PROPOSITIO 28.

Problema

Tabula VI. Fig. 3. 253. *Sollicitetur corpus a quacunque potentia deorsum tendente; inuenire curuam* AM *super qua corpus descendens motu aequabili deorsum feratur, seu aequabiliter a horizontali* AB *recedat.*

Solutio.

Positis $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$, et potentia sollicitante $= P$, sit celeritas corporis initialis in A debita altitudini b, erit celeritas in M debita altitudini $b + \int P dx$. Quare tempusculum, quo elementum M percurritur, est $\frac{ds}{\sqrt{(b+\int P dx)}}$. Quia autem motus per AM respondere debet motui aequabili per AP, concipiatur corpus motum super AP celeritate constante debita altitudini b, debebit tempus per Pp aequari tempori per Mm, vnde habebitur $\frac{dx}{\sqrt{b}} = \frac{ds}{\sqrt{(b+\int P dx)}}$, seu $dy\sqrt{b} = dx\sqrt{\int P dx}$. Pono autem celeritatem initialem congruentem cum celeritate descensus, vt curua in A tangat verticalem AP, et corpus primo principio recta descendat. Nam quia propter motum acceleratum necesse est vt curua continuo magis ad horizontem inclinetur, eius initium commodissime sumetur in A, vbi curua est verticalis. Prodiitque ergo pro hac curua aequatio $dy\sqrt{b} = dx\sqrt{\int P dx}$. Q. E. I.

Co-

SVPER U PUNCTI
254. H tatem, vt q magis quoque sit inclinata.
unque potentia M super qua rsum feratur, edat.
255. In corporis est se minima, f bet esse verti
s, et potentia orporis initialeritas in M tempusculum, st $\frac{ds}{\sqrt{(b+\int P dx)}}$ ondere debet r corpus modebita altituquari tempori $\frac{ds}{\sqrt{(b+\int P dx)}}$, seu leritatem inidescensus, vt et corpus pria propter mora continuo eius initium urua est verticurua aequatio
256. Cel est esse nulla, spectiua, qua horizontali A
257. Vo scensus, quia bili motu deo uentio extat i pothesi grauit formis. Satisfc tur ibi parabol in exemplo se
258. Sit P=g, erit ∫P Tom. II.
Co-

Corollarium I.

254. Haec ergo curua hanc habet proprietatem, vt quo maior sit corporis celeritas, eo magis quoque curua in eo loco ad horizontem sit inclinata.

Corollarium 2.

255. In loco ergo supremo, vbi celeritas corporis est minima, inclinatio curuae debet esse minima, seu tangens curuae in eo loco debet esse verticalis.

Corollarium 3.

256. Celeritas igitur initialis $\sqrt{b}$ non potest esse nulla, quia ei aequalis est celeritas respectiua, qua corpus deorsum progreditur, seu ab horizontali AB recedit.

Scholion I.

257. Vocatur haec curua linea aequabilis descensus, quia corpus super ea descendens aequabili motu deorsum progreditur. Lineae huius inuentio extat in Act. Erud. Lips. A. 1690. pro hypothesi grauitatis, seu potentiae sollicitantis vniformis. Satisfacere autem huic quaestioni demonstratur ibi parabola cubicalis Neiliana, quae eadem in exemplo sequente prodibit.

Exemplum I.

258. Sit potentia sollicitans vniformis seu $P = g$, erit $\int P dx = gx$. Quare pro curua quaesita habe-

habebitur ista aequatio $dy\sqrt{b} = dx\sqrt{gx}$, quae integrata praebet hanc, $3y\sqrt{b} = 2x\sqrt{gx}$, seu $\frac{9by^2}{4g} = x^3$, quae est pro parabola Neiliana cuspide in A verticalem AP tangente, cuius parameter est $\frac{9b}{4g}$. Pro quaque ergo alia celeritate initiali, alia est sumenda parabola.

Exemplum 2.

259. Sit potentia sollicitans P potestati cuicunque abscissarum data linea auctarum proportionalis vt $P = \frac{(a+x)^n}{f^n}$, erit $\int Pdx = \frac{(a+x)^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Quamobrem pro curua satisfaciente habebitur ista aequatio $dy\sqrt{(n+1)bf^n} = dx\sqrt{((a+x)^{n+1} - a^{n+1})}$. Si $a=0$, ita vt potentia sollicitans P sit potestati exponentis n distantiarum corporis a horizontali AB proportionalis, erit $dy\sqrt{(n+1)bf^n} = dx\sqrt{x^{n+1}}$, cuius integralis est $y\sqrt{(n+1)bf^n} = \frac{2x^{\frac{n+3}{2}}}{n+3}$, seu $\frac{(n+1)(n+3)^2}{4}bf^ny^2 = x^{n+3}$. At $n+1$ debet esse numerus affirmatiuus, alioquin $\int Pdx$ fieret infinitum, quia euanescere debet facto $x=0$. Fit ergo $n+3>2$; quare satisfaciunt parabolae verticibus in A verticalem AP tangentes. Vt si $n=1$ seu $P=\frac{x}{f}$, satisfaciet parabola Appolloniana, cuius parameter est $2\sqrt{2bf}$.

Scholion 2.

260. Ex huius propositionis solutione perspicitur quomodo eius inuersa, qua data curua, quae

fit lin… $\sqrt{gx}$, quae
sollicit… $\sqrt{gx}$, seu $\frac{9by^2}{4g}$
$\int Pdx$ = … a cuspide in
P = … ameter est $\frac{9b}{4g}$.
ritate … li, alia est su-
esse d…
AP. …
P = … otestati cui-
culus t… proportio-
= a; … $x)^{n+1} - a^{n+1}$
culo e… $1)f^n$
debita … habebitur ista
… $)^{n+1} - a^{n+1})$.
fit potestati
horizontali
26… $= dx\sqrt{x^{n+1}}$,
inuenir… $\frac{2x^{\frac{n+3}{2}}}{n+3}$, seu
describ…
miter … debet esse
percur… fieret infini-
quabili… o. Fit ergo
… ae verticibus
… i $n=1$ seu P
… a, cuius pa-
26…
caliter … tione perspi-
corpus … curua, quae
ditur. … fit

fit linea aequabilis descensus, requiritur potentia sollicitans. Cum enim sit $dy\sqrt{b} = dx\sqrt{\int Pdx}$, erit $\int Pdx = \frac{bdy^2}{dx^2}$. Ex qua oritur posito dx constante, $P = \frac{2bdyddy}{dx^3}$. Perspicitur ergo potentiam P a celeritate initiali $\sqrt{b}$ pendere. Curua vero data ita esse debet comparata, vt in A tangat verticalem AP. Si curuae radius osculi in M dicatur r, erit $P = \frac{2bds^3dy}{rdx^4}$. Quare si ex. gr. curua AM fuerit circulus tangens AP in A, cuius radius $= a$, erit $r = a$; $dy = \frac{xdx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ et $ds = \frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$. Pro circulo ergo erit $P = \frac{2a^2bx}{(a^2-x^2)^2}$. Celeritas vero in M debita est altitudini $b + \int Pdx = \frac{a^2b}{a^2-x^2}$.

Corollarium 4.

261. Patet ceterum ex aequatione, quam inuenimus, $\frac{dx}{\sqrt{b}} = \frac{ds}{\sqrt{(b+\int Pdx)}}$ tempus quo arcus AM describitur, aequale esse tempori, quo corpus vniformiter celeritate altitudini b debita abscissam AP percurrit. In hoc ipso scilicet natura lineae aequabilis descensus nititur.

PROPOSITIO 29.

Problema.

262. *Trahente vniformi potentia vbique verticaliter deorsum, inuenire curuam AM, super qua corpus aequabiliter versus datam plagam AP progreditur.* Tabula VII, Fig. 3.

P 2 So-

Solutio.

Sit AM curua quaesita, et pro axe sumatur eius tangens AP, quae versus datam plagam dirigitur. Problema ergo requirit, vt corpus super AM motum a potentia vniformi g sollicitatum eodem tempore ad M perueniat, quo corpus motu aequabili nempe celeritate $\sqrt{b}$ latum abscissam respondentem AP percurrit, eritque celeritas initialis in A debita altitudini b. Dicantur $AP = x$, $PM = y$, et $AM = s$, ducaturque verticalis AQ, in Q secans horizontalem MQ. Celeritas igitur corporis in M tanta erit, quantam in Q cadendo per AQ cum sua celeritate $\sqrt{b}$ acquireret; quare celeritas corporis in M debita erit altitudini $b + gz$ dicta $AQ = z$. Per conditionem problematis vero debet esse $\int \frac{ds}{\sqrt{(b+gz)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{b}}$ seu $\frac{ds}{\sqrt{(b+gz)}} = \frac{dx}{\sqrt{b}}$, vnde oritur haec aequatio $dy\sqrt{b} = dx\sqrt{gz}$. At z in x et y dabitur ex angulo PAQ; sit sinus huius anguli $= m$, erit cosinus $= \sqrt{(1-m^2)}$ posito sinu toto $= 1$. Nunc erit $\sqrt{(1-m^2)} : m = AP(x) : PO$, ex quo erit $PO = \frac{mx}{\sqrt{(1-m^2)}}$, ideoque $MO = \frac{y\sqrt{(1-m^2)} - mx}{\sqrt{(1-m^2)}}$. At AO fiet $= \frac{x}{\sqrt{(1-m^2)}}$. Deinde ob $1 : m = MO : OQ$, erit $OQ = \frac{my\sqrt{(1-m^2)} - m^2 x}{\sqrt{(1-m^2)}}$. Consequenter $AQ = z = my + x\sqrt{(1-m^2)}$, et hinc $dy = \frac{dz}{m} - \frac{dx\sqrt{(1-m^2)}}{m}$. Quo valore in aequatione inuenta substituto prodit $dz\sqrt{b} = dx\sqrt{b(1-m^2)} + mdx\sqrt{gz}$, quae transit in hanc $dx = \frac{dz\sqrt{b}}{m\sqrt{gz} + \sqrt{b(1-m^2)}}$.

Cu-

Cuius integralis inuenitur $x = \frac{2\sqrt{bz}}{m^2 g} - \frac{2b\sqrt{(1-mm)}}{m^3 g} l \frac{m\sqrt{gz} + \sqrt{b(1-m^2)}}{\sqrt{b(1-m^2)}}$. Quae aequatio, loco z valore $my + x\sqrt{(1-m^2)}$ substituto, dat naturam curuae quaesitae. Q. E. I.

Corollarium 1.

263. Curua ergo satisfaciens semper est linea transcendens, nempe a logarithmis pendens, nisi sit m vel o vel 1, i. e. nisi recta AP vel sit verticalis vel horizontalis.

Corollarium 2.

264 Si igitur $m = o$ problema cum praecedente conuenit, fit enim $z = x$, ideoque curua exprimetur hac aequatione $dy\sqrt{b} = dx\sqrt{gx}$, quae dat parabolam cubicalem vt supra.

Corollarium 3.

265. Si $m = 1$ fit linea AP horizontalis, et $z = y$. Habetur ergo $dx = \frac{dy\sqrt{b}}{\sqrt{gy}}$, seu $x = \frac{2\sqrt{by}}{\sqrt{g}}$, seu $x^2 = \frac{4by}{g}$. Haec ergo curua est ipsa proiectoria, quam corpus in A celeritate $\sqrt{b}$ horizontaliter proiectum libere describit. Haec enim curua, vt ex superiore libro intelligitur, hanc habet proprietatem; vt motus horizontalis sit aequabilis.

Corollarium 4.

266. Si x et y, et consequenter z est valde paruum, erit $l(1 + \frac{m\sqrt{gz}}{\sqrt{b(1-m^2)}}) = \frac{m\sqrt{gz}}{\sqrt{b(1-m^2)}} - \frac{mmgz}{2b(1-m^2)} + \frac{m^3 gz\sqrt{gz}}{3b(1-m^2)\sqrt{b(1-m^2)}}$, quam proxime. Initium er-

go

go curuae AM exprimetur hac aequatione $x = \frac{z}{\sqrt{(1-m^2)}} - \frac{2mz\sqrt{gz}}{3(1-m^2)\sqrt{b}}$ seu ob $z = my + x\sqrt{(1-m^2)}$, ista $y = \frac{2(my+x\sqrt{(1-m^2)})\sqrt{g(my+x\sqrt{(1-mm)})}}{3\sqrt{b}(1-m^2)}$. Quae reducitur ad hanc $\frac{9b(1-m^2)y^2}{4g} = (my + x\sqrt{(1-m^2)})^3$.

Corollarium 5.

267. Si $m=1$, seu si linea AP est horizontalis, et series logarithmo illi aequalis continuetur in infinitum, haecque series loco illius substituatur, termini omnes prae infinitesimo ∞ euanescent. Dabit autem infinitesimus $z=0$, seu $y=0$, id quod indicat hoc casu lineam rectam horizontalem quoque satisfacere. Id quod quidem per se est perspicuum, nam corpus super recta horizontali aequabiliter progredietur, ideoque motus eius horizontalis est aequabilis.

Scholion 1.

268. Mirabile igitur videtur, quod aequatio differentialis et integralis quoque, quae prodit si ponatur $m=1$, parabolam tantum praebeat, et rectam horizontalem excludere videatur. Sed notandum est, lineam rectam horizontalem pro omnibus quoque plagis AP satisfacere cum motus in ea sit aequabilis, atque ideo versus omnes plagas aequabiliter progrediatur. Perspicuum autem est aequationem nostram generalem hanc rectam comprehendere non posse, quia rectam AP nusquam tangit, nisi in casu $m=1$, quo cum ea congruit.

SI TU PUNCTI
gruit. uatione $x =$
casu et $x\sqrt{(1-m^2)}$, ista
queat. Quae reducitur
26 $m^2))^3$.
blema
licet p
bilis v .P est horizon-
loco g jualis continue-
tiali, o illius substitu-
pro cu simo ∞ euane-
rem q $=0$, seu $y=0$,
constan tam horizonta-
tegrari idem per se est
aequati cta horizontali
enim a motus eius ho-
in qua
tae. N
tione c quod aequatio
gnificat quae prodit si
que ad n praebeat, et
relicto atur. Sed no-
re con alem pro omni-
probler m motus in ea
tantum nnes plagas ae-
resoluo autem est ae-
rectam com-
n AP nusquam
cum ea con-
gruit.

gruit. Atque haec ipsa ratio quoque est, cur pro casu etiam $m=1$ linea recta non directe inueniri queat.

Scholion 2.

269. Manifestum quoque est eadem opera problema latiori sensu acceptum solui potuisse, si scilicet potentia sollicitans non vniformis sed variabilis vtcunque esset posita. Namque substituto P loco g, et $\int Pdz$ loco gz in aequatione differentiali, prodisset haec aequatio $dy\sqrt{b} = dx\sqrt{\int Pdz}$ pro curua quaesita. Habet vero z eundem valorem quem ante. Quare si P ab altitudine z et constantibus tantum pendeat, poterit $\int Pdz$ vel integrari vel per quadraturas exhiberi. Atque tum aequatio pro curua poterit construi, peruenietur enim ad hanc aequationem $dx = \frac{dz\sqrt{b}}{m\sqrt{\int Pdz}+\sqrt{b(1-m^2)}}$, in qua variabiles x et z sunt a se inuicem separatae. Nolui autem problema nimis lata significatione confusum efficere. Quando enim latior significatio neque plus difficultatis habet in se, neque ad peculiarem vsum accommodari potest, eo relicto particulare tantum problema pertractare constitui. Propter eandem rationem sequens problema isochronae paracentricae in hypothesi tantum potentiae vniformis et deorsum directae resoluo.

PRO-

PROPOSITIO 30.

Problema.

Tabula VII. Fig. 4.

270. *In hypothesi potentiae sollicitantis vniformis et deorsum tendentis inuenire curuam AM super qua corpus descendens aequabiliter a dato puncto C recedit.*

Solutio.

Sit AM curua quaesita, eius sumatur tangens CA, quae per datum punctum C transit, erit corporis in A celeritas minima. Quia enim haec celeritas tota ad recedendum a C impenditur, in aliis curuae elementis necesse est, vt celeritas sit maior, eo quod eius tantum pars ad recessum insumitur. Punctum A ergo erit supremum curuae quaesitae. Sit igitur celeritas corporis in A debita altitudini b, hacque celeritate concipiatur corpus per AP vniformiter moueri: debebit itaque hic motus cum descensu corporis super curua AM ita conuenire, vt ad quaeque puncta P et M aequaliter ab C distantia simul perueniatur. Posita celeritate in M debita altitudini v, ducatur CP=CM $=x$, et sit sinus ang. PCM$=t$, posito sinu toto $=1$. Ducantur arcus circulares PM et pm centro C, erit Mn=Pp=dx, et ang. pCm sinus $=t+dt$. Quare erit sinus ang. mCn $= \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{mn}{x}$. Erit igitur $mn = \frac{xdt}{\sqrt{(1-tt)}}$, atque M$m$ $= \sqrt{(dx^2 + \frac{x^2dt^2}{1-tt})}$. Cum ergo elementum M$m$ celeritate $\sqrt{v}$ co-

SU PUNCTI
eodem).
Pp cele
dxV(1–
v deter itantis vnifor-
lis CQ m AM super
ergo co dato puncto C
uenit in
licitante
g. CD.
eius co matur tangens
(1–m²), transit, erit
(1–t²). uia enim haec
(1–m²) mpenditur, in
(1–m²) vt celeritas sit
co v va id recessum in-
V(1–tt) remum curuae
= xdt V in A debita alti-
(1–t²) – tur corpus per
exprimi que hic motus
terminat AM ita con-
ipsa cur M aequaliter
Posita celeri-
catur CP=CM
osito sinu toto
M et pm centro
m sinus =t+
= dt/V(1–tt) = mn/x.
m = V (dx² +
1 celeritate V v
271
uenta in
tres qua
AC et
C reced
Tom. II co-

eodem tempore describi debeat, quo elementum Pp celeritate $\sqrt{b}$, erit $\frac{dx}{\sqrt{b}} = \sqrt{(\frac{dx^2}{v} + \frac{x^2dt^2}{(1-tt)v})}$ seu $dx\sqrt{(1-tt)(v-b)} = xdt\sqrt{b}$. Requiritur ergo vt v determinetur. Ad hoc ducatur ex C verticalis CQ et horizontales AD, et MQ; postquam ergo corpus ex A ad M descendit, deorsum peruenit interuallo DQ. Quare posita potentia sollicitante $=g$ erit $v=b+g$. DQ$=b+g$. CQ$-g$. CD. Sit AC$=a$, sinus anguli ACD$=m$, erit eius cosinus $=\sqrt{(1-m^2)}$, vnde erit CD $=a\sqrt{(1-m^2)}$, et cosinus ang. MCQ$=mt+\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)}$. Quam ob rem erit CQ $=mtx+x\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)}$. Ex quibus conficitur $v=b-ga\sqrt{(1-m^2)}+mgtx+gx\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)}$. Quo loco v valore substituto prodibit ista aequatio $dx\sqrt{(1-tt)}\,(mgtx+gx\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)}-ga\sqrt{(1-m^2)}) = xdt\sqrt{b}$, seu haec $\frac{dx}{x}\sqrt{(mgtx+gx\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)}-ga\sqrt{(1-m^2)})} = \frac{dt\sqrt{b}}{\sqrt{(1-t^2)}}$. Quae aequatio exprimit naturam curuae quaesitae, et, si indeterminatae x et t a se inuicem separari possent, ipsa curua construi posset. Q. E. I.

Corollarium I.

271. Perspicuum igitur est ex aequatione inuenta innumerabiles curuas quaesito satisfacere, ob tres quantitates angulum scilicet ACD, distantiam AC et celeritatem $\sqrt{b}$, qua corpus a fixo puncto C recedit, quae pro lubitu variari possunt.

Corollarium 2.

272. Atque harum trium quantitatum binis quibusque assumtis pro arbitrio tertia sola variabilis infinitas producet curuas quaesito satisfacientes. At quia aequatio haec generaliter construi non potest, omnes curuae satisfacientes exhiberi non possunt.

Corollarium 3.

273. Quod ad figuram curuarum harum attinet, intelligitur, eas omnes in A cuspidem habere debere, quia A est punctum supremum. Alter enim curuae ramus ex A ad alteram partem rectae AP descendere debet; Excepto casu quo CAP fit linea horizontalis, tum enim haec ratio cessat.

Corollarium 4.

274. Alter vero ramus ad alteram rectae CP partem positus aeque soluit problema ac iste AM. Inuenitur enim eadem ex aequatione, si modo t seu angulus PCM accipitur negatiuus.

Corollarium 5.

275. Ex sola autem aequationis inuentae inspectione perspicitur eam duobus casibus separationem indeterminatarum admittere, quorum alter est si $a=0$, alter si $m=1$. Illo scilicet casu euanescit distantia AC et punctum A in C incidit: hoc vero casu recta CP fit horizontalis.

Hos

SVPER 1 PVNCTI

Hos igitur aml emplis euoluen atum binis sola variasatisfacienter construi es exhiberi

276. Incid pus descensum $=0$. Hoc erg abibit in hanc qua indetermin Constructio igi harum atras confici po uspidem ha$\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}(mt+\sqrt{(1-m^2)}($ supremum. absolui, vt fact lteram parralis aequatio it xcepto casu fiat $x=a$. enim haec $\int\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}(mt+\sqrt{(1-m^2}}$ cto $t=0$ ipsum ius integralis v ram rectae cosinum anguli lema ac iste $=q$, quo facto quatione, si $=\frac{-dq}{\sqrt{(1-qq)}}$. Hisc egatiuus. quatio: $\frac{2\sqrt{gx}}{\sqrt{b}}=$ accipiendum, vt inuentae inibus separaC quorum alscilicet casu 277. Si ip in C inciomnes curuae q horizontalis. Hos

Hos igitur ambos casus in sequentibus duobus exemplis euoluemus.

Exemplum I.

276. Incidat ergo punctum A in C seu corpus descensum incipiat in ipso puncto C; fiet $a=0$. Hoc ergo casu aequatio pro curua quaesita abibit in hanc $\frac{dx\sqrt{g}}{\sqrt{bx}}=\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}(mt+\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)})}$, in qua indeterminatae a se inuicem sunt separatae. Constructio igitur curuae quaesitae per quadraturas confici poterit; fiet enim $\frac{2\sqrt{gx}}{\sqrt{b}}=\int\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}(mt+\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)})}$, quae integratio ita debet absolui, vt facto $t=0$ fiat $x=0$. Namque generalis aequatio ita debet integrari vt posito $t=0$ fiat $x=a$. Hoc igitur casu integrale $\int\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}(mt+\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)})}$ ita est accipiendum, vt facto $t=0$ ipsum euanescat. Ad constructionem huius integralis vero melius perspiciendam, pono cosinum anguli MCQ seu $mt+\sqrt{(1-m^2)(1-tt)}=q$, quo facto fiet sinus ang. MCm, seu $\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}}=\frac{-dq}{\sqrt{(1-qq)}}$. Hisque substitutis habebitur ista aequatio: $\frac{2\sqrt{gx}}{\sqrt{b}}=\int\frac{-dq}{\sqrt{(q-q^3)}}$, quod integrale ita est accipiendum, vt facto $q=\sqrt{(1-m^2)}$ fiat $x=0$.

Corollarium 6.

277. Si ipsi b diuersi valores attribuantur, omnes curuae quae oriuntur erunt inter se simi-

les,

les, manente enim angulo MCP, diſtantia CM proportionalis eſt accipienda ipſi b altitudini generanti celeritatem initialem

Corollarium 7.

278. Quicunque ergo fuerit angulus ACQ, conſtructio non immutatur, ſed tantum conſtans adiicienda. Quare conſtructio inſeruiens vni caſui ad omnes caſus poteſt accommodari.

Scholion I.

279. Problema hoc de aequabili receſſu a fixo puncto praeterito ſeculo jam erat propoſitum et ſolutum in Act. Lipſ. A. 1695. atque ſolutiones quae ibi extant conueniunt apprime cum caſu huius exempli, vniuerſalis enim ſolutio illo loco non eſt data. Quamobrem caſus exempli ſequentis nouas prorſus dare videtur curuas huic quaeſtioni ſatisfacientes. At quia ſequens conſtructio cum hac conuenit, quanquam ipſae curuae ſint prorſus differentes, tamen etiam ſequens caſus in iis, quae hac de re tradita ſunt, contineri cenſendus eſt. Vocantur autem iſtiusmodi curuae iſochronae paracentricae, quia motus ſuper iis a centro fixo fit aequabilis.

Exemplum 2.

280. Sit linea CAP horizontalis, fiet $m=1$ atque in aequatione generali euaneſcet terminus $ga\sqrt{(1-m^2)}$. Hoc igitur caſu aequatio fit vt ante

SUI PVNCTI
te ſeparai iſtantia CM
quatio in altitudini ge-
quod inte
fiat $x=a$.
ſcat poſitc ulus ACQ,
ſtructio c um conſtans
ens vni ca-
ari.
281.
ri queant,
mittant, receſſu a fi-
quantum ſ propoſitum
neceſſe eſ utiones quae
morer. caſu huius
loco non
li ſequentis
ic quaeſtio-
tructio cum
282. prorſus dif-
deorſum te is, quae hac
corpus data eſt. Vocantur
aequalibus racentricae,
ctum fixum aequabilis.
Sum
A in quo , fiet $m=1$
lis. Sitque et terminus
AC $=a$; er fit vt ante

te ſeparabilis, transmutabitur enim generalis aequatio in hanc $\frac{dx\sqrt{g}}{\sqrt{bx}} = \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}}$, ſeu $\frac{2\sqrt{gx}}{\sqrt{b}} = \int\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}}$ quod integrale ita eſt accipiendum, vt poſito $t=0$ fiat $x=a$. Quare $\int\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}}$ ita integrato, vt euaneſcat poſito $t=0$ erit $\frac{2\sqrt{gx}-2\sqrt{ga}}{\sqrt{b}} = \int\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}}$. Quae conſtructio ergo cum praecedente conuenit.

Scholion 2.

281. An praeter hos duos caſus alii inueniri queant, qui ſeparationem indeterminatarum admittant, vehementer dubito. A nemine quidem, quantum ſcio, alius eſt erutus, quamobrem non neceſſe eſſe iudico, vt huic materiae diutius immorer.

PROPOSITIO 31.

Problema.

282. *Potentia ſollicitante exiſtente uniformi et deorſum tendente, inuenire curuam AM, ſuper qua corpus data cum celeritate initiali ita moueatur, vt aequalibus temporibus aequales angulos circa punctum fixum C abſoluat.* Tab. VIII. Fig. 1.

Solutio.

Sumatur initium curuae in loco quodam A in quo recta CA in ipſam curuam eſt normalis. Sitque celeritas in A debita altitudini b, et $AC=a$; erit celeritas angularis vt $\frac{\sqrt{b}}{a}$, cui quanti-

 tati

tati celeritas angularis in singulis punctis M expressa debet esse aequalis. Sit celeritas in M debita altitudini v et CM $= x$, erit $mn = dx$. Fiat vt $Mm : Mn = \sqrt{v} : \frac{Mn \sqrt{v}}{Mm}$, quae quantitas per MC diuisa dat celeritatem angularem $= \frac{Mn \cdot \sqrt{v}}{MmMC}$, quae cum aequalis esse debeat ipsi $\frac{\sqrt{b}}{a}$ habebitur haec aequatio $Mn \cdot a\sqrt{v} = Mm \cdot MC \cdot \sqrt{b} = Mm \cdot x\sqrt{b}$. Sit jam ducta verticali DCQ, sinus ang. ACD $= m$, erit cosinus eius $= \sqrt{(1-m^2)}$ posito sinu toto $= 1$. Item sinus ang. MCD sit $= t$, erit cosinus $= \sqrt{(1-tt)}$. His igitur positis erit CD $= a\sqrt{(1-m^2)}$ et CQ $= -x\sqrt{(1-tt)}$, atque sinus ang. MCm $= \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{Mn}{x}$, vnde fit $Mn = \frac{x\,dt}{\sqrt{(1-tt)}}$ et $Mm = \frac{\sqrt{(dx^2 - tt\,dx^2 + x^2 dt^2)}}{\sqrt{(1-tt)}}$. At quia corpus ex altitudine DQ est delapsum, erit $v = b + g \cdot$ DQ $= b + ga\sqrt{(1-m^2)} - gx\sqrt{(1-tt)}$. Quibus valoribus in aequatione inuenta substitutis orietur haec aequatio, $bdx^2(1-tt) = a^2 b\,dt^2 + ga^3 dt^2 \sqrt{(1-m^2)} - ga^2 x\,dt^2 \sqrt{(1-tt)} - bx^2 dt^2$, seu $dx\sqrt{b} = \frac{dt\sqrt{(a^2 b + ga^3\sqrt{(1-m^2)} - ga^2 x\sqrt{(1-tt)} - bx^2)}}{\sqrt{(1-tt)}}$, Quae aequatio ita integrata vt posito $t = m$ fiat $x = a$, exprimit naturam curuae quaesitae. Q. E. I.

Corollarium 1.

283. Si loco sinuum angulorum ACD, MCD eorum cosinus introducantur, fiatque $\sqrt{(1-m^2)} = n$ et $\sqrt{(1-tt)} = q$; erit $dx\sqrt{b} = \frac{-dq\sqrt{(a^2 b + gna^3 - ga^2 qx - bx^2)}}{\sqrt{(1-q^2)}}$ seu

seu $\frac{-dq}{\sqrt{(1-qq)}} = \frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(b(a^2-x^2) + ga^2(na-qx))}}$, quae ita est integranda, vt posito $q = n$ fiat $x = a$.

Corollarium 2.

284. Vbi curua ad radium CM est normalis, ibi ob euanescens dx erit $b(a^2-x^2) = ga^2(qx-na)$. Quoties ergo est $q = \frac{a^2 b + gna^3 - bx^2}{ga^2 x}$, erit curua in radium CM normalis. Quia autem q intra limites $+1$ et -1 continetur; x non potest esse maior data quantitate; nam posito $x = \infty$ fieret $q = \infty$, quod esset absurdum.

Corollarium 3.

285. Si CM est normalis in curuam erit celeritas angularis $= \frac{\sqrt{v}}{MC} = \frac{\sqrt{(b + gna - gqx)}}{x}$, quae aequalis esse debet ipsi $\frac{\sqrt{b}}{a}$. Maxima ergo est illa celeritas angularis si $q = -1$. Ille autem motus angularis eo fit minor quo maior est x. Eo vero minor porro erit motus angularis, quo magis obliqua est curua ad radium MC. Quare curua non vltra datam distantiam infra C descendere poterit, quam distantiam dabit x ex hac aequatione $x\sqrt{b} = a\sqrt{(b + gna + gx)}$, nempe $x = \frac{ga^2}{2c} + a\sqrt{(\frac{g^2 a^2}{4b^2} + \frac{gna}{b} + 1)}$. Haec ergo est maxima curuae a puncto C distantia.

Corollarium 4.

286. Cum igitur curua non vltra datam distantiam a centro fixo C distare queat, curua haec erit

erit in ſe rediens. Scilicet vel poſt vnam reuolutionem vel poſt duas vel poſt tres etc. vel etiam poſt infinitas reuolutiones in ſe redibit. Prout litterae a, b, n et g fuerint aſſumtae.

Exemplum I.

287. Si potentia ſollicitans euaneſcit fit $g = 0$, et corpus aequabiliter promouebitur. Tum igitur pro curua deſcripta haec habebitur aequatio $\frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}}$, cuius integralis per log. eſt $\sqrt{-1}\, l(\frac{x\sqrt{-1} - \sqrt{(a^2 - x^2)}}{c}) = \sqrt{-1}\, l(t\sqrt{-1} - \sqrt{(1-tt)})$, ſeu $x\sqrt{-1} - \sqrt{(a^2 - x^2)} = ct\sqrt{-1} - c\sqrt{(1-tt)}$. Quae reducta dat $(a^2 - c^2)^2 = 4(a^2 + c^2)ctx - 4c^2x^2 - 4a^2c^2t^2$. Incidat recta AC in verticalem CD hoc enim perinde eſt, ob euaneſcentem potentiam g, debebit ergo fieri $x = a$, poſito $t = 0$, ex quo fit $a^2 + c^2 = 0$, atque $a^4 = a^2x^2 + a^4t^2$ ſeu $x^2 = a^2(1-tt)$. Quae aequatio eſt pro circulo diametri a per punctum fixum C transeunte. Quando enim motus in circulo eſt aequabilis, motus quoque reſpectu cuiusque puncti in peripheria erit aequabilis.

Scholion.

288. Perſpicuum autem eſt hoc caſu peripheriam circuli quoque ſatisfacere, cuius centrum eſt in puncto fixo C, quippe quae ſolutio eſt facillima et ſua ſponte ſe prodit. Quamobrem maxime mirandum eſt hunc caſum in ſolutione non contineri.

S … U PUNCTI
neri. … t vnam reuolu-
quam … etc. vel etiam
xum … redibit. Prout
haben … ie.
ſeu da
bilis c
in ead … uaneſcit fit g=0,
qua x … ir. Tum igitur
vero … aequatio
Mm. x … og. eſt
ſi vbiq … (1−tt)), ſeu
autem … (1−tt). Quae
huic p … x −4 c²x²—
metho … icalem CD hoc
caſu m … n potentiam g,
bentem … =0, ex quo fit
ſimus i … u x²=a²(1−tt).
queat, … ietri a per pun-
ces in … do enim motus
ſint eru … quoque reſpectu
. aequabilis.
28 … oc caſu periphe-
centrum … uius centrum eſt
corpus … olutio eſt facilli-
li verſus … nobrem maxime
ione non conti-
neri.
Tom. II

neri. Ratio vero huius ſimilis prorſus eſt eius, quam ſupra §. 268. dedimus, vbi ſimile paradoxum obſeruauimus. Ad circulum centrum in C habentem deſignandum prodire debuiſſet $x = a$, ſeu $dx = 0$, quod vero quia x vt quantitas variabilis conſideratur non fieri potuit, praeſertim cum in eadem aequatione ſolutio alia ſit contenta, in qua x eſt quantitas reuera variabilis. Ex prima vero aequatione poſito $v = b$, quae eſt $Mn. a = Mm. x$ intelligi poteſt circulum ſatisfacere, nam ſi vbique eſt $x = a$ erit quoque $Mn = Mm$. Magnum autem arbitror ſubſidium ad conſtruendas curuas huic problemati ſatisfacientes proditurum, ſi tali methodo ſolutio inueniri poſſe, quae ſponte pro caſu motus aequabilis circulum centrum in C habentem eſſet datura. Cum enim caſus ſimpliciſſimus ita ſit inuolutus et abditus, vt elici vix queat, coniicere licet, alias ſaepe curuas ſimplices in generali quapiam ſolutione contineri, quae ſint erutu difficillimae.

PROPOSITIO 32.

Problema.

289. *Si corpus attrahatur vi quacunque ad centrum virium C, inuenire curuam AM ſuper qua corpus data cum celeritate deſcendens, motu aequabili verſus C feratur.* Tab. VIII. Fig. 2.

Solutio.

Sit corporis in A celeritas minima debita altitudini b; erit recta CA tangens curuae in A, quia corpus in A directe ad C moueri debet. Sit AC$=a$, et CM$=x$; celeritas in M debita altitudini v, et vis centripeta in M$=$P, erit $v=b-\int Pdx$, quod integrale ita est accipiendum vt facto $x=a$, euanescat, fiatque $v=b$. Celeritas vero in M tanta esse debet, qua elementum Mm eodem tempusculo absoluatur, quo elementum Pp celeritate $\sqrt{b}$ Erit ergo $\sqrt{b}:\sqrt{v}=$ Pp:Mm=MT:MC, vnde prodibit ista aequatio $b.\ MC^2 = v.\ MT^2 = b.\ MT^2 - MT^2 . \int Pdx$. Dicatur perpendiculum CT in tangentem $=p$, erit $bp^2 = -(x^2-p^2)\int Pdx$, seu $p^2 = \frac{-x^2\int Pdx}{b-\int Pdx}$. Vel si sinus ang. ACM ponatur $=t$ erit $\frac{mn}{MC} = \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}}$. Vnde sequens emergit aequatio: $\frac{dt\sqrt{b}}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-dx}{x}\sqrt{-\int Pdx}$. Quarum vtraque, si quidem P per x datur, ad curuam construendam est apta. Q. E. I.

Corollarium 1.

290. Si vis centripeta potestati cuicunque distantiarum fuerit proportionalis, nempe P$=\frac{x^n}{f^n}$: erit $\int Pdx = \frac{x^{n+1}-a^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Hoc substituto habebitur pro curua AM sequens aequatio $\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-dx}{x}\sqrt{\frac{a^{n+1}-x^{n+1}}{(n+1)bf^n}}$. Quae aequatio ita debet integrari vt facto $t=o$ fiat $x=a$.

Corollarium 2.

291. Si $\int\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}}$ ita accipiatur, vt fiat $=o$ si $t=o$, prodibit ex illa aequatione integrata haec

$$\int\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-2\sqrt{(a^{n+1}-x^{n+1})}}{(n+1)^{\frac{1}{2}}\sqrt{bf^n}} + \frac{a^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)^{\frac{1}{2}}\sqrt{bf^n}}\, l\frac{a^{\frac{n+1}{2}}+\sqrt{(a^{n+1}-x^{n+1})}}{a^{\frac{n+1}{2}}-\sqrt{(a^{n+1}-x^{n+1})}} = \text{BS},$$

si centro C radio BC$=1$ descriptus fuerit arcus circuli BSs. Ex quo patet curuam AM infinitos habere gyros antequam corpus in C perueniat. Nam posito $x=o$ fit BS$=\infty$.

Corollarium 3.

292. Pendet igitur constructio huius curuae partim a quadratura circuli, partim a logarithmis si $n+1$ est numerus affirmatiuus. At si $n+1$ est numerus negatiuus, is terminus qui per logarithmos erat datus, ad quadraturam circuli quoque reducitur.

Corollarium 4.

293. Curua haec punctum habebit flexus contrarii, vbi est $dp=o$. Ad hoc igitur inuenien-

niendum sumatur aequatio $pp = \frac{-x^2 \int Pdx}{b - \int Pdx}$, ex qua differentiata positoque $dp = 0$ prodibit $bPx = 2(\int Pdx)^2 - 2b\int Pdx$.

Corollarium 5.

294. In casu igitur quo $P = \frac{x^n}{f^n}$ punctum flexus contrarii ibi erit, vbi est $(n+1)^2 bf^n x^{n+1} = 2(a^{n+1} - x^{n+1})^2 + 2(n+1)bf^n(a^{n+1} - x^{n+1})$. Vnde haec oritur aequatio $\frac{a^{n+1} - x^{n+1}}{n+1} = -\frac{(n+3)bf^n}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{((n+3)^2 b^2 f^{2n} + 8a^{n+1}bf^n)}$. Quae in integrali substituta dabit angulum ACM in quo est punctum flexus contrarii.

Scholion. 1.

295. Cum autem de natura huiusmodi curuarum difficile sit in genere quicquam producere, ad casus speciales descendendum erit principales, id quod in sequentibus exemplis efficere visum est.

Exemplum 1.

296. Sit vis centripeta ipsis distantiis proportionalis seu $P = \frac{x}{f}$ fiet $n = 1$. Posito ergo arcu $BS = s$ curua quaesita exprimetur ista aequatione $s = -\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{\sqrt{2bf}} + \frac{a}{2\sqrt{2bf}} \, l\frac{a + \sqrt{(a^2 - x^2)}}{a - \sqrt{(a^2 - x^2)}}$. Ex qua

SVPER ... PVNCTI
qua aequatio... ex qua ... tia reperitur ... $bPx = 2$ ... in ea distanti... x vero et p... erit $pp = \frac{a^2}{2b}$... xus contrarii ... punctum flexus contrarii ... est $x^4 = 2a^2x$... $bf^n x^{n+1} =$ ... $a^2 + 2bf - 2\sqrt{}$... $^{+1} - x^{n+1})$ ... esse potest q... $\sqrt{bf}$, atque $\frac{p}{x}$... x^{n+1} ... quem curua i... cum radio C... $8a^{n+1}bf^n)$ ... tio vero curu... gulum ACM ... $\sqrt{(a^2 - x^2)} = y$ ... $+ \frac{y^9}{9a^8} +$ etc. ... vbi x non m... de paruum er... iusmodi curaequatione ap... um producere curua infi... erit principaque quando c... efficere vi$= \frac{aa}{2bf + a^2}$. E... C curuam abir... istantiis pro- ... 297. Sit ... osito ergo ar- ... ipsa aequatio... ista aequa- ... nim ob $P = \frac{f}{x}$, ... $\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$. Ex qua

qua aequatione data quauis puncti M a C distantia reperitur angulus BCS, quo absoluto corpus in ea distantia existit. Inter distantiam MC, x vero et perpendiculum $CT = p$ aequatio haec erit $pp = \frac{a^2x^2 - x^4}{2bf + a^2 - x^2}$. Huius curuae punctum flexus contrarii erit vbi est $dp = 0$, hoc autem vbi est $x^4 = 2a^2x^2 + 4bfx^2 - a^4 - 2abf$, seu $xx = a^2 + 2bf - 2\sqrt{(a^2bf + b^2f^2)}$, quia x non maior esse potest quam a. Hinc fit $x = \sqrt{(a^2 + bf)} - \sqrt{bf}$, atque $\frac{pp}{xx} = \frac{\sqrt{(a^2 + bf)} - \sqrt{bf}}{\sqrt{(a^2 + bf)}}$. Anguli ergo, quem curua in puncto flexus contrarii constituit cum radio CM cosinus erit $= \frac{\sqrt[4]{bf}}{\sqrt[4]{(a^2 + bf)}}$. Aequatio vero curuae in seriem conuersa erit; posito $\sqrt{(a^2 - x^2)} = y$, haec $s\sqrt{2bf} = \frac{y^3}{3a^2} + \frac{y^5}{5a^4} + \frac{y^7}{7a^6} + \frac{y^9}{9a^8} +$ etc. In ipso ergo curuae principio, vbi x non multo minor est quam a, seu y valde paruum erit $s\sqrt{2bf} = \frac{y^3}{3a^2}$. Deinde ex ipsa aequatione apparet facto $x = 0$ fore $s = \infty$, quare curua infinitis spiris ambit centrum C, eritque quando corpus centro iam proximum est $\frac{pp}{xx} = \frac{aa}{2bf + a^2}$. Ex quo sequitur proxime circa centrum C curuam abire in logarithmicam spiralem.

Exemplum 2.

297. Sit $n = -1$, seu $n + 1 = 0$, qui casus ex ipsa aequatione differentiali est eruendus. Fit enim ob $P = \frac{f}{x}$, $\int Pdx = fl\frac{x}{a}$, vnde habebitur ista

aequa-

aequatio $ds = \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-dx}{x\sqrt{b}}\sqrt{fl\frac{a}{x}}$, cuius integralis est $s = \frac{2f(la-lx)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{bf}}$. Altera aequatio inter perpendiculum p et x, erit haec $pp = \frac{fxxl\frac{a}{x}}{b+fl\frac{a}{x}}$. Ex qua inuenitur punctum flexus contrarii in eo loco, in quo est $b = 2f(l\frac{a}{x})^2 + 2bl\frac{a}{x}$ seu $l\frac{a}{x} = \frac{-b+\sqrt{(bb+2bf)}}{2f}$. Hoc ergo habebitur sumendo $s = \frac{(-b+\sqrt{(bb+2bf)})^{\frac{3}{2}}}{3f\sqrt{2a}}$. Perspicitur porro si fiat $x=0$, fore $s=\infty$, seu curuam infinitis spiris centrum C circumdare, hoc vero casu erit $\frac{pp}{xx}=1$, seu $p=x$. Vltimo ergo, curua in circulum infinite paruum abit.

Exemplum 3.

298. Ponatur $n=-2$ vt vis centripeta sit quadratis distantiarum reciproce proportionalis, erit $\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-fdx}{x}\sqrt{\frac{a-x}{abx}} = ds$. Ponatur $\frac{a-x}{x} = yy$, fiet $\frac{ds\sqrt{ab}}{2f} = \frac{yy\,dy}{1+yy} = dy - \frac{dy}{1+yy}$. Exprimit vero $\int\frac{dy}{1+yy}$ arcum, cuius tangens est y seu $\sqrt{\frac{a-x}{x}}$ sit hic arcus $=t$; erit $t+\frac{s\sqrt{ab}}{2f} = y = \sqrt{\frac{a-x}{x}}$. Vbique ergo data distantia x capiendus est arcus s in $\frac{\sqrt{ab}}{2f}$ ductus aequalis differentiae inter tangentem $\sqrt{\frac{a-x}{x}}$ et arcum respondentem, posito radio $=1$. Si x ponatur $=0$, fiet $s=\infty$, ex quo sequitur curuam per infinitas spiras ad centrum C descendere.

Prae-

Praeterea ob $-\int Pdx = \frac{ff(a-x)}{ax}$ erit $pp = \frac{ffxx(a-x)}{abx+ff(a-x)}$ Ex quo sequitur si x euanescat fore $\frac{pp}{xx}=1$, seu curuam vltimo quoque in circulum infinite paruum abire. Si fuerit $ab=ff$, erit $pp=\frac{xx(a-x)}{a}$, et $t+\frac{s}{2}=\sqrt{\frac{a-x}{x}}$ Punctum flexus contrarii hoc ergo casu incidet in eum locum, vbi est $2ax=3xx$, seu vel $x=0$ vel $x=\frac{2a}{3}$. Sin autem fuerit $ab=4ff$, erit $t+s=\sqrt{\frac{a-x}{x}}$; et punctum flexus contrarii habebitur capiendo $x=a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Scholion 2.

299. Quo autem appareat, quomodo spirae infinitae sint comparatae, si vis centripeta fuerit potestati cuicunque distantiarum proportionalis seu $P=\frac{x^n}{f^n}$; consideretur aequatio inter p et x, quae erit $\frac{pp}{xx} = \frac{a^{n+1}-x^{n+1}}{(n+1)bf^n+a^{n+1}-x^{n+1}}$. Vbi duo distinguendi sunt casus alter quo $n+1$ est est numerus affirmatiuus alter quo est negatiuus. Si $n+1$ est numerus affirmatiuus facto $x=0$ fit $\frac{pp}{xx} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n+a^{n+1}}$. Hoc ergo casu curua AM circa centrum C abit in logarithmicam spiralem. At si $n+1$ est numerus negatiuus facto $x=0$ fit $\frac{pp}{xx}=1$. His ergo in casibus curua in C abit in circulum infinite paruum. Fit his casibus corporis ad C accedentis celeritas infinite magna,

et

et hanc ob rem nisi curua in circulum abiret corpus celeritate infinite magna ad C accederet, quod esset contra conditionem problematis. Determinatis igitur curuis, super quibus corpus aequabiliter ad centrum virium accedit, inuestigabimus eas curuas, super quibus motu aequabili circa centrum virium circumfertur.

PROPOSITIO 33.

Problema

Tab. VIII. Fig. 3. 300. *Si corpus attrahatur perpetuo ad centrum virium C, determinare curuam AM, super qua corpus motu angulari circa centrum C aequabiliter mouetur.*

Solutio.

Sit A curuae punctum supremum, vbi curua normalis erit in radium AC; sitque celeritas corporis in A debita altitudini b et AC $= a$, erit motus angularis in A $= \frac{\sqrt{b}}{a}$, cui quantitati motus angularis in singulis punctis M debet esse aequalis. Ponatur CM $= x$, cui aequalis capiatur CP, et sit vis centripeta in M $=$ P, erit celeritas in M debita altitudini $b - \int Pdx$, integrali $\int Pdx$ ita accepto vt euanescat posito $x = a$. Ducta tangente MT vocetur perpendiculum ex C in eam demissum CT $= p$, erit $x : p =$ Mm : mn. Hanc ob rem celeritas per mn $= \frac{p\sqrt{b - \int Pdx}}{x}$, et celeritas angularis $= \frac{p\sqrt{b - \int Pdx}}{x^2}$, quae aequa-

aequalis esse debet ipsi $\frac{\sqrt{b}}{a}$. Hinc prodit sequens aequatio $bx^4 = a^2bp^2 - a^2p^2\int Pdx$, seu $p = \frac{x^2\sqrt{b}}{a\sqrt{b - \int Pdx}}$. Centro C radio BC $= 1$ describatur arcus circuli BS, qui dicatur $= s$, erit $1 : ds = x : mn$, vnde erit $mn = xds$ et M$m = \sqrt{(dx^2 + x^2ds^2)}$. Cum nunc sit $x : p = \sqrt{(dx^2 + x^2ds^2)} : xds$ fiet $p = \frac{xxds}{\sqrt{(dx^2 + x^2ds^2)}}$. Quo valore in aequatione inuenta substituto habebitur $bdx^2 + bx^2ds^2 = a^2bds^2 - a^2ds^2\int Pdx$, hincque $ds = \frac{-dx\sqrt{b}}{\sqrt{(a^2b - bx^2 - a^2\int Pdx)}}$. Ex qua aequatione curua quaesita poterit construi. Q.E.I.

Corollarium I.

301. Quo minor fit x, eo maior fiet $b - \int Pdx$, quare quo minor fit x eo minor quoque fiet $\frac{p}{x}$, seu sinus anguli CMT. Est enim $\frac{p}{x} = \frac{x\sqrt{b}}{a\sqrt{(b - \int Pdx)}}$.

Corollarium 2.

302. Porro tam ex hypothesi quam hac aequatione x non potest fieri maior quam a, fieret enim $p > x$. Quamobrem radiorum CM nullus potest esse normalis in curuam, nisi qui est maximus nempe $=$ AC.

Scholion I.

303. Per se quidem manifestum est in quacunque vis centripetae hypothesi circulum cen-

tro

tro C descriptum satisfacere; corpus enim super circulo vniformiter moueri debebit. Etiamsi autem aequatio generalis circulum non comprehendere videatur, nihilo tamen minus in ea contentus esse debet; vt iam supra innuimus.

Scholion 2.

304. Perspicuum autem est nullam aliam curuam centrum C cingentem praeter circulum quaesito satisfacere posse. Nam in huiusmodi curuis fieri non potest, vt omnes rectae ex C eductae et in curuam normales sint inter se aequales. Quae igitur curuae praeter circulum problema soluunt, eae per ipsum centrum C transire debent, vt plus vno radio MC non sit in curuam normali. Cuiusmodi ergo sint hac curuae in sequente exemplo videamus.

Exemplum.

305. *Sit vis centripeta distantiis a centro directe proportionalis* seu $P = \frac{x}{f}$ erit $-\int Pdx = \frac{a^2-x^2}{2f}$. Quo substituto pro curua sequens prodit aequatio $ds = \frac{-dx\sqrt{b}}{\sqrt{\left(b+\frac{a^2}{2f}\right)(a^2-x^2)}}$. Est vero $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ arcus, cuius sinus est $\frac{x}{a}$ existente toto sinu $= 1$. Notetur hic arcus per $A.\frac{x}{a}$. Sit sinus arcus BS $= t$, erit $s = A.t$; vnde fiet $A.t = \sqrt{\frac{2bf}{a^2+2bf}}$. (A.1−

SV… …U PUNCTI
(A.1−A x/a … …pus enim su- … …ebit. Etiam- … m non com- … minus in ea … innuimus.
nullam aliam … aeter circulum … huiusmodi cur- … tae ex C edu- … er se aequales. … lum problema … transire de- … sit in curuam … curuae in se-
…ntiis a centro … erit −∫Pdx = … sequens prodit … ro ∫dx/√(a²−x²) ar- … to sinu = 1. … sinus arcus BS … = √(2bf/(a²+2bf)). (A.1−
306. vbique deo…

$(A.1-A\frac{x}{a})$. Seu arcus cuius cosinus est $\frac{x}{a}$ erit $= A.t\sqrt{\frac{a^2+2bf}{2bf}}$. Vnde constructio curuae facilis fluit, eritque curua algebraica quoties $\sqrt{\frac{a^2+2bf}{2bf}}$ est numerus rationalis. Sit $\sqrt{\frac{a^2+2bf}{2bf}} = m$ seu $2bf = \frac{a^2}{m^2-1}$, erit $\frac{mdt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, cuius integralis per logarithmos imaginarios est $ml(t\sqrt{-1}+\sqrt{(1-tt)}) = l(\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a})$ seu $(t\sqrt{-1}+\sqrt{(1-tt)})^m = \frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}$. Demittatur ex M in AC perpendiculum $MQ = y$ et posito $CQ = u$, erit $1 : t = x : y$ atque $t = \frac{y}{x}$. Propterea prodibit $(\frac{y\sqrt{-1}+\sqrt{(x^2-y^2)}}{x})^m = \frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}$. Vt sit $m = 2$ seu $bf = \frac{a^2}{6}$, habebitur ista aequatio $(\frac{y\sqrt{-1}+u}{x})^2 = \frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}$. Quae reducta dat hanc $x^3 = au^2 - ay^2 = ax^2 - 2ay^2$, seu $y = x\sqrt{\frac{a-x}{2a}}$ et $u = x\sqrt{\frac{a+x}{2a}}$. At si inter coordinatas orthogonales u et y aequatio desideretur ea erit ordinis sexti haec $(y^2+u^2)^3 = a^2(u^2-y^2)^2$. In hac curua applicata erit maxima si $x = \frac{2b}{3}$, seu si sumatur $CQ = \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{5}{6}} = a\sqrt{\frac{10}{27}}$, tum enim erit $QM = \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{2}{27}}$. In aliis vero ipsius m valoribus maxima applicata erit vbi est $my\sqrt{(a^2-x^2)} = ux$.

PROPOSITIO 34.
Problema.

306. *Sit potentia sollicitans uniformis* g, *et vbique deorsum tendat, deturque curua* AT, *inue-* Tab. VIII. Fig. 4.

nire

nire curuam AM, *super qua corpus ita descendat, vt tempus per arcum quemcunque* AM *proportionale sit radici quadratae ex applicata respondente* PT *curuae datae* AT.

Solutio.

Ponatur abscissa communis $AP = x$, curuae AT applicata $PT = t$, dabitur ergo, quia curua AT datur aequatio inter x et t, quae talis esse debebit, vt euanescente x fiat quoque $t = o$, quia motus initium in A ponitur, et tempora a puncto A computantur. Sit porro curuae quaesitae AM applicata $PM = y$, et arcus $AM = s$. Debita sit celeritas initialis in A altitudini b. Erit ergo celeritas in M debita altitudini $b + gx$, et tempus quo arcus AM absoluitur $= \int \frac{dt}{\sqrt{(b+gx)}}$, quod aequale esse debet ipsi $\sqrt{t}$. Habebitur ergo haec aequatio $\int \frac{ds}{\sqrt{(b+gx)}} = \sqrt{t}$ seu $\frac{ds}{\sqrt{(b+gx)}} = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$. Vnde $dt^2(b+gx) = 4t\,ds^2 = 4t\,dx^2 + 4t\,dy^2$, atque $dy = \frac{\sqrt{(bdt^2 + gx\,dt^2 - 4t\,dx^2)}}{2\sqrt{t}}$. Ex qua aequatione, cum t per x detur, curua quaesita AM construi poterit. Ita autem est construenda, vt posito $x = o$ fiat quoque $y = o$, quo curuae AM initium sit in A. Q. E. I.

Corollarium I.

307. Quo igitur curua sit realis, oportet, vt $bdt^2 + gx\,dt^2$ sit maius quam $4t\,dx^2$ seu $\frac{dt}{2\sqrt{t}} > \frac{dx}{\sqrt{(b+gx)}}$, siue integrando $\sqrt{t} > \frac{2\sqrt{(b+gx)} - 2\sqrt{b}}{g}$. Si enim fuerit $\sqrt{t} = \frac{2\sqrt{(b+gx)} - 2\sqrt{b}}{g}$, curua AM fit recta verticalis, super qua descensus fit celerrimus.

SI U PUNCTI
$> \frac{dx}{\sqrt{b+}}$ ita descendat, proportionaSi enim respondente PT
recta ve
30 $= x$, curuae aequale , quia curua sponden uae talis esse cum sit uoque $t = o$, descende et tempora loco vb curuae quaercus $AM = s$. itudini b. Erit $b + gx$, et
30 $\frac{dt}{\sqrt{(b+gx)}}$, quod verticali ur ergo haec $= m$, $= \frac{ds}{2\sqrt{t}}$. Vnde $\frac{dx}{\sqrt{(b+gx)}}$, $t\,dy^2$, atque $4x$, id uatione, cum Tum aut construi potur $x =$ vt posito $x = o$ tangens initium sit in si $b = o$, fiat ima que tum alis, oportet, constitu $t\,dx^2$ seu $\frac{dt}{2\sqrt{t}} >$

Corollarium 2.

308. Si igitur in curua AT alicubi fiat $\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ aequale ipsi $\frac{dx}{\sqrt{(b+gx)}}$, ibi tangens curuae AM respondens erit verticalis. Atque si infra hunc locum sit $\frac{dt}{2\sqrt{t}} < \frac{dx}{\sqrt{(b+gx)}}$, curua AM non eousque descendet, sed habebit punctum reuersionis in eo loco vbi tangens est verticalis.

Corollarium 3.

309. Si angulus quem curua AT in A cum verticali AP constituit fuerit acutus, cuius tangens $= m$, erit in initio A, $t = mx$, et $\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{m\,dx}{2\sqrt{mx}} > \frac{dx}{\sqrt{(b+gx)}}$, vnde $m(b+gx)$ maius esse debet quam $4x$, id quod semper accidit si b non fuerit $= o$. Tum autem erit $dy = \frac{dx\sqrt{(bm^2 + gm^2x - 4mx)}}{2\sqrt{mx}}$. Posito igitur $x = o$, fiet $\frac{dy}{dx} = \infty$, seu his casibus curuae AM tangens in A erit horizontalis; nisi sit $b = o$. At si $b = o$, erit $dy = \frac{dx\sqrt{(gm-4)}}{2}$. Ne igitur curua AM fiat imaginaria, debet gm maius esse quam 4, atque tum curua AM cum AP in A angulum acutum constituet, cuius tangens erit $\frac{\sqrt{(gm-4)}}{2}$.

Corollarium 4.

310. Sin vero angulus, quem curua AT in A cum verticali AP facit, sit rectus, fit $m = \infty$. Hoc ergo casu curuae AM tangens in A semper erit horizontalis, siue b sit $= o$ siue secus.

Corollarium 5.

311. Si celeritas in A est $= o$, et in principio A curua AT confundatur cum curua, cuius aequatio est $t = \alpha x^n$, existente n numero affirmatiuo, quo crescente x quoque t crescat, erit $dt = \alpha n x^{n-1} dx$ et $dy = \frac{dx\sqrt{(\alpha^2 g n^2 x^{2n-1} - 4\alpha x^n)}}{2\sqrt{\alpha x^n}}$. Nunc ne dy fiat imaginarium facto $x = o$ debebit esse $n > 2n-1$, seu $n < 1$, quibus casibus scilicet curua AT in A est normalis ad AP. Tum vero erit in puncto A, $dy = \frac{n dx\sqrt{\alpha g}}{2x^{\frac{1-n}{2}}}$ et $y = \frac{nx^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{\alpha g}}{n+1}$, et radius osculi curuae AM in A $= \frac{n^2 \alpha g x^n}{2(n+1)}$. Ex quo sequitur curuae AM, cuius tangens in A est horizontalis, radium osculi in A debere esse infinite paruum, si corpus ex quiete super ea descendere posse debeat. Nisi enim radius osculi fuerit infinite paruus, corpus perpetuo in A quiescens permanebit.

Co-

SVPER . PVNCTI

312. Si i ... rua AT in ponatur in A ... fit $m = \infty$. bit $\frac{dt}{2\sqrt t}$ maius ... A semper uae AT. Qua ... cus. p est quantitas nimis magnum ita accipi debe ... et in principio ... autem valore ... rua, cuius $\frac{dx}{\sqrt{gx}} + pdx$ seu ... ro affirma- fita AM. Vel ... erit $dt =$ tio $y = \int dx\sqrt{(}$ ... $^{-1} - 4\alpha x^n$ est p non talem ... $\int pdx$ praescrip ... $= o$ debebit magnum. ... bus scilicet Tum vero

313. Ex ... $y =$ rem affirmatiu ... descendere: si fi ... ua AM in illo ... AM in A $=$ tetur sursum. nito, curua A. ... cuius tantalem. ... uli in A de- ... x quiete su- ... radius osculi

314. Si b ... in A quie- ua AT innumer prout enim cel piatur, alia pro

Co-

Corollarium 6.

312. Si igitur corpus ex quiete descendere ponatur in A, quo curua AM fiat realis, debebit $\frac{dt}{2\sqrt t}$ maius esse quam $\frac{dx}{\sqrt{gx}}$ saltem in initio curuae AT. Quare si ponatur $\frac{dt}{2\sqrt t} = \frac{dx}{\sqrt{gx}} + pdx$, vbi p est quantitas affirmatiua saltem nisi x ponatur nimis magnum, erit $\sqrt t = \frac{2\sqrt{gx}}{g} + \int p\,dx$, vbi $\int pdx$ ita accipi debet, vt euanescat facto $x = o$. Hoc autem valore loco $\frac{dt}{2\sqrt t}$ substituto prodibit $\frac{ds}{\sqrt{gx}} = \frac{dx}{\sqrt{gx}} + pdx$ seu $s = x + \int pdx\sqrt{gx}$, pro curua quaesita AM. Vel inter x et y haec habebitur aequatio $y = \int dx\sqrt{(2p\sqrt{gx} + gppx)}$. Notandum vero est p non talem esse posse quantitatem, ex qua $\int pdx$ praescripto modo acceptum fiat infinite magnum.

Corollarium 7.

313. Ex dictis intelligitur, quamdiu p valorem affirmatiuum retineat, tamdiu curuam AM descendere: si fit $p = o$, et deinceps negatiuum, curua AM in illo loco habebit cuspidem, et reuertetur sursum. Si $p = \infty$, manente tamen $\int pdx$ finito, curua AM ibi habebit tangentem horizontalem.

Corollarium 8.

314. Si b non ponatur $= o$, ex eadem curua AT innumerabiles inueniri poterunt curuae AM; prout enim celeritas initialis maior minorue accipiatur, alia prodit curua AM.

Scho-

Scholion.

315. Problematis huius maximus erit vſus in ſolutionibus ſequentium problematum indeterminatorum, in quibus omnes curuae requiruntur, ſuper quibus corpus eodem tempore vel ad datam rectam vel curuam lineam perueniat. Hanc ob rem indolem quantitatum t et p diligentius inueſtigauimus, quo iis in ſequentibus vti liceat.

PROPOSITIO 35.

Problema.

Tabula IX. Fig. 1.

316. *Poſita potentia ſollicitante vniformi* g *et deorſum directa, inuenire omnes curuas* AMC, *ſuper quibus corpus in* A *ex quiete deſcenſum incipiens dato tempore ad rectam horizontalem* BC *perueniat.*

Solutio.

Ponatur AP$=x$, PM$=y$, et AB$=a$. In curua AND exprimat PN ſupra ſumtam quantitatem $\int pdx$, cuius curuae haec debet eſſe proprietas, vt in A cum axe AB concurrat, eiusque applicatae continuo vsque ad D ſaltem creſcant, quo ſcilicet pdx ſit affirmatiuum. Nunc ſumto $y=\int dx\sqrt{(2p\sqrt{gx}+gppx)}$ erit tempus per AMC$=\frac{2\sqrt{ga}}{g}+$ BU (312.). Quamobrem cum infinitae curuae huius indolis in locum curuae AND ſubſtitui queant, ex iis infinitae orientur curuae AMC, ſuper quibus omnibus

SUI … V PVNCTI
bus corp … rizontale … dum pro … euaneſcat … retinente … rem. Q. … is erit vſus in … m indetermi- … requiruntur, … e vel ad da- … rueniat. Hanc … diligentius in- … vti liceat.
317. AND in … li CD, … pendicula …
vniformi g et … is AMC, ſuper … i incipiens da- … perueniat.
318. … o, tangen … vero quo … At ſi pV … MC in …
=a. In curua … ntitatem ∫pdx, … s, vt in A cum … ontinuo vsque … pdx ſit affir- … pVgx+gppx) … BU (312.). … uius indolis in … , ex iis infi- … quibus omni- … bus
319. Ir … indetermi … curuae A. … quentibus … que libue … ſatisfacien
Tom. II.

corpus eodem tempore ex A ad lineam horizontalem BC pertingit. Ad hoc ergo obtinendum pro $\int pdx$ talis quantitas accipi debet, quae euaneſcat poſito $x=o$, et fiat $=$BD poſito $x=a$, retinente p vbique per AND affirmatiuum valorem. Q. E. I.

Corollarium 1.

317. Si facto $x=a$ fiat $p=o$, ſeu ſi curua AND in D perpendiculariter inſiſtat horizontali CD, curua AMC quoque horizontali DC perpendiculariter inſiſtet.

Corollarium 2.

318. Atque ſi poſito $x=o$, fiat quoque $p=o$, tangens curuae AMC in A erit verticalis, idem vero quoque accidit, ſi $p\sqrt{x}$ fiat $=o$ poſito $x=o$. At ſi $p\sqrt{x}$ fiat infinitum poſito $x=o$, curua AMC in A habebit tangentem horizontalem.

Scholion 1.

319. Intelligitur ergo problema hoc maxime eſſe indeterminatum, cum infinitis modis infinitae curuae AMC poſſint inueniri. Quamobrem in ſequentibus exemplis modum indicabimus quotcunque libuerit ſeries infinitarum curuarum quaeſito ſatisfacientium inueniendi.

 Exem-

Exemplum I.

320. Ponatur PN $=\int p\,dx = z$ et BD $=\sqrt{b}$, ita vt tempus descensus esse debeat $=\frac{2\sqrt{ga}}{g}+\sqrt{b}$. Sumatur pro curua AND haec aequatio $z=\alpha x^2+\beta x$, quae hanc iam habet proprietatem, vt $\int p\,dx$ seu z euanescat posito $x=o$. Nunc quia facto $x=a$ fieri debet $z=\sqrt{b}$, habebitur $\sqrt{b}=\alpha a^2+\beta a$, hincque $\beta=\frac{\sqrt{b}}{a}-\alpha a$, ideoque $z=\alpha x^2+\frac{x\sqrt{b}}{a}-\alpha a x$. Deinde quia p seu $\frac{dz}{dx}$ affirmatiuum semper habere debet valorem si $x<a$, debebit esse $2\alpha x+\frac{\sqrt{b}}{a}-\alpha a$ affirmatiuum. Quare oportet esse $\sqrt{b}>\alpha a^2$, ponatur ideo $\sqrt{b}=\alpha a^2+\alpha a f$ erit $\alpha=\frac{\sqrt{b}}{a^2+af}$. Quo substituto habebitur $z=\frac{x^2\sqrt{b}+fx\sqrt{b}}{a^2+af}$, quae aequatio substituendis loco f innumerabilibus valoribus affirmatiuis, infinitas dat curuas AND. Fiet autem $p=\frac{dz}{dx}=\frac{2x\sqrt{b}+f\sqrt{b}}{a^2+af}$ et $p\sqrt{gx}=\frac{2x\sqrt{gbx}+f\sqrt{gbx}}{a^2+af}$, ex qua patet omnes hinc orientes curuas AMC tangere rectam AB in A. Aequatio vero pro curuis AMC erit haec $y=\int\frac{dx}{a^2+af}\sqrt{(2a(a+f)(2x+f)\sqrt{gbx}+gbx(2x+f)^2)}$. Quae infinitas continet curuas problemati satisfacientes, super quibus omnibus tempus descensus ad lineam horizontalem est $=\frac{2\sqrt{ga}}{g}+\sqrt{b}$.

Corollarium 3.

321. Hae autem lineae omnes sunt rectificabiles. Nam cum sit $\frac{ds}{\sqrt{gx}}=\frac{dx}{\sqrt{gx}}+p\,dx$, erit $s=x+\int p\,dx\sqrt{gx}$. Est vero $\int p\,dx\sqrt{gx}=\frac{\frac{4}{3}x^2\sqrt{gbx}+\frac{2}{3}fx\sqrt{gbx}}{a^2+af}$. Vnde tota curua AMC erit $=a+\frac{(\frac{4}{3}a+\frac{2}{3}f)\sqrt{gab}}{a+f}$.

SV PUNCTI
$\sqrt{gx}$. E
Vade to
3D $=\sqrt{b}$, $\frac{2\sqrt{ga}}{g}+\sqrt{b}$. $z=\alpha x^2+$ n, vt $\int pdx$ quia facto $=\alpha a^2+\beta a$, $+\frac{x\sqrt{b}}{a}-\alpha ax$. per habere $2\alpha x+\frac{\sqrt{b}}{a}-$ $\sqrt{b}>\alpha a^2$, $\frac{\sqrt{b}}{a^2+af}$. Quo e aequatio loribus affirmatiuis. Fiet au- $\frac{2x+f\sqrt{gbx}}{+af}$, ex AMC tan- o pro cur- $(2a(a+f)$ ae infinitas ites, super lineam ho-
322 sima pro $\frac{4}{3}\sqrt{gab}$. $\sqrt{(a^2x\sqrt{}}$ cto $f=\infty$ Et aequa $bx+gbx$
323. $=\frac{x^2\sqrt{b}+f}{a^2+af}$ per solas curuae p mnes pa sed loco $z^2+z\sqrt{f}$ bolas con uenientur scensum ties infini tum secti
ectificabiles. $=x+\int pdx$ $\sqrt{gx}$.

Corollarium 4.

322. Inter has igitur curuas AMC longissima prodit si $f=o$, erit enim tum AMC $=a+\frac{4}{3}\sqrt{gab}$. Et pro hac erit aequatio ista $y=\int\frac{2dx}{a^2}\sqrt{(a^2x\sqrt{gbx}+gbx)}$. Breuissima vero habetur facto $f=\infty$, tum enim erit AMC $=a+\frac{2}{3}\sqrt{gab}$. Et aequatio pro hac curua erit $y=\int\frac{dx}{a}\sqrt{(2a\sqrt{gbx}+gbx)}$.

Scholion 2.

323. Omnes curuae AND sub aequatione $z=\frac{x^2\sqrt{b}+fx\sqrt{b}}{a^2+af}$ contentae sunt parabolae, adeo vt per solas parabolas innumerabiles inuentae sint curuae problemati satisfacientes. Neque vero omnes parabolae in hac aequatione continentur, sed loco illius aequationis, si adhibeatur haec, $z^2+z\sqrt{f}=$ [illegible], quae etiam infinitas parabolas continet, iterum infinitae curuae AMC inuenientur, super quibus corpus dato tempore descensum absoluit. Ex quo intelligi potest quoties infinitae inueniri queant curuae AMC, si tantum sectiones conicae in locum curuae AND substituan-

ſtituantur. Sumta enim pro curua AND hac aequatione $z^2 + \alpha z = \beta x^2 + \gamma x + \gamma x + \delta x z$, quae omnes continet ſectiones conicas per punctum A transeuntes, fieri debet $b + \alpha \sqrt{b} = \beta a^2 + \gamma a + \delta a \sqrt{b}$, atque $\frac{\gamma}{\alpha}$ et $\frac{2ba + \gamma + \delta\sqrt{b}}{\alpha + 2\sqrt{b} - \delta a}$ debent eſſe quantitates poſitiuae, quod quam infinitis modis fieri poſſit, facile perſpicitur. Si deinde omnes curuae algebraicae conſiderentur, atque poſtmodum quoque curuae tranſcendentes ſimul, maxima copia curuarum ſimul deſcriptarum concipi poterit.

Exemplum 2.

324. Sumatur pro curua AND haec aequatio generalis $z = \frac{x^n \sqrt{b}}{a^n}$, denotante n numerum affirmatiuum quemcunque; euaneſcet z poſito $x = 0$, fietque $z = \sqrt{b}$ poſito $x = a$ vt requiritur: praeterea vero quoque erit p ſeu $\frac{dz}{dx} = \frac{n x^{n-1} \sqrt{b}}{a^n}$ quantitas affirmatiua. Cum igitur ſit $p\sqrt{gx} = \frac{n x^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{gb}}{a^n}$ erit $y = \int \frac{dx}{a^n} \sqrt{(2 n a^n x^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{gb} + n^2 g b x^{2n-1})}$. Quae aequatio infinitas curuas AMC complectitur, quae omnes erunt rectificabiles. Erit enim $AM = x + \frac{2 n x^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{gb}}{(2n+1) a^n}$, ideoque $AMC = a + \frac{2n\sqrt{gab}}{2n+1}$.

Co-

SVPE V PVNCTI
AND hac x + δxz, quae er punctum A βa² + γa + t eſſe quanti- is modis fieri e omnes cur- e poſtmodum , maxima co- ncipi poterit.
325. atque y = re curua ab qua deſcenſ citur ergo nata, ſupe horizontale nea AMC
) haec aequa-
326. ſideratam c numerabiles vnica aequ numerabiles n numerum z poſito x = 0, itur: praeter- quanti-
etiam pote enim PN = neraliter ſi A vero eade accipi pote ſe functio v et diff. PN affirmatiua, n² g b x^{2n-1}). C complecti- Erit enim AMC = a +
Co-

Corollarium 5.

325. Si fuerit $n = \frac{1}{2}$ erit $y = \int \frac{dx\sqrt{(gb + 4\sqrt{gab})}}{2\sqrt{a}}$, atque $y = \frac{x\sqrt{(gb + 4\sqrt{gab})}}{2\sqrt{a}}$ et $AM = x(1 + \frac{\sqrt{gab}}{2a})$. Quare curua abit in lineam rectam inclinatam ſuper qua deſcenſus fit tempore $= \frac{2\sqrt{ga}}{g} + \sqrt{b}$. Perſpicitur ergo dari lineas breuiores recta hac inclinata, ſuper quibus corpus dato tempore ex A ad horizontalem BC peruenit: facto enim $n < \frac{1}{2}$ linea AMC fit breuior.

Scholion 3.

326. Ceterum ſi detur vnica curua AND deſideratam curuam AMC praebens, ex ea ipſa innumerabiles aliae poterunt inueniri. Data enim vnica aequatione inter z et x capiatur $PN = \frac{(ma - (m-1)x)z}{a}$, vnde pro diuerſo ipſius m valore innumerabiles curuae orientur. Simili modo poni etiam poteſt $PN = \frac{(m a x^n - (m-1) x^{n+1}) z}{a^{n+1}}$ fit enim $PN = z = \sqrt{b}$ ſi ponatur $x = a$. Atque generaliter ſi fuerit P functio quaecunque ipſarum x et z, A vero eadem functio quae prodit facto $x = a$ et $z = \sqrt{b}$, accipi poterit $PN = \frac{Pz}{A}$. Debebit autem P talis eſſe functio vt Pz euaneſcat facto $x = 0$ et $z = 0$, et diff. PN diuiſum per dx debet eſſe quantitas affirmatiua, ſaltem quamdiu eſt $x < a$.

Scho-

Scholion 4.

327. Simili modo problema generalissime soluetur, si designante P quamcunque functionem ipsius x euanescentem si est $x=o$, et A eam quantitatem in quam abit P si fit $x=a$, sumatur $z=\frac{P\sqrt{b}}{A}$ pro generalissima aequatione curuae AND. Sit deinde $dP=Qdx$, debebit Q esse quantitas affirmatiua, quamdiu x non superat a; erit $p=\frac{Q\sqrt{b}}{A}$ atque hinc $y=\int\frac{dx}{A}\sqrt{(2AQ\sqrt{gbx}+gbQQx)}$, quae est generalissima aequatio pro curuis AMC, quae omnes a corpore descendente proposito tempore absoluentur. Apparet hoc modo curuas transcendentes quoque in locum curuarum AND substitui posse, quibus casibus tempus, quo quaeuis curuae AMC portio absoluitur, agebraice non potest definiri. Si $Q\sqrt{gbx}$ ponatur $=R$, erit $y=\int\frac{dx}{A}\sqrt{(2AR+RR)}$. Sumto ergo loco R quacunque functione ipsius x, ad inueniendam A integrari debet $\frac{Rdx}{\sqrt{gbx}}$ ita vt euanescat posito $x=o$, deinde poni oportet $x=a$, et quod prouenit erit $=A$. Hic vero hoc tantum est monendum vt pro R sumatur quantitas affirmatiua, quamdiu x non excedit a, et caueri debet ne $\int\frac{Rdx}{\sqrt{gbx}}$ fiat infinitum si praescripto modo accipiatur.

PROPOSITIO 36.

Problema.

Tabula IX. Fig. 2. 328. *Posita potentia sollicitante uniformi g et vbique deorsum directa, inuenire omnes curuas AMC super*

SUPE[R] MOTU PVNCTI

super quibus
BC *ad bori*

lema generalissime cunque functionem $x=o$, et A eam fit $x=a$, sumatur ione curuae AND. esse quantitas affir- a; erit $p=\frac{Q\sqrt{b}}{A}$ at- $+gbQQx)$, quae curuis AMC, quae proposito tempo- modo curuas trans- ruarum AND sub- mpus, quo quaeuis r, agebraice non natur $=R$, erit $y=$ go loco R quacun- eniendam A inte- t posito $x=o$, de- quod prouenit erit est monendum vt atiua, quamdiu x $\int\frac{Rdx}{\sqrt{gbx}}$ fiat infinitum

Exprim quo corpus cta per qu rectae datae primat appl AM percur concipiantu applicatam AMC super ad rectam supra moni ticali AB, Ponatur nu AP$=x$, PM PQ$=\frac{y}{k}$, i ritas in M per AM = QN$=t$, dx^2+dy^2. t in u, et quamobrem curua quaesi erit $gxdt^2=$ qua aequati hoc $dt=p$

36.

tante uniformi g et omnes curuas AMC super

super quibus corpus ex A dato tempore ad rectam BC ad horizontem vtcunque inclinatam descendat.

Solutio.

Exprimat curuae AND applicata BD tempus, quo corpus ex A ad rectam BC pertingit, et ducta per quodvis punctum M recta MQ parallela rectae datae BC secante verticalem AB in Q exprimat applicata QN tempus, quo corpus partem AM percurrit. Quare si infinitae curuae AND concipiantur, quae omnes in B eandem habeant applicatam BD, hae omnes generabunt curuas AMC super quibus corpus dato tempore ab A ad rectam BC peruenit. Curuae autem AND vt supra monitum concurrere debent in A cum verticali AB, et vsque ad D diuergere debent ab AB. Ponatur nunc tangens anguli ABC $=k$, sitque AP$=x$, PM$=y$, AQ$=u$, QN$=t$, et AP$=a$ erit PQ$=\frac{y}{k}$, ideoque $x+\frac{y}{k}=u$. Quia autem celeritas in M debita est altitudini gx erit tempus per AM $=\int\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{gx}}$ quod aequale esse debet ipsi QN$=t$, erit adeo $dt=\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{gx}}$ et $gxdt^2=dx^2+dy^2$. At ob curuam AND datam, dabitur t in u, et cum sit $u=x+\frac{y}{k}$ dabitur t per x et y quamobrem habebitur aequatio inter x et y pro curua quaesita AMC. Vel cum sit $y=ku-kx$, erit $gxdt^2=(k^2+1)dx^2-2k^2du\,dx+k^2du^2$, ex qua aequatione x per u inuenire licebit. Sit ad hoc $dt=pdu$, erit $gxp^2du^2=(k^2+1)dx^2-2k^2$

dudx

$dudx + k^2 du^2$, atque $dx = \frac{k^2 du + \sqrt{g(k^2+1)p^2x - k^2)du^2}}{k^2+1}$ Curua igitur AND talis accipi debet vt vbique p maius sit quam $\frac{k}{\sqrt{gx(k^2+1)}}$. Aequatio illa autem ita debet integrari vt facto $u=o$ fiat $x=o$. Quo facto quoque eruetur aequatio inter x et y pro curua quaesita. Q. E. I.

Corollarium I.

329. Curua AMC tanget in A rectam AB si fit $dy = o$, posito $x=o$; tum vero debebit esse $du = dx$, atque $1 = \sqrt{(g(k^2+1)p^2 x - k^2)}$. Quare hoc eueniet si fit $ppx = \frac{1}{g}$ facto $x=o$. Quia autem hoc casu est y infinities minor quam x, erit in ipso initio $x = u$; ex quo sequitur curuam AMC in A tangere verticalem AB si fuerit $ppu = \frac{1}{g}$ posito $u=o$.

Corollarium 2.

330. Deinde curua AMC normalis erit in QM si fuerit PQ $= \frac{y}{k} = \frac{ydy}{dx}$ seu $dx = kdy$, $= k^2 du - k^2 dx$, siue $dx = \frac{k^2 du}{k^2+1}$. Hoc vero eueniet vbi erit $p^2 x = \frac{k}{g(k^2+1)}$.

Corollarium 3.

331. In ipso puncto A expressio ppx vel finitum valorem eumque maiorem quam $\frac{kk}{g(k^2+1)}$ habebit facto $x=o$; vel infinite magnum. In posteriore casu erit $dx = \pm \infty du$, et cum sit $dx = dx$ +

SVPER DATA LINEA IN VACVO. OTU PUNCTI
$+\frac{dy}{k}$, erit curuae AMC ... debet vt vbique p ... tio illa autem ita ... $x=o$. Quo facto y pro curua quaesita.
332. Sit ita vt fit ... de habebitur ... rectam AB si fit dy ... debit esse $du = dx$, Quare hoc eueniet ... Quia autem hoc casu ... erit in ipso initio ... AMC in A tangere ... $=\frac{1}{g}$ posito $u=o$.
2. ... normalis erit in QM ... kdy, $= k^2 du -$ ... eueniet vbi erit ... pressio ppx vel finitum ... quam $\frac{kk}{g(k^2+1)}$ habebit ... magnum. In posteriore ... cum sit $dx = dx$ +
Tom. II.

$+\frac{dy}{k}$, erit $dy = -kdx$. Quibus casibus tangens curuae AMC in A parallela erit rectae BC.

Exemplum.

332. Sit curua AND parabola quaecunque, ita vt sit $t = \frac{2a\sqrt{u}}{\sqrt{gu}}$ erit $dt = \frac{adu}{\sqrt{gu}}$, et $p = \frac{a}{\sqrt{gu}}$, vnde habebitur ista aequatio, $(k^2+1)\,dx - k^2 du = \pm \frac{du\sqrt{(a^2(k^2+1)x - k^2u)}}{\sqrt{u}}$. Huius aequationis integralis est $C = (\pm \sqrt{(a^2(k^2+1)x - k^2u)} + A\sqrt{u})^{\pi}(\pm \sqrt{(a^2(k^2+1)\,x - k^2u)} + B\sqrt{u})^{\varrho}$. Existente $A = \frac{a^2 + \sqrt{(a^4 - 4(1-a^2)k^2)}}{2}$ et $B = \frac{a^2 - \sqrt{(a^4(1-4(1-a^2)k^2)}}{2}$ et $\pi = \frac{-2A}{A-B}$ atque $\varrho = \frac{2B}{A-B}$. Cum igitur sit π numerus negatiuus, erit $C(\pm \sqrt{(a^2(k^2+1)x - k^2u)} + A\sqrt{u})^{-\pi} = (\pm \sqrt{(a^2(k^2+1)x - k^2u)} + B\sqrt{u})\,\varrho$, vbi C denotat constantem, quae efficiat vt posito $x=o$ fiat $u=o$. Manifestum autem est quaecunque fuerit constans, semper fieri $u=o$ posito $x=o$, excepto casu quo ϱ vel π euanescit. At π euanescere non potest, ϱ vero euanescit casu quo $a=1$, hoc igitur casu debet esse $C=\infty$, fietque $\pm \sqrt{(a^2(k^2+1)x - k^2)} + a^2\sqrt{u} = o$, seu $u = x$ et $y = o$; quare satisfacit hoc casu recta verticalis AB. Reliquis casibus vero ob C arbitrariam quantitatem ex vnica curua AND innumerabiles curuae AMC inveniuntur. Vnicus porro casus est seorsim tractandus, si $A=B$ seu $k^2 = \frac{a^4}{4(1-a^2)}$ tum enim erit $lu = C - 2\,l(r \mp \frac{a}{2}{}^2) \pm \frac{\frac{a^2}{2}}{r \pm \frac{a}{2}{}^2}$ existente $r = \sqrt{(a^2}$

$\frac{\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)}}{\sqrt{u}}$. Consequenter pro hoc casu habebitur haec aequatio $C = 2\, l(\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)} \mp \frac{\alpha^2\sqrt{u}}{2}) \mp \frac{\alpha^2\sqrt{u}}{\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)} \mp \frac{\alpha^2\sqrt{u}}{2}}$, vbi C quoque determinatione non opus habet. Si est $\alpha > 1$ fit B et hinc quoque p numerus negatiuus, tum ergo debet esse $C = \infty$. Hoc ergo casu erit vel $A\sqrt{u} = \sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)}$ vel $B\sqrt{u} = \sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)}$. Quae duae aequationes sunt pro lineis rectis certo modo inclinatis et per A transeuntibus; haeque etiam generaliter satisfaciunt. Vt si fuerit $\alpha = 1$, erit $A = 1$ et $B = o$, hincque hae aequationes $u = x$ seu $y = o$ et $u = \frac{(k^2+1)x}{kk} = x + \frac{x}{k}$ seu $x = ky$, quae est linea recta perpendicularis in BC, haec enim a corpore eodem tempore percurritur, quo verticalis BC.

Corollarium 4.

332. Nisi igitur sit $\alpha = 1$ vel $\alpha > 1$, innumerabiles lineae curuae inueniuntur problemati satisfacientes; quae ergo omnes minore tempore absoluentur, quam perpendicularis AB.

Corollarium 5.

333. Cum ergo ex vnica curua AND infinitae oriri queant curuae AMC, facile intelligitur infinities plures curuas huic quaestioni satisfacere, quam praecedenti.

Co-

SUPER ...)TV PVNCTI
... o hoc casu ha- ... $x^2(k^2+1)x-k^2u)$ ... C quoque de-
334. Si ... stante C, vt c... BC transeat. ... simili modo ... super quibus ... rectam BC p... ctum datum
Si est $\alpha > 1$ fit ... atiuus, tum er- ... o casu erit vel ... $\sqrt{u} = \sqrt{(\alpha^2(k^2+1)}$ ... sunt pro lineis ... per A transeun- ... satisfaciunt. Vt ... o, hincque hae ... $= \frac{(k^2+1)x}{kk} = x +$ ... a perpendicula- ... codem tem- ... BC.
335. In ... occurrit, prim... tum satisfacie... hanc rectam ... eadem aequat... tem iam huic... aequationes d... tiones integr... tiones non e... betur aequati... quae integrat... cuum est han... illa quoque c... non prodeat. ... tio integralis ... generaliter co... lem $\frac{-dt}{T} = Vd$... t, quae euan... cunque ipsius
... $\alpha > 1$, innu- ... r problemati sa- ... re tempore ab- ... AB.
... rua AND infi- ... facile intelligi- ... uaestioni satis-
Co-

Corollarium 6.

334. Si $\alpha < 1$ effici potest determinanda constante C, vt curua quaesita per datum punctum rectae BC transeat. Deinde aliis assumendis curuis AND simili modo infinitae curuae poterunt inueniri, super quibus corpus non solum dato tempore ad rectam BC perueniat, sed ad quodvis in ea punctum datum C.

Scholion 1.

335. In hoc exemplo casus quo $\alpha = 1$ bis occurrit, prima enim vice linea recta verticalis tantum satisfaciens est inuenta, altera vice praeter hanc rectam alia inclinata, vtroque tamen modo eadem aequatione generali sumus vsi. Saepius autem iam huiusmodi casus obtigerunt, in quibus aequationes differentiales continent in se aequationes integrales, quae nihilominus per integrationes non eruuntur. Vt in casu $\alpha = 1$ haec habetur aequatio differentialis, $\frac{(k^2+1)dx - k^2du}{\sqrt{((k^2+1)x-k^2u)}} = \frac{\pm du}{\sqrt{u}}$ quae integrata dat $x = u$. Interim tamen perspicuum est hanc aequationem $k^2u = (k^2+1)x$ in illa quoque contineri, etiamsi per integrationem non prodeat. Et hanc ob rem posterior aequatio integralis aeque satisfacit ac prior $x = u$. Hinc generaliter colligere licet aequationem differentialem $\frac{-dt}{T} = V du$, in qua T est talis functio ipsius t, quae euanescat posito $t = o$, et V functio quaecunque ipsius u, aeque comprehendere hanc in-

 tegra-

tegralem $t=o$ ac hanc $\int\frac{dt}{T}=\int V\,du$, quae per integrationem elicitur. Plerumque quidem casus $t=o$, si t est simplex quantitas negligi potest, at si t est quantitas composita vt in nostro casu, perperam omittitur. Similem casum supra habuimus §. 300. in aequatione $ds=\frac{-dx\sqrt{b}}{\sqrt{(a^2b-bx^2-a^2\int Pdx)}}$ vbi obseruauimus aequationem $x=a$ in ea contineri, etiamsi integratio nequidem possit perfici. Nam posito $a-x=t$ erit $-dx=dt$ et $V(a^2b-bx^2-a^2\int Pdx)$ erit functio ipsius t, quae fit $=o$ si fit $t=o$ seu $x=a$; namque $\int Pdx$ ita accipi iubebatur, vt euanescat posito $x=a$. Posita ergo hac ipsius t functione $=T$ erit $ds=\frac{dt\sqrt{b}}{T}$, ex qua aequatione ergo tuto concludi licet, satisfacere aequationem $t=o$ seu $x=a$, ideoque problemati illi satisfacere circulum, vt ibi innuimus. (303.) Magis vniuersaliter vero in hac aequatione $V du=\frac{dt}{T}$, si T non euanescit posito $t=o$, comprehendetur ista aequatio $T=o$, ex qua erit $t=$ constanti quantitati, ideoque $dt=o$. Vnde intelligitur $T=o$ contineri in aequatione proposita $V\,du=\frac{dt}{T}$. Atque hinc si t fuerit quantitas composita v. g. ex u et x statim habetur aequatio integralis, per integrationem vix eruenda.

Scholion 2.

336. Casus hic superest, qui peculiarem resolutionem requirit, quando recta BC supra punctum

SU[...] [...]TU PUNCTI
ctum A [...] lela. C[...] tantum [...] et in dat[...] sum rect[...] cebit.
337. [...] uniformi g [...] bus corpu[...] tempore a[...]
Sit [...] pro axe [...] $=x$, PM [...] titudini g [...] porro AN[...] exprimat [...] ni ipsius [...] AMC inu[...] concipian[...] beant ap[...] AMC sup[...] expresso [...] $\int\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{gx}}$
[...] du, quae per [...] quidem casus [...]negligi potest, [...] in nostro casu, [...] sum supra ha- [...] $\frac{-dx\sqrt{b}}{\sqrt{(a^2b-bx^2-a^2\int Pdx)}}$ [...] in ea conti- [...] possit perfici. [...] t et $V(a^2b-bx^2$ [...] uae fit $=o$ si [...] a accipi iube- [...] Posita ergo [...] $=\frac{dt\sqrt{b}}{T}$, ex qua [...]t, satisfacere [...]ue problemati [...]uimus. (303.) [...]uatione $V du=$ [...] comprehen- [...] erit $t=$ con- [...]ntelligitur $T=o$ [...] $u=\frac{dt}{T}$. Atque [...]; ex u et x sta- [...]er integratio- [...]eculiarem re- [...] BC supra punctum

ctum A cum BA concurrit, et quando est parallela. Considerabimus autem sequente problemate tantum casum, quo fit BC parallela verticali AB et in data distantia posita; ex quo simili modo casum rectae BC vtcunque inclinatae deducere licebit.

PROPOSITIO 37.
Problema.

337. *Sollicitetur corpus perpetuo deorsum vi uniformi* g; *inuenire curuas innumerabiles, super quibus corpus ex* A *motum a quiete incipiendo, dato tempore ad rectam verticalem* EC *perueniat.* Tab. IX. Fig. 3.

Solutio.

Sit AMC curua quaecunque quaesitarum, et pro axe sumatur recta verticalis AB, dicatur AP $=x$, PM=AQ$=y$; erit celeritas in M debita altitudini gx, et tempus per AM $=\int\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{gx}}$. Sit porro AND curua, cuius quaevis applicata QN exprimat tempus per AM, et sit QN$=t$ functioni ipsius y, poterit ex curua AND data curua AMC inueniri. Quare si infinitae curuae AND concipiantur, quae omnes in E communem habeant applicatam DE, omnes producent curuas AMC super quibus corpus dato tempore per DE expresso ex A ad CE perueniet. Erit itaque $t=\int\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{gx}}$ et posito $dt=p\,dy$ erit $gp^2x\,dy^2=dx^2$

$+dy^2$, atque $dx = dy\sqrt{(gp^2x - 1)}$. Quae ita integrata, vt poſito $x = o$ fiat $y = o$, dabit curuas AMC quaeſitas. Sit R functio quaecunque ipſius y et $\int R\,dy$ ita capiatur vt euaneſcat poſito $y = o$. Tum fiat $\int R\,dy = A$ poſito $y = AE = a$, et exiſtente $DE = \sqrt{b}$ ſumatur $t = \frac{\sqrt{b}\int R\,dy}{A}$, erit $p = \frac{R\sqrt{b}}{A}$ atque $dx = \frac{dy}{A}\sqrt{(gbR^2x - A^2)}$. Quae aequatio, quicquid pro R ſubſtituatur, dabit innumeras curuas quaeſito ſatisfacientes. Q. E. I.

Corollarium 1.

338. Caſus ergo habetur ſimpliciſſimus, ſi fuerit $R = 1$, tum enim aequatio ſeparabilis prodit. Erit vero $t = \frac{y\sqrt{b}}{a}$, ob $A = a$. Hanc ob rem fit $\frac{a\,dx}{\sqrt{(gbx - a^2)}} = dy$, atque $\frac{2a}{gb}\sqrt{(gbx - a^2)} = y$. Qui autem nullius eſt vtilitatis, ob valorem ipſius y imaginarium.

Corollarium 2.

339. Quia autem $\sqrt{(gbR^2x - A^2)}$ non poteſt eſſe quantitas imaginaria, oportet ſit $R^2x > \frac{A^2}{gb}$ etiamſi $x = o$. Quare R neque quantitas conſtans eſſe poteſt, neque functio ipſius y, quae euaneſcat facto $y = o$. Hanc ob rem R talis eſſe debet functio ipſius y, quae fiat $= \infty$, ſi ponatur $y = o$. Praeterea tamen eiusmodi eſſe debet, vt $\int R\,dy$ non fiat infinitum quod eueniret ſi eſſet $R = \frac{1}{y}$ vel $\frac{1}{y^2}$ etc.

Exem-

Exem-

Exemplum.

340. Ponamus ergo eſſe $R = \frac{1}{\sqrt{y}}$, erit $\int R\,dy = 2\sqrt{y}$ et $A = 2\sqrt{a}$. Hinc habebitur iſta aequatio $2dx\sqrt{ay} = dy\sqrt{(gbx - 4ay)}$. Quae aequatio quia eſt homogenea ponatur $x = qy$, erit $2q\,dy\sqrt{a} + 2y\,dq\sqrt{a} = dy\sqrt{gbq - 4a)}$ ſeu $\frac{dq}{\sqrt{(gbq - 4a)} - 2q\sqrt{a}} = \frac{dy}{2y\sqrt{a}}$. Poſito $\frac{gb}{4a} = n$ et $\sqrt{(nq - 1)} = r$ erit $\frac{dy}{y} = \frac{-2r\,dr}{r^2 - nr + 1}$. Quae poſterior formula a quadratura circuli pendebit, ſi $n < 2$. Hoc vero caſu erit integrale $ly = lC + \frac{n - \sqrt{(n^2 - 4)}}{\sqrt{(n^2 - 4)}}\, l(2r - n + \sqrt{(n^2 - 4)}) \frac{-n - \sqrt{(n^2 - 4)}}{\sqrt{(n^2 - 4)}}\, l(2r - n - \sqrt{(n^2 - 4)})$. Quae ob $r = \frac{\sqrt{(nx - y)}}{\sqrt{y}}$ abit in hanc $C(2\sqrt{(nx - y)} - (n - \sqrt{(n^2 - 4)})\sqrt{y})^{\frac{n - \sqrt{(n^2 - 4)}}{\sqrt{(n^2 - 4)}}} = (2\sqrt{(nx - y)} - (n + \sqrt{(n^2 - 4)})\sqrt{y})^{\frac{n + \sqrt{(n^2 - 4)}}{\sqrt{(n^2 - 4)}}}$. Vbi pro C conſtantem quamcunque accipere licet, quia ipſa aequatio ita eſt comparata, vt poſito $x = o$ fiat $y = o$. Per methodum autem ſupra traditam (335) ex aequatione differentiali ſtatim habetur haec integralis $2q\sqrt{a} = \sqrt{(gbq - 4a)}$ ſeu $2x\sqrt{a} = \sqrt{(gbxy - 4ayy)}$ vnde oritur $\frac{y}{x} = \frac{gb \pm \sqrt{(g^2b^2 - 64a^2)}}{8a}$, quae dat duas lineas rectas, niſi ſit $gb < 8a$, quo caſu aequatio eſt imaginaria. In caſu quo $n = 2$ erit $\frac{dy}{y} = \frac{-2r\,dr}{(r - 1)^2}$ ſeu $ly = -2l(r - 1) + \frac{2}{r - 1}$, vnde fit $ly = -2l(\sqrt{(2x - y)} - \sqrt{y}) + 2l\sqrt{y} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{(2x - y)} - \sqrt{y}} + lC$, ſeu $l(\sqrt{(2x - y)} - \sqrt{y}) - lC = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{(2x - y)} - \sqrt{y}}$. Vbi etiam pro C quantitatem quamcunque accipere licet. Si $n < 2$, tum conſtructio curuae partim a logarithmis

mis partim a quadratura circuli pendet; fiunt enim ob $\sqrt{(n^2-4)}$ imaginarium logarithmi inuenti imaginarii. Hoc igitur casu expedit constructionem perficere prae expressione analytica.

PROPOSITIO 38.

Problema.

Tabula IX. Fig. 4. **341.** *Sollicitetur corpus perpetuo deorsum vi uniformi* g, *dataque sit curua quaecunque* BSC *inuenire omnes curuas* AMC, *super quibus corpus descendendo ex* A *dato tempore ad curuam* BSC *perueniat.*

Solutio.

Sit curuarum quaesitarum quaecunque AMC, per cuius quodvis punctum M ducatur curva MQ similis curuae BSC respectu puncti fixi A. et exprimat curuae AN applicata NQ tempus per arcum AM: exponet ergo applicata BD tempus per totam curuam AMC. Quo facto poterit vicissim ex data curua AND curua AMC inueniri. Quare si infinitae curuae AND concipiantur, quae omnes in B habeant applicatam BD communem, eae generabunt infinitas curuas AMC, super quibus omnibus corpus ex A descendendo dato tempore per BD expresso ad curuam BSC perueniat. Sit nunc $AB = a$, $BD = \sqrt{b}$, et arcui QM abscindatur arcus similis BS ex curua data BSC, erit $AQ:AB = PM:RS = AP:AR = PQ:BR$. Ponatur porro

AP

PUNCTI
AP= ; fiunt enim
=s, uenti imagi-
ter r tionem per-
bitur
erit u
altitud
orsum vi uni-
BSC inueni-
orpus descen-
SC perueniat.
nque AMC,
ucatur cur-
uncti fixi A.
tempus per
mpus per to-
: vicissim ex
i. Quare si
quae omnes
em, eae ge-
quibus omni-
empore per
it. Sit nunc
abscindatur
erit AQ:AB
natur porro
AP
Tom.

$AP = x$; $PM = y$; $AQ = u$; $QN = t$; $AR = r$; $RS = s$, dabitur ob curuam BSC datam aequatio inter r et s, atque ob curuam AND datam dabitur aequatio inter t et u. At ob similitudinem erit $u : a = y : s = x : r$, vnde erit $y = \frac{us}{a}$, et $x = \frac{ur}{a}$. Celeritas deinde corporis in M debita est altitudini gx, ex qua tempus per AM erit $= \int \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{gx}}$ quod aequale poni debet ipsi t; vnde oritur ista aequatio $gx\,dt^2 = dx^2 + dy^2$. Quia autem t per u datur sit $dt = p\,du$, et p sit functio ipsius u; atque ob $dx = \frac{u\,dr + r\,du}{a}$ et $dy = \frac{u\,ds + s\,du}{a}$, transibit illa aequatio in hanc: $garup^2 du^2 = (udr + rdu)^2 + (uds + sdu)^2$. At quia curua BSC datur, erit s functio ipsius r sitque $ds = q\,dr$, existente q functione ipsius r quacunque. His substitutis habebitur aequatio inter u et r ista $garup^2 du^2 = (udr + rdu)^2 + (uqdr + sdu)^2$. Quae radice quadrata extracta dat $\frac{dr}{du} = \frac{-r - sq \pm \sqrt{(2rsq - s^2 - r^2q^2 + garup^2(1+qq))}}{u(1+qq)}$ Ex qua si aequatio inter r et u inueniatur, inde habebitur simul aequatio inter x et y pro curua quaesita. Quod autem ad curuam AND attinet, sit P functio quaecunque ipsius u, et $\int P\,du$ ita integratum vt euanescat facto $u = o$, et fiat $= A$ posito $u = a$, tum sumatur $t = \frac{\sqrt{b}\int P\,du}{A}$, pro aequatione curuae AND. Erit ergo $p = \frac{P\sqrt{b}}{A}$, vbi pro P functionem quamvis ipsius u ponere licet. Q.E.I.

Corollarium 1.

342. Si u ponatur $= o$, eo ipſo quoque x et y euaneſcunt, niſi forte fiat r vel s infinitum. Illo igitur caſu in integratione aequationis differentialis inuentae conſtantem quamcunque addere licet, quia non opus eſt vt r datum habeat valorem, ſi u fit $= o$.

Corollarium 2.

343. Tum igitur ob conſtantem arbitrariam addendam ex vnica curua AND data innumerabiles inueniuntur curuae AMC quaeſito ſatisfacientes.

Corollarium 3.

344. Si curua BSC ita eſt comparata, vt nusquam neque r neque s fieri queat infinite magnum, ſemper vnica curua AND infinitas dabit curuas quaeſitas A M C. Quae non ſolum hanc habebunt proprietatem, vt corpora ſuper iis deſcendentia ſimul ad datam BSC perueniant; ſed quoque ſimul ad quam vis datae ſimilem curuam QM pertingent.

Corollarium 4.

345. Cum igitur in integratione aequationis inuentae conſtantem quamcunque addere liceat,

V PVNCTI
ceat, datun que n niri, ipſo quoque x rel s infinitum. uationis differentialis cunque addere um habeat va-
BSC ua et niant, tuiſſen cum I lege q cunque facto va BS $u=a$, curua finitun talis a tamen $dQ=V$ $Qdr(1-$ $-Vrq)$ vnica ſuggerc per da
item arbitrari- D data innu- : quaeſito ſatis- :omparata, vt eat infinite ma- infinitas dabit on ſolum hanc a ſuper iis de- erueniant; ſed imilem curuam ione aequatio- que addere liceat,

ceat, ea ita poterit aſſumi vt curua A M C ad datum punctum C curuae datae BSC dirigatur. Hocque modo infinitae curuae AMC poterunt inueniri, quae omnes in dato puncto C conueniant.

Scholion 1.

346. Poſuimus curuas QM ſimiles curuae BSC vt curua ipſa in A erecta fiat infinite parua et omnia puncta curuae BSC in A conueniant, et x et y euaneſcant poſito $u = o$. Potuiſſemus autem eodem modo curuas QM vel cum BSC congruentes ponere, vel diſcrepantes lege quacunque. Vt fit Q functio ipſius u quaecunque euaneſcens poſito $u = o$, abeatque ea in B, facto $u = a$, curua QM ita pendere poterit a curua BSC vt fit $x = \frac{Qr}{B}$ et $y = \frac{Qs}{B}$: namque facto $u = a$, curua QM tranſibit in ipſam BSC, et in A curua in punctum tranſibit, niſi curua BSC in infinitum progrediatur. At etiam hoc caſu pro Q talis accipi poterit functio, vt etiamſi fiat $r = \infty$, tamen Qr et Qs fiat $= o$ ſi $u = o$. Poſito autem $dQ = Vdu$, habebitur aequatio generalis ſequens $Qdr(1+qq)+Vdu(r+sq) = du\sqrt{\left(\frac{gb\,BP^2Qr(1+qq)}{A^2} - (Vs - Vrq)^2\right)}$. Quae aequatio latiſſime patet, et ex vnica curua AND infinite infinitas curuas AMC ſuggeret, quin etiam infinitas ſuppeditabit, quae per datum punctum C tranſeunt.

Scho-

Scholion 2.

347. Quantumuis generalis autem eſt haec aequatio, tamen curua QM eſt ſimilis curuae BSC, quia eſt $x : y = r : s$. Quare adhuc generalior ſolutio poterit exhiberi, in qua curuae QM vtcunque diſſimiles ponuntur curuae BSC eiusmodi tamen vt QM in BSC abeant facto $u = a$. Obtinebitur vero haec ſolutio, ſi R ſumatur functio quaecunque ipſius u euaneſcens facto $u = o$, abeatque R in D poſito $u = a$, ſitque $dR = W du$. Sumatur enim $x = \frac{Qr}{B}$ et $y = \frac{Rb}{D}$; abibit x in r et y in s ſi fiat $u = a$, atque euaneſcente u tam x quam y euaneſcent, quicquid ſit r. Hinc autem ſequens orietur aequatio generaliſſima: $dr(D^2Q^2 + B^2R^2q^2) + du(D^2QVr + B^2RWqs) = \pm du\sqrt{(\frac{gBD^2bP^2Qr(D^2Q^2+B^2R^2q^2)}{A^2} - B^2D^2(RVqr - QWs)^2)}$. In hac aequatione loco dr introduci poteſt ds ponendo $\frac{ds}{q}$ loco dr, vel etiam loco r poterit x introduci ponendo loco r eius valorem $\frac{Bx}{Q}$, et tum habebitur aequatio inter u et x. Notandum autem eſt quia Q euaneſcit facto $u = o$, P talem eſſe debere functionem ipſius u, vt P^2Q poſito $u = o$, vel fiat quantitas finita vel infinite magna, at tamen cauendum eſt ne $\int P du$ debito modo ſumtum fiat infinite magnum.

Corollarium 5.

348. Aequatio in ſolutione inuenta fit ſeparabilis, ſi fuerit $P = \frac{1}{\sqrt{u}}$; erit $A = 2\sqrt{a}$ et $p = \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{au}}$.

Habe-

SV PUNCTI
Habebitu … m eſt haec
dantur e … nilis curuae
c generalior
: QM vtcun-
;modi tamen
349. … Obtinebitur
tionem a … tio quaecun-
Habebitu … catque R in
ımatur enim
$\frac{Vdu}{Q} = \frac{dQ}{Q}$, … in s ſi fiat
inuicem … m y euane-
uens orietur
$R^2q^2) + du$
$\frac{r(D^2Q^2+B^2R^2q^2)}{A^2}$
350. … ione loco dr
ob $V du =$ … r, vel etiam
loco r eius
de fit $\frac{dQ}{Q}$ … o inter u et
bebit ergo … eſcit facto u
ſcat facto … ipſius u, vt
curua BS(… nita vel infi-
tus, erit … e $\int P du$ debi-
$1+qq=$ … n.
ſtitutis pr
ta fit ſepara-
$(-2\sqrt{ar-r}$ … et $p = \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{au}}$.
Habe-

Habebitur enim $\frac{du}{u} = \frac{dr(1+qq)}{-r-sq \pm \sqrt{(\frac{gbr}{4}(1+qq)-(s-rq)^2)}}$ dantur enim s et q per r.

Corollarium 6.

349. Simili modo aequatio Schol. I. ſeparationem admittet, ſi fuerit $P^2Q = V^2$ ſeu $P = \frac{V}{\sqrt{Q}}$. Habebitur enim $\frac{dr(1+qq)}{-r-sq \pm \sqrt{(\frac{gBbr(1+qq)}{AA} - (s-rq)^2)}} = \frac{V du}{Q} = \frac{dQ}{Q}$, in qua indeterminatae u et r ſunt a ſe inuicem ſeparatae.

Exemplum I.

350. Manente $P^2Q = V^2$ ſeu $\int P du = 2\sqrt{Q}$ ob $V du = dQ$, erit facto $u = a$; $A = 2\sqrt{B}$. Vnde fit $\frac{dQ}{Q} = \frac{dr(1+qq)}{-r-sq \pm \sqrt{(\frac{gbr}{4}(1+qq)-(s-rq)^2)}}$. Habebit ergo $\int P du$ requiſitam proprietatem, vt euaneſcat facto $u = o$; euaneſcit enim Q. Sit nunc curua BSC circulus ſuper diametro AB deſcriptus, erit $s = \sqrt{(ar - r^2)}$, et $q = \frac{a-2r}{2\sqrt{(ar-r^2)}}$ atque $1 + qq = \frac{a^2}{4(ar-r^2)}$, his valoribus loco s et q ſubſtitutis prodibit iſta aequatio $\frac{dQ}{Q} = \frac{adr}{(-2\sqrt{ar-rr}) \pm r\sqrt{(gbr-4r^2)})\sqrt{(ar-r^2)}}$. Quae aequatio

tio non ſolum indeterminatas a ſe inuicem habet ſeparatas, ſed etiam generaliter per logarithmos integrari poteſt: poteſt enim in aequatione $\frac{dQ}{Q} = \frac{adr}{-2cr+2r^2 \pm r\sqrt{(gb-4r)(a-r)}}$ membrum irrationale rationale effici. Prodibit autem integralis haec $lQ = \frac{4a}{4a-gb}\, l\, \frac{2\sqrt{(a-r)} \mp \sqrt{(gb-4r)}}{\sqrt{r}} \pm \frac{\sqrt{gab}}{4a-gb}\, l\, \frac{\sqrt{a(gb-4r)} + \sqrt{gb(a-r)}}{\sqrt{a(gb-4r)} - \sqrt{gb(a-r)}} + lC$. Notari hic conuenit caſum, quo $gb = 4a$ ſeu $\sqrt{b} = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$, quo tempus per quamvis curuam AMC aequale ponitur tempori deſcenſus per rectam verticalem AB; tum enim erit $\frac{dQ}{Q} = \frac{adr}{-2(ar-r^2) \pm 2(ar-r^2)}$. Si igitur ſignum + valeat, erit $dr = o$, et $r =$ conſt. $= c$, vnde fit $s = \sqrt{(ac-c^2)}$ et $x : y = \sqrt{c} : \sqrt{(a-c)}$ ſeu $y\sqrt{c} = x\sqrt{(a-c)}$, quae aequatio omnes dat chordas in hoc ſemicirculo ex A ductas, quemadmodum jam demonſtravimus tempora per ſingulas chordas eſſe inter ſe aequalia. Valeat ſignum − erit $\frac{4dQ}{Q} = \frac{-adr}{ar-rr}$, atque hinc $Q^{-4} = \frac{Cr}{a-r}$, ſe $\frac{r}{a-r} = \frac{C^4}{Q^4}$. Erit ergo $Q = C\sqrt{\sqrt{\frac{a-r}{r}}}$, atque ob $s = \sqrt{(ar-r^2)}$ habebitur $x = \frac{Cr}{B}\sqrt{\sqrt{\frac{a-r}{r}}}$ et $y = \frac{C}{B}\sqrt{\sqrt{r(a-r)^3}}$; eliminata ergo r prodibit iſta aequatio (poſito $\frac{C}{B} = m$) $y^2 + x^2 = ma\sqrt{xy}$. Hae ergo curuae hanc habent proprietatem, vt arcus earum a ſemicirculo abſciſſae abſoluantur deſcendendo eodem tempore, eo ſcilicet tempore, quo ſingulae ſemicirculi chordae percurruntur.

Co-

SUP. … PUNCTI

351. … $x^2 = ma\sqrt{}$ … diametrum … ctum conſ … mnes hae … ad omnes

… inuicem habet … logarithmos … uatione $\frac{dQ}{Q} =$ … rationale ra- … lis haec $lQ =$ … quo $gb = 4a$ … mvis curuam … enſus per re- … rit $\frac{dQ}{Q} =$

352. cunque pu … tranſiens c … li AP, co … curret, qu … AM. Qua … tem, vt q … ſcendente … ſa AM.

… + valeat, … vnde fit $s =$ … $y\sqrt{c} = x\sqrt{}$ … hordas in hoc … odum jam de- … chordas eſſe … rit $\frac{4dQ}{Q} = \frac{-adr}{ar-rr}$, … Erit ergo Q … abebitur $x =$ … ta ergo r pro- … $+ x^2 = ma\sqrt{}$ … proprietatem, … ſſae abſoluan- … , eo ſcilicet … chordae per-

353. eſt ſive ſit … aequatio in … quam ex ae

354.

Co-

Corollarium 7.

351. Huius autem curuae cuius aequatio eſt $y^2 + x^2 = ma\sqrt{xy}$ figura eſt AMFA; habet nimirum diametrum AF cum verticali AP angulum ſemirectum conſtituentem et in A nodum. At vero omnes hae curuae ſunt inter ſe ſimiles, et omnes ad omnes circulos accommodari poſſunt. Tabula IX, Fig. 5.

Corollarium 8.

352. Si ergo in hac curua ſumatur quodcunque punctum M et per hoc et A circulus tranſiens concipiatur centrum habens in verticali AP, corpus arcum AM eodem tempore percurret, quo diametrum circuli, ſeu quo chordam AM. Quare haec curua hanc habet proprietatem, vt quivis arcus AM a corpore ex A deſcendente abſolvatur eodem tempore, quo ſubtenſa AM.

Corollarium 9.

353. Hoc ergo caſu quo $P^2Q = V^2$ perinde eſt ſive ſit $Q = u$ ſive ſecus; eadem enim prodit aequatio inter x et y. Vti tam ex exemplo hoc quam ex aequatione intelligitur. Tabula IX. Fig. 4.

Exemplum 2.

354. Manente $P^2Q = V^2$, vt ſit $\frac{dQ}{Q} =$

$\frac{dr(1+qq)}{-r-sq\pm\sqrt{(\frac{gbr}{4}(1+qq)-(s-rq)^2)}}$, fit curua BSC circulus centro A radio AB$=a$ descriptus, erit $s=\sqrt{(a^2-r^2)}$ et $q=\frac{-a}{\sqrt{(a^2-r^2)}}$ atque $1+qq=\frac{a^2}{a^2-r^2}$. Quibus substitutis prodibit sequens aequatio, $\frac{dQ}{Q}=\frac{+adr}{\sqrt{(\frac{gbr}{4}-a^2)(a^2-r^2)}}$ vbi gb maius esse debet quam $4a$, quia r non excedere potest a. Hinc statim ille radius innotescit, qui quaesito satisfacit, ponendo $\frac{gbr}{4}=a^2$ seu $r=\frac{4a^2}{gb}$, quo casu erit $s=\frac{a\sqrt{(g^2b^2-16a^2)}}{gb}$. Vnde erit $x:y=4a:\sqrt{(g^2b^2-16a^2)}$ et $\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{(g^2b^2-16a^2)}}{4}$ quae est tangens anguli illius radii, super quo corpus dato tempore $\sqrt{b}$ ad peripheriam peruenit, cum verticali AB. Curuae praeterea algebraicae non dantur, quia formula differentialis non effici potest rationalis.

Exemplum 3.

355. Sumta aequatione generalissima ex §. (347.) et ponatur linea BSC recta horizontalis fiet $r=a$ et $dr=0$. Hanc ob rem loco dr introducatur eius valor $\frac{ds}{q}$, vbi q erit infinite magnum. Deletis ergo terminis, qui prae q euanescunt, proueniet ista aequatio: $ABRds+ABWsdu=\pm Ddu\sqrt{(gBabP^2Q-A^2a^2V^2)}$. Quae aequatio ob $Wdu=dR$ et P, Q, et V data per u integrationem admittit. Erit nempe $\frac{ABRs}{D}=$ C$\pm$

SVI U PUNCTI
C$\pm\int du$ urua BSC cir-
tione er prus, erit $s=$
at y eua
C$=0$, si $qq=\frac{a^2}{a^2-r^2}$.
ita sumat aequatio, $\frac{dQ}{Q}=$
erit $x=$ debet quam
Quae est
super qui Hinc statim
descendit. satisfacit, po-
casu erit $s=$
: $\sqrt{(g^2b^2-16a^2)}$
356. as anguli illius
inventa (pore $\sqrt{b}$ ad pe-
ticalis pa AB. Curuae
posita eri quia formula
aequatio nalis.
$A^2B^2f^2W^2$
tuto prod
vnde inve
aequation ralissima ex §.
inuicem s ta horizontalis
licet. m loco dr in-
it infinite ma-
ui prae q eua-
357. ABRds+ABW
ne, quand a^2V^2). Quae
uas AMC , et V data per
blematis, nempe $\frac{ABRs}{D}=$
Tom. II. C$\pm$

C$\pm\int du\sqrt{(gBabP^2Q-A^2a^2V^2)}$. Ex qua aequatione ergo inuenitur s. Deinde cum sit $y=\frac{Rs}{D}$, at y euanescere debeat facto $u=0$, debebit esse C$=0$, si quidem integrale $\int du\sqrt{(gBabP^2Q-A^2a^2V^2)}$ ita sumatur vt euanescat posito $u=0$. Tum ergo erit $x=\frac{Qa}{B}$ et $y=\frac{\pm 1}{AB}\int du\sqrt{(gBabP^2Q-A^2a^2V^2)}$. Quae est aequatio generalis pro omnibus curuis super quibus corpus ex A ad horizontalem datam descendit.

Exemplum 4.

356. Teneatur aequatio generalissima supra inventa (347), et ponatur linea BSC recta verticalis parallela ipsi AB et ad distantiam f ab ea posita erit $s=f$ et $q=0$. Quare habebitur ista aequatio $ADQdr+ADrdQ=\pm du\sqrt{(gBD^2bP^2Qr-A^2B^2f^2W^2)}$. Cum autem sit $Qr=Bx$ hoc substituto prodibit $ADdx=\pm du\sqrt{(gD^2bP^2x-A^2f^2W^2)}$, vnde invento x erit $y=\frac{fR}{D}$. At quia in illa aequatione indeterminatae x et u non sunt a se inuicem separatae, non multum ex ea deriuare licet.

Scholion 3.

357. Ex generali huius problematis solutione, quando vnica curua AND infinitas dat curuas AMC, colligere licet solutionem huius problematis, quo infinitae requiruntur curuae, super qui-

quibus omnibus corpus ex A ad datum punctum peruenit. Quaelibet enim curua AND vnam dabit curuam per datum punctum curuae BSC transeuntem; hocque modo innumerabiles huiusmodi curuae obtinebuntur. Sed cum hoc modo solutio nimis esset difficilis et operosa, aliam genuinam magis afferre conuenit. Modus autem, quo vtemur ita est comparatus, vt vnam curuam jam nosse oporteat, ex qua innumerabiles deducere docebimus. Haec ergo curua quae nota esse debet, ex alterutra traditarum methodo eliciatur vt ex §. 350, vbi curua per quodvis punctum semicirculi transiens inveniri potest dato tempore describenda.

PROPOSITIO 39.
Problema.

Tabula X. Fig. 1. 358. *Sollicitetur corpus perpetuo deorsum vi uniformi* g, *dataque sit curua* AMC *super qua corpus ex* A *ad punctum datum* C *peruenit, inuenire omnes curuas* ANC *super quibus corpus eodem tempore ad punctum* C *ex* A *descendit.*

Solutio.

Sumta verticali AB pro axe omnium curuarum sit curuae datae AMC abscissa AP $=t$, applicata PM $=u$; sitque curua ANC vna quaesitarum: capiatur in ea arcus AN, qui eodem tempore absoluatur, quo arcus AM, jungantur puncta M et N recta MN, et construatur curua ALB talis, vt applicata PL aequalis sit rectae MN. Haec ergo curua ALB occurret axi AB in punctis A et B; nam incidente puncto M in A, punctum N quoque in A incidet, et posito M in C punctum N quoque erit in C, quia arcus AMC et ANC eodem tempore percurri ponuntur. Intelligitur autem ex curua ALB inveniri posse curvam ANC; quare si infinitae huiusmodi curuae ALB concipiantur, in A et B incidentes in AB, earum quaeque dabit curuam ANC, hocque modo innumerabiles prodibunt curuae ANC quaesito satisfacientes. Sit nunc PL $=r$, erit r functio quaedam ipsius AP $=t$; curuae autem ANC ponitur abscissa AQ $=x$, et QN $=y$. His positis erit MN $=\sqrt{((x-t)^2+(u-y)^2)}=r$, ideoque $y=u\pm\sqrt{(r^2-(x-t)^2)}$. Porro quia tempus per AM aequale ponitur tempori per AN, erit $\int\frac{\sqrt{(dt^2+du^2)}}{\sqrt{gt}}=\int\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{gx}}$ seu $xdt^2+xdu^2=tdx^2+tdy^2$. Est autem $dy=du\pm\frac{(rdr-xdx+tdx+xdt-tdt)}{\sqrt{(r^2-(x-t)^2)}}$. Sit $du=pdt$ et $dr=qdt$, erunt r, p, et q functiones ipsius t: ponatur porro breuitatis gratia $x-t=z$ seu $x=t+z$, erit $dy=pdt\pm\frac{qrdt\mp zdz}{\sqrt{(r^2-z^2)}}$, et $dy^2+dx^2=p^2dt^2+dt^2+2dtdz+dz^2\pm\frac{2pqrdt^2\mp 2pzdtdz}{\sqrt{(r^2-z^2)}}+\frac{q^2r^2dt^2-2qrzdtdz+z^2dz^2}{r^2-z^2}$. Hinc obtinetur ista aequatio $\frac{tr^2dz^2}{r^2-z^2}=\frac{2tqrzdtdz-tq^2r^2dt^2}{r^2-z^2}\pm\frac{2pztdtdz\mp 2pqtrdt^2}{\sqrt{(r^2-z^2)}}-2tdtdz+zdt^2+zp^2dt^2$ ex qua

z ex t determinetur, habebitur aequatio inter x et y. Quo autem appareat cuiusmodi functio ipsius t loco r debeat accipi, vt r euanescat, tam posito $t=o$ quam $t=AB=a$, sit P functio quaecunque ipsius t euanescens posito $t=o$, et Q sit etiam talis functio euanescens posito $t=o$, abeat vero Q in A si fiat $t=a$; poterit ergo poni $r=P(A-Q)$. Hocque valore substituto quicquid loco P et Q substituatur, habebitur aequatio pro curuis quaesitis. Q. E. I.

Scholion 1.

359. Ex hac quidem aequatione maxime intricata parum concludi potest ad propositum, etiamsi haec methodus genuina esse videatur. Saepe autem aequatio inuenta ad absurdum deducere debet, vt si curua data AMC fuerit linea breuissimi descensus, quo casu non dari potest alia curua, super qua descensus fiat eodem tempore. Ad nostrum ergo institutum conueniens videtur de lineis celerrimi descensus tractare, eaque problemata resoluere, in quibus inter omnes curuas vel eiusdem longitudinis vel aliam proprietatem communem habentes ea quaeritur, quae minimo tempore absoluatur. Atque etiam quemadmodum inter omnes lineas, super quibus descensus fit eodem tempore, ea sit inuenienda, quae data quapiam proprietate sit praedita. Etiamsi enim difficillimum sit omnes lineas idem descen-

SUPER DA
descensus tempus
quaelibet potest
prae reliquis om
ad hanc rem pe
tricorum, quam
plicabimus.
360. Huius
(348) sequenti m
ad quod omnes c
turque AE=f et E
bet s=b. Ad hoc
r, quae abeat in
natur s=sb/F. Subf
aequatione, eaque
fiat r=f. Deinde
tio inter coordin
pe AP=x et PM:
y=us/a. Atque arb
finitas curuas A
gentes, et super
pore dato =Vb p
tem dS= Tdr, e
PUNCTI
uatio inter
nodi functio
euanescat,
t P functio
t=o, et Q
osito t=o,
ergo poni r
to quicquid
equatio pro
ne maxime
propositum,
e videatur.
bsurdum de-
fuerit linea
ari potest a-
odem tem-
conueniens
tractare, ea-
inter omnes
aliam pro-
quaeritur,
Atque etiam
super quibus
inuenienda,
raedita. E-
lineas idem
descen-

descensus tempus habentes exhibere, tamen ex iis quaelibet potest inueniri ex proprietate, quam prae reliquis omnibus possidet. Requiritur autem ad hanc rem pertractandam methodus isoperimetricorum, quam vt passim expositam hic non explicabimus.

Scholion 2.

360. Huius autem problematis solutio per (348) sequenti modo habetur: erat ibi $\frac{du}{u} = \frac{dr(1+qq)}{-r-sq\pm V(\frac{gbr}{4}(1+qq)-(s-rq)^2)}$. Sit punctum C ad quod omnes curuae conuenire debent, ponaturque $AE=f$ et $EC=b$, si ergo sit $r=f$, fieri debet $s=b$. Ad hoc sit S functio quaecunque ipsius r, quae abeat in F posito $r=f$, quo facto ponatur $s=\frac{Sb}{F}$. Substituatur hic valor in superiore aequatione, eaque ita integretur vt posito $u=a$ fiat $r=f$. Deinde ex ea aequatione prodibit aequatio inter coordinatas curuae quaesitae AMC nempe $AP=x$ et $PM=y$, ex eo quod est $x=\frac{ur}{a}$ et $y=\frac{us}{a}$. Atque arbitrarius valor ipsius S dabit infinitas curuas AMC puncta A et C iungentes, et super quibus corpus descendens tempore dato $=Vb$ perueniet ex A ad C. Sit autem $dS= Tdr$, erit $q=\frac{bT}{F}$, atque $\frac{du}{u} = \frac{dr(F^2+b^2T^2)}{-F^2r-b^2ST\pm V(\frac{gF^2br}{4}(F^2+b^2T^2)-(FbS-FbTr)^2)}$ seu Tabula IX. Fig. 4.

 $\frac{du}{u}=$

$$\frac{du}{u} = \frac{dr(F^2 + b^2T^2)}{-F^2r - b^2ST \pm F\sqrt{(\frac{gbr}{u}(F^2+b^2T^2) - (bS - bTr)^2)}}$$

Quae aequatio ita integretur, vt posito $u = a$ fiat $r = f$; quo facto ponatur $x = \frac{ur}{a}$ et $y = \frac{bSu}{Fa}$, atque habebitur aequatio inter x et y pro infinitis curAMC quaesito satisfacientibus.

PROPOSITIO 40.
Problema.

Tabula X. Fig. 2. 361. *Inuenire legem generalem, secundum quam curua disposita esse debet, ut corpus super ea descendens citissime perueniat ad quoduis curuae punctum.*

Solutio.

Sit AMC curua huiusmodi, super qua corpus ex A ad C tempore breuiore perueniat, quam super quauis alia curua per puncta A et C transeunte. Sumtis ergo in ea duobus quibusque M et μ, curua inter ea intercepta ita debet esse comparata, vt corpus in motu suo per AMC, arcum inter M et μ interceptum breuiore tempore absoluat quam quemuis alium, si esset interceptus. Sint nunc puncta M et μ proxima juncta duobus elementis $Mm\mu$, et debebit tempus per $Mm\mu$ esse minimum; seu per regulas methodi maximorum et minimorum aequali tempori per elementa proxima $Mn\mu$. Ducantur ad axem

PVNCTI
axem elem MG= mn in et mμ +t. n debita quam habebi in n ha tem c ro ele quatio centris gle&tis mb. du pter t vt sequ et mb: obrem nat nat
$(bS-bTr)^2)$ to $u=a$ fiat $=\frac{bSu}{Fa}$, atque infinitis cur-
cundum quam er ea descen- ue punctum.
er qua cor- perueniat, ncta A et C ous quibusque ta debet esse per AMC, reuiore tem- si esset in- μ proxima debebit tem- per regulas aequali tem- Ducantur ad axem

axem AP applicatae MP, mp, $\mu\pi$, sumtisque elementis Pp, $p\pi$ inter se aequalibus, seu quoque MG$=m$H, et pm si opus est ad n producta, erit mn infinite paruum respectu elementorum Mm et $m\mu$. Debebit ergo esse $t.\,Mm + t.\,m\mu = t.\,Mn + t.\,n\mu$. Sit celeritas quam corpus in M habet, debita altitudini v, qua ergo tam elementum Mm, quam Mn percurret. Celeritas autem quam in m habebit debita sit altitudini $v + du$, et celeritas, quam in n habebit debita sit altitudini $v + du + ddw$; illa autem celeritate percurret elementum $m\mu$, hac vero elementum $n\mu$. Hinc ergo habebitur ista aequatio, $\frac{Mm}{\sqrt{v}} + \frac{m\mu}{\sqrt{(v+du)}} = \frac{Mn}{\sqrt{v}} + \frac{n\mu}{\sqrt{(v+du+ddw)}}$, est vero $\frac{1}{\sqrt{(v+du+ddw)}} = \frac{1}{\sqrt{(v+du)}} \frac{-ddw}{2(v+du)\sqrt{(v+du)}}$, vnde ductis centris M et μ arculis mg et nb, erit $\frac{ng}{\sqrt{v}} = \frac{mb}{\sqrt{(v+du)}} + \frac{n\mu.\,ddw}{2(v+du)\sqrt{(v+du)}}$. Porro quia est $\frac{1}{\sqrt{(v+du)}} = \frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{du}{2v\sqrt{v}}$ et $\frac{1}{(v+du)\sqrt{(v+du)}} = \frac{1}{v\sqrt{v}} - \frac{3du}{2v^2\sqrt{v}}$. Quibus, neglectis negligendis, substitutis oritur $2v(mb - ng) = mb.\,du - n\mu.\,ddw = mb.\,du - Mm.\,ddw$. Est vero propter triangula similia nmg, mMG et nmb, μmH vt sequitur $ng : mn = m\mathrm{G} : m\mathrm{M}$, seu $ng = \frac{m\mathrm{G}.\,mn}{\mathrm{M}m}$ et $mb : mn = \mu\mathrm{H} : m\mu$, seu $mb = \frac{\mu\mathrm{H}.\,mn}{m\mu}$. Quamobrem erit $2v(\frac{m\mathrm{H}}{m\mu} - \frac{m\mathrm{G}}{\mathrm{M}m}) = \frac{m\mathrm{G}.\,du}{\mathrm{M}m} - \frac{\mathrm{M}m.\,ddw}{mn} = 2v$ diff. $\frac{m\mathrm{G}}{\mathrm{M}m}$. Quae aequatio est homogenea et determinat naturam curuae AMC brachystochronae vocatae

catae, super qua corpus tempore breuissimo ex A ad C peruenit. Q. E. I.

Corollarium 1.

362. Si ergo dicatur $MG = mH = dx$, $mG = dy$, et $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$; erit $H\mu = dy + ddy$ et $m\mu = ds + dds$. His substitutis habebitur $2v\,d\frac{dy}{ds} = \frac{dydu}{ds} - \frac{dsddw}{mn}$. In qua si ex potentiis sollicitantibus determinentur v, du, et ddw, habebitur aequatio pro curua brachystochrona. At semper ddw ita inuoluet mn, vt mn ex calculo excedat.

Corollarium 2.

363. Sit radius osculi curuae $Mm\mu = r$ isque in plagam auersam ab axe AP directus erit $r = \frac{ds^3}{dxddy}$, at est $d.\frac{dy}{ds} = \frac{dsddy - dydds}{ds^2} = \frac{dx^2ddy}{ds^3}$. Quare erit $d.\frac{dy}{ds} = \frac{dx}{r}$, hinc prodibit ista aequatio $\frac{2vdx}{r} = \frac{dydu}{ds} - \frac{dsddw}{mn}$. Ubi notandum est esse $\frac{2v}{r}$ vim centrifugam, qua curua in M secundum normalem ad curuam premitur.

Corollarium 3.

364. Si ex potentiis sollicitantibus fluat $dv = Pdx + Qdy + Rds$; erit $du = Pdx + Qdy + Rds$ et $ddw = Q.mn + R.ng$, quia puncto m in n translato crescit dy particula mn et ds particula

SUPE
la ng.Qui
$\frac{Rdy}{ds}$, quib
$\frac{Pdy-Qdx}{ds}$.
365.
ventam la
licitantes
non exce
tiae sollic
ddw, qui
brachystoc
locum hal
in codem
dem plan
tiae non
stochrona
terit inuen
culiaris e
fuerint po
est, si qu
nes omnin
etiam non
tentiarum
no sunt p
stochronan
si curuae
oblique ag
tum, quan
Tom. II.
OTU PUNCTI
re breuissimo ex
I.
$H = dx$, $mG = dy$,
$I\mu = dy + ddy$ et
habebitur $2v\,d\frac{dy}{ds}$
tentiis sollicitan-
ddw, habebitur
ona. At semper
x calculo excedat.
2.
e $Mm\mu = r$ is-
P directus erit $r =$
$= \frac{dx^2ddy}{ds^3}$. Quare
aequatio $\frac{2vdx}{r} =$
e $\frac{2v}{r}$ vim centri-
m normalem ad
itantibus fluat dv
$= Pdx + Qdy +$
quia puncto m in
mn et ds particu-
la

la ng. Quia autem est $ng = \frac{dy.mn}{ds}$, erit $\frac{ddw}{mn} = -Q - \frac{Rdy}{ds}$, quibus substitutis habebitur ista aequatio $\frac{2v}{r} = \frac{Pdy - Qdx}{ds}$.

Scholion 1.

365. Ex solutione intelligitur formulam inventam latissime patere, atque ad potentias sollicitantes quascunque extendi, etiam resistentia non excepta. Quaecunque enim fuerint potentiae sollicitantes, determinari potest tam du quam ddw, qui valores substituti dabunt aequationem pro brachystochrona quaesita. Attamen haec tantum locum habent, si potentiarum directiones sint in eodem plano: curua enim inuenta est in eodem plano sita. Nihilo tamen minus si potentiae non fuerint in eodem plano, curua brachystochrona in dato plano ope formulae huius poterit inueniri. In quolibet enim plano dato peculiaris erit curua brachystochrona quaecunque fuerint potentiae sollicitantes. Alia vero quaestio est, si quaeratur linea brachystochrona inter omnes omnino lineas data duo puncta jungentes, etiam non in vno plano sitas. Quoties vero potentiarum sollicitantium directiones in eodem plano sunt positae, dubium non est lineam brachystochronam in eodem positam esse plano. Nam si curuae non essent in eodem plano potentiae oblique agerent, et propterea corpus non tantum, quantum fieri potest, accelerarent. Ex hac igitur

igitur solutione tam linea absolute brachystochrona, si potentiarum sollicitantium directiones sunt in eodem plano, inuenitur, quam linea, quae in dato plano est brachystochrona, quaecunque fuerint potentiae sollicitantes.

Scholion 2.

366. Quaestionem hanc de linea brachystochrona seu celerrimi descensus primus produxit Cel. Ioh. Bernoulli, atque plures eius solutiones extant tam in Act. Lips. quam Transactionibus Angl. et Comm. Acad. Paris. et alibi vbi hoc problema tam in hypothesi potentiae sollicitantis deorsum directae, quam pro viribus centripetis solutum dederunt. Nemo autem problema fundamentale, quale hic dedimus, tam late patens praemisit, vt ad potentias quascunque et resistentiam etiam extendi posset. Sumserunt enim omnes $ddw = o$, quod semper perperam fit, nisi directio potentiae sit MG vel mH. Et hanc ob rem Cel. Hermannus cespitauit, dum tali propositione ad brachystochronas in medio resistente inueniendas est vsus in Comm. Acad. Petrop. A. 1727; quasque correctas dedi in iisdem Comm. A. 1734. ex hoc ipso problemate.

PROPOSITIO 41.
Problema.

Tabula X. Fig. 2.

367. *Si corpus perpetuo deorsum trahatur vi quacunque; inuenire lineam brachystochronam* AMC *super qua corpus citissime ex* A *ad* C *descendit.*

SU[...]TU PUNCTI
quacun[...] brachystochro-
super q[...]irectiones sunt
m linea, quae
a, quaecunque
Po
vis qua
linea brachysto-
rimus produxit
eius solutiones
Transactionibus
alibi vbi hoc
atiae sollicitan-
viribus centri-
autem problema
tam late pa-
tascunque et re-
Sumserunt enim
eram fit, nisi di-
Et hanc ob
dum tali pro-
medio resisten-
Acad. Petrop.
iisdem Comm.
.I.
m trahatur vi
qua-

Solutio.

Posita AP $= x$; PM $= y$; et arcu AM $= s$, sit vis quae corpus in M deorsum vrget $=$ P; erit $v = \int Pdx$ hoc integrali ita accepto vt euanescat posito $x = o$, si quidem corpus motum in A ex quiete inchoare ponitur: atque $dv = Pdx$. Erit ergo $du = Pdx = dv$ et $ddw = o$, quia dx inuariatum manet, eunte m in n. Quocirca habebitur ista aequatio $2v.\,d.\frac{dy}{ds} = \frac{dy\,dv}{ds}$, cuius integralis est $l\frac{v}{a} = 2\,l\frac{dy}{ds}$ seu $vds^2 = ady^2$, hincque $dx^2\int Pdx = ady^2 - dy^2\int Pdx$. Quamobrem pro linea brachystochrona quaesita habebitur ista aequatio $dy = \frac{dx\sqrt{\int Pdx}}{\sqrt{(a - \int Pdx)}}$, in qua indeterminatae x et y sunt a se inuicem separatae. Curuae autem longitudo habetur ex hac aequatione $ds = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(a-\int Pdx)}}$. Q.E.I.

Corollarium 1.

368. In A igitur vbi celeritas corporis euanescit seu fit $\int Pdx = o$, erit $dy = o$ seu tangens curuae in A erit verticalis incidens in AP. At vbi fit $\int Pdx = a$, ibi tangens curuae erit horizontalis.

Corollarium 2.

369. Quia $ddw = o$, et $du = Pdx$, erit $\frac{2v}{r} = \frac{Pdy}{ds}$. (363) Est vero $\frac{Pdy}{ds}$ vis normalis, qua cur-

va in M secundum normalem versus axem AP ductam premitur. Consequenter vis normalis est aequalis vi centrifugae et in eandem plagam tendens. Quocirca linea brachystochrona hanc habet proprietatem, vt tota pressio, qua curua premitur, sit duplo maior quamvis normalis sola. In sequentibus vero demonstrabimus hanc proprietatem in omnibus lineis brachystochronis sive in vacuo siue in medio resistente locum habere.

Corollarium 3.

370. Propter arbitrariam a dantur infinitae curuae brachystochronae omnes in A initium habentes. Atque hac litera a effici potest, vt curva ex A per datum punctum C transeat, quae erit linea inter A et C, super qua tempus est minimum.

Corollarium 4.

Tabula X. Fig. 3. 371. Quia curua AMC alicubi habet tangentem horizontalem, sit ea BC et in C sumatur alius axis verticalis CQ. Sit $CQ = X$, $QM = Y$ et $CM = S$, erit $dX = -dx$, $dY = -dy$ et $dS = -ds$; atque $\int P dx = a - \int P dX$ integrali $\int P dX$ ita accepto vt evanescat posito $X = o$. Ad hunc ergo axem CQ si curua referatur, habebitur ista aequatio $dY = \frac{dX\sqrt{(a-\int P dX)}}{\sqrt{\int P dX}}$ seu $dS = \frac{dX\sqrt{a}}{\sqrt{\int P dX}}$.

Corollarium 5.

372. Hac ergo omnes curuae ad vtramque partem axis CQ duos arcus habent similes et aequales.

S U PUNCTI
les. curua modi se par forte p sit neg poterit
us axem AP ; normalis est plagam tenna hanc haqua curua prelis sola. In seproprietatem sive in vacuo e.
37 $=g$, e brachy pothesi $\frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(b-x)}}$. $dY = \frac{dx}{}$ $= 2\sqrt{b}$ cycloid b descr modum Geome dentur qua cor tur si c horizon siens; i curuae efficitur pertingi
ntur infinitae A initium haotest, vt curanseat, quae mpus est mi-
habet tangen- C sumatur a- X, QM=Y $=-dy$ et dS egrali $\int P dX$ $= o$. Ad atur, habebi- $dS = \frac{dX\sqrt{a}}{\sqrt{\int P dX}}$.
ad vtramque iles et aequales.

les. Simili modo ad vtramque partem axis AB curua aequaliter est disposita. Quamobrem huiusmodi curuae infinitas diametros habebunt inter se parallelas, et ad distantiam BC positas; nisi forte potentia sollicitans ita accipiatur, vt supra A sit negatiua, quo casu curua CMA sursum tendere poterit et partem concavam deorsum convertere.

Exemplum I.

373. Sit potentia sollicitans vniformis seu $P = g$, erit $\int P dx = gx$; vnde loco a posito gb pro brachystochrona in hac potentiae sollicitantis hypothesi habebitur ista aequatio $dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(b-x)}}$ seu $ds = \frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(b-x)}}$. At si aequatio ad axem CQ referatur erit $dY = \frac{dX\sqrt{(b-X)}}{\sqrt{X}}$ et $dS = \frac{dX\sqrt{b}}{\sqrt{X}}$ cuius integralis est $S = 2\sqrt{bX}$. Ex qua aequatione patet curuam esse cycloidem super basi horizontali a circulo diametri b descriptam et deorsum conuersam: quemadmodum hoc a Cel. Ioh. Bernoulli aliisque eximiis Geometris jam pridem est inuentum. Si itaque dentur duo quaecunque puncta A et M, linea super qua corpus ex A citissime ad M descendit, inuenitur si describatur cyclois cuspidem in A, et basem horizontalem habens, atque per punctum M transiens; id quod ex eo, quod omnes cycloides sunt curuae similes, ex vnica descripta cycloide facile efficitur. Tempus autem, quo corpus ex A ad M pertingit, quodque est minimum, erit $= \int \frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(bx-x^2)}}$

et

et curuae AM longitudo erit $= \int \frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(b-x)}} = 2b - 2\sqrt{b(b-x)}$. Cum autem fit PM $= r = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(bx-xx)}}$; erit tempus per AM $= \frac{2y+2\sqrt{(bx-xx)}}{\sqrt{gb}}$ = arcui in circulo diametri b cuius finus verfus eft $= x$ ducto in $\frac{2}{\sqrt{gb}}$.

Exemplum 2.

374. Si potentia follicitans P fuerit vt poteftas quaecunque abfciffae CQ, nempe $P = \frac{X^n}{f^n}$ erit $\int P dX = \frac{X^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Confequenter curua brachyftochrona AMC exprimetur hac aequatione $dY = \frac{dX\sqrt{((n+1)af^n - X^{n+1})}}{X^{\frac{n+1}{2}}}$ feu $dS = \frac{dX\sqrt{(n+1)af^n}}{X^{\frac{n+1}{2}}}$, ita vt fit $S = \frac{2X^{\frac{1-n}{2}}}{1-n}\sqrt{(n+1)af^n}$. Quare fi fuerit vel $n=1$ vel $n>1$ curua CM erit infinite magna, feu ipfa recta BC. Cufpis autem curuae A feu locus in quo motus incipit habetur fumendo $CQ = BA = \sqrt[n+1]{(n+1)af^n}$. Curuae prodibunt algebraicae fi fuerit $n = \frac{1-2m}{1+2m}$ denotante m numerum integrum affirmatiuum quemcunque. His igitur cafibus erit n numerus negatiuus, vnitate minor, ita tamen vt $n+1$ fit numerus affirmatiuus. Sit $m=1$, erit $n = -\frac{1}{3}$. Quare fiet $dY = \frac{dX}{X^{\frac{1}{3}}}\sqrt{(\frac{2}{3}af^{-\frac{1}{3}} - X^{\frac{2}{3}})}$, cuius integralis eft $Y = \frac{2a\sqrt{2a}}{3\sqrt{3f}} - (\frac{2}{3}af^{-\frac{1}{3}} - X^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$. Quae aequatio ab irrationalitate liberata fit ordinis fexti. Simili modo aliae curuae algebraicae inuenientur, quae in certis hypothefibus funt brachyftochronae.

Scholion I.

375. Ex data problematis folutione fequitur fimul folutio problematis inuerfi, quo quaeritur potentia follicitans deorfum directa, talis vt data curua fit brachyftochrona. Debet autem haec curua in puncto infimo C habere tangentem horizontalem, et alicubi in A vbi eft motus initium, tangentem verticalem. Vt fi fuerit aequatio pro curua data haec $dY = R\,dX$, erit $R^2\int P dX = a - \int P dX$ atque $\int P dX = \frac{a}{R^2+1}$. Vnde inuenitur $P = \frac{-2aR\,dR}{(R^2+1)^2 dX} = \frac{-2a\,dX\,dY\,ddY}{dS^4}$. Si ergo radius ofculi in M ponatur r, propter $r = \frac{dS^3}{-dX\,ddY}$ habebitur $P = \frac{2a\,dY}{r\,dS}$. Quare problema hac vnica foluetur analogia: vt radius ofculi curuae in M ad lineam datam; ita finus anguli, quem tangens curuae in M cum verticali facit, ad potentiam follicitantem, quae quaeritur. Altitudo vero debita celeritati, quam corpus in M habet, eft $a - \int P dX = \frac{aR^2}{R^2+1} = \frac{a\,dY^2}{dS^2}$, ex quo fequitur celeritatem corporis effe illi ipfi finui anguli, quem tangens curuae cum

verti-

verticali constituit, proportionalem. Vt si sit curva CMA circulus radio c descriptus; erit $r = c$ et $dY = \frac{cdX - XdX}{\sqrt{(2cX - XX)}}$ atque $dS = \frac{cdX}{\sqrt{(2cX - XX)}}$, ex quibus fit $P = \frac{2a(c - X)}{c^3} = \frac{2a.AP}{cc}$. Vis ergo corpus deorsum trahens proportionalis esse debet abscissae AP, cui etiam celeritas est proportionalis.

Scholion 2.

376. Inuenta linea brachystochrona pro hypothesi potentiae sollicitantis deorsum tendentis, ordo requireret, vt lineas brachystochronas in hypothesi virium centripetarum determinaremus.
Tabula X. Fig. 2. At propositio fundamentalis (361.) ita est comparata, vt elementa curuae Mm et $m\mu$ ad axem AP et ordinatas orthogonales MP, mp referantur, quod ad casum virium centripetarum non commode quadrat. Videtur quidem elementa MG et mH vt conuergentia ad centrum virium considerari posse; sed hic ipse error, qui ex hoc oritur, quod elementa MG et mH non essent parallela, vt propositio fundamentalis requirit, perperam negligitur. Perspicuum hoc reddi potest determinando radio osculi, qui si MG et mH fuerint inter se parallela est $=$ MG: d. $\frac{mG}{Mm}$, quae autem expressio non locum habet, si MG et mH ad centrum virium convergunt. Quare antequam ad brachystochronas in hypothesi virium centripetarum accedamus, ex propositione fundamentali

SUPE ... V PVNCTI
tali gener... Vt si sit cur-
que poten... erit $r = c$
modatam. ... ex qui-
num in Pl... go corpus de-
nas pro v... debet abscissae
tos, dum ... rtionalis.
consentanc
377. ea linea er... motum prem... vis centrifu...
hrona pro hy- ... sum tendentis, ... stochronas in ... terminaremus. ...) ita est com- ... $m\mu$ ad axem ... , mp referan- ... ipetarum non ... lem elementa ... entrum virium ... or, qui ex hoc ... non essent pa- ... requirit, per- ... c reddi potest ... MG et mH fue- ... d. $\frac{mG}{Mm}$, quae ... si MG et mH ... uare antequam ... virium centri- ... one fundamen- tali
Quaecu... sollicitante... quarum alt... dum MP. quae secun... $= x$, PM... leritati in viribus vis $= \frac{Pdy + Qdx}{ds}$. Cum hac (364.) est
Tom. II.

tali generalem deriuabimus proprietatem cuicunque potentiarum sollicitantium hypothesi accommodatam. Ex quibus perspicietur Cel. Hermannum in Phoronomia aliosque, qui brachystochronas pro viribus centripetis dederunt, esse deceptos, dum vsi sunt principio cum veritate non consentaneo, vt mox indicabitur.

PROPOSITIO 42.

Theorema.

377. *Quaecunque fuerint potentiae sollicitantes, ea linea erit brachystochrona, quam corpus super ea motum premit vi duplo maiore, quam est vel sola vis centrifuga, vel sola vis normalis.* Tabula X. Fig. 2.

Demonstratio.

Quaecunque et quotcunque fuerint potentiae sollicitantes, eae omnes in binas resolui possunt, quarum altera trahat secundum MG altera secundum MP. Sit illa secundum MG trahens $=$ P et quae secundum MP trahit $=$ Q, et dicantur AP $= x$, PM $= y$, et AM $= s$; itemque altitudo celeritati in M debita $= v$. Erit ex his duabus viribus vis tangentialis $= \frac{Pdx - Qdy}{ds}$, et vis normalis $= \frac{Pdy + Qdx}{ds}$. Hanc ob rem erit $dv = Pdx - Qdy$. Cum hac expressione comparetur, quod supra (364.) est allatum, vbi posuimus $dv = Pdx +$