ etc. Est vero $\frac{1}{n}$ cosinus anguli MAC, ideoque sinus $= \frac{\sqrt{(n^2-1)}}{n} = \sqrt{2dn}$ posito $1 + dn$ loco $n$. Quamobrem incrementum ipsius AC infinities est minus quam incrementum anguli; atque ideo AC normalis erit in curuam DMC.



## Exemplum 2.

496. Sit resistentia quadratis celeritatum proportionalis erit $m = 1$; positoque $AC = a$ erit $a = k\, l\frac{gk}{gk-b}$, atque $b = gk(1-e^{\frac{-a}{k}})$. Deinde vero est $q = n = \frac{z}{x}$ atque $qx = z = \int\frac{bkdq}{gk-bq} = k\, l\frac{gk}{gk-bq} = k\, l\frac{gkx}{gkx-bz}$. Habebitur ergo $e^{\frac{z}{k}} = \frac{gkx}{gkx-bz}$, vnde sequitur $x = \frac{e^{\frac{z}{k}}bz}{gk(e^{\frac{z}{k}}-1)} = \frac{e^{\frac{z}{k}}z(e^{\frac{a}{k}}-1)}{e^{\frac{a}{k}}(e^{\frac{z}{k}}-1)}$ posito loco $b$ eius valore in $a$. Ad curuam autem construendam commodissime adhibetur haec aequatio $z = k\, l\frac{gk}{gk-bq}$, in qua $z$ est AM et $q$ est secans anguli MAC.

## Scholion 3.

497. In solutione problematis ad inueniendam aequationem curuae CMD vsi fuimus seriei cuiusdam summatione; eandem vero aequationem

 sine

ſine ſeriebus ſequente modo elicere licet. Quia eſt $x=\int\frac{k^m dv}{gk^m-nv^m}$, haecque ipſa aequatio exprimit naturam curuae quaeſitae, ſi poſt integrationem ponatur $v=b$ et $\frac{z}{x}$ loco $n$. Quamobrem ſi $\int\frac{k^m dv}{gk^m-nv^m}$ differentietur poſito non ſolum $v$ ſed etiam $n$ variabili, atque tum ponatur $v$ conſtans $=b$ et $\frac{z}{x}$ loco $n$ habebitur aequatio differentialis pro curua quaeſita. Ad hoc efficiendum pono $n=\frac{1}{p^m}$, quo prodeat $x=\int\frac{k^m p^m dv}{gk^m p^m-v^m}$.

Ponamus breuitatis gratia $\frac{k^m p^m}{gk^m p^m-v^m}=P$, ſitque aequatio differentialis haec $dx=Pdv+Qdp$, ſi etiam $p$ variabilis accipiatur. Quia autem P eſt functio nullius dimenſionis ipſarum $v$ et $p$ erit $x=Pv+Qp$, ideoque $Q=\frac{x}{p}-\frac{Pv}{p}$. Hoc igitur loco Q valore ſubſtituto prodibit $pdx = \frac{k^m p^{m+1}dv-k^m p^m v\,dp}{gk^m-nv^m}+xdp$. Reſtituatur $n^{-\frac{1}{m}}$ loco $p$, et orietur $mndx+xdn=\frac{mk^m n\,dv+k^m v\,dn}{gk^m-nv^m}$, in qua aequatione $n$ aeque variabilis eſt aſſumta ac $v$ et $x$. Nunc ponatur $v=b$, $dv=0$ et $n=\frac{z}{x}$ atque habebitur iſta aequatio: $xdz+(m-1)zdx=$

bk



$\frac{bk^m(xdz-zdx)}{gk^m x-b^m z}$, quae cum aequatione ſupra inuenta congruit.

# PROPOSITIO 57.

## Problema.

498. *Si reſiſtentia fuerit in quacunque multiplicata ratione celeritatum; inuenire curuam* AMC *huius proprietatis, vt corpus deſcendens ſuper quauis ſubtenſa* AM *dato tempore ex* A *ad* M *perueniat.* Tabula XII. Fig. 5.

## Solutio.

Ducta verticali AC ponatur $AP=x$, $AM=z$; ſitque $n=\frac{z}{x}$. Poſita altitudine celeritati in M debita $=v$ et reſiſtentia $=\frac{v^m}{k^m}$ ſit tempus quo corpus per AM deſcendit $=t$, quod debet eſſe quantitas conſtans. Habebimus ergo ex praecedentibus $x=\int\frac{k^m dv}{gk^m-nv^m}$ et $t=\int\frac{nk^m dv}{(gk^m-nv^m)\sqrt{v}}$ (385.). Quocirca ad naturam curuae AMC inueniendam, opus eſt vt vtraque aequatio, ſi fieri poteſt, re ipſa integretur, et valor ipſius $v$ ex altera aequatione in altera ſubſtituatur, atque tum loco $n$ ſcribatur $\frac{z}{x}$, quo facto habebitur aequatio inter



$x$ et $z$

$x$ et $z$ naturam curuae quaesitae exprimens. At si integrationes non commode perfici poterunt, vtraque aequatio est differentianda ponendo quoque $n$ variabili; et postquam positum est $dt=0$, ex duabus aequationibus inuentis eliminari debet $v$, quo prodeat aequatio $n$ et $x$ tantum continens, quae ob $n=\frac{z}{x}$ exhibebit naturam curuae quaesitae. Ad hoc ponatur $n=\frac{1}{p^m}$, quo habeamus $x=\int\frac{k^m p^m dv}{gk^m p^m-v^m}$ et $t=\int\frac{k^m dv}{(gk^m p^m-v^m)\sqrt{v}}$. Quarum aequationum illius sumto quoque $p$ variabili differentialis iam est inuenta $pdx-xdp=\frac{k^m p^{m+1}dv-k^m p^m v dp}{gk^m p^m-v^m}$ (497.). Ad alteram aequationem differentiandam pono $\frac{k^m}{(gk^m p^m-v^m)\sqrt{v}}=\mathrm{P}$, fitque $dt=\mathrm{P}dv+\mathrm{Q}dp$. Quia autem P est functio ipsarum $v$ et $p$ dimensionum $-m-\frac{1}{2}$ erit $(\frac{1}{2}-m)t=\mathrm{P}v+\mathrm{Q}p$, atque hinc $\mathrm{Q}=\frac{(1-2m)t}{2p}-\frac{\mathrm{P}v}{p}$. Quo valore loco Q substituto prodibit $pdt=\frac{k^m(pdv-vdp)}{(gk^m p^m-v^m)\sqrt{v}}+\frac{(1-2m)t\,dp}{2}$. Sit nunc $t=2\sqrt{c}$ atque $dt=0$, habebimus $(2m-1)dp\sqrt{c}=\frac{k^m(pdv-vdp)}{(gk^m p^m-v^m)\sqrt{v}}$. Eliminetur ex his duabus aequationibus $dv$ et proueniet $pdx-xdp=(2m-1)p^m$

SVPER D TU PUNCTI
$p^m dp\sqrt{cv}$ se … xprimens. At
… rfici poterunt,
$\frac{dr}{(2m-1)p^{m-}}$ … ponendo quo-
… um est $dt=0$,
valor loco … liminari debet
$\frac{k^m(pdv-v}{(gk^m p^m-v}$ … tantum conti-
… aturam curuae
Casu quidem … $\frac{1}{m}$, quo ha-
bus proport …
$p=b=x=$ … $\frac{k^m dv}{k^m p^m-v^m)\sqrt{v}}$.
quamobrem … quoque $p$ va-
AMC est ci … $pdx-xdp=$
hypothesibus …
gretur elimi … alteram aequa-
tio differenti …
primens. Q … $\frac{k^m}{m-v^m)\sqrt{v}}=\mathrm{P}$,
… em P est fun-
… $-m-\frac{1}{2}$ erit
499. Si … nc $\mathrm{Q}=\frac{(1-2m)t}{2p}$
Atque hinc e … prodibit $pdt=$
substitutus in … Sit nunc $t=$
… $-1)dp\sqrt{c}=$
quationem in … x his duabus
$x$ et $z$ form … $-xdp=(2m-1)p^m$



$p^m dp\sqrt{cv}$ seu $\sqrt{v}=\frac{pdx-xdp}{(2m-1)p^m dp\sqrt{c}}=$ $\frac{dr}{(2m-1)p^{m-2}dp\sqrt{c}}$ posito $x=rp$. Substituatur hic valor loco $v$ in aequatione $(2m-1)dp\sqrt{c}=\frac{k^m(pdv-vdp)}{(gk^m p^m-v^m)\sqrt{v}}$ vel in hac $\frac{dr}{p^{m-2}}=\frac{k^m(pdv-vdp)}{gk^m p^m-v^m}$. Casu quidem quo $m=\frac{1}{2}$ seu resistentia celeritatibus proportionalis erit $pdv=vdp$ seu $v=ap$ et $p=b:x=\frac{1}{n^2}=\frac{xx}{zz}$, vnde sequitur fore $zz=ax$; quamobrem in hac resistentiae hypothesi curua AMC est circulus omnino vt in vacuo. In aliis hypothesibus nisi re ipsa aequatio alterutra integretur eliminata $v$ habebitur aequatio differentio differentialis inter $z$ et $x$ naturam curuae exprimens. Q. E. I.

## Corollarium I.

499. Si ponatur $v=up$, erit $pdv-vdp=ppdu$. Atque hinc erit $\sqrt{u}=\frac{dr}{(2m-1)p^{m-\frac{3}{2}}dp\sqrt{c}}$, qui valor substitutus in aequatione $dr=\frac{k^m du}{gk^m-u^m}$ dabit aequationem inter $p$ et $r$, ex qua aequatio inter $x$ et $z$ formabitur.

Co-

## Corollarium 2.

500. In medio ergo quod resistit in simplici celeritatum ratione apparet curuam AMC esse circulum. Atque ideo in hac resistentiae hypothesi tempora descensuum per singulas circuli chordas ex puncto A ductas sunt inter se aequalia.

## Exemplum I.

501. Sit resistentia quadratis celeritatum proportionalis erit $m = 1$, atque $x = \frac{k}{n} l \frac{gk}{gk - nv}$ seu $v = \frac{gk}{n}(1 - e^{\frac{-nx}{k}})$. Praeterea vero erit $t = 2\sqrt{c} = \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{g}} l \frac{\sqrt{gk}+\sqrt{nv}}{\sqrt{gk}-\sqrt{nv}}$ seu $e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{nk}}} = \frac{\sqrt{gk}+\sqrt{nv}}{\sqrt{gk}-\sqrt{nv}}$, vnde fit $v = \frac{gk(e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{nk}}} - 1)^2}{n(e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{nk}}} + 1)^2}$. Eliminata ergo $v$ et $\frac{z}{x}$ posito loco $n$ habebitur $\frac{e^{\frac{x}{k}} - 1}{e^{\frac{x}{k}}} = \frac{(e^{\frac{2\sqrt{gcx}}{\sqrt{kz}}} - 1)^2}{(e^{\frac{2\sqrt{gcx}}{\sqrt{kz}}} + 1)^2}$ seu $\frac{2\sqrt{gcx}}{\sqrt{kz}} = l \frac{1+\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{k}})}}{1-\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{k}})}}$. In hac curua est $AC = k\, l \frac{(e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}}+1)^2}{4e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}}} = k\, l \frac{e^{\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}} + e^{\frac{-\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}}}{2}$, si igitur ponatur

AC





$AC = a$, erit $2e^{\frac{a}{2k}} = e^{\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}} + e^{\frac{-\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}}$: vnde erit $e^{\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}} = e^{\frac{a}{2k}} + \sqrt{(e^{\frac{a}{k}} - 1)}$, seu $\sqrt{\frac{gc}{k}} = l(e^{\frac{a}{2k}} + \sqrt{(e^{\frac{a}{k}} - 1)})$. Erit igitur $\sqrt{x}\, l(e^{\frac{a}{2k}} + \sqrt{(e^{\frac{a}{k}} - 1)}) = \sqrt{z}\, l(e^{\frac{z}{2k}} + \sqrt{(e^{\frac{z}{k}} - 1)})$ aequatio pro curua AMC. Si resistentia fuerit valde parua, erit $k$ quantitas vehementer magna, atque ideo $e^{\frac{z}{2k}} + \sqrt{(e^{\frac{z}{k}} - 1)} = 1 + \frac{z}{2k} + \sqrt{(\frac{z}{k} + \frac{z^2}{2k^2})} = 1 + \sqrt{\frac{z}{k}} + \frac{z}{2k} + \frac{z\sqrt{z}}{4k\sqrt{k}}$ huiusque logarithmus erit $= \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{k}} + \frac{z\sqrt{z}}{12k\sqrt{k}}$. Simili modo erit $l(e^{\frac{a}{2k}} + \sqrt{e^{\frac{a}{k}} - 1})) = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{k}} + \frac{a\sqrt{a}}{12k\sqrt{k}}$. Atque hanc ob rem habebitur pro curua AMC haec aequatio $\sqrt{ax} + \frac{a\sqrt{ax}}{12k} = z + \frac{z^2}{12k}$ seu $ax(1 + \frac{a}{6k} + \frac{a^2}{144k^2}) = z^2 + \frac{z^3}{6k} + \frac{z^4}{144k^2}$. Vnde perspicitur si resistentia prorsus euanescat seu $k$ fiat infinite magnum fore $ax = z^2$ atque ideo curuam AMC circulum. At si medium rarissimum fuerit, erit $ax(a + 6k) = 6kz^2 + z^3$, et differentiando $adx(a + 6k) = 12kzdz + 3z^2 dz$. Si nunc fiat $zdz = xdx$ habebitur applicata PM maxima, seu locus vbi tangens curuae est verticalis, scilicet $a^2 + 6ak = 12kx + 3xz$ seu $x = \frac{a^2 + 6ak}{12k + 3z}$, vnde fit $\frac{(6ak + a^2)^2}{3} = 24k^2z^2 + 10kz^3 + z^4$, ex qua aequatione ipsius $z$ valor quam proxime est $\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{(4\sqrt{2} - 5)a^2}{48k}$, atque $x = \frac{a}{2}$ ——

$\frac{(3\sqrt{2}-4)a^2}{48k}$ et $PM = \frac{a}{2} + \frac{(2-\sqrt{2})a^2}{24k}$. Curua ergo latitudine est supra medietatem, ibique latior est quam altitudo AC.

## Corollarium 3.

502. Si igitur linea recta vel curua hinc curuam AMC in M tangat, ita vt tota extra spatium AMC sit sita, corpus ex A ad eam lineam citius perueniet descendendo super chorda AM, quam super quauis alia recta ex A ad eam lineam ducta.

## Exemplum 2.

503. Sit $m$ numerus affirmatiuus et resistentia valde parua, erit $k$ quantitas vehementer magna, atque hinc $\frac{k^m}{gk^m - nv^m} = \frac{1}{g} + \frac{nv^m}{g^2k^m}$. Quocirca erit $x = \frac{v}{g} + \frac{nv^{m+1}}{(m+1)g^2k^m}$ atque $t = 2\sqrt{c}$ $= \frac{2n\sqrt{v}}{g} + \frac{2n^2v^{m+\frac{1}{2}}}{(2m+1)g^2k^m}$; hincque prodit $v = gx - \frac{ng^mx^{m+1}}{(m+1)k^m}$, et $\sqrt{v} = \sqrt{gx} - \frac{ng^{m-\frac{1}{2}}x^{m+\frac{1}{2}}}{2(m+1)k^m}$ atque $v^{m+\frac{1}{2}} = g^{m+\frac{1}{2}}x^{m+\frac{1}{2}} - \frac{n(2m+1)g^{2m-\frac{1}{2}}x^{2m+\frac{1}{2}}}{2(m+1)k^m}$ His autem valoribus substitutis prodit ista aequatio



tio $\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{x}} = n + \frac{n^2g^{m-1}x^m}{(2m+1)(2m+2)k^m} - \frac{n^3g^{2m-2}x^{2m}}{(2m+2)k^{2m}}$. Quia vero est $n = \frac{z}{x}$, habebitur ista aequatio $\sqrt{gcx} = z + \frac{g^{m-1}x^{m-1}z^2}{(2m+1)(2m+2)k^m} - \frac{g^{2m-2}x^{2m-2}z^3}{(2m+2)k^{2m}}$ seu $gcx = z^2 + \frac{g^{m-1}x^{m-1}z^3}{(m+1)(2m+1)k^m}$ si medium est rarissimum. Vnde patet si resistentia penitus euanescat fore $z^2 = gcx$ seu curuam AMC circulum diametri AC.

## Scholion.

504. Si igitur cognita fuerit curua AMC, et detur linea quaecunque determinari poterit recta AM super qua corpus ex A celerrime ad datam lineam pertingat. Scilicet construenda est curua AMC, quae datam lineam tangat v. g. in M; eritque recta AM ea recta super qua corpus descendendo ex A citissime ad lineam datam perueniat. Atque simili modo in praecedente problemate si recta vel curua tangat curuam CMD Tabula XII. Fig. 4.
in M, corpus ex A descendendo per AM vsque ad lineam tangentem curuam CMD maiorem acquiret celeritatem, quam descendendo super quauis alia recta ex A ad eam lineam ducta. Ex his igitur solui possunt problemata, quibus requiritur recta ex A ad datam lineam ducta, super qua corpus descendendo vel maximam acqui-


rat

rat celeritatem, vel citissime ad eam lineam pertingat. Quamobrem hisce problematibus non diutius immorabimur, sed ad ascensum super lineis rectis considerandum progrediemur.

# PROPOSITIO 58.

## Problema.

Tabula XII. Fig. 6.

505. *In hypothesi grauitatis uniformis g et medio quocunque resistente uniformi determinare motum corporis data cum celeritate initiali ex* A *ascendentis super linea recta* AB *vtcunque inclinata ad horizontem.*

## Solutio.

Ducta horizontali AC et ex M ad eam perpendiculari MP vocetur PM$=x$, sitque AM$=nx$. Sit altitudo debita celeritati initiali in A$=b$, et altitudo debita celeritati initiali in M$=v$; resistentia vero in M sit $=\frac{V}{K}$. His positis erit $dv=-g\,dx-\frac{nV\,dx}{K}$ (475.), vnde habetur $dx=\frac{-K\,dv}{gK+nV}$ atque $x=\int\frac{-K\,dv}{gK+nV}$ hoc integrali ita accepto vt euanescat posito $v=b$. Si deinde ponatur $v=0$, prodibit $x=$BC, vbi in puncto B corpus omnem celeritatem amittit. Tempus vero, quo corpus per AM ascendit est $=\int\frac{-nK\,dv}{(gK+nV)\sqrt{v}}$ hoc integrali quoque ita accepto, vt euanescat posito $v=b$, in quo

SUP… OTV PVNCTI
si p… eam lineam per-
ascen… matibus non diu-
AMB… sum super lineis
norm… ur.
58.
scent… uniformis g et me-
$-z=$… terminare motum
progr… ex A ascenden-
inclinata ad ho-
nenti…
Hoc … M ad eam per-
sitque AM$=nx$.
temp… in A$=b$, et al-
M$=v$; resisten-
sitis erit $dv=-$
$=\frac{-K\,dv}{gk+nV}$ atque
epto vt euane-
atur $v=0$, pro-
versa … rpus omnem ce-
$n^2(b$… quo corpus per
(2n… integrali quoque
$2n(\sqrt{}$… $v=b$, in quo
g … si



si porro ponatur $v=0$, prodibit tempus totius ascensus per AMB. Pressio autem, quam linea AMB sustinet, vbique est constans et aequalis vi normali $=\frac{g\sqrt{(n^2-1)}}{n}$. Q. E. I.

## Corollarium 1.

506. Si linea AMB sit horizontalis euanescente angulo BAC fiet $n=\infty$. Posito igitur AM $=z=nx$, erit $z=\int\frac{-K\,dv}{V}$, et tempus quo per AM progreditur erit $=\int\frac{-K\,dv}{V\sqrt{v}}$.

## Corollarium 2.

507. Si resistentia fuerit vt potestas exponentis $2m$ celeritatum erit $V=v^m$ et $K=k^m$. Hoc ergo casu erit $x=\int\frac{-k^m\,dv}{gk^m+nv^m}$, atque tempus per AM $=\int\frac{-nk^m\,dv}{(gk^m+nv^m)\sqrt{v}}$.

## Corollarium 3.

508. Vtraque haec expressio in seriem conversa dat $x=\frac{b-v}{g}-\frac{n(b^{m+1}-v^{m+1})}{(m+1)g^2k^m}+\frac{n^2(b^{2m+1}-v^{2m+1})}{(2m+1)g^3k^{2m}}-$ etc. Atque tempus per AM$=\frac{2n(\sqrt{b}-\sqrt{v})}{g}-\frac{2n^2(b^{m+\frac{1}{2}}-v^{m+\frac{1}{2}})}{(2m+1)g^2k^m}+$



2n

$\frac{2n^3(b^{2m+\frac{1}{2}} - v^{2m+\frac{1}{2}})}{(4m+1)g^3k^{2m}}$ — etc. Quamobrem posito $v=0$ erit $BC = \frac{b}{g} - \frac{nb^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} + \frac{n^2b^{2m+1}}{(2m+1)g^3k^{2m}}$ — etc. atque tempus totius ascensus per $AB = \frac{2n\sqrt{b}}{g} - \frac{2n^2b^{m+\frac{1}{2}}}{(2m+1)g^2k^m} + \frac{2n^3b^{2m+\frac{1}{2}}}{(4m+1)g^3k^{2m}}$ — etc.

## Exemplum I.

509. Sit resistentia celeritatibus proportionalis, erit $m = \frac{1}{2}$, atque $x = \int \frac{-dv\sqrt{k}}{g\sqrt{k}+n\sqrt{v}} = \frac{2\sqrt{bk}}{n} - \frac{2\sqrt{kv}}{n} + \frac{2gk}{n^2}\, l\frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{v}}{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}$. Hinc erit tota altitudo BC ad quam corpus pertingere valet $= \frac{2\sqrt{bk}}{n} - \frac{2gk}{n^2}\, l\frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$. Tempus vero, quo per AM ascendit est $= \int \frac{-ndv\sqrt{k}}{(g\sqrt{k}+n\sqrt{v})\sqrt{v}} = 2\sqrt{k}\, l\frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}+n\sqrt{v}}$. Quare

Tabula XII. Fig. 7. tempus totius ascensus per AMB erit $= 2\sqrt{k}\, l\frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$. Si igitur corpus super linea inclinata AC descenderit et celeritate in C acquisita ascendat in CB vsque ad B; sitque AC = N. AD et BC = $n$. BE atque celeritas in C debita altitudini $b$; erit $AD = -\frac{2\sqrt{bk}}{N} + \frac{2gk}{N^2}\, l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-N\sqrt{b}}$; $AC = -2\sqrt{bk} + \frac{2gk}{N}\, l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-N\sqrt{b}}$ (456); $BE = \frac{2\sqrt{bk}}{n} - \frac{2gk}{n^2}\, l\frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$; $CB = 2\sqrt{bk} - \frac{2gk}{n}\, l\frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$. Atque tempus descensus per $AC = 2\sqrt{k}\, l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-N\sqrt{b}}$ (cit.) et tempus ascensus per $CB = 2\sqrt{k}\, l\frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$. Vnde



de descensus et ascensus super lineis rectis inter se comparari possunt.

## Corollarium 4.

510. Si hi logarithmi per series exprimantur, patet fieri non posse, vt sit BE = AD, est enim in quacunque resistentiae hypothesi, vt ex seriebus (505. et 458.) intelligitur, $BE < \frac{b}{g}$ et $AD > \frac{b}{g}$. Fieri autem potest vt sit AC = BC.

## Corollarium 5.

511. Effici autem facile potest vt tempus descensus per AC aequale sit tempori ascensus per CB. Fieri scilicet debet $ng\sqrt{k} = Ng\sqrt{k} + Nn\sqrt{b}$, seu $n = \frac{Ng\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-N\sqrt{b}}$. Est igitur $n > N$ seu ang. BCE < ang. ACD. Relatio autem inter N et $n$ pendet a celeritate in puncto C.

## Corollarium 6.

512. Si autem angulus ECE aequalis fuerit angulo ACD, seu $N = n$ tempus ascensus per BC minus erit tempore descensus per AC. Atque hoc generaliter locum habet in quacunque resistentiae hypothesi; est enim tempus descensus per $AC > \frac{2n\sqrt{b}}{g}$ et tempus ascensus per $CB < \frac{2n\sqrt{b}}{g}$, vt ex seriebus supra datis (458. et 508.) apparet.

Exem-

## Exemplum 2.

Tabula XII. Fig. 6. 513. Resistat medium in duplicata ratione celeritatum, erit $m = 1$. Quare habebitur $x = \int \frac{-kdv}{gk + nv} = \frac{k}{n} l \frac{gk+nb}{gk+nv}$ atque $BC = \frac{k}{n} l \frac{gk+nb}{gk}$, et $AB = k\, l \frac{gk+nb}{gk}$ Tempus vero ascensus AM erit $= \int \frac{-n\,kdv}{(gk+nv)\sqrt{v}} = \frac{2\sqrt{kn}}{\sqrt{g}}$ (A. tang. $\sqrt{\frac{nb}{gk}}$ − A. tang. $\sqrt{\frac{nv}{gk}}$) existente radio $= 1$, et A denotante arcum circuli. Erit

Tabula XII. Fig. 7. ergo tempus ascensus per $AB = \frac{2\sqrt{kn}}{\sqrt{g}}$ A tang. $\sqrt{\frac{nb}{gk}}$ Si nunc corpus super linea inclinata AC descenderit, et celeritate in C acquisita, quae debita sit altitudini $b$ rursus ascendat per CB, fueritque $AC = N. AD$ et $BC = n. BE$, erit $AD = \frac{k}{N} l \frac{gk}{gk - Nb}$ et $AC = k\, l \frac{gk}{gk - Nb}$, atque tempus descensus per $AC = \frac{\sqrt{Nk}}{\sqrt{g}} l \frac{\sqrt{gk}+\sqrt{Nb}}{\sqrt{gk}-\sqrt{Nb}}$ (487.). Porro vero erit $BE = \frac{k}{n} l \frac{gk+nb}{gk}$; $BC = k\, l \frac{gk+nb}{gk}$ et tempus ascensus per $CB = \frac{2\sqrt{nk}}{\sqrt{g}}$ A. tang. $\sqrt{\frac{nb}{gk}}$.

## Corollarium 7.

514. In hac resistentiae hypothesi commode effici potest, vt fit $AC = BC$: debebit enim esse $ngk = Ngk + Nnb$, seu $n = \frac{Ngk}{gk - Nb}$. Est igitur $n > N$ hincque ang. $BCE < ACD$.

## Exemplum 3.

515. Sit resistentia quam minima et proportionalis potestati $2m$ celeritatum, erit $k$ quantitas vehe-



menter magna. Si ergo celeritas in C fuerit debita altitudini $b$ et $AC = N. AD$ atque $BC = n. BE$, corpusque super AC descendat et super CB ascendat; erit $AD = \frac{b}{g} + \frac{Nb^{m+1}}{(m+1)g^2k^m}$; et tempus descensus per $AC = \frac{2N\sqrt{b}}{g} + \frac{2N^2b^m\sqrt{b}}{(2m+1)g^2k^m}$ (488.). Pro ascensu vero erit $BE = \frac{b}{g} - \frac{nb^{m+1}}{(m+1)g^2k^m}$ et tempus per $CB = \frac{2n\sqrt{b}}{g} - \frac{2n^2b^m\sqrt{b}}{(2m+1)g^2k^m}$ (508). Si igitur effici debeat vt fit $AC = BC$, oportet esse $N + \frac{N^2b^m}{(m+1)gk^m} = n - \frac{n^2b^m}{(m+1)gk^m}$, vnde fit $n = N + \frac{2N^2b^m}{(m+1)gk^m}$, propter quantitatem $k$ valde magnam. At quo tempus descensus per AC aequale fit tempori ascensus per CB, debet esse $N + \frac{N^2b^m}{(2m+1)gk^m} = n - \frac{n^2b^m}{(2m+1)gk^m}$, seu $n = N + \frac{2N^2b^m}{(2m+1)gk^m}$.

## Scholion I.

516. In casu huius exempli, quo resistentia est valde parua, curua AMD potest determinari huius Tabula XII. Fig. 8.

huius proprietatis, vt corpus ex C celeritate altitudini $b$ debita ascendendo super quauis recta CM ad curuam AMD pertingat. Posita enim CM$=z$, et MP$=x$, erit $n=\frac{z}{x}$ atque $x=\frac{b}{g}-\frac{nb^{m+1}}{(m+1)g^2k^m}$. Quare habebitur ista aequatio $b^{m+1}z=(m+1)gbk^m x-(m+1)g^2k^m x^2$. Sit CP$=y$ et loco $\frac{b^{m+1}}{(m+1)gk^m}$ scribatur $f$ oritur $f\sqrt{(x^2+y^2)}=bx-gx^2$ seu $ffyy=(bb-ff)xx-2gbx^3+g^2x^4$. Si ponatur $y=o$, erit et $x=o$ et $x=\frac{b-f}{g}$ $=$ CA. Curua ergo etiam per punctum C transit, quae autem eius pars quaestioni satisfacere cessat, propter sequentes terminos neglectos, qui perperam negliguntur si $n$ seu $\frac{z}{x}$ fit quoque valde magnum. Aequatio vero dat curuam ellipsiformem maxime oblongam circa axem minorem AC descriptam. Vera autem curua habet formam AMD, cuius asymtotos est horizontalis CE, si quidem est $m>1$, eiusque aequatio habetur omnibus sumendis terminis, quae erit $xdz+(m-1)zdx=\frac{bk^m(zdx-xdz)}{gk^m x+b^m z}$. Si $m<1$ curua non in infinitum progredietur, sed incidet in CE sumendo CE$=\frac{bk^m}{(1-m)b^m}$. Nam si $m<1$ corpus horizontaliter non in infinitum progredi potest, sed in distantia finita omnem amittit celeritatem.

Scho-

SVPER [...] IV PVNCTI
C celeritate al- r quauis recta . Posita enim tque $x=\frac{b}{g}-$ aequatio $b^{m+1}$ Sit CP$=y$ tur $f\sqrt{(x^2+y^2)}$ $-2gbx^3+g^2$ $=o$ et $x=\frac{b-f}{g}$ nctum C trans- oni satisfacere os neglectos, $\frac{z}{x}$ fit quoque it curuam elli- ca axem mi- m curua habet orizontalis CE, uatio habetur erit $xdz+$ $m<1$ curua incidet in CE $m<1$ corpus redi potest, sed celeritatem. Scho-
51 tum lin cillime tandum mis. V tia $=\frac{V}{Q}$ stentiae positis primitu ergo cu haec er. sequens ua dete inuicem pothefes rum hui PQ$dx=$ tuimus stentiae sis his a cam tan si resiste ritatum. 518 sistentiae



## Scholion 2.

517. Si medium resistens non sit vniforme, tum linea non esset recta, super qua motus facillime determinari possit: idem quoque est notandum si potentia sollicitans non fuerit vniformis. Vt sit potentia sollicitans $=$ P et resistentia $=\frac{V}{Q}$, vbi Q talis est functio exponentis resistentiae variabilis $q$, qualis V est ipsius $v$: His positis motus corporis super quacunque curua exprimitur hac aequatione $dv=+Pdx\pm\frac{Vds}{Q}$. Eius ergo curuae, super qua motus facillime definitur, haec erit aequatio PQ$dx=$A$ds$, ex qua oritur sequens $\frac{Adv}{\pm A\pm V}=Pdx$, motum super hac curua determinans, in qua indeterminatae sunt a se inuicem separatae. Quare si etiam huiusmodi hypotheses persequi vellemus, loco linearum rectarum huiusmodi curuas hac aequatione expressas PQ$dx=$A$ds$ assumere deberemus. Sed quia statuimus hypothesin potentiae sollicitantis et resistentiae vniformis tantum susius pertractare, missis his ad eos casus progredimur, in quibus $v$ vnicam tantum habet dimensionem, id quod euenit, si resistentia proportionalis fuerit quadratis celeritatum.

## PROPOSITIO 59.
### Problema.

518. *In hypothesi grauitatis vniformis* g, *et resistentiae quadratis celeritatum proportionalis descen-* Tabula XII. Fig. 1.



*dat*

*dat corpus super curua quacunque* AMB; *determinare eius motum et pressionem, quam curua in singulis punctis sustinet.*

## Solutio.

In axe verticali sumatur abscissa $AP = x$ et ponatur arcus $AM = s$, celeritas in $M$ debita altitudini $v$ et exponens resistentiae $k$, erit resistentia $= \frac{v}{k}$. Quamobrem ista habebitur aequatio motum corporis exponens $dv = g\,dx - \frac{v\,ds}{k}$ (465). Ad hanc integrandam multiplico per $e^{\frac{s}{k}}$ eritque integralis $e^{\frac{s}{k}} v = \int e^{\frac{s}{k}} g\,dx$. Ita autem sumi debet hoc integrale, vt posito $s = 0$, abeat $v$ in altitudinem celeritati initiali in A debitam. Si igitur descensus ex quiete fieri ponatur, $e^{\frac{s}{k}} g\,dx$ ita debet integrari vt euanescat posito $s = 0$. Hoc itaque facto erit $v = g\,e^{\frac{-s}{k}} \int e^{\frac{s}{k}} dx$. Vnde tempus per AM erit $= \int \frac{e^{\frac{-s}{2k}} ds}{\sqrt{g \int e^{\frac{s}{k}} dx}}$. Posito nunc $PM = y$ sumtoque $dx$ constante, erit pressio, quam curua in M secundum normalem MN sustinet $= \frac{g\,dy}{ds} + \frac{2g\,e^{\frac{-s}{k}} dx\,ddy \int e^{\frac{s}{k}} dx}{ds^3}$. Q. E. I.

Co-

SVPE … OTU PUNCTI … AMB; determi- … curua in singu- … 51 … formam … abscissi AP=x et … dx, qu … in M debita al- … est e … k, erit resisten- … datur. … bitur aequatio mo- … (465). Ad … eritque in- … 52 … leritate … sumi debet … abeat v in altitu- … vbi est … ebitam. Si igitur … in … ita de- … rizontal … s=0. Hoc ita- … Vnde tempus … 52 … osito nunc PM=y … + … essio, quam curua … sustinet … + … re si h. … turam, … Co-



## Corollarium 1.

519. Pressio, quam curua sustinet in hanc formam potest transmutari $\frac{g\,ds}{e^{-\frac{s}{k}}dy\,dx} - d.\frac{dy^2 \int e^{\frac{s}{k}}}{ds^2}$ $dx$, quae, postquam pro data curua integratum est $e^{-\frac{s}{k}} dx$, commodius ad quosuis casus accommodatur.

## Corollarium 2.

520. Corpus in descensu maximam habet celeritatem, vbi est $v = \frac{g k\,dx}{ds}$. Hoc vero euenit vbi est $e^{\frac{s}{k}} k\,dx = ds \int e^{\frac{s}{k}} dx$, seu vbi $d.\, l \int e^{\frac{s}{k}} dx = \frac{ds}{k}$, in quo puncto patet tangentem non esse horizontalem.

## Corollarium 3.

521. Si fuerit $\int e^{\frac{s}{k}} dx = \frac{e^{\frac{s}{k}} s^n}{a^{n-1}}$, erit $dx = \frac{n s^{n-1} ds}{a^{n-1}} + \frac{s^n ds}{a^{n-1} k}$ atque $x = \frac{s^n}{a^{n-1}} + \frac{s^{n+1}}{(n+1)a^{n-1}k}$. Quare si haec aequatio exprimat curuae quaesitae naturam, erit $v = \frac{g s^n}{a^{n-1}}$ et tempus per AM $= \frac{2 a^{\frac{n-1}{2}} s^{\frac{2-n}{2}}}{(2-n)\sqrt{g}}$ si quidem $n$ fuerit minor binario; nam

nam si $n=2$ vel $n>2$, curua in A tangentem horizontalem habebit, atque corpus ibi perpetuo permanebit.

## Corollarium 4.

522. Simili modo etiam perspicitur, si $x$ fuerit potestas quaecunque ipsius $s$ vel huiusmodi potestatum aggregatum, semper integrari posse $e^{\frac{s}{k}}dx$ atque ideo celeritatem terminis finitis exhiberi.

## Corollarium 5.

523. Si autem abscissae in axe verticali BQ sumantur et celeritas, quam corpus in B habebit debita sit altitudini $b$; praetereaque vocetur BQ $=x$ et BM$=s$, erit $dv=-g\,dx+\frac{v\,ds}{k}$, cuius integralis est $e^{\frac{-s}{k}}v=b-g\int e^{\frac{-s}{k}}dx$ integrali scilicet $\int e^{\frac{-s}{k}}dx$ ita accepto vt euanescat posito $x=0$. Hanc ob rem erit $v=be^{\frac{s}{k}}-ge^{\frac{s}{k}}\int e^{\frac{-s}{k}}dx$, et tempus, quo in descensu arcus MB absoluitur $=$

$$\int\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{(b-g\int e^{\frac{-s}{k}}dx)}}.$$

## Corollarium 6.

524. Si igitur detur celeritas in puncto B nempe $\sqrt{b}$, inueniri potest in curua B M A punctum A, ex quo descendere incepit, vbique celeritatem ha-

SVPER V PVNCTI
habuit = tangentem ho- ibi perpetuo
$\int e^{\frac{-s}{k}}dx$
per AM licitur, si $x$ fuerit huiusmodi po- grari posse $e^{\frac{s}{k}}dx$ initis exhiberi.
525 dum ide to pund tum pun let, acc xe verticali BQ us in B habebit le vocetur BQ cuius integrali scilicet
526 medio v tatum; d data cur net in si posito $x=0$. $dx$, et tem- absoluitur $=$
In arcus A. et celer licitans fitis erit puncto B nempe A punctum A, ue celeritatem ha-



habuit $=0$. Quaeri debet scilicet locus, vbi est $\int e^{\frac{-s}{k}}dx=\frac{b}{g}$. Atque etiam expressio temporis $\int\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{(b-g\int e^{\frac{-s}{k}}dx)}}$ dabit tempus totius descensus per AMB, si post integrationem ponatur $\int e^{\frac{-s}{k}}dx=\frac{b}{g}$.

## Scholion.

525. Duplicem hic motum inuestigandi modum ideo attulimus, vt tam ad descensus ex dato puncto factos, quam ad descensus vsque ad datum punctum, vt in motu oscillatorio fieri solet, accommodari possit.

# PROPOSITIO 60.

## Problema.

526. *Existente potentia sollicitante vniformi et medio vniformi resistente in duplicata ratione celeritatum; determinare motum corporis ascendentis super data curua* AMD, *et pressionem quam curua sustinet in singulis punctis M.* Tabula XII. Fig. 2.

## Solutio.

In linea verticali AP ponatur abscissa AP$=x$, arcus AM$=s$; celeritas in A debita altitudini $b$, et celeritas in M altitudini $v$. Sit potentia sollicitans deorsum $=g$ et resistentia $=\frac{v}{k}$. His positis erit $dv=-g\,dx-\frac{v\,ds}{k}$ (475.), quae multiplicata

cata per $e^{\frac{s}{k}}$ dat integrale $e^{\frac{s}{k}}v = b - g\int e^{\frac{s}{k}}dx$ ita sumto $\int e^{\frac{s}{k}}dx$ vt euanescat posito $x = 0$. Hanc ob rem erit $v = e^{-\frac{s}{k}}b - ge^{-\frac{s}{k}}\int e^{\frac{s}{k}}dx$, atque tempus ascensus per arcum AM $= \int \frac{e^{\frac{s}{2k}}ds}{\sqrt{(b - g\int e^{\frac{s}{k}}dx)}}$. Ex inuenta celeritate habebitur pressio, quam curua in M secundum normalem MN patitur, $= \frac{gdy}{ds} - \frac{2vdxddy}{ds^3}$ (475), posito PM $= y$ et sumto $dx$ pro constante. Q. E. I.

## Corollarium 1.

527. Posito ergo $v = 0$, erit $g\int e^{\frac{s}{k}}dx = b$, ex qua aequatione obtinebitur punctum D, quousque corpus ex A ascendere poterit. Atque tempus totius ascensus per AMD habebitur, si in expressione temporis ponatur $g\int e^{\frac{s}{k}}dx = b$.

## Corollarium 2.

528. Si in formula pressionem exhibente loco $v$ eius valor inuentus substituatur, habebitur

$$-\frac{2e^{-\frac{s}{k}}bdxddy}{ds^3} + \frac{gdy}{ds} + \frac{2ge^{-\frac{s}{k}}dxddy\int e^{\frac{s}{k}}dx}{ds^3}$$

Quae transmutari potest in hanc formam —

2e

SVPER DATA L

$\frac{2e^{-\frac{s}{k}}bdxddy}{ds^3} + \ldots$

Co

529. Pro de debita quoque est ua in M secundum

$\frac{2e^{\frac{s}{k}}bdxddy}{ds^3} + \frac{g}{a}$

Co

530. Si igitur respectu axis AP determinans trans descensus scribendo re si super curua natus, habebitur q

531. Quia fo determinantes ta tem, ascensus et d comparari, atque curua determinari. sitione, quantum g stabimus.

Tom. II.

MOTU PUNCTI

$= b - g\int e^{\frac{s}{k}}dx$ ita posito $x = 0$. Hanc $dx$, atque tempus . Ex inlio, quam curua in atitur, $= \frac{gdy}{ds}$ — et sumto $dx$ pro

1.

erit $g\int e^{\frac{s}{k}}dx = b$, punctum D, quousterit. Atque temhabebitur, si in ex$e^{\frac{s}{k}}dx = b$.

2.

nem exhibente lotituatur, habebitur

nc formam —

2e



$$\frac{2e^{-\frac{s}{k}}bdxddy}{ds^3} + \frac{gds}{e^{\frac{s}{k}}dydx}\, d.\frac{dy^2}{ds^2}\int e^{\frac{s}{k}}dx.$$

## Corollarium 3.

529. Pro descensu vero, si celeritas in A debita quoque est altitudini $b$, pressio quam curua in M secundum normalem MN sustinet est $= -$

$$\frac{2e^{\frac{s}{k}}bdxddy}{ds^3} + \frac{ge^{\frac{s}{k}}ds}{dydx}\, d.\frac{dy^2}{ds^2}\int e^{-\frac{s}{k}}dx.$$

## Corollarium 4.

530. Si igitur tam ascensus quam descensus respectu axis AP definiatur, aequatio ascensum determinans transmutari potest in aequationem descensus scribendo $-k$ loco $k$; atque vicissim. Quare si super curua AM descensus fuerit determinatus, habebitur quoque ascensus et vicissim.

## Scholion.

531. Quia formulae ascensum et descensum determinantes tantam inter se habent affinitatem, ascensus et descensus facile poterunt inter se comparari, atque ideo oscillationes super data curua determinari. Id quod in sequente propositione, quantum generaliter fieri potest, praestabimus.

 PRO-

# PROPOSITIO 61.

## Problema.

Tabula XII Fig. 9.

532. *Sint curuae quaecunque* MA *et* NA *in infimo puncto* A *coniunctae, atque corpus descendat super curua* AN *in medio resistente uniformi secundum quadrata celeritatum; inter se comparare descensum super curua* MA *et ascensum super curua* AN.

## Solutio.

Sit celeritas in puncto A debita altitudini $b$; atque in axe verticali AP abscissa AP$=x$, arcus AM$=s$. Pro curua ascensus AN vero sit AQ$=t$ et AN$=r$. His positis erit corporis descendentis celeritas in M debita altitudini $e^{\frac{s}{k}}b-ge^{\frac{s}{k}}\int e^{\frac{-s}{k}} dx$. (523.) Corporis vero ascendentis super curua AN celeritas in N debita est altitudini $e^{\frac{-r}{k}}b-ge^{\frac{-r}{k}}\int e^{\frac{r}{k}}dt$ (526). Quare si celeritates in M et N euanescant, ita vt MAN sit arcus vna semioscillatione descriptus erit $\frac{b}{g}=\int e^{\frac{-s}{k}}dx$ et $\frac{b}{g}=\int e^{\frac{r}{k}}dt$. Si nunc concipiatur alia semioscillatio arcum $m$ A$n$ absoluens, in qua celeritas in puncto A debita sit altitudini $b+db$, erit $\frac{b+db}{g}=\int e^{\frac{-s}{k}}dx+e^{\frac{-s}{k}}dx$, hincque $e^{\frac{-s}{k}}dx=\frac{db}{g}$, seu $e^{\frac{-AM}{k}}.Pp=\frac{db}{g}$. Similiter pro ascensu erit $e^{\frac{AN}{k}}.Qq=\frac{db}{g}$. Ex quibus

SUPER ... OTU PUNCTI

...61.

bus fiet ... Dato erg... scripto, ... $m$ descen... quod supr... $\frac{Pp}{e^{\frac{AM+AN}{k}}}$

MA *et* NA *in* ... *corpus descendat* ... *uniformi secun-* ... *comparare descen-* ... *uper curua* AN.

533. arcus osci... per $Qq<$ ... quo maio... per igitur

...bita altitudini $b$; ... AP$=x$, arcus ... vero sit AQ$=t$ ... oris descenden- ... ni $e^{\frac{s}{k}}b-ge^{\frac{s}{k}}\int e^{\frac{-s}{k}}$ ... dentis super cur- ... altitudini $e^{\frac{-r}{k}}b-$

534. $=1$; fierq... re corpus ... altitudinen

...ates in M et N ... vna semioscil- ... x et $\frac{b}{g}=\int e^{\frac{r}{k}}dt$. ... llatio arcum $m$ ... n puncto A de- ... $\frac{db}{}=\int e^{\frac{-s}{k}}dx+$ ... $\frac{-AM}{}k.Pp=\frac{db}{g}$. Si- ... $=\frac{db}{g}$. Ex quibus

535. que $k$ veh... $\frac{MAN}{k}$. Qua... que $Qq=$



bus fiet $\frac{Pp}{Qq}=e^{\frac{AM+AN}{k}}$, seu $l Pp-l Qq=\frac{AM+AN}{k}$. Dato ergo arcu MAN vna semioscillatione descripto, si corpus in puncto proximo superiore $m$ descendere incipiat, inuenietur punctum $n$ ad quod supra N pertinget: erit nempe $Qq=\frac{Pp}{e^{\frac{AM+AN}{k}}}$. Q. E. I.

## Corollarium 1.

533. Si igitur MAN et $m$A$n$ fuerint duo arcus oscillationibus proximis descripti, erit semper $Qq<Pp$, eoque minus erit $Qq$ quam $Pp$, quo maior fuerit summa arcuum AM+AN. Semper igitur quoque erit AQ minor quam AP.

## Corollarium 2.

534. In vacuo, quia est $k=\infty$, erit $e^{\frac{AM+AN}{k}}=1$; fietque $Qq=Pp$, atque hinc AQ$=$AP. Quare corpus oscillans in vacuo ad tantam ascendit altitudinem, quanta erat illa ex qua descendit.

## Corollarium 3.

535. Si resistentia fuerit valde parua, ideoque $k$ vehementer magnum, erit $e^{\frac{AM+AN}{k}}=1+\frac{MAN}{k}$. Quare hoc casu erit $Qq+\frac{MAN.Qq}{k}=Pp$, atque $Qq=\frac{Pp(k-MAN)}{k}$.

## Corollarium 4.

536. Si punctum O fuerit locus, in quo corpus descendens maximam habet celeritatem, ibique ponatur $AO = s$, $AS = x$, erit $\frac{gkdx}{ds} = e^{\frac{s}{k}} b - g e^{\frac{s}{k}} \int e^{\frac{-s}{k}} dx$, seu $b = g \int e^{\frac{-s}{k}} dx + \frac{gkdx}{ds}$. Quare si corpus ex $m$ descendat, erit punctum maximae celeritatis in $o$, existente $db = g e^{\frac{-s}{k}} dx + \frac{gkdy}{p}$ existente $dy = ov$ et radio osculi in puncto O, seu $\frac{db}{g} = e^{\frac{-AO}{k}} Ss + \frac{kov}{p}$.

## Corollarium 5.

537. Tempus vnius itus per MAN habetur, si in integralium summa $\int \frac{e^{\frac{-s}{2k}} ds}{\sqrt{(b - g\int e^{\frac{-s}{k}} dx)}} + \int \frac{e^{\frac{t}{2k}} dt}{\sqrt{(b - g\int e^{\frac{t}{k}} dt)}}$ ponatur $\int e^{\frac{-s}{k}} dx = \frac{b}{g}$ atque $\int e^{\frac{t}{k}} dt = \frac{b}{g}$. Sicque prodibit tempus vnius semioscillationis.

## Corollarium 6.

538 Ex dictis alia elegans sequitur proprietas, vt si corpus ex A celeritate $\sqrt{b}$ ascendat ad N atque ex N iterum decidat per NA sitque celeritas quam tum in A habebit debita altitudini $c$. Dein-



Deinde ex A celeritate altitudini $b + db$ debita ascendat pertingatque ad $n$, vnde rursus descendendo in A acquirat celeritatem altitudini $c + dc$ debitam. Erit ergo $\frac{db}{g} = e^{\frac{AN}{k}} . Qq$ et $\frac{dc}{g} = e^{\frac{-AN}{k}} . Qq$. Atque $Qq^2 = \frac{db . dc}{g^2}$, vel etiam $\frac{db}{dc} = e^{\frac{2AN}{k}}$.

## Scholion.

539. Restat vt haec generalia ad exempla seu datas curuas accommodemus, quo vsus eorum eo magis pateat. Accipiemus autem pro curua data cycloidem tantum, eo quod $\int e^{\frac{s}{k}} dx$ in ea facile possit exhiberi, et aequatio quoque inter $s$ et $x$ sit algebraica. Inuestigabimus ergo tam descensus super cycloide factos, quam oscillationes, quo appareat, quantum oscillationes, quae in cycloide fiunt, ab isochronismo discrepent; quippe quae in vacuo omnes eodem tempore absolui sunt demonstratae.

## PROPOSITIO 62.

### Problema.

540. *Sit curua data cyclois* ACB *super basi horizontali* AB *prouolutione circuli diametri* CD *descripta; corpusque super ea ex* A *descendat in medio resistente in duplicata ratione celeritatum, determinare motum corporis descendentis.* Tab. XIII. Fig. 1.

 So-

## Solutio.

Posita $2CD=a$, $AL=x$, et $AM=s$ erit ex natura cycloidis $s=a-\sqrt{(a^2-2ax)}$ seu $2ax=2as-ss$. Celeritas vero in M debita sit altitudini $v$, erit $v=ge^{\frac{-s}{k}}\int e^{\frac{s}{k}}dx$. Quia autem est $dx=ds-\frac{sds}{a}$, erit $\int e^{\frac{s}{k}}dx=ke^{\frac{s}{k}}+\frac{k^2e^{\frac{s}{k}}}{a}-\frac{ke^{\frac{s}{k}}s}{a}-k-\frac{k^2}{a}=e^{\frac{s}{k}}\left(\frac{ak+k^2-ks}{a}\right)-\frac{ak-k^2}{a}$. Quo valore substituto erit $v=\frac{gak+gk^2-gks}{a}-\frac{ge^{\frac{-s}{k}}(ak+k^2)}{a}$. Maxima corporis erit celeritas vbi est $v=\frac{gkdx}{ds}=\frac{gak-gks}{a}$, hoc igitur accidit vbi est $e^{\frac{s}{k}}k=a+k$ seu $s=kl\frac{a+k}{k}$. Inueniri etiam potest punctum N in quo corpus omnem celeritatem perdit faciendo $v=0$ seu $e^{\frac{s}{k}}=\frac{a+k}{a+k-s}$ seu $s=kl\frac{a+k}{a+k-s}$, ex qua aequatione valor ipsius $s$ dat arcum ACN. Tempus quo arcus AM descensu absoluitur est $=\int\frac{ds\sqrt{a}}{\sqrt{gk(a+k-s-e^{\frac{-s}{k}}(a+k))}}$.

Deinde ad pressionem inueniendam est $\frac{dy}{ds}=\frac{\sqrt{(2as-ss)}}{a}=\frac{\sqrt{2ax}}{a}$, vnde pressio ipsa in puncto M prodit

$$=\frac{g\sqrt{2ax}}{a}+\frac{2gak+2gkk-2gks}{a\sqrt{2ax}}-\frac{2gak-2gkk}{e^{\frac{s}{k}}a\sqrt{2ax}}$$

De-

SVPER ... V PVNCTI
Deter ... pressi ... AM=s erit



Determinauimus ergo celeritatem, et tempus, et pressionem, vnde motus corporis innotescit. Q.E.I.

## Corollarium 1.

541. Quia est $e^{\frac{-s}{k}}=1-\frac{s}{1.k}+\frac{s^2}{1.2k^2}-\frac{s^3}{1.2.3k^3}+$ etc. si ponatur $a+k=c$ seu $a=c-k$ erit $\frac{(c-k)v}{gk}=-s+\frac{cs}{1.k}-\frac{cs^2}{1.2k^2}+\frac{cs^3}{1.2.3k^3}-$ etc. $=\frac{as}{1.k}-\frac{cs^2}{1.2k^2}+\frac{cs^3}{1.2.3k^3}-$ etc. Quare erit $v=\frac{gs}{a}\left(\frac{a}{1}-\frac{s}{1.2}-\frac{as}{1.2k}+\frac{(a+k)s^2}{1.2.3k^2}-\frac{(a+k)s^3}{1.2.3.4k^3}+\text{etc.}\right)$

## Corollarium 2.

542. In vacuo igitur, vbi $k$ est infinitum, erit $v=gs-\frac{gs^2}{2a}=gx$, vt constat. At si resistentia tantum sit valde parua et propterea $k$ valde magnum erit $v=gs-\frac{gs^2}{2a}-\frac{gs^2}{2k}+\frac{gs^3}{6ak}$.

## Corollarium 3.

543. In vacuo apparet celeritatem corporis esse nullam in duobus punctis vbi est $s=0$ et $s=2a$, i. e. in duobus cuspidibus A et B. In medio vero resistente alter locus est $s=0$, alter vero ex hac aequatione erui debet $a=\frac{cs}{1.2k}-\frac{cs^2}{1.2.3k^2}+\frac{cs^3}{1.2.3.4k^3}-$ etc. vnde inuenitur $s=\frac{2ak}{c}+\frac{4a^2k}{3c^2}+\frac{13a^3k}{9c^3}+\frac{196a^4k}{135c^4}+$ etc. Si igitur $k$ fuerit valde magnum erit $s=\frac{2ak}{a+k}+\frac{4a^2k}{3(a+k)^2}=2a-\frac{2a^2}{3k}$ quam proxime.

Co-

## Corollarium 4.

544. Eadem haec feries inuenta fubftituto $a+k$ loco $c$ transformatur in hanc $s = 2a - \frac{2a^2}{3k} + \frac{7a^3}{9k^2} - \frac{119a^4}{135k^3} +$ etc. ex qua valor ipfius $s$ dat arcum ACN, quo vsque corpus motu fuo peruenire poteft.

## Corollarium 5.

545. Arcus AO ab A vsque ad O, vbi corpus maximam habet celeritatem, eft $= k\,l\frac{c+k}{k} = a - \frac{a^2}{2k} + \frac{a^3}{3k^2} - \frac{a^4}{4k^3} + \frac{a^5}{5k^4} -$ etc. Quare erit arcus $ON = a - \frac{a^2}{6k} + \frac{4a^3}{5k^2} -$ etc. $OC = \frac{a^2}{2k} - \frac{a^3}{3k^2} + \frac{a^4}{4k^3} -$ etc. et $-AO + ON = \frac{a^2}{3k} + \frac{c^3}{9k^2}$.

## Corollarium 6.

546. Celeritas vero in puncto C reperitur debita altitudini $= \frac{gk^2 - ge^{\frac{-a}{k}}(ak+kk)}{a} = g(\frac{a}{2} - \frac{a^2}{1.3k} + \frac{a^3}{1.2.4k^2} - \frac{a^4}{1.2.3.5k^3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.6k^4} -$ etc. ). Vnde perfpicitur celeritatem in C nunquam poffe effe euanefcentem; nam altitudo huic celeritati debita eft $= \frac{gk^2}{e^{\frac{a}{k}}a}(e^{\frac{a}{k}} - 1 - \frac{a}{k})$, atque $e^{\frac{a}{k}}$ femper maius eft quam $1 + \frac{a}{k}$; exceffus autem maior eft quam $\frac{a^2}{2k^2}$. Quare altitudo debita celeritati in C ma-

SUPE … VTV PVNCTI

maior … inuenta fubftituto … hanc $s = 2a - \frac{2a^2}{3k}$

quam … ipfius $s$ dat ar- … motu fuo perue-

54- O eft etc.). titudin … ad O, vbi cor- … eft $= k\,l\frac{c+k}{k} =$ … Quare erit ar- … $= \frac{a^2}{2k} - \frac{a^3}{3k^2} + \frac{a^4}{4k^3}$ … +etc. valore pe cui

cto C reperitur … $+kk)$ … $= g$ … $\frac{a^5}{2.3.4.6k^4} -$ etc. ). … C nunquam poffe … huic celeritati … $e^{\frac{a}{k}}$ femper ma- … autem maior eft … a celeritati in C ma-

54 derandi tum de arcu C eft, an autem cile pe $dv = gd$ C cade hanc $d$ cenfus inter a Tom. I



maior eft quam $\frac{ga}{2e^{\frac{a}{k}}}$, ideoque ACN maior eft quam AC.

## Corollarium 7.

547. Altitudo debita celeritati maximae in O eft $= gk - \frac{gk^2}{a}\,l\frac{a+k}{k} = g(\frac{a}{2} - \frac{a^2}{3k} + \frac{a^3}{4k^2} - \frac{a^4}{5k^3} +$ etc.). Quare exceffus huius altitudinis fupra altitudinem celeritati in C debitam eft $= g(\frac{a^3}{1.2.4k^2} - \frac{5a^4}{1.2.3.5k^3} + \frac{23a^5}{1.2.3.4.6k^4} -$ etc.$) = ge^{\frac{-a}{k}}(\frac{a^2}{6k} + \frac{a^4}{24k^3}$ +etc. Haec nempe expreffio obtinetur, fi in generali valore ipfius $v$ fubftituatur $k\,l\frac{a+k}{k}$ loco $s$, quippe cui quantitati arcus AO eft aequalis.

## Scholion.

548. In folutione huius propofitionis confiderandum venit, quod ex formula defcenfum tantum determinante etiam afcenfum corporis fuper arcu CN deriuauimus; ex quo dubium oriri poteft, an ifte afcenfus legitime fit definitus. Hoc autem ex ipfa formula afcenfum determinante facile perfpicitur. Vfi enim fuimus formula hac $dv = gdx - Rds$, quae puncto M vltra punctum C cadente propter $dx$ factum negatiuum abit in hanc $dv = -gdx - Rds$, quae reuera naturam afcenfus continet. Ex his intelligitur continuitas inter afcenfum et defcenfum, qua nullo interiecto

 falt-

faltu inter se cohaerent. Vbi enim curua se sursum flectere incipit, ibi simul formula descensui inferuiens transmutatur sponte in formulam ascensus. Atque haec connexio locum habet in medio quocunque resistente, vti ex generalibus formulis apparet, quae tantum signo ipsius $dx$ discrepant. Quamobrem data aequatione pro curua quacunque, non est necesse vt inquiratur, super quanam parte corpus ascendat descendatve, sed alterutra formula ad aequationem accommodata verum dabit motum super curua proposita. Hoc tantum est tenendum, vt abscissae in axe verticali capiantur, atque ea formula siue ascensus siue descensus adhibeatur, quae cum motus initio congruat.

# PROPOSITIO 65.

## Problema.

Tab. XIII. Fig. 1. 549. *Sit curua data ACB cyclois super basi horizontali AB descripta et deorsum spectans, corpusque super ea oscillationes peragat in medio resistente in duplicata ratione celeritatum, determinare motum oscillatorium.*

## Solutio.

Ponatur diameter circuli $CD = \frac{1}{2}a$, in eaque sumatur abscissa $CP = x$, et arcus CM vocetur $s$, erit ex natura cycloidis $s = \sqrt{2ax}$ et $x = \frac{ss}{2a}$ atque $dx = \frac{sds}{a}$. Descendat nunc corpus super arcu

SUPER I … MOTU PVNCTI

cu MC, fi … enim curua se sursum … mula descensui inser… ni $b$, erit … formulam ascensus … habet in medio quo… $-ge^{\frac{s}{k}}\int e^{\frac{-s}{k}}$ … eralibus formulis ap… ius $dx$ discrepant … pro curua quacun… iratur, super quanam … latve, sed alterutra … nmodata verum da… ritati in M … psita. Hoc tantum … axe verticali capi… ascensus siue descen… Arcus ergo … tus initio congruat.

si ipsius $s$ … ) 65. … B cyclois super basi … rsum spectans, cor… loco $\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$. … at in medio resistente … si quidem c … perit. Cel… determinare motum … O sumto C … seu CO $= k$ … celeritati de… CD $= \frac{1}{2}a$, in eaque … us CM vocetur $s$ … conuenit ad … $2ax$ et $x = \frac{ss}{2a}$ at… respicere, et … corpus super ar… rem pono a … cu



cu MC, sitque eius celeritas in C debita altitudini $b$, erit altitudo debita celeritati in $M = e^{\frac{s}{k}}b - ge^{\frac{s}{k}}\int e^{\frac{-s}{k}}dx$ (523.). Est vero $\int e^{\frac{-s}{k}}dx = \int \frac{e^{\frac{-s}{k}}sds}{a}$ $= \frac{k^2 - k^2 e^{\frac{-s}{k}} - ke^{\frac{-s}{k}}s}{a}$; quare altitudo debita celeritati in M est $= \frac{e^{\frac{s}{k}}(ab - gk^2) + gk^2 + gks}{a} =$ $e^{\frac{s}{k}}b - \frac{g}{a}\left(\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{2.3k} + \frac{s^4}{2.3.4.k^2} + \frac{s^5}{2.3.4.5k^3} + \text{etc.}\right)$ Arcus ergo in quo integer fit descensus habebitur si ipsius $s$ valor ex hac aequatione quaeratur: $e^{\frac{s}{k}} = \frac{gk^2 + gks}{gk^2 - ab}$. Fiet autem hinc in serie $s = A + \frac{A^2}{3k} + \frac{5A^3}{24k^2} + \frac{11A^4}{180k^3} +$ etc. posito breuitatis ergo A loco $\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$. Huic ergo seriei aequatur arcus CM, si quidem corpus ex puncto M descendere inceperit. Celeritatem maximam corpus habebit in O sumto $CO = s$ ex hac aequatione $e^{\frac{s}{k}} = \frac{gk^2}{gk^2 - ab}$ seu $CO = kl\frac{gk^2}{gk^2 - ab}$, atque altitudo huic maximae celeritati debita est $= \frac{gk.CO}{a} = \frac{gk^2}{a}\, l\frac{gk^2}{gk^2 - ab} = b + \frac{ab^2}{2gk^2} + \frac{a^2b^3}{3g^2k^4} +$ etc. Ad tempus determinandum conuenit ad punctum O celeritatemque maximam respicere, et tempus per MO definire. Hanc ob rem pono altitudinem celeritati in O debitam $= c$, et et arcum $MO = q$, erit $CO = \frac{ac}{gk}$ et $ab = gk^2(1 - e^{\frac{-ac}{gk^2}})$, $s = \frac{ac}{gk} + q$. His substitutis erit altitudo debita celeritati in M seu $v = \frac{gk^2 + ac + gkq - e^{\frac{q}{k}}gk^2}{a}$. Quia nunc $v$ minor est quam $c$, pono $c - v = z$, eritque $az + gk^2 + gkq = e^{\frac{q}{k}}gk^2$ atque in serie $\frac{az}{g} = \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{6k} + \frac{q^4}{24k^2} + \frac{q^5}{120k^3} +$ etc. Ex qua conuertendo fit $q = \frac{\sqrt{2az}}{\sqrt{g}} - \frac{az}{3gk} + \frac{az\sqrt{2az}}{18gk^2\sqrt{g}} - \frac{2a^2z^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2z^2\sqrt{2az}}{1080g^3k^4\sqrt{g}} -$ etc. Incipiat descensus in puncto M, erit ibi $v = 0$ et $z = c$, ideoque $OM = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} - \frac{ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}} - \frac{2a^2c^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{1080g^3k^4\sqrt{g}} -$ etc. Ex eadem formula, si ponatur $q$ negatiuum, habebitur motus per OCN: at quia perinde est, siue $q$ ponatur negatiuum siue $k$, erit arcus ON, si N fuerit punctum quousque corpus ascendit, $= \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}} + \frac{2a^2c^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{1080g^3k^4\sqrt{g}} +$ etc. Tempus vero per MO hoc modo inuenitur; quia est $ds = dq = \frac{adz}{\sqrt{2gaz}} - \frac{adz}{3gk} + \frac{adz\sqrt{2az}}{12gk^2\sqrt{g}} - \frac{4a^2zdz}{135g^2k^3} + \frac{a^2zdz\sqrt{2az}}{432g^3k^4\sqrt{g}} -$ etc. hoc diuisum per $\sqrt{v} = \sqrt{(c-z)}$ dat elementum temporis $= \frac{dz\sqrt{a}}{\sqrt{2g}\sqrt{(cz-z^2)}} - \frac{adz}{3gk\sqrt{(c-z)}} + \frac{azdz\sqrt{2a}}{12gk^2\sqrt{g}\sqrt{(cz-zz)}} - \frac{4a^2zdz}{135g^2k^3\sqrt{(c-z)}} + \frac{a^2z^2dz\sqrt{2a}}{432g^3k^4\sqrt{g}\sqrt{(cz-z^2)}} -$ etc. Quod ita integrari debet vt posito $v = c$ vel $z = 0$ euanescat; deinde si ponatur $z = c$ habebitur tempus quo corpus per arcum MO descendit. Hoc igitur tempus posita peripheriae ad diametrum ratione



ratione $\pi$ ad 1 erit $= \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2g}} - \frac{2a\sqrt{c}}{3gk} + \frac{\pi ac\sqrt{a}}{12gk^2\sqrt{2g}} - \frac{4a^2c\sqrt{c}}{135g^2k^3} +$ etc. Posito igitur $k$ negatiuo erit tempus quo corpus ex O ad N vsque ascendit $= \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2g}} + \frac{2a\sqrt{c}}{3gk} + \frac{\pi ac\sqrt{a}}{12gk^2\sqrt{2g}} + \frac{4a^2c\sqrt{c}}{135g^2k^3} +$ etc. Tempus ergo per MCN seu tempus vnius dimidiae oscillationis est $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi ac\sqrt{2a}}{12gk^2\sqrt{g}} +$ etc. Q. E. I.

## Corollarium 1.

550. Si ergo celeritas maxima corporis descendentis fuerit debita altitudini $c$, propter $CO = \frac{ac}{gk}$ erit $MC = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}} - \frac{2a^2c^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{1080g^3k^4\sqrt{g}} -$ etc. Totus vero ascensus CN erit $= ON - CO = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} - \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}} + \frac{2a^2c^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{1080g^3k^4\sqrt{g}} +$ etc. Hinc erit $CM - CN = \frac{4ac}{3gk} - \frac{4a^2c^2}{135g^2k^3} -$ etc. atque $MCN = \frac{2\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{9gk^2\sqrt{g}} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{540g^3k^4\sqrt{g}} +$ etc.

## Corollarium 2.

551. Si totus arcus descensus MC ponatur $= E$ et sequens arcus ascensus $CN = F$, atque altitudo debita celeritati in $C = b$, erit $\frac{ab}{g} = k^2 - e^{\frac{-E}{k}}(k^2 + kE) = \frac{E^2}{2} - \frac{E^3}{3k} + \frac{E^4}{8k^2} - \frac{E^5}{30k^3} + \frac{E^6}{144k^4} -$ etc. Atque posito $k$ negatiuo eodem modo inuenitur $\frac{ab}{g} = \frac{F^2}{2} + \frac{F^3}{3k} + \frac{F^4}{8k^2} + \frac{F^5}{30k^3} + \frac{F^6}{144k^4} +$ etc. Ex quibus fit $F = E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2} - \frac{26E^4}{135k^3} + \frac{86E^6}{405k^6} -$ etc.



at-

atque altitudo debita celeritati maximae $c = \frac{gE^2}{2a} - \frac{gE^3}{3ak} + \frac{gE^4}{4ak^2} - \text{etc.}$

## Corollarium 3.

552. Quia F est arcus ascensus in prima dimidia oscillatione, erit idem arcus F arcus descensus in sequente oscillatione: cum quo ergo coniungetur arcus ascensus $G = E - \frac{4E^3}{3k} + \frac{15E^4}{9k^2} - \frac{28E^5}{15k^3} + \frac{964E^6}{4\cdot 45k^4} - \text{etc.}$ Atque simili modo sequentes oscillationes quotquot libuerit definiri possunt.

## Corollarium 4.

553. Ex aequatione tempus exponente apparet tempus quo corpus ex M ad O peruenit semper minus esse tempore quo corpus ex O ad N vsque pertingit. Simili modo etiam arcus ON maior est quam arcus OM, arcus vero CN minor est arcu MC.

## Corollarium 5.

554. Si oscillationes fuerint infinite paruae, seu $c$ quantitas euanescens, congruent oscillationes cum oscillationibus in vacuo factis; in singulis enim expressionibus iidem termini euanescent, qui euanescerent posito $k = \infty$. Minimis ergo oscillationibus isochronae erunt oscillationes penduli longitudinis $a$ in vacuo, sollicitati a potentia $g$, seu penduli in hypothesi grauitatis $= 1$, cuius longitudo est $= \frac{a}{g}$.

Co-



## Corollarium 6.

555. At si oscillationes fiant maiores, tempora oscillationum quoque fient maiora, quare in hac resistentiae hypothesi cycloïs tautochronismi proprietate non gaudet. Quo enim in quaque oscillatione maior fuerit celeritas maxima, maior quoque erit excessus temporis oscillationis huiusmodi supra tempus oscillationis minimae.

## Scholion I.

556. Quod diximus oscillationes minimas cum oscillationibus in vacuo congruere locum habet, si $a$ et $k$ fuerint quantitates finitae magnitudinis. Si enim $a$ esset infinite magnum, seu $k$ infinite paruum, sequentes termini tempus exprimentes $\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi ac\sqrt{2a}}{128k^2\sqrt{g}} + \text{etc.}$ non euanescerent etiamsi $c$ esset infinite paruum. Tum igitur tantum oscillationes minimae super curua quacunque in vacuo et medio resistente inter se congruent, quando neque radius osculi curuae in infimo puncto fuerit infinite magnus, neque resistentia infinite magna.

## Exemplum.

557. Exempli loco euoluamus casum, quo resistentia tam sit exigua, ideoque $k$ quantitas tam magna vt fractiones, in quarum denominatoribus $k$ plures duabus habet dimensiones, tuti pro nihilo haberi possint. Dicta igitur altitudine celeritati maximae in O debita $c$, ita vt sit $CO = \frac{ac}{gk}$, erit

erit arcus descensus $MC = E = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}$ et sequens arcus ascensus $CN = F = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} - \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}$. Vnde inuenitur $\sqrt{c} = \frac{E\sqrt{g}}{\sqrt{2a}} - \frac{E^2\sqrt{g}}{3k\sqrt{2a}} + \frac{7E^3\sqrt{g}}{36k^2\sqrt{2a}}$, seu $c = \frac{gE^2}{2a} - \frac{gE^3}{3ak} + \frac{gE^4}{4ak^2}$ atque $F = E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2}$. Tempus ergo dimidiae oscillationis per $MCN$ est $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}}$. In sequente dimidia oscillatione est arcus descensus $= F = E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2}$, quem sequetur arcus ascensus $G = E - \frac{4E^2}{3k} + \frac{16E^3}{9k^2}$; atque tempus huius dimidiae oscillationis erit $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}} - \frac{\pi E^3\sqrt{2a}}{18k^3\sqrt{g}}$, vbi vltimus terminus negligi potest ob $k^3$ in denominatore. In tertia semioscillatione est arcus descensus $= G = E - \frac{4E^2}{3k} + \frac{36E^3}{9k^2}$, et arcus descensus $= H = E - \frac{6E^2}{3k} + \frac{36E^3}{9k^2}$. Atque generaliter in ea semioscillatione, quae indicatur numero $n$ est arcus descensus $= E - \frac{2(n-1)E^2}{3k} + \frac{4(n-1)^2E^3}{9k^2}$ et arcus ascensus $= E - \frac{2nE^2}{3k} + \frac{4n^2E^3}{9k^2}$. Quamobrem post $n$ semioscillationes corpus ab infimo puncto C distabit arcu $E - \frac{2nE^2}{3k} + \frac{4n^2E^3}{9k^2}$, qui minor est quam arcus descensus primae oscillationis quantitate $\frac{2nE^2}{3k} - \frac{4n^2E^3}{9k^2}$. Tempus autem semioscillationis numero $n$ indicatae erit $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}} - \frac{\pi(n-1)E^3\sqrt{2a}}{18k^3\sqrt{g}}$. At si totus arcus primae semioscillationis $MCN$ dicatur A, erit $A = 2E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2}$ et $E = \frac{A}{2} + \frac{A^2}{12k}$ euanescente sponte termino sequente. Hinc





sequente. Hinc totus arcus oscillatione per numerum $n$ indicata descriptus erit $= 2E - \frac{2(2n-1)E^2}{3k} + \frac{4(2n^2-2n+1)E^3}{9k^2} = A - \frac{(n-1)A^2}{3k} + \frac{(n-1)^2A^3}{9k^2}$.

## Corollarium 7.

558 Si $n$ fiant oscillationes dimidiae et arcus descensus primae oscillationis fuerit E et arcus ascensus vltimae $= L$, erit $L = E - \frac{2nE^2}{3k} + \frac{4n^2E^3}{9k^2}$, quae expressio, si per seriem propius capiatur, fere congruet cum progressione geometrica eiusdem initii, hancque ob rem erit $L = \frac{3Ek}{3k + 2nE}$ seu $3k(E-L) = 2nEL$.

## Corollarium 8.

559. Hinc si peractis aliquot semioscillationibus detur arcus descensus primae oscillationis E, vna cum arcu ascensus vltimae L inueniri potest numerus semioscillationum $n$ est, namque $n = \frac{3k(E-L)}{2EL}$.

## Corollarium 9.

560. Patet ergo diminutionem arcuum non a longitudine penduli pendere, sed ex $n$ et E datis idem reperitur arcus L quaecunque fuerit longitudo penduli $a$. Atque e semper $n$ proportionalis ipsi $\frac{1}{L} - \frac{1}{E}$.

## Scholion 2.

561. Huiusmodi experimenta circa oscillationes in medio resistente multa recenset Newt. in

Phil. Lib. II. vbi notat arcum descensus primae, arcum descensus vltimae oscillationis atque numerum oscillationum tam in aëre quam in aqua et mercurio. Quare si haec media perfecte resisterent in duplicata celeritatum ratione, congrua esse deberent cum hisce formulis, ita vt decrementum arcus proportionale esset numero oscillationum et arcui primo et vltimo coniunctim. Quod etiam locum habere obseruaui in maioribus oscillationibus, in quibus celeritas non est nimis exigua. At in oscillationibus minimis maxima aberratio ab hac regula conspicitur. Ex quo colligitur quo maior fuerit corporis celeritas in fluido, eo propius resistentiam accedere ad rationem duplicatam celeritatum, motum autem tardissimum alii resistentiae insuper esse obnoxium, quae in motibus celerioribus prae resistentia, quae quadratis celeritatum est proportionalis, euanescat. In hisce quoque experimentis Newtonus resistentiam partim simplici celeritatum rationi, partim sesquiplicatae, partim duplicatae proportionalem assumsit, neque tamen pro motibus tardissimis satisfecit. In vltima vero Phil. Editione ipse Newtonus quoque insufficientem priorem theoriam suam agnoscit, atque pluribus rationibus ostendit alteram illam fluidorum resistentiam esse constantem seu temporis momentis proportionalem; quam antea ipsis celeritatibus proportionalem erat arbitratus. Hanc ob rem istam resistentiam cum ea, quae quadratis celeritatum est propor-

SVPER ... MOTU PUNCTI
propor... escensus primae, iunctam ... onis atque nume- tionum ... quam in aqua et adiectio... perfecte resiste- ... tione, congrua ... s, ita vt decre- ... et numero oscil- 56... imo coniunctim. mioscill... uaui in maiori- scere, q... eritas non est ni- arcus pl... us minimis ma- fore = ... picitur. Ex quo ... oris celeritas in ... accedere ad ra- 56 ... motum autem nis tem... er esse obnoxium, tionis i... prae resistentia, notante ... proportionalis, Quare i... erimentis New- cus des... i celeritatum ra- mioscill... n duplicatae pro- ... ien pro motibus ... Phil. Editione ipse 56 ... priorem theo- est den... bus rationibus o- produc... resistentiam esse stente i... itis proportiona- et hanc ... ous proportiona- oscillati... rem istam resi- xime a... s celeritatum est propor-



proportionalis in sequenti propositione coniunctam considerabimus; cum praesertim aequationum resolutio et celeritatum determinatio hac adiectione non difficilior euadat.

## Corollarium 10.

562. Quod ad tempora oscillationum et semioscillationum attinet, perspicuum est ea decrescere, quo minores fiant arcus descripti; atque si arcus plane euanescant tempus dimidiae oscillationis fore $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$.

## Corollarium 11.

563. Excessus autem cuiusque semioscillationis temporis supra tempus minimae semioscillationis in casu resistentiae minimae est $\frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}}$, denotante E arcum descensus illius semioscillationis Quare iste excessus proportionalis est quadrato arcus descensus, vel etiam quadrato totius arcus semioscillatione descripti.

## Scholion 3.

564. Cyclois igitur, quae ab Hugenio apta est demonstrata ad isochronismum pendulorum producendum, hanc proprietatem in medio resistente in duplicata celeritatum ratione amittit, et hanc ob rem in aëre non inseruit, nisi vel oscillationes sint valde paruae, vel inter se proxime aequales. Ex hoc vero, quod maiores o-

 scilla-

ſcillationes diutius durent, colligi licet, veram curuam tautochronam in hac reſiſtentiae hypotheſi magis eſſe curuam quam cycloidem. Quemadmodum ſcilicet cyclois in circulo eiusdem radii, cuius cyclois eſt in infimo puncto, continetur, ita quoque vera tautochrona in cycloide continebitur, atque eius curuedo a puncto infimo magis decreſcet, quam curuedo cycloidis.

# PROPOSITIO 64.

## Problema.

Tab. XIII. Fig. 1.

565. *Si medii reſiſtentia partim fuerit conſtans, partim quadratis celeritatum proportionalis, determinare motum oſcillatorium corporis ſuper cycloide* MCB, *ſaltem in caſu quo reſiſtentia eſt valde parua.*

## Solutio.

Sit vt ante diameter circuli generatoris CP $=\frac{1}{2}a$; CP $=x$; et arcus CM $=s$. Ponatur celeritas in C debita altitudini $b$, et celeritas in M altitudini $v$. Potentia corpus perpetuo deorſum ſollicitans ſit $=g$, pars reſiſtentiae quae eſt conſtans ſit $=b$, et pars reſiſtentiae quadratis celeritatum proportionalis ſit $=\frac{v}{k}$ vt ante; erit $k$ quantitas valde magna reſpectu $v$ et $s$ et $a$; atque $b$ valde paruum reſpectu $g$. Iam fiat deſcenſus ſuper arcu MC, erit $dv = -g\,dx + b\,ds + \frac{v\,ds}{k}$, atque hinc $v = e^{\frac{s}{k}} b - e^{\frac{s}{k}} \int e^{\frac{-s}{k}} (g\,dx - b\,ds)$.

At



At quia eſt ex natura cycloidis $dx = \frac{s\,ds}{a}$ erit $\int e^{\frac{-s}{k}} g\,dx = \frac{gk^2 - gk^2 e^{\frac{-s}{k}} - gke^{\frac{-s}{k}} s}{a}$ et $\int e^{\frac{-s}{k}} b\,ds = bk - bke^{\frac{-s}{k}}$; vnde fit $v = \frac{e^{\frac{s}{k}}(ab + bak - gk^2) - bak + gk^2 + gks}{a}$

Celeritas maxima habetur ſi fuerit $\frac{gs}{a} = b + \frac{v}{k}$ ſeu $e^{\frac{s}{k}} = \frac{gk^2}{gk^2 - ab - bak}$. Dicatur altitudo debita celeritati maximae in O $= c$, erit CO $= \frac{ba}{g} + \frac{ac}{gk}$ et $ab = gk^2 - bak - gk^2 e^{\frac{-bak - ac}{gk^2}}$. Ponatur arcus MO $= q$ erit $s = \frac{ba}{g} + \frac{ac}{gk} + q$; vnde fit $v = \frac{ac + gk^2 + gkq - e^{\frac{q}{k}} gk^2}{a}$. Quia nunc $v$ minus eſt quam $c$, pono $c - v = z$, erit $az + gk^2 + gkq = e^{\frac{q}{k}} gk^2$. Quae aequatio in ſeriem conuerſa dat vt ſupra $\frac{az}{g} = \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{6k} + \frac{q^4}{24k^2}$; atque $q = \frac{\sqrt{2az}}{\sqrt{g}} - \frac{az}{3gk} + \frac{az\sqrt{2az}}{18gk^2\sqrt{g}}$. Incipiat deſcenſus ex M, erit ibi $v = 0$ et $z = c$, ideoque MO $= \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} - \frac{ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}$. Ex eadem formula reperitur arcus aſcenſus ON $= \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}$; atque cum in his $b$ non reperiatur erit vt ſupra tempus ſemioſcillationis per MON $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi ac\sqrt{2a}}{12gk^2\sqrt{g}}$. Totus vero arcus deſcenſus MC erit $= \frac{ba}{g} + \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}$, atque arcus aſcenſus CN $= -\frac{ba}{g} + \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} - \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}$.



Quare

Quare si arcus descensus MC ponatur E et arcus ascensus $CN = F$, erit $F = E - \frac{2ba}{g} - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4baE}{3gk} + \frac{4E^2}{9k^2}$. In sequente semioscillatione est arcus descensus F et arcus ascensus $G = E - \frac{4ba}{g} - \frac{4E^2}{3k} + \frac{16baE}{3gk} + \frac{16E^2}{9k^2}$. Atque generaliter in ea semioscillatione, quae indicatur numero $n$, arcus ascensus est $= E - \frac{2nba}{g} - \frac{2nE^2}{3k} + \frac{4n^2baE}{3gk} + \frac{4n^2E^2}{9k^2} = \frac{3gkE - 6bnak}{3gk + 2gnE}$ Quare si peractis $n$ semioscillationibus dicatur arcus descensus primae E et arcus ascensus vltimae L, erit $2gnEL = 3gk(E-L) - 6bnak$ seu $n = \frac{3gk(E-L)}{2gEL + 6bak}$. Tempus vero quo quaelibet semioscillatio per MCN absoluitur est $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi(gE-ba)^2\sqrt{2a}}{24g^2k^2\sqrt{g}}$ loco $c$ eius valore substituto. Q. E. I.

## Corollarium I.

566. Si ponatur $c = 0$, vt locus prodeat in quo corpus sit quieturum, inuenitur $MC = \frac{ba}{g}$: corpus ergo in quiete permanere potest non solum in puncto C, sed extra C quoque in distantia $\frac{ba}{g}$ cis et vltra C. Quare in huiusmodi medio resistente ex statu quietis penduli non exacte linea verticalis potest cognosci; sed angulo cuius sinus est $\frac{b}{g}$ aberrari potest.

## Scholion I.

567. Huiusmodi resistentiam in aqua locum habere experimentis facile euincitur, quippe in moti-

SUPER

motibus tum min vero pra proporti si resisten experime strauit pe in quiete set, si resi periment tus pend globi pl stantem nitatis, suspensus 10''', autem et minor si

568 uit ista $-\frac{EL}{3ak} =$ ticali dec pi conue insensibil

569 quo ma

OTU PUNCTI

ponatur E et arcus $- \frac{2E^2}{3k} + \frac{4baE}{3gk} +$ est arcus descen- $\frac{4ba}{g} - \frac{4E^2}{3k} + \frac{16baE}{3gk}$ ea semioscillatio- rcus ascensus est $= \frac{3gkE - 6bnak}{3gk + 2gnE}$ Qua- dicatur arcus de- us vltimae L, erit $n = \frac{3gk(E-L)}{2gEL + 6bak}$ ioscillatio per M $\frac{ba)^2\sqrt{2a}}{k^2\sqrt{g}}$ loco $c$ eius

I.

locus prodeat in nitur $MC = \frac{ba}{g}$: e potest non so- C quoque in di- re in huiusmodi penduli non ex- osci; sed angulo

in aqua locum tur, quippe in moti-



motibus tardissimis resistentia quadratis celeritatum minime proportionalis obseruatur; in fluido vero praeter resistentiam quadratis celeritatum proportionalem aliam non dari probabile est, nisi resistentiam constantem. Confirmatur hoc etiam experimentis a *La Hirio* institutis, quibus monstrauit pendulum in aqua extra situm verticalem in quiete permanere posse. Quod fieri non posset, si resistentia a sola celeritate penderet. Ex experimentis *Newtoni*, quae circa retardationem motus pendulorum in aere instituit, concludi potest globi plumbei diametri 2 dig. resistentiam constantem esse circiter partem millionesimam grauitatis, seu $\frac{b}{g} = \frac{1}{1000000}$. Hic ergo globus filo suspensus a linea verticali aberrare potest angulo 10''', qui autem error est insensibilis. Maior autem et sensibilis esse poterit hic error, quo minor simulque leuior globus adhibeatur.

## Corollarium 2.

568. Ad hunc angulum inueniendum inseruit ista aequatio ex superiori deducta $\frac{b}{g} = \frac{E-L}{2na} - \frac{EL}{3ak} =$ sinui anguli, quo pendulum a linea verticali declinare potest. At loco E arcum paruum accipi conuenit, quo termini neglecti eo magis fiant insensibiles.

## Corollarium 3.

569. Ex aequatione $n = \frac{3gk(E-L)}{2gEL + 6bak}$ apparet quo maior sit arcus oscillatione descriptus eo minorem

norem fieri terminum $6bak$ respectu $2gEL$. Atque hoc in causa est, quod haec resistentia tantum in minimis oscillationibus sentiatur.

## Corollarium 4.

570. Quia $b$ est numerus tum per hypothesin valde paruus, tum in subtilibus fluidis, ad quae haec propositio est accommodata, reipsa fere euanescens: in expressione temporis euanescet quoque $ba$ prae $gE$, ideoque tempus vnius semioscillationis erit $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}}$ Resistentia igitur constans non immutabit tempora oscillationum.

## Scholion 2.

571. Etiamsi ergo haec resistentia constans cum resistentia quadratis celeritatum proportionali coniuncta consideretur, calculus eo neque fit prolixior neque difficilior. Nam ex celeritate maxima $\sqrt{c}$ totus arcus vna semioscillatione descriptus eodem modo determinatur, siue haec resistentia constans adsit siue non; vtroque enim casu plane eadem obtinetur aequatio. Quamobrem vel ex hoc ipso sequi videtur, hanc resistentiae legem in natura locum habere; alias vero resistentias praeter hanc et eam, quae quadratis celeritatum est proportionalis, actu non inueniri. Fluida autem iam pridem duplicem resistentiam exercere obseruata sunt, alteram quadra-

SVPER TV PVNCTI

tis celeri celeriori tardissimi tur a vi corpus d eas remo tionalem tia a ten lae fluidi nicem se spatium spatio pr quare ha soluta m etiam pe rum in c vis motu cundum atque ide retardans. ptionem niam eni beret in autem co hanc vim cum haec in corpu ctionem, motus s uae sem

Tom. II.

specitu $2gEL$. Ata resistentia tantiatur.

4.

tum per hypothetilibus fluidis, ad nodata, reipsa feemporis euanescet empus vnius semi- Resistentia igiempora oscillatio-

esistentia constans tatum proportiocalculus eo neque fit Nam ex celeritate mioscillatione de- atur, siue haec ren; vtroque enim quatio. Quamobletur, hanc resi- habere; alias veeam, quae quadralis, actu non inem duplicem resi-, alteram quadra-

is



tis celeritatum proportionalem, quae in motibus celerioribus sola obseruetur, alteram in motibus tardissimis tantum sensibilem. Illa resistentia oritur a vi inertiae particularum fluidi, et per eam corpus de motu suo amittit, quando particulas eas remouet; quam quadratis celeritatum proportionalem esse dubitari nequit. Haec vero resistentia a tenacitate fluidi ortum habet, qua particulae fluidi inter se cohaerent et difficulter a se inuicem separantur. Dum igitur corpus per datum spatium mouetur datus particularum numerus ipsi spatio proportionalis a se inuicem diuelli debet; quare haec resistentia congruit cum potentia absoluta motum corporis retardante; quippe quae etiam per aequalia spatia aequalem ictuum numerum in corpus exerit. Haec igitur resistentia seu vis motui corporis semper est contraria, et secundum ipsam directionem motus in corpus agit, atque ideo est vis tangentialis perpetuo constans et retardans. At hoc casu natura a calculo exceptionem postulat, quando corpus quiescit. Quoniam enim haec vis est constans, aeque agere deberet in corpus quiescens ac in motum; quiescens autem corpus, quia fluidi particulas non diuellit, hanc vim sentire nequit. Accedit ad hoc, quod, cum haec vis directioni motus sit contraria, ea in corpus quiescens, quod nullam habeat directionem, nullum effectum habere queat. At si motus super linea curua inuestigatur, tangens curuae semper pro directione motus habetur, etiamsi

 cor-

corpus actu quiescat, atque ideo calculus effectum huius vis etiam in corpore quiescente ostendit; hoc igitur casu a calculo exceptionem fieri oportet. Corpus pendulum ergo per aliquod paruum spatium circa C in quiete permanere posse ideo est dicendum, quia eius nisus versus C non sufficit ad particulas fluidi a se inuicem separandas. Quare corpus quiescere potest in quolibet puncto illius spatioli, etiamsi calculus ostendat, etiam in ipso puncto C corpus non in quiete perseuerare posse.

## Scholion 3.

572. Ex his quae partim generaliter tradidimus partim de cycloide attulimus, perspicitur, quomodo in medio resistente in duplicata ratione celeritatum motus corporis super quacunque curua possit determinari. Considerauimus quidem medium resistens vniforme, et potentiam sollicitantem quoque aequabilem; sed ex aequatione resoluenda apparet, eam quoque integrari posse, quomodocunque tum medium sit difforme, tum potentia sollicitans variabilis, semper enim in aequatione altitudo celeritati debita $v$ vnicam tantum habet dimensionem. Progredior igitur ad alias medii resistentis hypotheses; sed quia tum non pro quauis curua motus potest definiri, curuae primo sunt inueniendae, quae determinationem motus admittunt. Assumimus hic autem iuxta

SVP MOTU PUNCTI
ta in calculus effectum
tione iescente ostendit;
mina :ionem fieri opor-
numc er aliquod paruum
tum ıancre posse ideo
aequ ersus C non suffi-
icem separandas.
mog n quolibet puncto
seu ostendat, etiam in
et s quiete perseuerare
tur,
(s+
nari generaliter tradi-
ratio limus, perspicitur,
tum a duplicata ratio-
super quacunque
iderauimus quidem
potentiam sollici-
ex aequatione re-
integrari posse,
it difforme, tum
celer semper enim in
super bita v vnicam tan-
tenti gredior igitur ad
s; sed quia tum
otest definiri, cur-
uae determinatio-
tori nus hic autem iux-
ta



ta institutum nostrum eas curuas, quae ad aequationem homogeneam deducunt, in qua indeterminatae vbique eundem obtinent dimensionum numerum. Si resistentia fuerit potestati celeritatum exponentis $2m$ proportionalis, habetur ista aequatio $dv = \pm g dx \pm \frac{v^m ds}{k^m}$, quae quo sit homogenea inter $v$ et $x$ debet esse $ds = x^{-m} dx$, seu $s = a^m x^{1-m}$, seu $x = a^{\frac{m}{m-1}} s^{\frac{1}{1-m}}$. Vel si $x$ et $s$ datis quantitatibus augeantur vel diminuantur, in curua, cuius haec est aequatio $x = a^{\frac{m}{m-1}} (s+f)^{\frac{1}{1-m}} - a^{\frac{m}{m-1}} f^{\frac{1}{1-m}}$, motus quoque determinari potest. In medio ergo resistente in simplici ratione celeritatum curua sit cyclois, ideoque motum super ea determinemus.

## PROPOSITIO 65.

### Problema.

573. *In medio quod resistit in simplici ratione celeritatum, determinare motum oscillatorium corporis super cycloide* ACB, *existente tam medio quam potentia sollicitante uniformi.* Tab. XIII. Fig. 1.

### Solutio.

Sit iterum vt ante diameter circuli generatoris $CD = \frac{1}{2}a$: abscissa $CP = x$, et arcus $CM = s$.

 Pona-