minat curuam, quam corpus fuper propofita fuperficie defcribit.

Scholion 1.

81. De potentia N bene eft attendendum in quam plagam tendat, h. e. an ad dextram an ad finiftram regionem corporis moti vergat? Pro hac enim differentia tangens anguli $\mu n \nu$ vel affirmatiua vel negatiua eft accipienda. De hoc vero non erimus hic folliciti, fed vlteriorem huius rei disquifitionem in caput vltimum huius libri differemus.

Scholion 2.

82. Ad fequens igitur caput fecundum progredimur, in quo motum corporis fuper data linea in vacuo examinabimus. Capite tertio vero motus fuper data linea in medio refiftente inueftigabimus. Quarto denique capite motum fuper data fuperficie tam in vacuo quam in medio refiftente fcrutabimur.

CAPUT

CAPUT SECUNDUM.

DE MOTU PUNCTI SUPER DATA LINEA IN VACUO.

PROPOSITIO 12.

Problema.

83.

Sollicitetur corpus, quod fuper curua AM *moueatur, vbique a potentia* MF *cuius directio fit parallela axi* AP; *determinare celeritatem corporis in fingulis punctis, atque tempus, quo curuae quaeuis portio defcribitur, nec non preffionem, quam curua in fingulis punctis patitur.* Tabula III, Fig. 3.

Solutio.

Defcripferit corpus iam arcum AM, fitque eius celeritas in A debita altitudini b, atque celeritas in M debita altitudini v. Pofitis nunc $AP = x$; $PM = y$; et arcu $AM = s$; refoluatur potentia MF, quae fit p in laterales normalem fcilicet MN et tangentialem MT; erit $ds : dx = MF : MT$ et $ds : dy = MF : MN$. Hinc igitur prodibit vis tangentialis $MT = \frac{p\,dx}{ds}$ et vis normalis $= \frac{p\,dy}{ds}$. Perfpicuum hic eft vim tangentialem celeritatem corporis minuere, erit ergo $dv = -p\,dx$ (42.) atque $v = C - \int p\,dx$. Sumto autem integrali $\int p\,dx$ ita, vt euanefcat pofito $x = 0$, erit $v = b - \int p\,dx$; ex qua aequatione ne corporis celeritas in singulis punctis cognoscitur. Ex eadem aequatione innotescit quoque tempus, quo arcus AM absoluitur, posito enim tempore t erit $t = \int \frac{ds}{\sqrt{(b - \int p dx)}}$. Vis normalis $MN = \frac{p dy}{ds}$ tota impenditur in curuae pressionem secundum MN (39). augebit ergo pressionem a vi centrifuga ortam, quia MN in oppositam radii osculi MO plagam cadit. Quare cum posito radio osculi $NO = r$ vis centrifuga sit $= \frac{2v}{r}$ (20). Erit totalis pressio in curuam iuxta MN $= \frac{p dy}{ds} + \frac{2v}{r}$; Q. E. I.

Corollarium I.

84. Celeritas in M igitur tanta est, quanta foret in P, si corpus eadem celeritate initiali $\sqrt{b}$ per AP eadem in singulis altitudinibus potentia p sollicitatum ascendisset.

Corollarium 2.

85. Celeritas igitur non pendet a natura curuae, sed tantum ab altitudine, quam corpus percurrit. Si nimirum altitudinis elementum fuerit dx erit $dv = -p dx$ vel $dv = p dx$ prout corpus vel ascendit vel descendit.

Corollarium 3.

86. Cum sit $v = b - \int p dx$, si sumatur abscissa x tanta uti AC, pro qua sit $\int p dx = b$; erit corporis in illa altitudine B celeritas $= o$. Corpus igitur in B vsque ascendit, ibique quiescet, continuo vero ex B descendet per BMA.

Co-

VNCTI
tis cogno- it quoque sito enim normalis ie pressio- go pressio- in oppo- Quare cum fuga fit = iuxta MN
est, quanta initiali $\sqrt{b}$ is potentia
: a natura am corpus ientum fue- prout cor-
iatur abscif- $x = b$; erit $= o$. Cor- ie quiescet, BMA.
Co-

Corollarium 4.

87. Si ascensus per AMB cum ascensu rectilineo per APC comparetur, erit tempus per elementum Mm ad tempus per Pp, vt Mm ad Pp i.e. vt ds ad dx.

Corollarium 5.

88. Quare si linea AMB fuerit recta, ob rationem Mm ad Pp constantem, erit tempus per AM ad tempus per AP in constanti ratione nempe ea, quam habet sinus totus ad cosinum anguli A, seu quam habet longitudo AB ad AC.

Corollarium 6.

89. Posito elemento Pp constante est radius osculi $r = \frac{-ds^3}{dx ddy}$, ideoque vis centrifuga $= -\frac{2v dx ddy}{ds^3} = \frac{-2(b - \int p dx) dx ddy}{ds^3}$. Quare pressio totalis erit $= \frac{p ds^2 dy - 2(b - \int p dx) dx ddy}{ds^3}$.

Scholion I.

90. Quemadmodum in hoc problemate ex datis curua et potentia sollicitante inuenta sunt, celeritas in singulis punctis, tempus per quemvis arcum, et pressio in singula curuae puncta: ita ex harum quinque rerum duabus quibusque datis, reliquae tres possunt inueniri. Ex quo decem nascentur problemata, quae omnia solutionem ex huius problematis solutione habebunt.

 Scho-

Scholion 2.

91. Similiter habebuntur decem huiusmodi quaestiones, si directiones potentiae sollicitantis non fuerint parallelae, sed vel conuergentes ad centrum virium, vel alio modo determinatas directiones habentes. At si etiam directio inter quaesita ponatur tunc ob sex res in computum ducendas, ex ternis quibusque, reliquae tres inuenientur; hincque viginti orientur problemata.

Scholion 3.

92. Orientur porro problemata indeterminata, vt si loco temporis per quamuis curuae portionem tantum integrum tempus per AMB daretur, tum enim infinitae solutiones locum haberent. Praeterea si plures descensus vel ascensus integri considerentur super eiusdem curuae variis partibus, eorumque ratio detur, numerus quaestionum multo magis augebitur. Ad hoc genus pertinet quaestio de inuenienda curua, super qua omnes descensus ad datum punctum fiant eodem tempore, quas tanquam difficillimas vltimo pertractabimus. Nunc autem primum curuam et potentiam sollicitantem tanquam datas accipiemus et problemata eo pertinentia soluemus. Deinceps vero ex aliis datis, quemadmodum reliqua sint inuenienda, monstrabimus.

PRO-

VNCTI
huiusmodi ollicitantis gentes ad erminatas ctio inter omputum e tres in- blemata.
ndetermi- is curuae er AMB nes locum vel ascen- ruae variis aestionum s pertinet ua omnes dem tem- ertractabi- et poten- piemus et Deinceps eliqua sint
PRO-

PROPOSITIO 13.

Problema.

93. *Si potentia sollicitans fuerit vniformis et vbique deorsum tendat, determinare descensum corporis super data curua AM in A ex quiete incipientem, atque pressionem, quam curua, in singulis punctis M sustinet.* Tabula III. Fig. 4.

Solutio.

Ducta verticali AP seu parallela directionibus potentiae MF, atque applicata rectangula MP, sit $AP = x$, $PM = y$, curua $AM = s$. Ponatur potentia $MF = g$, existente vi grauitatis $= 1$, et celeritas in M debita altitudini v. His positis erit vis normalis $= \frac{g\,dy}{ds}$ et vis tangentialis $= \frac{g\,dx}{ds}$ (83.). Quia hoc casu vis tangentialis accelerat, erit $dv = g\,dx$, et $v = gx$, ob celeritatem in $A = o$. Deinde quia radius osculi in MO directus est $= \frac{\pm ds^3}{dx\,ddy}$, posito dx constante, erit vis centrifuga $= \frac{\pm 2v\,dx\,ddy}{ds^3}$, cuius directio est MN. Secundum eandem plagam vero premit vis normalis $\frac{g\,dy}{ds}$. Quare tota pressio, quam curua in M sustinet secundum MN est $= \frac{g\,dy}{ds} + \frac{2v\,dx\,ddy}{ds^3} = \frac{g\,dy}{ds} + \frac{2gx\,dx\,ddy}{ds^3}$ ob $v = gx$. Tempus vero quo corpus arcum AM percurrit est $= \int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$. Q. E. I.

 Co-

Corollarium 1.

94. Celeritas igitur in M tantum ab altitudine AP, per quam descendit, pendet, atque tanta est, quantam idem corpus ex AP delapsum et ab eadem potentia g sollicitatum acquirit.

Corollarium 2.

95. In quacunque igitur curua corpus a potentia vniformi g sollicitatum ex quiete descendat, celeritates erunt radicibus quadratis ex altitudinibus percursis proportionales, est enim celeritas, vt $\sqrt{v}$ i. e. vt $\sqrt{gx}$.

Corollarium 3.

96. Tempus quo primum elementum Aa percurritur, est $\int\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ euanescente x. Si igitur angulus PAa fuerit recto minor seu $s=nx$, erit tempus per Aa infinite paruum, ideoque tempus AM finitum, nisi curua vel ascendat inter A et M, supra A vel in infinitum progrediatur. At si angulus PAa fuerit rectus, erit ipso puncto A, $s^n=\alpha x$, existente n numero vnitate maiore, ideoque $\sqrt{gx} = s^{\frac{n}{2}}\sqrt{\frac{g}{\alpha}}$, et $\int\frac{ds}{\sqrt{gx}} = \frac{2s^{\frac{2-n}{2}}}{2-n}\sqrt{\frac{\alpha}{g}}$. Quare si n fuerit binario minor, tempus per Aa erit infinite paruum, et tempus per AM finitum. At si $n=2$ vel >2 tempus per primum elementum Aa erit infinite magnum, seu corpus ex A nunquam egredietur.

Co-

SV ICTI
97. … altitu- li in A e … que tan- gens curi … psum et descende… paruus.
98. … us a po- pore infi … descen- tur temp… ex alti- corpus m… nim ce- celerius s… rem tem… tem sequ…
…tum Aa Si igitur nx, erit tempus ter A et …ur. At puncto A, …iore, i-
99. ad vertic… $x=ns$. scendit, tempus p… cte, vt ra… cosinu an… autem= … premitur … r Aa erit …tum. At …ementum … A nun-
100. per AK, est ad ter…
Co-

Corollarium 4.

97. Quoties autem $n < 2$, toties radius osculi in A est infinite paruus. Quare in casu quo tangens curuae in A ad AP est normalis, corpus non descendet, nisi radius osculi in A fuerit infinite paruus.

Scholion 1.

98. Ex eo, quod primum elementum tempore infinite paruo percurritur, recte concluditur tempus per arcum AM esse finitum, cum enim corpus motu accelerato per AM descendat, multo celerius sequentia elementa describentur, et hancob rem tempus debebit esse finitum. Exemplis autem sequentibus omnia illustrabuntur.

Exemplum 1.

Tabula III. Fig. 5.

99. Sit linea AM recta vtcunque inclinata ad verticalem AP, atque cosinus ang. A $= n$, erit $x=ns$. Tempus ergo, quo corpus per AM descendit, erit $=\int\frac{ds}{\sqrt{gns}} = \frac{2\sqrt{s}}{\sqrt{gn}} = \frac{2\sqrt{AM}}{\sqrt{gn}} = \frac{2AM}{\sqrt{g.AP}}$. Seu tempus per lineam vtcunque inclinatam est directe, vt radix ex ipsa linea et inverse, vt radix ex cosinu anguli inclinationis MAP. Vis centrifuga erit autem $= 0$, quare linea AM tantum a vi normali premitur, quae est $= g\sqrt{(1-n^2)} = \frac{g.PM}{AM}$.

Corollarium 5.

100. Tempus ergo per AM est ad tempus per AK, vt $\sqrt{AM}$ ad $\sqrt{AK}$. At tempus per AM est ad tempus per AP vt AM ad AP. (88). Quare

re si fuerit $AM : AP = \sqrt{AM} : \sqrt{AK}$, seu $AM : AP = AP : AK$, quod euenit si PK est in AM perpendicularis tum tempus descensus per AK aequale est tempori descensus per AP.

Corollarium 6.

101. Patet etiam tempus descensus per perpendiculum PK aequale esse tempori descensus per AP. Est enim cosinus anguli $APK = \frac{PK}{AP}$; Quare cum sit tempus per AP ad tempus per KP vt $\frac{\sqrt{AP}}{\sqrt{t}}$ ad $\sqrt{KP} : \sqrt{\frac{PK}{AP}}$, erit haec ratio aequalitatis.

Corollarium 7.

Tabula IV. Fig. 1. 102. Ex hoc perspicitur in circulo APPB omnes descensus per chordas AP ex puncto supremo A ductas, nec non omnes descensus per chordas ad punctum infimum B ductas aequalibus fieri temporibus; eo scilicet tempore, quo corpus per diametrum AB perpendiculariter delabitur.

Exemplum 2.

Tabula IV. Fig. 2. 103. Si curua AMB fuerit circulus, ac radius $BC = a$ et AP tangat circulum, erit $(a-y)^2 + x^2 = a^2$ seu $y = a - \sqrt{(a^2 - x^2)}$. Habebitur ergo $ds = \frac{a\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, et ob $v = gx$ et $r = a$ erit vis centrifuga $= \frac{2gx}{a}$; atque ob $dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ tota pressio, quam circulus in M sustinet $= \frac{3gx}{a}$. Triplo igitur maior est tota pressio, quam sola vis normalis. Tempus deinde, quo arcus AM percurritur, est =

CTI
$= \int$ ... $= AP$: ... hyp... ris tum ... ori de- ... per q ... $+ \frac{1}{2}$ ... er per- ... sus per ... Quare ... vene ... vt $\frac{\sqrt{AP}}{\sqrt{t}}$ ... bitam ... perti ... ide oq ... reasc ... APPB ... per q ... supre- ... scend ... r chor- ... tem. ... us fieri ... us per ... seque ... super ... ri. ... ac ra- ... mus, ... $(a-y)^2$ ... dato ... itur er- ... prob ... erit vis ... ta pres- ... Triplo ... is nor- ... AM ... tur, est =

$= \int \frac{a\,dx}{\sqrt{g \cdot (a^2 x - x^3)}}$, cuius integratio neque a circuli nec hyperbolae quadratura pendet, sed ope rectificationis curuae elasticae construi potest. Tempus interim per quadrantem AB est $= 2\sqrt{\frac{a}{g}} \times \left(1 + \frac{1}{2.5} + \frac{1.3}{2.4.9} + \frac{1.3.5}{2.4.6.13} + \text{etc.}\right)$.

Corollarium 8.

104. Cum corpus ad infimum punctum B peruenerit, ibi habebit celeritatem altitudini ga debitam. Hac igitur ascendet in altero quadrante BD pertingetque ad D, vbi eius celeritas euanescet, ideoque rursus descendet ad B tumque ad A per BA reascendet. Similis vero erit ascensus descensui per quadrantem, quia corpus siue ascendat siue descendat in iisdem punctis eandem habet celeritatem.

Scholion 2.

105. Alia exempla non afferimus, cum in sequentibus, vbi plures descensus ad punctum fixum super data linea considerabimus, plura simus allaturi. Nunc vero primum eas quaestiones euoluemus, quae pertinent ad motum super data linea, ex dato puncto fixo a quiete inceptum: cuius modi est problema sequens.

PROPOSITIO 14.

Problema

106. *Si fuerint infinitae curuae similes* AM, AM *etc. ex puncto fixo* A *initium sumentes; inuenire cur-* Tabula IV. Fig. 3.

curuam C M M, *ab illis curuis arcus* A M, A M *etc. abſcindentem, qui a deſcendente ſuper iis corpore aequalibus temporibus percurrantur; exiſtente vt ante potentia ſollicitante uniformi et vbique deorſum directa.*

Solutio.

Ex infinitis curuis datis ſumatur vna quaecunque A M, cuius parameter ſit a. Poſitoque $AP = x$, $PM = y$ et arcu $AM = s$, et exiſtente vt ante potentia ſollicitante $= g$; deſcendat corpus ſuper curua A M, erit celeritas in M debita altitudini gx. Tempus ergo deſcenſus ſuper A M erit $= \int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$. Ab omnibus ergo curuis A M, A M etc. tanti arcus ſunt abſcindendi, vt pro iis ſit $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ quantitas conſtans. At $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ ad alias curuas referetur, ſi praeter s et x etiam parameter a ponatur variabilis. Poſito igitur in $\int \frac{dx}{\sqrt{gx}}$ etiam a variabili, quantitas $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ ponenda eſt $=$ conſtanti, nempe ei tempori quo omnes deſcenſus fieri debent. Sit hoc tempus $= k$ erit $k = \int \frac{dx}{\sqrt{gx}}$ in ſingulis curuis. Quare ſi $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ ita differentietur vt etiam a variabile ponatur, hoc differentiale nihilo aequale eſt ponendum. Ad hoc differentiale inueniendum ſit $ds = pdx$, eritque p, quia omnes curuae ponuntur ſimiles, functio in qua a et x nullum dimenſionum numerum ſimul conſtituunt. Habebimus ergo $\int \frac{pdx}{\sqrt{gx}}$: hoc differentiatum poſito quoque a variabili dabit $\frac{pdx}{\sqrt{gx}}$

$\frac{pdx}{\sqrt{gx}} + q\,da$, quod fieri debet $= 0$. Quantitas q vero ſequenti modo inuenietur. Quia eſt $k = \int \frac{pdx}{\sqrt{gx}}$; in quantitate k, variabiles a et x dimenſionum numerum conſtituent $\frac{1}{2}$. Oſtendi autem alibi in Tom. IX. Comment. tum fore $\frac{px}{\sqrt{gx}} + qa = \frac{k}{2}$. Ex quo inuenitur $q = \frac{k}{2a} - \frac{p\sqrt{x}}{a\sqrt{g}}$. Habebitur ergo $\frac{pdx}{\sqrt{gx}} + q\,da = \frac{pdx}{\sqrt{gx}} + \frac{k\,da}{2a} - \frac{p\,da\sqrt{x}}{a\sqrt{g}} = 0$. Quae eſt aequatio pro curua quaeſita. At ſi aequatio inter coordinatas x et y pro curua C M M deſideretur, ex aequatione pro quaque curuarum A M, valor ipſius a in x et y inuentus ſubſtitui debet. Q. E. I.

Corollarium 1.

107. Aequatio etiam primo inuenta $\frac{pdx}{\sqrt{gx}} = \frac{p\,da\sqrt{x}}{a\sqrt{g}} - \frac{k\,da}{2a}$ ſufficit ad curuam CMM inueniendam. Nam pro quauis abſciſſa $AP = x$ ex ea inuenitur a parameter eius curuae A M, cuius punctum M reſpondens aſſumtae abſciſſae x eſt in curua quaeſita C M M.

Corollarium 2.

108. Cum autem haec aequatio ſit differentialis, ideoque ad plures curuas pro conſtante quae adiicitur, pertineat; notandum eſt in additione conſtantis, eam tantum ſolutioni eſſe conuenientem, quae pro data curua ſeu pro dato ipſius a valore det abſciſſam x tantum arcum A M abſcindentem, qui tempore k deſcenſu abſoluatur.

Corollarium 3.

109. Si tempus k aequale esse debeat tempori descensus per verticalem $AC = b$, erit $k = \frac{2\surd b}{\surd g}$. Quo valore substituto habebitur aequatio $\frac{p\,dx}{\surd x} = \frac{p\,da\surd x}{a} - \frac{da\surd b}{a}$. In cuius integratione id est faciendum, vt curua per punctum C transeat.

Scholion 1.

110. Erit autem semper recta verticalis AC species curuarum AM; quae oritur, si parameter a vel infinite magna vel infinite parua accipiatur. Quare commodissime tempus constans k per descensum per verticalem AC, quippe speciem curuarum AM, exprimitur. Atque in constructione aequationis inuentae $\frac{p\,dx}{\surd x} = \frac{p\,da\surd x}{a} - \frac{da\surd b}{a}$ tanta constans est addenda, vt posito $x = b$, fiat a vel infinitum vel nihil, prout ille vel iste valor ipsius a recta AC respondeat.

Scholion 2.

111. Si $\frac{ds}{\surd gx}$ reipsa potest integrari, ne data quidem aequatione opus est, ad quam inueniendam opus fuit q determinare. Nam si integrale ipsius $\frac{ds}{\surd gx}$ iterum differentietur posito quoque a variabili reipsa obtinetur q; atque hoc differentiale tantum nihilo aequale esset ponendum. Commodissime vero his casibus problema soluetur, si integrale ipsius $\frac{ds}{\surd gx}$ statim ipsi k vel $\frac{2\surd b}{\surd g}$ aequale ponatur, et loco a eius valor in x et y substituatur ex aequatione pro curuis datis. Atque hoc mo-

NCTI
eat tem-
erit $k =$
aequatio
e id est
anseat.
icalis AC
parame-
rua acci-
onstans k
ppe spe-
e in con-
$=b$, fiat
iste valor
ta quidem
lam opus
ipsius $\frac{ds}{\surd gx}$
variabili
iale tan-
mmodis-
, si inte-
quale po-
substitua-
Atque hoc
mo-

modo solutio in promtu est non solum pro curuis similibus, sed dissimilibus etiam, si modo tempora descensus per quantitates finitas exprimi possunt.

Exemplum 1.

112. Si omnes hae curuae AM fuerint rectae diuersimode ad verticalem AC inclinatae, erit $y = nx$ et $s = x\surd(1+n^2)$ ubi n tanquam parameter est consideranda. Erit ergo $\int\frac{ds}{\surd gx} = \int\frac{dx\surd(1+n^2)}{\surd gx} = \frac{2\surd x(1+n^2)}{\surd g}$ quod aequale poni debet ipsi $\frac{2\surd b}{\surd g}$. Erit itaque $x(1+n^2) = b$. Cum autem n sit quantitas variabilis, ponatur pro ea valor $\frac{y}{x}$ ex aequatione $y = nx$: quo facto prodibit pro curua CMM aequatio inter coordinatas orthogonales x et y ista $y^2 + x^2 = bx$, quae est pro circulo, cuius diameter est recta $AC = b$.

Scholion 3.

113. Hic casus est ille ipse casus ante pertractatus (102), ibi enim ostensum est corpus per omnes chordas in circulo ex puncto supremo eductas aequalibus temporibus descendere. Pertinet hic quidem casus non ad curuas similes; sed hoc exemplum attulimus ad casum Scholii 2. illustrandum, quia pro rectis hisce tempora descensus finitis quantitatibus exprimuntur. Sequentia exempla vero curuas similes, vti propositio postulat, complectentur.

Exemplum 2.

114. Sint curuae AM, AM omnes circuli tangentes verticalem AC in A. Ponatur radius cuiusque eorum $=a$, erit $y=a-\sqrt{(a^2-x^2)}$ atque $a=\frac{y^2+x^2}{2y}$. Hi circuli vero omnes ſunt curuae ſimiles, quia a, y et x in aequatione eundem dimenſionum numerum tenent, ſeu homogeneitatem complent ſola. Radius igitur a tanquam parameter variabilis debet tractari. Habetur autem ex illa aequatione $ds=\frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, quare erit $p=\frac{a}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, ideoque praeſcriptam habet proprietatem, vt a et x dimenſionum numerus ſit nullus. Hanc ob rem pro curua CMM haec habebitur aequatio $\frac{adx}{\sqrt{(a^2x-x^3)}} = \frac{da\sqrt{x}}{\sqrt{(a^2-x^2)}} - \frac{da\sqrt{b}}{a}$, ſeu haec $\frac{da\sqrt{b}}{a} = \frac{xda-adx}{\sqrt{(a^2x-x^3)}}$. Quae aequatio conſtrui poteſt, poſito enim $x=au$, prodit $\frac{da\sqrt{b}}{a\sqrt{a}}=\frac{-du}{\sqrt{(u-u^3)}}$ in qua indeterminatae ſunt a ſe inuicem ſeparatae. Quo autem aequatio inter coordinatas x et y pro curua CMM obtineatur, ponatur loco a valor $\frac{y^2+x^2}{2y}$ et loco da eius differentiale $\frac{y^2dy+2yxdx-x^2dy}{2y^2}$. Quibus ſubſtitutis ſequens prodit aequatio differentialis $-xdy+ydx = \frac{(y^2dy+2yxdx-x^2dy)\sqrt{bx}}{y^2+x^2}$. Quae ita integrari debet ut poſito $x=b$ fiat $y=0$, quia curua per punctum C transire debet.

Corollarium 4.

115. Ex hac aequatione tangens curuae CMM in ſingulis punctis cognoſcitur, et ex poſitione tangentis innoteſcit angulus AMM, quo curua CMM quamlibet datarum interſecat. Erit ſcilicet tangens anguli AMM $=\frac{y}{x-\sqrt{bx}}$. Hic ergo angulus eſt rectus in C, ob $x=b$, ſeu curua CMM in C ad AC eſt normalis.

Corollarium 5.

116. Si b vel maior vel minor accipiatur curua CMM alia quoque erit, hocque modo infinitae orientur curuae a circulis arcus iſochronos abſcindentes. Haeque curuae omnes inter ſe erunt ſimiles, ob parametrum b, quae in aequatione cum x et y homogeneitatem conſtituit. Data ergo vna curua CMM innumerabiles aliae ex ea conſtrui poſſunt, abſciſſis ſcilicet et applicatis curuae CMM in eadem ratione augendis vel diminuendis, in qua AC ſeu b augetur vel diminuitur.

Exemplum 3.

117. Sint curuae AM, AM omnes cycloides cuſpides in A habentes et tangentes verticalem AC in A. Poſita parametro cuiusque cycloidis AM ſeu dupla diametro circuli generatoris $=a$; erit ex natura cycloidis $s=a-\sqrt{(a^2-2ax)}$ atque $ds=\frac{adx}{\sqrt{(a^2-2ax)}}$; hincque $dy=\frac{dx\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2-2ax)}}$. Hoc ergo caſu eſt $p=\frac{a}{\sqrt{(a^2-2ax)}}$, functio ipſarum a et x nullius dimenſionis vt requiritur. Quare pro curua CMM reperitur iſta aequatio $\frac{adx}{\sqrt{(a^2x-2ax^2)}} = \frac{da\sqrt{x}}{\sqrt{(a^2-2ax)}} - \frac{da\sqrt{b}}{a}$ ſeu $\frac{xda-adx}{\sqrt{(a^2x-2ax^2)}} = \frac{da\sqrt{b}}{a}$. Si aequa-

aequatio inter coordinatas orthogonales x et y desideretur, ex aequatione $y = \int \frac{dx\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2-2ax)}}$ seu huius differentiali posita quoque a variabili, valor ipsius a debet substitui. Haec vero aequatio differentiata posito a quoque variabili dat $ady - yda = \frac{adx\sqrt{2ax} - xda\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2-2ax)}}$ seu $\frac{ady - yda}{\sqrt{2a}} = \frac{axdx - x^2 da}{\sqrt{(a^2x - 2ax^2)}}$. Quae abit in hanc $\frac{ady - yda}{a^2\sqrt{2}} = \frac{axdx - x^2 da}{a^2\sqrt{(ax - 2x^2)}}$. Superior vero per $\frac{1}{4\sqrt{a}}$ multiplicata praebet hanc, $\frac{da\sqrt{b}}{4a\sqrt{a}} = \frac{axda - a^2dx}{4a^2\sqrt{(ax - 2x^2)}}$. Hae duae aequationes additae dant aequationem integrabilem, cuius integralis est $\frac{y}{a\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}} = \frac{-\sqrt{(ax - 2x^2)}}{2a}$. Ex qua valor ipsius a erutus fit $\sqrt{a} = \frac{y\sqrt{2b} \pm \sqrt{(2y^2x - 2bx^2 + 2x^3)}}{b - x}$ et $\sqrt{(ax - 2x^2)} = \frac{yx\sqrt{2} \pm \sqrt{(2by^2x - 2b^2x^2 + 2bx^3)}}{b - x}$. Quibus valoribus in aequatione $\frac{(xdy - ydx)\sqrt{a} + xdx\sqrt{2b}}{\sqrt{(ax - 2x^2)}} = dy\sqrt{b}$, quae oritur ex duabus differentialibus eliminato da, substitutis prodibit $\frac{xdy - ydx - bdy}{2\sqrt{b}} = \frac{dx\sqrt{(y^2 - bx + x^2)}}{\sqrt{x}}$ aequatio pro curua quaesita C M M.

Corollarium 6.

118. Ex hac aequatione inuenitur tangens anguli, quem curua CM cum applicata PM constituit nempe $\frac{dx}{dy} = \frac{-(b-x)\sqrt{x}}{y\sqrt{x} + \sqrt{(by^2 - b^2x + bx^2)}}$. Deinde etiam innotescit tangens anguli, quem cyclois A M cum

cum applicata P M constituit. Ex aequatione cycloidis erit nimirum $\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}{\sqrt{2ax}} = \frac{\sqrt{(ax - 2x^2)}}{x\sqrt{2}}$. Eliminato vero a erit ista tangens $= \frac{y\sqrt{x} + \sqrt{(by^2 - b^2x + bx^2)}}{(b-x)\sqrt{x}}$. Quare cum horum angulorum alter alterius sit complementum, sumto illius deinceps posito, erit angulus, quem curua C M M cum qualibet datarum AM constituit, rectus. Consequenter curva C M M est traiectoria orthogonalis omnium cycloidum datarum A M, A M &c.

Corollarium 7.

119. Sumto A C alius magnitudinis, aliae quoque curuae CMM prodibunt, et sic infinitae traiectoriae orthogonales inueniuntur, quae omnes inter se sunt similes. Data ergo vna facile quotquot libuerit, construere licebit.

Scholion 4.

120. Omnes hae curuae arcus abscindentes isochronos, quaecunque fuerint curuae secandae, semper construi possunt, etiamsi id ex aequatione non appareat. Per quadraturas enim ex datis curuis arcus possunt abscindi, qui dato tempore descensu absoluantur, hocque modo puncta quotlibet curuae quaesitae inueniuntur. Si quidem curuae secandae sunt algebraicae, aequatio pro curua secante semper ita est comparata, ut factis debitis substitutionibus indeterminatae a se inuicem possint separari. At si curuae secandae differentiali

tiali aequatione exprimantur, aequatio differentialis pro curua secante rarissime separationem indeterminatarum admittit. Caussa est, quod peculiari modo, quo in hoc cycloidum casu usus sum, parameter a eliminari debeat; eaque substitutio ad separationem non deducat.

Scholion 5.

121. Deinde obseruandum est, omnes curuas arcus isochronos abscindentes, quarum numerus pro vario ipsius b valore est infinitus, inter se similes esse, si quidem curuae secandae fuerint tales. Colligitur hoc ex generali aequatione $\frac{pdx}{\sqrt{x}} = \frac{pda\sqrt{x}}{a} - \frac{da\sqrt{b}}{a}$ in qua cum p sit functio ipsarum a et x nullius dimensionis quantitates a, b et x homogeneitatem constituunt. At ex aequatione curuarum secundarum, quia in ea a, x et y vbique eundem dimensionum numerum conficere ponuntur, valor ipsius a erit functio ipsarum x et y vnius dimensionis. Quare eo substituto loco a habebitur aequatio pro curua secante, in qua b, x et y vbique eundem dimensionum numerum constituunt. Consequenter b variabili posito oriuntur infinitae curuae similes inter se respectu puncti A. Data ergo vnica, reliquae facile ex similitudinis ratione describuntur.

Scholion 6.

122. Materia haec de arcubus isochronis abscindendis iam praeterito seculo est pertractata in

in Act. Erud. Lips. A. 1697. a Cel. Ioh. Bernullio, atque postmodum in Comment. Acad. Paris. a Cel. Saurino, qui vero alia methodo sunt vsi. Ego vero eam adhibui methodum, quam in nostris Comment. pro A. 1734. tradidi, tanquam commodissimam ad huiusmodi problemata soluenda. In his vero locis Viri Cel. curuas quoque similes tantum, vt ego, considerauerunt, sine dubio, quia pro curuis dissimilibus solutio fit nimis difficilis et saepe etiam vires superat. Vocantur vero in locis citatis hae curuae synchronae, quia arcus simul percursi abscinduntur.

Scholion 7.

123. Ex mea dissertatione Tomi IX. Comment. Acad. Petrop. apparet, has curuas synchronas simili modo posse inueniri, si curuae datae etiam non fuerint similes, sed eiusmodi tamen, vt posito $ds = pdx$, in p quantitates a et x datum dimensionum numerum constituant; tum enim aeque facile valor literae q inuenitur. Vt si numerus dimensionum ipsarum a et x in p fuerit n, aequatio pro curua secante reperietur haec $\frac{pdx}{\sqrt{x}} = \frac{pda\sqrt{x}}{a} - \frac{(2n+1)da\sqrt{b}}{a}$. Quare si fuerit $n = -\frac{1}{2}$, vt si fuerit $p = \frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, erit $\frac{dx}{x} = \frac{da}{a}$ ideoque $x = ma$, seu x in data ratione ad parametrum a est capiendum: quo igitur casu constructio synchronarum est facillima. At si p non

non huiusmodi habuerit³ valorem, ex supra citata dissertatione mea intelligitur, quo modo in aequationem quaesitam sit inquirendum.

PROPOSITIO 15.
Problema.

Tabula IV. Fig. 4. 124. *Si fuerit, vt ante infinitae curuae similes* AM, AM *etc. et recta positione data* DE; *inuenire eam curuam* AMN, *super qua corpus tempore breuissimo ex* A *ad rectam* DE *descensu peruenit.*

Solutio.

Descripta per Prop. praeced. quacunque curva CMM arcus AM isochronos abscindente, ducatur tangens GMH parallela datae rectae DE. Manifestum est super curua AM, quae ad punctum contactus M tendit, corpus tempore breuissimo ad rectam GMH esse venturum, quia quaeque alia puncta rectae GMH extra curuam CMM cadunt, ideoque longiore tempore opus est, quo corpus ad ea perveniat. Iam, quoniam omnes curuae a curuis AM, AM arcus isochronos abscindentes sunt inter se similes (121). concipiatur ex iis una quae rectam DE tangat, dico punctum contactus fore in N puncto, quo recta AM per prius punctum contactus M ducta rectae DE occurrit. Sequitur hoc tum ex natura similitudinis curuarum CMM respectu puncti A, tum etiam ex eo, quod arcus AMN similis sit arcui AM, atque rectae DE in eodem angulo occurrat, quo curua AM rectae GH. Quare

re cum corpus per AM tempore breuissimo ad GH perueniat, necesse est, vt quoque tempore breuissimo super curua AMN ad rectam DE perveniat. Q. E. I.

Corollarium 1.

125. Ex hoc perspicitur, si recta DE fuerit horizontalis, corpus descensu per verticalem AC ad eam citissime peruenire, ob tangentem curuae CMM in C horizontalem: id quod quidem per se perspicuum est.

Corollarium 2.

126. Si ergo curuae AM, AM fuerint cycloides vt in exemplo 3. Propos. praec. posuimus, corpus super ea cycloide celerrime ad rectam DE peruenit, quae huic rectae in N ad angulos rectos occurrit; quia angulus, quem quaeque cyclois cum curua CM constituit, est rectus.

Corollarium 3.

127. Si igitur recta DE fuerit verticalis seu parallela ipsi AC, portio cycloidis AMM erit dimidia cyclois. Quare super dimidia cycloide motus horizontalis est celerrimus.

Corollarium 4.

128. Si curuae AM, AM sint rectae ex puncto A ad rectam positionem datam DE ductae, corpus super ea AM citissime ad DE perveniet, quae est chorda circuli per A transeuntis et centrum in verticali AB habentis, atque rectam DE tangentis.(112.). Tabula IV. Fig. 5.

 Co-

Corollarium 5.

129. Si igitur angulus DCA fuerit n graduum erit angulus BAM $\frac{90+n}{2}$ graduum, et angulus AMC graduum $\frac{90-n}{2}$. Seu ducta horizontali AGH, anguloque DGH bisecto recta GF, erit quaesita linea AM parallela ipsi GF.

Corollarium 6.

130. Quare si linea DE fuerit verticalis corpus ad eam citissime perueniet descendendo super recta ad horizontem angulo semirecto inclinata. Corpus igitur super recta hoc modo inclinata motu horizontali celerrime progreditur.

Scholion.

Tabula IV. Fig. 4. 131. Simili modo quoque inueniri potest, super quanam infinitarum curuarum similium AM, AM corpus descensu citissime ad datam curuam perueniat. Nam si linea GMH fuerit curua quaecunque tangens curuam CMM in M, corpus super hac curua AM celerrime ad curuam GMH perueniet, si quidem tota curua GMH extra curuam CMM fuerit sita. Eodem etiam modo posset determinari, si curuae AM, AM non fuerint similes, super quanam corpus celerrime ad datam lineam GH perueniat. Ex infinitis enim curuis CMM arcus isochronos abscindentibus ea est quaerenda, quae datam GMH tangat, eritque ea curua AM, quae per punctum contactus transit ea, quae quaeritur. Sed cum in his casibus difficile plerumque sit curuas CMM inuenire, multoque

toque neam tum
VNCTI
aduum erit AMC graanguloque ea AM pa-
1 uas A sitas homol
rticalis corendo super inclinata. inclinata r.
Am; pe ea ratio tas ir VAp, subdu jam cet N duo comp et re sequit elem ne su cum tac c ratio
ri potest, nilium AM, am curuam curua quaecorpus suuam GMH l extra curiam modo M non suclerrime ad finitis enim ntibus ea est, eritque ea ctus transit casibus difnire, mul- toque

toque difficilius eam determinare, quae datam lineam tangat; quaestionem ad curuas similes tantum restrinximus.

PROPOSITIO 16.

Theorema.

132. *Tempora descensuum, quibus corpus curuas* AM *et* Am *similes similiterque ex puncto* A *positas percurrit, sunt in ratione subduplicata laterum homologorum.* Tabula IV. Fig. 6.

Demonstratio.

Quia curuae AM, Am sunt similes, erunt AM: Am; AP: Ap; et PM: pm in data ratione, nempe ea, quam latera homologa tenent; sit haec ratio laterum homologorum N: n. Quia celeritas in M est ad celeritatem in m, vt $\sqrt{AP}$ ad $\sqrt{Ap}$, erunt celeritates in M et m in ratione subduplicata laterum homologorum. Sumantur jam ex M et m elementa similia rationem scilicet N ad n tenentia, erunt tempora, quibus haec duo elementa homologa percurruntur in ratione composita ex directa elementorum, i.e. N ad n et reciproca celeritatum, i.e. $\sqrt{N}$: $\sqrt{n}$. Ex quo sequitur, tempora, quibus curuarum AM, Am elementa homologa percurruntur, esse in ratione subduplicata laterum homologorum. Quare cum haec ratio sit constans, tempora, quibus totae curuae AM et Am percurruntur, eandem hanc rationem tenebunt. Q. E. D.

Corollarium 1.

133. Tempora igitur, quibus arcus circulares similes similiterque positi descensu percurruntur, sunt in subduplicata ratione radiorum.

Corollarium 2.

134. Pendula igitur, quae arcus circulares similes describunt, oscillationes absoluent temporibus, quae rationem subduplicatam longitudinum pendulorum tenebunt.

Corollarium 3.

135. Eadem ratio temporum locum habet, si corpora pendula non circulos describant, sed alias curuas, dummodo eae fuerint inter se similes, similesque arcus absoluantur.

Scholion.

136. In his autem omnibus potentiam sollicitantem semper ponimus vniformem, deorsumque tendentem, etiamsi hanc conditionem omiserimus. Hanc enim hypothesin ante pertractare constituimus, quam ad alias sumus progressuri.

PROPOSITIO 17.

Problema

Tabula V. Fig. 1. 137. *Existente potentia sollicitante vniformi tendenteque deorsum, moueatur corpus super curua quacunque AM cum data celeritate initiali in A: determinare motum corporis super hac curua, et pressionem, quam curua in singulis punctis sustinet.*

Solutio.

Posita potentia sollicitante g, et celeritate initiali in A debita altitudini b, praetereaque AP $= x$; PM $= y$; AM $= s$ et celeritate in M debita altitudini v. His positis erit $dv = g\,dx$, (93.) vnde fit $v = b + gx$. Porroque tempus per arcum AM erit $\int \frac{ds\,1}{\sqrt{(b+gx)}}$. Deinde pressio totalis, quam sustinet curua secundum directionem normalis MN erit $= \frac{g\,dy}{ds} + \frac{2v\,dx\,ddy}{ds^3}$ (93.) $= \frac{g\,dy}{ds} + \frac{2(b+gx)\,dx\,ddy}{ds^3}$ existente dx elemento constante. Hoc enim tantum differt haec solutio a solutione Prop. 13. quod ibi esset $v = gx$, hic vero sit $v = b + gx$. Ex his igitur formulis tum motus tum pressio cognoscitur. Q. E. I.

Corollarium 1.

138. Si linea AM fuerit recta, jam ex §. 68. intelligitur tempus per AM esse ad tempus descensus per AP eadem celeritate $\sqrt{b}$ incepti, vt est AM ad AP. Pressio vero ob euanescentem vim centrifugam erit $= \frac{g\,dy}{ds}$ seu constans.

Corollarium 2.

139. Patet etiam hoc casu, quo motus non a quiete incipit, celeritatem ab altitudine tantum pendere. Quare quaecunque fuerit curua AM celeritas corporis in quouis eius puncto innotescit, etiam incognita curuae natura.

Exem-

Exemplum 1.

140. Sit curua AM parabola verticem in A et axem verticalem AP habens; erit ergo posita eius parametro $= a$, $y^2 = ax$; et $dy = \frac{a\,dx}{2\sqrt{ax}}$ et $ds = \frac{dx\sqrt{(a^2+4ax)}}{2\sqrt{ax}}$. Habebitur ergo tempus per AM $= \int \frac{dx\sqrt{(a+4x)}}{2\sqrt{x}(b+gx)}$. Deinde cum posito dx constante sit $ddy = \frac{-a\,dx^2}{4x\sqrt{ax}}$, erit $\frac{dx\,ddy}{ds^2} = \frac{-2a}{(a+4x)\sqrt{(a^2+4ax)}}$. Consequenter pressio totalis est $= \frac{ga}{\sqrt{(a^2+4ax)}} - \frac{4a(b+gx)}{(a+4x)\sqrt{(a^2+4ax)}} = \frac{ga^2-4ab}{(a+4x)\sqrt{(a^2+4ax)}}$.

Corollarium 3.

141. Si igitur est $b = \frac{ga}{4}$, pressio curuae euanescit. Corpus ideo hoc casu libere in hac parabola moueri posset; qui est etiam ipse casus praecd. Libro pertractatus.

Corollarium 4.

142. Existente igitur $b = \frac{1}{4}ga$ erit tempus per arcum $AM = \int \frac{dx}{\sqrt{gx}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}}$. Hoc ergo tempus aequatur tempori descensus per abscissam AP a quiete incepti.

Corollarium 5.

143. Si $b > \frac{1}{4}ga$ pressio sit negatiua, tum igitur curua in plagam axi AP oppositam premitur. A si $b < \frac{1}{4}ga$ directio pressionis erit in MN. Quantitas vero pressionis in singulis curuae punctis erit reciproce vt radius osculi.

Exem-

Exemplum 2.

144. Si curua AM fuerit circulus; cuius radius $= a$, et centrum in verticali AP sit positum; erit $y^2 = 2ax - x^2$, vnde $dy = \frac{a\,dx - x\,dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$ et $ds = \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$. Erit ergo tempus, quo arcus AM percurritur $= \int \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax-x^2)(b+gx)}}$. Atque cum sit $\frac{dx\,ddy}{ds^2} = \frac{-1}{a}$, erit pressio, quam circulus in puncto M patitur $= g - \frac{gx}{a} - \frac{2(b+gx)}{a} = g - \frac{3gx}{a} - \frac{2b}{a}$.

Corollarium 6.

145. Tempus per logarithmos exprimi potest, si fuerit $b = 0$; fit autem $= \infty$, seu corpus perpetuo in A manebit. Id quod per supra tradita (97.) patet. Nam, quia curua in A est normalis in AP, neque radius osculi infinite paruus, corpus descendere non potest.

Corollarium 7.

146. Si est $b = \frac{ga}{2}$, seu celeritas initialis tanta, quantam corpus acquirit cadendo ex altitudine dimidii radii circuli; pressio totalis cum vi centrifuga erit conspirans atque $= \frac{3gx}{a}$, erit itaque altitudini percursae proportionalis.

DEFINITIO 3.

147. Motus oscillatorius est motus reciprocus, quo corpus alternatim accedit et recedit ab initio motus M. *Ita si corpus super curua* Tabula V. Fig. 2.

MAN

MAN *mouetur, primo descendet super* MA, *tum ascendet in* AN, *donec celeritatem amiserit; deinde ex* N *iterum descendet ascendetque in arcu* AM, *quo facto iterum descendet, hancque periodum continuabit: Atque talis motus oscillatorius vocatur.*

Corollarium 1.

148. Motus oscillatorius ergo consistit in alternis descensibus et ascensibus super linea curua; atque descensu motu accelerato mouetur, ascensu vero celeritatem acquisitam rursus perdit.

Corollarium 2.

149. Quilibet ergo descensus super eadem curuae parte fit, super qua praecedens ascensus contigit. Quare cum celeritas corporis ab altitudine tantum pendeat in vacuo, corpus in eodem curuae puncto siue in ascensu siue in descensu eandem habet celeritatem.

Corollarium 3.

150. Ex quo sequitur tempus descensus per MA, aequale esse tempori ascensus per AM; similique modo tempus ascensus per AN tempori descensus per NA.

Corollarium 4.

151. Corpus in arcu AN ascendens ad punctum N vsque perueniet, quod aeque altum est ac punctum M, ex quo erat delapsum. Sequitur hoc ex eo, quod celeritas per altitudinem tantum determinetur.

Co-

Corollarium 5.

152. Si curua AN similis et aequalis fuerit curuae AM, tum motus per AN aequalis erit motui per AM. Quare omnes ascensus et descensus aequalibus fient temporibus.

Corollarium 6.

153. Si curuae MA, AN fuerint dissimiles, tempus saltem per MAN aequale erit tempori per NAM, seu tempora accessionum et recessionum erunt inter se aequalia.

Corollarium 7.

154. Quia corpus semper ad eandem altitudinem pertinget, manifestum est hunc motum oscillatorium perpetuo durare debere.

Corollarium 8.

155. Curua ergo ad motum oscillatorium producendum apta est omnis curua, quae de puncto infimo A duos habet arcus ascendentes, vt MAN.

Scholion 1.

156. Exposuimus hic proprietates motus oscillatorii, quales ex exposita hypothesi potentiae sollicitantis vniformis et perpetuo deorsum tendentis consequuntur. Eaedem vero quoque locum habent, si potentia vtcunque ab altitudine pendeat, vel etiam ad fixum punctum dirigatur; id quod in sequentibus plenius apparebit. In medio resistente vero res aliter se habet,

I 2 nam

nam neque ascensus per datam curuam similis est descensui per eandem, neque in ascensu corpus ad aequalem altitudinem pertingit ei, ex qua descensu erat delapsum

Scholion 2.

157. Vocari solet motus per MAN itus sequens vero motus per NAM reditus, consistit ergo motus oscillatorius ex alternis itibus et reditibus. Oscillatio vero ab aliis vocatur motus ex itu et reditu constans, ab aliis tam itus quam reditus oscillatio vocatur. Hic priori sensu oscillationis vocem accipiemus, ita vt vna oscillatio ex vno itu vnoque reditu constet. Itus vero atque reditus vterque vno ascensu vnoque descensu consistit, atque ideo integra oscillatio duos ascensus duosque descensus complectetur. Cum igitur tempus itus aequale sit reditus tempori, erit tempus vnius oscillationis duplo maius quam tempus vnius itus seu reditus.

Corollarium 9.

158. In hoc ergo capite, in quo de motu in vacuo agitur, si motum oscillatorium examinare velimus, vel ascensus vel descensus solos super duabus curuae partibus AM, AN considerare opus habebimus.

Scholion 3.

159. Nihil refert vtrum arcus AM et AN vnam curuam continuam constituant, an vero sint diuersae curuae, dummodo in A ita sint con-

iunctae, vt communem habeant tangentem: alias enim motus perturbaretur. Quare ad motum oscillatorium inquirendum tantum opus est, vt motus super curuis AM et AN seorsum definiamus. Sufficit enim hoc tum ad oscillationes determinandas, tum ad relationem inter maiores minoresque oscillationes inueniendam. Vocantur autem eae oscillationes maiores, quae maioribus arcubus absoluuntur, minores vero, quae minoribus.

Scholion 4.

160. Ex Prop. 6. §. 49. perspicitur, quomodo oscillationes ope pendulorum effici queant; scilicet ope euolutae curuarum AM et AN, circum quas filum circumducitur. Ab Hugenio etiam iste pendulorum vsus ad oscillationes accommodatur, vt vel ex eius instituto, quo eo motu ad horologia perficienda vtitur apparet. Eaedem vero difficultates, quas loco cit. commemorauimus, hic locum habent. Quamobrem motum puncti super datis lineis hic tantum inuestigabimus, mentemque ab omnibus pendulorum circumstantiis abducemus, quae nostrum institutum turbare possent.

PROPOSITIO 13.

Problema.

161. *Existente potentia sollicitante uniformi et deorsum directa, determinare tempus ascensus seu descensus per quemuis circuli arcum* EA *in puncto circuli infimo* A *terminatum.* Tabula V. Fig. 3.

I 3 So-

Solutio.

Sit C circuli centrum, erit CA radius verticalis seu parallelus directioni potentiae g. Ponatur $AC=a$, et arcus AE altitudo $AG=b$, erit celeritas in infimo puncto A debita altitudini gb, quia corpus ex E descendens tantam habebit celeritatem, cum in A peruenerit. Atque tantam celeritatem corpus in A habere debet, vt ad E vsque ascendere possit. Consideretur quodvis arcus AE elementum Mm, et dicatur $AP=x$, erit PM $=\sqrt{(2ax-x^2)}$ et $Mm=\frac{adx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$. Celeritas vero in M erit debita altitudini $g.GP=gb-gx$ (93). Tempus igitur, quo elementum Mm siue ascensu siue descensu percurritur, erit $=\frac{adx}{\sqrt{g}\sqrt{(b-x)(2ax-x^2)}}$. Quod quia integrari non potest per series eius integrale exprimemus. Est autem posito $2a=c$,

$$\frac{1}{\sqrt{(b-x)(2ax-x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{bc}}\left(x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1.x^{\frac{1}{2}}(b+c)}{2bc}+\frac{x^{\frac{3}{2}}(3b^2+2bc+3c^2)}{8b^2c^2}\right.$$
$$\left.+\frac{x^{\frac{5}{2}}(5b^3+3b^2c+3c^2+5c^3)}{16b^3c^3}+\text{etc.}\right).$$

Hoc ergo per $\frac{adx}{\sqrt{g}}$ multiplicatum et integratum dat tempus, quo arcus AM absoluitur $=\frac{\sqrt{2ax}}{\sqrt{gb}}\left(1+\frac{x(b+c)}{6bc}+\frac{x^2(3b^2+2bc+3c^2)}{40b^2c^2}+\frac{x^3(5b^3+3b^2c+3bc^2+5c^3)}{112b^3c^3}+\text{etc.}\right)$. Totum vero tempus per arcum EA prodibit, si fiat $x=b$, et ratio perispheriae ad diametrum $=\pi:1$. quo posito habebitur, $\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi b}{8c}+\frac{9\pi b^2}{128c^2}+\text{etc.}\right)$ $=\frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}\left(1+\frac{b}{4c}+\frac{9b^2}{64c^2}+\text{etc.}\right)$. Vbi coefficientes

PVNCTI

tes ... lius vertica- ... Ponatur ... erit cele- ... itudini gb, ... habebit cele- ... tantam ce- ... vt ad E vs- ... uodvis arcus ... x, erit PM ... Celeritas ve- ... $b-gx$ (93). ... siue ascensu ... series eius ... osito $2a=c$, ... oc ergo per ... tempus, quo ... etc.). To- ... odibit, si fiat ... trum $=\pi:1$. ... $\frac{9\pi b^2}{128c^2}$+etc.) ... i coefficien- tes

tes 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{9}{64}$ etc. sint quadrata coefficientium 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$ qui prodeunt si $(1-z)^{-\frac{1}{2}}$ in seriem resoluatur. Ex hac igitur serie tempus vero proxime potest inueniri. Q. E. I.

Corollarium 1.

162. Quo maior igitur arcus EA est, eo maius quoque erit tempus, quo is percurritur. Fit enim posito $b=2a=c$, tempus infinitum; quia corpus descensu semicirculum nequaquam describere potest.

Corollarium 2.

163. *Si igitur corpus oscillatorio motu mouetur in arcu circuli* EAF, erit tempus vnius itus vel reditus duplo maius, quam tempus vnius ascensus vel descensus, quia tempus per ANF aequale est tempori per AMG. Quare vnius itus reditusve tempus, seu tempus dimidiae oscillationis erit $=\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}\left(1+\frac{b}{4c}+\frac{9b^2}{64c^2}+\text{etc.}\right)$. Integra vero oscillatio tempore duplo maiore absoluetur.

Scholion 1.

164. Series haec tempus exprimens statim hoc modo potest inueniri. Temporis elementum in hos factores resoluatur $\frac{adx}{\sqrt{g(bx-xx)}}\times\frac{1}{\sqrt{(2a-x)}}$ horumque posterior tantum in seriem commutetur scilicet hanc $\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1.x}{2.c\sqrt{c}}+\frac{1.3x^2}{2.4c^2\sqrt{c}}+$ etc. posito $2a=c$. Quia autem post integrationem fit $x=b$ erit $\int\frac{dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}=\pi$;

$= \pi$; $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \frac{1\pi b}{2}$; $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \frac{1.3.\pi b^2}{2.4}$; $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \frac{1.3.5.\pi b^3}{2.4.6}$. etc. Ex quibus totum descensus tempus vt ante colligitur $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}} \left(1 + \frac{1b}{4c} + \frac{9b^2}{64c^2} + \frac{225 b^3}{2304c^3} + \text{etc.}\right)$.

Scholion 2.

165. Quo appareat a cuiusnam aequationis constructione summatio seriei $1 + \frac{1b}{4c} + \frac{9b^2}{64c^2} +$ etc. pendeat, pono $\frac{b}{c} = \frac{tt}{1+tt}$ et summam seriei $= e^{\int \frac{q\,dt}{t}}$ denotante e numerum, cuius log. est $= 1$. His positis ex mea series summandi methodo in Comment. Acad. Petrop. Tom. VII. exposita inuenitur sequens aequatio $dq + \frac{q^2 dt}{t} = \frac{t\,dt}{(1+tt)^2}$. Ex qua aequatione, si construi posset, inueniretur, q in t, indeque ipsa summa per t seu per $\frac{b}{c}$ Quia autem aequatio constructionem non admittit in se spectata, apparet eam tamen construi posse, quia summa seriei per tempora in circulo ope quadraturarum assignari potest. Data enim summa seriei ex ea constructio aequationis inuentae sequitur.

Corollarium 3.

166. Si arcus AE, in quo descensus vel ascensus absoluitur, ponitur infinite paruus, tempus per eum tamen non fit infinite paruum. Euanescit enim in expressione temporis tantum b. eritque tempus descensus vel ascensus per arcum AE euanescentem $= \frac{\pi\sqrt{a}}{2\sqrt{g}}$.

Co-

PVNCTI
oscill infini to. temp
num cata ca p
citan riabil arcu bebit
fueri hic per a ra est
finit long To
Co-

Corollarium 4.

167. Iuncta altera circuli parte AF cum AE oscillationes per arcum EAF euanescentem fient infinite paruae, tempore tamen absoluentur finito. Scilicet tempus vnius itus vel reditus seu tempus vnius dimidiae oscillationis erit $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$.

Corollarium 5.

168. Tempora igitur huiusmodi oscillationum infinite paruarum sunt in ratione subduplicata composita ex directa radiorum et reciproca potentiarum sollicitantium.

Corollarium 6.

169. Haec eadem valent, si potentia sollicitans non fuerit vniformis. Nam vtcunque variabilis ponatur, tamen, dum in corpus super arcu infinite paruo motum agit, constantem habebit valorem.

Corollarium 7.

170. Intelligitur, etiamsi curua EAF non fuerit circulus sed curua quaecunque, tum etiam quae hic allata sunt ad oscillationes infinite paruas super hac curua pertinere. Tum vero loco radii a radius osculi huius curuae in puncto infimo A est accipiendus.

Corollarium 8.

171. Huiusmodi oscillationes super arcu infinite paruo EAF efficiuntur ope penduli, cuius longitudo est radius AC. Tempora igitur oscil-

 latio-

lationum infinite paruarum pendulorum sunt directe vt radix quadrata ex longitudine penduli et reciproce vt radix quadrata ex potentia sollicitante.

Corollarium 9.

172. Si curua ANF non fuerit aequalis curuae AME pro oscillationibus infinite paruis radium osculi in A tantum considerare sufficit. Sit is $= \alpha$ erit tempus ascensus per arcum AF infinite paruum $= \frac{\pi\sqrt{2\alpha}}{2\sqrt{g}}$ atque cum tempus descensus per arcum AME euanescentem fit $\frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$ erit tempus vnius itus seu dimidiae oscillationis super curua composita EAE $= \frac{\pi(\sqrt{a}+\sqrt{\alpha})}{\sqrt{2g}}$.

Corollarium 10.

173. Si oscillationes non fuerint infinite paruae super circulo BAD, tempora oscillationum maiora erunt, quo maiores sint oscillationum arcus. Atque si oscillationes tamen sint valde paruae, erit tempus talis oscillationis ad tempus oscillationis infinite paruae vt quadruplum diametri circuli sinu verso arcus percursi auctum ad quadruplum diametri ipsum.

Corollarium 11.

174. Altitudo ex qua corpus eodem tempore ab eadem potentia g sollicitatum descendit, quo fit descensus per arcum EMA infinite paruum est $= \frac{\pi^2 a}{8}$; seu est ad octauam radii partem vt quadratum peripheriae circuli ad quadratum diametri; quam proxime ergo haec altitudo erit $= \frac{5}{4}a$.

Corollarium 12.

175. Super chorda autem arcus EMA corpus descendit tempore eodem, quo per diametrum circuli (102). Quare tempus descensus super chorda infinite parua est ad tempus descensus super arcu respondente vt $\frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$ ad $\frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$ i. e. vt diameter ad quartam peripheriae partem. Atque tempus descensus ex diametro seu dupla penduli longitudine est ad tempus vnius integrae oscillationis infinite paruae ex itu et reditu compositae vt diameter ad peripheriam.

Scholion 3.

176. Si duo arcus circulares AE et FA super quibus coniunctis oscillationes peraguntur non sunt aequales, ope penduli hae oscillationes confici possunt, si in centro K arcus AF clauus infigatur, vt filum CA, postquam arcum EA circa centrum C descripsit, in K retineatur et circa centrum K arcum AF describat. Tabula V. Fig. 4.

PROPOSITIO 19.

Problema.

177. *Data potentia sollicitante inuenire longitudinem penduli infinite paruas oscillationes conficientis, quod singulos itus reditusue vno minuto secundo absoluat.*

 So-

Solutio.

Exiſtente a longitudine penduli quaeſita et g potentia ſollicitante, vnitate vim grauitatis denotante, eſt tempus vnius dimidiae oſcillationis infinite paruae $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$. Haec vero expreſſio vt in minutis ſecundis habeatur, longitudo a in partibus milleſimis pedis Rhenani eſt exprimenda, et formula $\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$ per 250 diuidenda, vt ex primo Libro apparet. Quamobrem habebitur tempus vnius dimidiae oſcillationis $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{250\sqrt{g}}$ minut. ſec. Quare, cum hoc tempus vnum minutum ſecundum eſſe debeat, erit $\pi\sqrt{2a} = 250\sqrt{g}$, atque $a = \frac{31250g}{\pi^2} = 3166\frac{1}{4}g$. part. mill. pedis Rhen. Haec ergo eſt longitudo penduli ſemioſcillationes vno minuto ſecundo abſoluentis. Q. E. I.

Corollarium 1.

178. Longitudines ergo pendulorum eodem tempore oſcillationes peragentium, ſed a diuerſis potentiis ſollicitatorum, ſunt in ipſarum potentiarum ratione.

Corollarium 2.

179. Si potentia ſollicitans g aequalis eſt vi grauitatis 1, qui caſus in oſcillationes in ſuperfiſuperficie terrae factas competit, erit penduli longitudo, quod itus reditusque ſingulos vno minuto ſecundo abſoluit $= 3,16625$ pedum Rhenan. ſeu trium pedum cum ſexta pedis parte.

Scho-

NCTI
aeſita et itatis de- llationis reſſio vt a in par- rimenda, ex pri- tur tem- minut. uatum ſe- g, atque en. Haec nes vno
n eodem a diuerſis potentia-
alis eſt vi 1 ſuperfi- nduli lon- no minu- Rhenan.
Scho-
ea, q quo a 1562 qua c nius r enim porun cunda dinis ninerſ que te nari: milleſi
lis ſe Sumat mas o turque horae, oſcillat Sit iar nutis oſcillat potent pendul

Scholion. 1.

180. Apprime conuenit haec longitudo cum ea, quam Hugenius per experimenta inuenit; ex quo apparet nos in praecedente libro numerum 15625. ſcrup. ped. Rhen. recte pro altitudine, ex qua corpus vi grauitatis ſollicitatum tempore vnius minuti ſecundi delabitur, aſſumſiſſe; ex hoc enim numero fluit numerus 250, per quem temporum expreſſiones diuidi debent, vt minuta ſecunda praebeant. Cum igitur Hugenius longitudinis 3, 166. ped. tertiam partem pro pede vniuerſali haberi velit, quippe cuius longitudo vbique terrarum per obſeruationes poteſt determinari: continebit hic pes vniuerſalis 1055 partes milleſimas pedis Rhenani.

Scholion 2.

181. Obſeruationibus vero hic pes vniuerſalis ſequenti modo commodiſſime determinatur. Sumatur pendulum longitudinis f, quod ad minimas oſcillationes faciendas impellatur, numerenturque eius dimidiae oſcillationes tempore vnius horae, earumque numerus ſit n, ita vt vna ſemioſcillatio abſoluatur tempore $\frac{3600}{n}$ min. ſecund. Sit iam longitudo penduli ſemioſcillationes minutis ſecundis abſoluentis z. Quare cum tempora oſcillationum diuerſorum pendulorum ab eadem potentia ſollicitatorum ſint in ſubduplicata ratione pendulorum (171.); erit $\frac{3600}{n} : 1 = \sqrt{f} : \sqrt{z}$ ideo-

que

que $z = \frac{s^2 f}{12960000}$ et consequenter pes vniuersalis $= \frac{s^2 f}{38880000}$.

Corollarium 3.

182. Pendulum igitur quadruplo longius quam $3166\frac{1}{4}$ scrup. pedis Rhenani semioscillationes duobus minutis secundis absoluet; quia tempora oscillationum sunt in subduplicata ratione longitudinum pendulorum.

Corollarium 4.

183. Cum semidiameter telluris sit 20382230 ped. Rhen. si tantae longitudinis pendulum concipiatur, durabit eius vna semioscillatio 2536 min. secunda. Quare in horis 24 prope 17 oscillationes integras absoluet.

Corollarium 5.

185. Quia tempus dimidiae oscillationis est $\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$, erit tempus integrae oscillationis $\frac{2\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$. At huic tempori aequale est tempus reuolutionis in peripheria circuli radii a a corpore motu libero peractae, quod ad centrum circuli vrgetur vi $=g$, vt ex praeced. Libro apparet. Hanc ob rem tempus vnius oscillationis integrae penduli semidiametro terrae aequalis aequatur tempori, quo corpus proiectum in superficie terrae vnam reuolutionem perageret. Ostendit vero quoque Hugenius corpus hoc modo motum tempore 24 horarum fere 17 reuolutiones esse absoluturum.

Co-

PVNCTI
niuersalis =
pus ... ngius quam
vt 1 ... lationes du-
super ... tempora o-
absol ... e longitudi-
ob g
dului
ficie
long
20382230
lum conci-
2536 min.
oscillatio-
oscill
rizon
nis 1
citan ... lationis est
$\frac{2\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$. At
olutionis in
motu libe-
dupl ... vrgetur vi
go A ... Hanc ob rem
spon ... nduli semi-
$2ax$ ... pori, quo
scilla ... vnam re-
celer ... oque Huge-
et c ... re 24 ho-
re c ... turum.
Co-

Corollarium 6.

186. Cum vis grauitatis sit ad vim qua corpus in superficie solis ad centrum solis vrgetur, vt 1000 ad 41; erit longitudo penduli, quod in superficie solis semioscillationes minuto secundo absoluit $= 77, 226$ ped. Rhenan. Simili modo ob grauitatem in superficie Iouis $= \frac{121}{82}$, tale pendulum longum erit $6, 448$ ped. Atque in superficie Saturni ob grauitatem $= \frac{105}{82}$ talis penduli longitudo erit $4, 054$ ped.

PROPOSITIO 20.
Problema.

Tabula V. Fig. 5.

187. *Si fuerit curua* BAD, *super qua fiunt oscillationes, cyclois circulo diametri* AC *super basi horizontali* BD *descripta; determinare tempus oscillationis per quemque arcum* EAF, *existente potentia sollicitante uniformi et deorsum tendente.*

Solutio.

Sit radius osculi in A nempe $AO = a$, qui est duplum diametri circuli generatoris AC, erit ergo $AC = \frac{1}{2}a$ et posita abscissa $AP = x$, et arcu respondente $AM = s$, erit ex natura cycloidis $s^2 = 2ax$. Sit iam abscissa arcui EAE, qui motu oscillatorio percurritur, respondens $AG = b$, erit celeritas in puncto infimo A debita altitudini gb, et celeritas in M debita altitudini $g(b-x)$. Quare cum sit $ds = \frac{adx}{\sqrt{2ax}}$ erit tempus, quo arcus AM per-

percurritur $= -\int \frac{dx\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}\sqrt{(bx-x^2)}} = \frac{\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}\int \frac{dx}{\sqrt{(bx-xx)}}$. Eſt vero ſi poſt integrationem ponatus $x=b$, quo tempus per totum arcum AE prodeat, $\int \frac{dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \pi$, ſeu peripheria circuli per diametrum diuiſa. Quare tempus vnius aſcenſus vel deſcenſus eſt $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$, et tempus vnius itus vel reditus per arcum EAF erit $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$. Atque tempus vnius integrae oſcillationis erit $= \frac{2\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$. Q. E. I.

Corollarium I.

188. Quia in hanc temporis expreſſionem littera b, quae quantitatem arcus EAF determinat, non ingreditur, omnium oſcillationum tempora, quae ſuper eadem cycloide perficiuntur, ſunt inter ſe aequalia.

Corollarium 2.

189. Tempus ergo vnius cuiusque oſcillationis erit aequale tempori oſcillationis per arculum infinite paruum. At arculus infinite paruus congruit cum arculo circuli radio OA deſcripti. Quare tempus cuiusque oſcillationis ſuper cycloide BAD aequale erit tempori, quo pendulum longitudinis a oſcillationem minimam abſoluit. Id quod etiam ex praecedente Propoſ. elucet, tempus enim minimae oſcillationis penduli a eſt $= \frac{2\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$ (167.), qua eadem formula tempus vnius oſcillationis integrae ſuper cycloide expreſſum inuenimus.

Co-

PVNCTI
Eſt vero
to tempus per
$= \pi$, ſeu pe-
Quare tem-
et tem-
EAF erit $=$
oſcillationis
expreſſionem
F determinat,
am tempora,
itur, ſunt in-
e oſcillationis
arculum infi-
uus congruit
Quare tem-
cloide BAD
longitudinis
quod etiam ex
enim minimae
67.), qua ea-
ionis integrae
Co-
corp eius aequa fuerit oſcill
ad pu iſochr fimo vero
tochr oſcilla Hugen tatem in loc id quo rologi ſus de compe curua petuo reſiſter Tom. I.

Corollarium 3.

190. Si igitur pendulum ita adaptetur, vt corpus oſcillans in cycloide moueatur; omnes eius oſcillationes ſiue fuerint magnae ſiue paruae aequalibus abſoluentur temporibus. Quare ſi AO fuerit $= 3166\frac{1}{4}g$ ſcrup. pedis Rhen. ſingulae ſemioſcillationes minuto ſecundo abſoluentur.

Corollarium 4.

191. Omnes igitur deſcenſus ſuper cycloide ad punctum infimum A ſunt aequitemporanei ſeu iſochroni; item omnes aſcenſus ex puncto infimo A donec celeritas fuerit abſumta. Tempus vero vnius aſcenſus vel deſcenſus eſt $\frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$.

Scholion I.

192. Propter hanc proprietatem cyclois tautochronae nomine appellari ſolet, quia omnes oſcillationes ſuper ea codem tempore abſoluuntur. Hugenius primus hanc eximiam cycloidis proprietatem detexit, ſtatimque cogitauit de cycloide in locum circuli ſubſtituenda in oſcillationibus, id quod in horologiis effecit. Nunc tamen horologiorum artifices hunc oſcillandi modum rurſus deſeruerunt, quod eius vſum nimis exiguum comperuerint. Atque certe in vacuo quaelibet curua oſcillationes iſochronas producit, quia perpetuo eiusdem magnitudinis exiſtunt. In medio reſiſtente vero, quo oſcillationes decreſcunt, cy-

clois

clois hanc proprietatem amittit, ideoque nullius est vtilitatis.

Scholion 2.

Tabula V. Fig. 2.

193. Intelligitur etiam, si duae cycloides AE et AF dissimiles in punctis infimis iungantur, oscillationes super curua composita EAF aequalibus temporibus absolui. Nam cum super vtraque tempora ascensus vel descensus sint constantis quantitatis, etiam summae eorum nempe tempora semioscillationum et integrarum oscillationum inter se erunt aequalia. Sit duplum diametri circuli generantis cycloidem $AF = \alpha$ erit tempus vnius ascensus vel descensus super $AF = \frac{\pi\sqrt{2\alpha}}{2\sqrt{g}}$. Quare itus reditusve super curva composita EAF absoluetur tempore $= \frac{\pi(\sqrt{2a}+\sqrt{2\alpha})}{2\sqrt{g}}$; integra vero oscillatio tempore $\frac{2\pi(\sqrt{a}+\sqrt{\alpha})}{\sqrt{g}}$.

Scholion 3.

194. Ordo requireret, vt antequam ad alias potentiae sollicitantis directiones progrediamur, effectus potentiae, cuius directiones sint adhuc parallelae, sed variabiles euolueremus, motumque corporis a huiusmodi potentia sollicitati super data curua inuestigaremus. Sed cum exempla motum notatu dignum continentia nobis adhuc lateant, atque principia, quorum ope motus super quaque curua cognoscitur, iam sint exposita, pleniorem tractationem eo differemus, vbi curuas sumus

sumus inuestigaturi, super quibus corpus a huiusmodi potentiis sollicitatum, data lege incedat.

PROPOSITIO 21.

Problema

Tabula V. Fig. 6.

196. *Si corpus perpetuo vi quacunque ad centrum fixum C trahatur, atque super data curua AM moueatur; determinare motum corporis super hac linea, et pressionem, quam curua in singulis punctis sustinet.*

Solutio.

Sit corporis celeritas initialis in A debita altitudini b, et puncti A a centro C distantia $AC = a$. Celeritas vero corporis in quocunque curuae loco M debita sit altitudini v, et vis, qua corpus in M versus C sollicitatur sit $= P$, existente vi grauitatis corporis moti $= 1$. Dicatur distantia MC, y, et arcus AM, s; erit elementum $Mm = ds$ et $Mn = -dy$. Centro C describantur arcus circulares MP, mp; erit $AP = a - y$, $Pp = Mn = -dy$. Iam ducta tangente MT in eamque perpendiculo CT, erit $MC : MT = Mm : Mn$; et $MC : CT = Mm : mn$, vnde erit $MT = \frac{-ydy}{ds}$ et $CT = \frac{y\sqrt{(ds^2-dy^2)}}{ds}$. Ex quibus, si vis centripeta in tangentialem secundum MT et normalem secundum MO resolvatur, erit vis tangentialis $= -\frac{Pdy}{ds}$ et normalis $= \frac{P\sqrt{(ds^2-dy^2)}}{ds}$. Ex vi tangentiali ergo habebitur $dv = -Pdy$. Ponatur interuallum AP

$= x$,

$=x$, quo corpus propius ad centrum accessit, erit $a-y=x$ et $dx=-dy$. Quare erit $dv=Pdx$, et si P a distantia MC pendeat, poterit $\int Pdx$ exhiberi. Ita igitur integrali $\int Pdx$ accepto, vt euanescat posito $x=o$, erit $v=b+\int Pdx$. Ex quo tempus per arcum AM erit $=\int\frac{ds}{\sqrt{b+\int Pdx}}$. Vis normalis $\frac{P\sqrt{(ds^2-dy^2)}}{ds}$ tota in pressione curuae secundum MO insumitur. Quo igitur haec commodius exponatur et cum vi centrifuga simul exhibeatur, pono perpendiculum $CT=p$, erit vis normalis $=\frac{Pp}{y}$. Deinde radius osculi MO erit $=\frac{ydy}{dp}$, ex quo habetur vis centrifuga $=\frac{2vdp}{ydy}=\frac{2dp(b+\int Pdx)}{ydy}$, cuius effectus effectui vis normalis est contrarius. Quamobrem curua in M versus MO premetur vi $=\frac{Ppdy-2bdp-2dp\int Pdx}{ydy}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

196. Si igitur vis P a distantia y tantum pendeat, ita vt corpus in aequalibus a centro distantiis aequaliter vrgeatur, celeritas corporis a distantia quoque tantum pendebit, atque corpus super curua AM motum in aequalibus a centro distantiis aequales habebit celeritates.

Corollarium 2.

197. Atque in quouis puncto M celeritas tanta erit, quantam idem corpus acquireret, si eadem celeritate initiali $\sqrt{b}$ ex A per interuallum AP descenderet, existente nimirum $CP = CM$.

Corollarium 3.

198. Etiamsi igitur ipsa curua AM sit incognita; tamen corporis super ea moti in quaque a centro C distantia celeritas potest assignari. Est nempe pro distantia y, $v=b+\int Pdx$, existente $x=a-y$.

Corollarium 4.

199. Si curua AM fuerit talis, vt pressio, quam corpus in eam exercet, sit nulla, erit curua ea ipsa, quam corpus motum in A celeritate $\sqrt{b}$ inchoans libere describeret. Erit itaque pro motu libero $Ppdy = 2bdp + 2dp\int Pdx$. seu ob $dx = -dy$, habebitur $Ppdy + 2dp\int Pdy = 2bdp$. Cuius integralis est $p^2\int Pdy = bp^2 - bb^2$ existente b perpendiculo ex C in tangentem in A demisso. Ex his aequationibus inuenitur $P=\frac{2bb^2dp}{p^3dy}$ uti praeced. Libro pro motu libero inuenimus.

Corollarium 5.

200. In motu igitur super quacunque curua AM, pressio, quam curua in M secundum MO sustinet, est $=\frac{\text{diff. } p^2(b+\int Pdx)}{pydy} = \frac{\text{diff. } p^2(b+\int Pdx)}{pdx(a-x)} = \frac{\text{diff. } p^2v}{Pdx(a-x)}$.

Exemplum 1.

201. Sit curua AM circulus centrum in C habens; erit motus corporis vniformis, propter ean-

eandem eius perpetuo a centro virium C distantiam. Quare erit $v=b$ et $\int P dx = 0$, atque tempus per $AM = \frac{s}{\sqrt{b}} = \frac{AM}{\sqrt{b}}$. Deinde cum sit $y=a$ erit et $p=a$ et $dp = dy$. Quamobrem pressio, quam curua secundum MO seu versus centrum C sustinet, prodibit $= P - \frac{2b}{a}$. Ex quo perspicitur, si fuerit $b = \frac{Pa}{2}$ corpus libere per hunc circulum motum iri.

Exemplum 2.

202. Sit vis centripeta P potestati cuicunque distantiarum y proportionalis seu $P = \frac{y^n}{f^n}$ et curua AM spiralis logarithmica circa centrum C, ita vt sit $p = my$, et $dp = m dy$, atque $ds = \frac{dy}{\sqrt{(1-m^2)}}$. Erit ergo $v = b + \int \frac{y^n dx}{f^n} = \frac{a^{n+1} - y^{n+1} + (n+1) b f^n}{(n+1) f^n}$ atque tempus per arcum $AM = \frac{\sqrt{(n+1) f^n}}{\sqrt{(1-m^2)}}$ $\int \frac{dy}{\sqrt{(a^{n+1} - y^{n+1} + (n+1) b f^n)}}$. Pressio vero, quam curua secundum MO sustinet, erit $= \frac{m(n+3) y^n}{(n+1) f^n}$ $- \frac{2mb}{y} - \frac{2 m a^{n+1}}{(n+1) f^n y}$.

Co-

SV ... PVNCTI
um C distan- , atque tem-
20 ... m sit $y = a$
venerit, ... rem pressio,
numerus ... is centrum C
ti debit ... perspicitur,
merus n ... unc circulum
in C er
204 ... stati cuicun-
nita pre ... eu $P = \frac{y^n}{f^n}$ et
vis cent ... centrum C,
si $n <$ - ... $ds = \frac{dy}{\sqrt{(1-m^2)}}$.
curua vi ... $+ (n+1) b f^n$ / $1) f^n$
205 ... $(n+1) f^n$ / $\sqrt{(1-m^2)}$
trum vi
ad oscilla ... vero, quam
um corpo ... $\frac{m(n+3) y^n}{(n+1) f^n}$
Sit
tiarum a
corporis
M et N
poris si
Co-

Corollarium 6.

203. Corpus igitur cum in centrum C peruenerit, celeritatem habebit finitam, si $n+1$ est numerus affirmatiuus, altitudo enim isti celeritati debita est $\frac{a^{n+1}}{(n+1) f^n} + b$. At si $n+1$ est numerus negatiuus vel etiam $=0$ celeritas corporis in C erit infinite magna.

Corollarium 7.

204. In ipso vero centro corpus vi infinita premetur directione a centro tendente, seu vis centrifuga praeualebit, si fuerit $n > -3$. At si $n < -3$, tunc vis normalis praeualebit, atque curua vi infinita versus centrum premetur.

PROPOSITIO 22.
Problema.

205. *Si corpus perpetuo vi centripeta ad centrum virium* C *trahatur, dataque sit curua* EAF *ad oscillandum idonea, determinare motum oscillatorium corporis super hac curua.* Tabula VI. Fig. 1.

Solutio.

Sit vis centripeta functioni cuicunque distantiarum a centro C proportionalis; erit celeritas corporis in aequalibus a centro C distantiis, vt M et N, eadem. In E vero et F celeritas corporis sit nulla, maxima vero erit in puncto cur-

curuae A centro C proximo, ducaturque recta CAO. Corpus ergo per arcum EAF oscillationes absoluet, ad quas definiendas motum corporis super vtraque curua AE et AF inuestigare sufficit. Sit celeritas corporis maxima, quam habet in A debita altitudini b, et celeritas in quocunque puncto M debita altitudini v. Ponatur distantia CM, cui aequalis sit $CP = y$, et vis centripeta in $M = P$. Sit $CA = a$ et $AP = x$, atque $AG = k$, sumta $CG = CE$, erit $y = a + x$ et $CG = CE = a + k$. Posito arcu $AM = s$, erit tangens MC, quam perpendiculum ex C in eam demissum determinat $= \frac{y\,dy}{ds}$, ideoque vis tangentialis $= \frac{P\,dy}{ds}$, quae motui corporis crescente y est contraria: vnde habebitur $dv = -P\,dy = -P\,dx$ et $v = b - \int P\,dx$; integrali $\int P\,dx$ ita accepto, vt euanescat posito $x = 0$. Si igitur ponatur $v = 0$, dabit ex aequatione $b = \int P\,dx$ valor ipsius x erutus interuallum AG seu k. Tempus ergo, quo arcus AM percurritur, est $= \int \frac{ds}{\sqrt{(b - \int P\,dx)}}$, ex quo tempus per totum arcum AE prodibit, si post integrationem ita institutam, vt integrale euanescat posito $x = k$, seu $\int P\,dx = b$. Simili modo tempus per arcum AF inuenietur, quo igitur inuento summa horum temporum dabit tempus vnius semioscillationis. Q. E. I.

Corollarium 1.

206. Si curua AF similis et aequalis fuerit curuae AE tempora per vtramque erunt aequalia,

urque recta F oscillatio- rum corpo- uestigare suf- , quam ha- ritas in quo- v. Ponatur , et vis cen- $P = x$, atque $+ x$ et CG erit tangens eam demis- angentialis $=$ y est contra- dx et $v = b$ vt euanescat 0, dabit ex erutus inter- quo arcus AM , tempus per integrationem it posito $x =$ mpus per ar- uento summa us semioscilla- aequalis fuerit erunt aequa- lia,

lia, atque ideo tempus vnius semioscillationis aequabitur duplo tempori per AE.

Exemplum 1.

207. Si arcus EAF fuerit infinite paruus, potentia sollicitans P ob distantiam a centro E inuariabilem, erit constans $= g$. Sit radius osculi curuae in A seu $AO = b$, erit AE arcus circuli hoc radio descriptus. At ex natura circuli erit $CT = \frac{a^2 + 2ab - y^2}{2b}$ et $MT = \frac{\sqrt{(4b^2y^2 - a^4 - 4a^3b - 4a^2b^2 + 2a^2y^2 + 4aby^2 - y^4)}}{2b}$. Sed ob $y = a + x$ et x respectu a et b infinite paruum erit $MT = \frac{\sqrt{2abx(a+b)}}{b}$ et $ds = \frac{by\,dy}{\sqrt{2abx(a+b)}} = \frac{b(a+x)\,dx}{\sqrt{2agx(a+k)}} = \frac{dx\sqrt{ab}}{\sqrt{2(a+b)x}}$. At cum sit $v = b - gx$, ideoque $b = gk$; habebimus $v = g(k - x)$ atque elementum temporis $= \frac{dx\sqrt{ab}}{\sqrt{2g(a+b)(kx - x^2)}}$. At $\int \frac{dx}{\sqrt{(kx - x^2)}}$ posito $x = k$ fit $= \pi$ peripheriae circuli existente diametro 1. Consequenter tempus per arcum AE infinite paruum est $= \frac{\pi\sqrt{ab}}{\sqrt{2g(a+b)}} = \frac{\pi\sqrt{2ab}}{2\sqrt{g(a+b)}}$.

Corollarium 2.

208. Si centrum virium infinite distet, vt esset $a = \infty$ erit potentiae directio sibi parallela, ideoque vt supra erit tempus, quo arcus AE absoluitur $= \frac{\pi\sqrt{2b}}{2\sqrt{g}}$. At si arcus circuli EA sit linea recta, seu $b = \infty$, erit tempus per EA $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$.

Corollarium 3.

209. Si ergo hic casus comparetur cum oscillationibus penduli a potentia g quoque sed directiones sibi parallelas habente sollicitati, erit penduli isochroni longitudo $= \frac{ab}{a+b}$. Tempus enim vnius descensus seu ascensus huius penduli est $= \frac{\pi\sqrt{2ab}}{2\sqrt{g(a+b)}}$ (166.).

Exemplum 2.

Tabula VI. Fig. 4.

210. Sit iam vis centripeta potestati cuicunque distantiarum proportionalis seu $P = \frac{y^n}{f^n}$, et linea EF recta. Erit $AM = s = \sqrt{(y^2 - a^2)}$ et $x = y - a$. Erit autem porro $x = b - \int \frac{y^n dy}{f^n} = b + \frac{a^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1) f^n}$; positoque $v = o$ fiet $y^{n+1} = a^{n+1} + (n+1) bf^n = (a+k)^{n+1}$. Vel dicta $CE = c$ erit $b = \frac{c^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1) f^n}$, et $v = \frac{c^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1) f^n}$. Consequenter ob $ds = \frac{y\,dy}{\sqrt{(y^2 - a^2)}}$ habebitur tempus per $AM = \int \frac{y\,dy \sqrt{(n+1) f^n}}{\sqrt{(y^2 - a^2)(c^{n+1} - y^{n+1})}}$. Quod integrale ita est accipiendum, vt fiat $= o$ posito $y = a$. Tumque facto $y = c$ habebitur tempus per lineam EA. Semioscillatio vero seu motus per EAF aequabitur duplo huius temporis.

Co-

PVNCTI
tur cum oscil-
que sed dire-
ti, erit pen-
Tempus enim
enduli est =
testati cuicun-
et li-
et
$= b +$
$y^{n+1} = a^{n+1}$
dicta CE =
ebitur tempus
Quod in-
$= o$ posito y
tempus per
motus per
ris.
Co-

Corollarium 4.

211. Ponatur vis centripeta distantiis proportionalis seu $n = 1$ erit tempus per $AM = \int \frac{y\,dy\sqrt{2f}}{\sqrt{(y^2 - a^2)(c^2 - y^2)}}$ seu posito $AE = i$ ob $c^2 = a^2 + i^2$ et $y^2 = a^2 + s^2$ erit tempus per $AM = \int \frac{ds\sqrt{2f}}{\sqrt{(i^2 - s^2)}}$, vnde tempus per AE erit $= \frac{\pi\sqrt{2f}}{2}$. Omnes igitur oscillationes super hac recta absoluuntur eodem tempore, dimidia nimirum oscillatio tempore $\pi\sqrt{2f}$ conficietur.

Corollarium 5.

212. Si oscillatio est infinite parua, tempus vnius semioscillationis super recta erit quoque $\pi\sqrt{2f}$, at cum vis centripeta tum vt constans considerari possit, sit ea $= g$, erit $\frac{a}{f} = g$, ideoque tempus vnius semioscillationis $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$ vt supra §. 208.

Corollarium 6.

213. Quia directiones grauitatis reuera conuergunt ad centrum terrae, corpus in superficie telluris super recta perfecte horizontali oscillationes peragere posset, nisi resistentia et frictiones impedirent. Tempus autem vnius semioscillationis talis foret (ob a = semid. terrae et $g = 1$) 2537. minut. secund. (183.)

M 2 PRO-

PROPOSITIO 23.

Problema.

Tabula VI. Fig. 3.

214. *Si corpus sollicitetur a duabus quibuscunque potentiis, quarum alterius directio sit verticalis MQ, alterius horizontalis MP: definire motum corporis ab istis viribus sollicitati super data curua AMB.*

Solutio.

Sit celeritas in B nulla, in M debita altitudini v. Vis sollicitans secundum MQ sit $= P$, et ea secundum $MP = Q$. Ponatur $BR = t$, $RM = z$, arcus $BM = w$, quas litteras ad descensum corporis ex quiete ex B adhibebimus. At pro ascensu ex A quacunque cum celeritate initiali, qui motus ad oscillationes referetur, sit $AP = x = QM$; $PM = AQ = y$ et arcus $AM = s$, celeritas vero corporis in A debita sit altitudini b; erit ergo $t + x =$ const. item $z + y =$ const. et $w + z =$ const. vnde $dt + dx = o$ et $dw + dz = o$. Resolutis potentiis P et Q in normales et tangentiales erit vis tangentialis ex P orta $= \frac{Pdt}{dw}$ et vis normalis ex P orta $= \frac{Pdz}{dw}$ trahens secundum MN. Deinde erit vis tangentialis ex Q orta $= \frac{Qdz}{dw}$ et normalis ex $Q = \frac{Qdt}{dw}$ quae illi normali est contraria. Vtraque vis tangentialis motum per BM accelerat, ideoque erit $dv = Pdt + Qdz$, et $v = \int Pdt + \int Qdz$ his integralibus ita acceptis, vt euanescant factis t et $z = o$. Atque pro ascensu ex A erit $v = b - \int Pdx - \int Qdy$, his integralibus ita sumtis, vt euanescant positis x et $y = o$. Positis igitur in illa aequatione $v = \int Pdt + \int Qdz$, $t = BD$ et $z = AD$ fiet $v = b$. Quare tempus per BM erit $= \int \frac{dw}{\sqrt{(\int Pdt + \int Qdz)}}$ et tempus per $AM = \int \frac{ds}{\sqrt{(b - \int Pdx - \int Qdy)}}$. Sumto elemento dt vel dx constante erit radius osculi curuae in $M = \frac{dw^3}{dt\, ddz}$, atque vis centrifuga cuius directio secundum MN est $= \frac{2\, dt\, ddz (\int Pdt + \int Qdz)}{dw^3}$. Totalis ergo vis, qua curua in M secundum MN premitur est $= \frac{Pdz - Qdt}{dw} + \frac{2\, dt\, ddz (\int Pdt + \int Qdz)}{dw^3}$. Q.E.I.

Corollarium I.

215. Si P est functio ipsius x vel t, quaecunque, et Q functio ipsius y vel z quaecunque; tam Pdx quam Qdy integrari poterunt; atque ideo celeritas v poterit exhiberi, et ope aequationis pro curua tempus quoque.

Corollarium 2.

216. Quia quaecunque et quotcunque potentiae sollicitantes, si modo earum directiones sint in eo plano, in quo est curua AMB, in huiusmodi duas potentias possunt resolui, haec propositio latissime patet et omnes casus complectitur, quibus potentiarum directiones et curua sunt in eodem plano.

Scho-

Scholion.

217. Patet etiam haec propoſitio latius, ſi pauca adiiciantur, et comprehendit caſus, quibus non omnes potentiarum directiones ſunt in plano curuae. Tum enim hae potentiae in binas ſunt reſoluendae, quarum alterae ſint in ipſo curuae plano, alterae ad hoc planum normales. Illae igitur in plano curuae ſitae eodem modo, quo in propoſitione vſi ſumus, tractatae dabunt accelerationem corporis et preſſionem ſecundum MN: alterae potentiae, quia normales ſunt in curuam, in curua premenda tantum inſumentur. Quare hinc duplex naſcetur preſſio, quam curua ſuſtinet, altera ſecundum MN directa, altera ad planum curuae normalis. Harum igitur duarum preſſionum, ſi media ſumatur directio prodibit directio potentiae aequiualentis, in qua curua premitur. Quamobrem non eſt opus, vt huiusmodi caſus euoluamus, ſed paucis attingemus motum corporum ſuper curua, quae ipſa non eſt in plano ſita, vbi potentiam ſollicitantem conſtantem et deorſum tendentem ponemus.

PROPOSITIO 24.

Problema.

Tabula VI. Fig. 4. 218. *Exiſtente potentia ſollicitante vniformi, eiusque directione recta deorſum tendente, determinare motum corporis ſuper curua quacunque* AM *non in eodem plano conſtituta.*

So-

Solutio.

Sit curua AQ proiectio curuae AM in plano horizontali, demiſſisque ex punctis quibusque proximis M et m in hoc planum perpendiculis MQ et mq, ducantur ad axem pro lubitu aſſumtum AP normales QP et qp; ponanturque $AP = x$, $PQ = y$, et $QM = z$. Sit corporis celeritas in A debita altitudini b, celeritas in M debita altitudini v. Potentia vero ſit $= g$, qua corpus in M ſecundum MQ ſollicitatur. Ducta tangente MT, et in eam ex Q perpendiculari QT, reſoluatur potentia g in tangentialem et normalem. Erit ob $MQ : MT = \sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)} : dz$ vis tangentialis $\frac{g\,dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Atque ob $MQ : QT = \sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)} : \sqrt{(dx^2+dy^2)}$ vis normalis $= \frac{g\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$; Quia autem vis tangentialis motum retardat erit $dv = -g\,dz$ et $v = b - gz$, vnde tempus, quo arcus AM abſoluetur, prodit $= \int \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{\sqrt{(b-gz)}}$. Vis normalis vero efficiet, vt curua in M a corpore tanta vi prematur iuxta directionem ad Mm normalem et in plano QMmq ſitam. Premitur vero curua praeterea a vi centrifuga ſecundum directionem poſitioni radii oſculi oppoſitam vi $= \frac{2(b-gz)}{r}$, deſignante r radium oſculi curuae in M. Inuenimus autem ſupra §. 71. poſitionem radii oſculi, ex qua proinde directio vis centrifugae innoteſcit. Quantitas vero vis centrifugae dabitur ex radio oſculi, qui §. 72. eſt inuentus; eſt nempe $r = \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx^2(ddy^2+ddz^2)+(dyddz-dzddy)^2)}}$. Q. E. I.

Co-

Corollarium I.

219. Celeritas igitur corporis hoc quoque casu ab altitudine tantum pendet. Atque celeritas in M tanta est, quantam corpus per QM ascendens cum celeritate in Q altitudini b debita in M haberet.

Corollarium 2.

220. Non poterit ergo corpus ad maiorem altitudinem ascendere, quam ad $\frac{b}{g}$. Nam si est $b-gz=0$, corpus in ea altitudine omnem celeritatem amisit, iterumque descendet.

Corollarium 3.

221. Intelligitur etiam, si potentia non constans fuisset accepta, sed variabilis P; tum inuentam fuisse celeritatem in M debitam altitudini $b - \int P dz$.

Scholion I.

Tabula VI. Fig. 5. 222. Si in plano verticali concipiatur curua AM ad axem horizontalem AQ relata; fueritque AQ = curuae AQ praec. Fig. et QM = QM praec. Fig. erit quoque curua AM aequalis curuae AM praec. Fig. Si iam corpus super curua AM ascendat celeritate initiali in A debita altitudini b, et ab eadem potentia g sollicitatum, habebit in M quoque celeritatem altitudini $b-gz$ debitam. Atque ideo tempus quoque ascensus per AM congruet cum tempore ascensus per AM in praeced. Fig. Hac igitur ratione motus corporis super curua non in eodem plano sita reduci potest ad motum super curua

PUNCTI
curu hoc quoque ipso Atque celeri- hae er QM ascen- obr debita in M mar
cor ad maiorem cum Nam si est pref nnem celeri- haec gred reliq tia non con- ta si tum inuen- tia altitudini $b -$ per bina niun
piatur curua a; fueritque = QM praec. curuae AM a AM ascen- dini b, et ab t in M quo- tam. Atque M congruet praeced. Fig. er curua non notum super curua
sum super vert curu licita To.

curua in eodem plano posita. Inter motus enim ipsos nullum erit discrimen; at pressiones, quas hae duae curuae sufferunt, erunt diuersae. Quamobrem hoc modo pressio vt libet poterit variari manente motu corporis super curua eodem.

Scholion 2.

223. Posuimus hactenus curuam, super qua corpus mouetur, et potentiam sollicitantem vna cum directione datas, ex iisque motum corporis et pressionem curuae deduximus. Nunc igitur cum haec sufficere possint, ad alias quaestiones progrediemur, in quibus alia pro datis accipiuntur, reliquaque sunt inuenienda. Et primo quidem data sit pressio in singulis curuae punctis et potentia sollicitans; ex quibus ipsa curua et motus super ea debeat inueniri. Deinde aliis factis combinationibus inter eas res, quae in computum veniunt, alias quaestiones formabimus.

PROPOSITIO 25.

Problema.

224. *Si corpus a quacunque vi perpetuo deorsum trahatur; inuenire curuam AM, quam corpus super ea descendens vbique aequaliter premit.* Tabula VII Fig. 1.

Solutio.

Sit AM curua quaesita, dicatur super axe verticali abscissa $AP = x$, applicata $PM = y$ et curua $AM = s$. Sit porro vis corpus in M sollicitans $= P$; et altitudo debita celeritati in $A = b$;

 erit

erit altitudo debita celeritati in $M = b + \int P dx$, integrali $\int P dx$ ita sumto, vt euanescat facto $x = 0$. His positis erit pressio, quam curua secundum normalem MN sustinet (83) $= \frac{P dy}{ds} + \frac{2(b + \int P dx)\, dx\, ddy}{ds^3}$, sumto elemento dx pro constante. Iam cum haec pressio debeat esse constans, ponatur ea $= k$, erit $k ds^3 = P ds^2 dy + 2b dx ddy + 2 dx ddy \int P dx$. At si ponatur ds constans, habebitur $k ds dx = P dx dy + 2b ddy + 2 ddy \int P dx$, cuius integralis est $\frac{2 dy \sqrt{(b + \int P dx)}}{ds} = \int \frac{k dx}{\sqrt{(b + \int P dx)}}$. Quae aequatio cum P per x detur, construi potest; quia y in eam non ingreditur sed tantum dy. Q. E. I.

Corollarium 1.

225. Exprimit $\int \frac{dx}{\sqrt{(b + \int P dx)}}$ tempus, quo corpus ex A celeritate initiali eadem, qua per AM mouetur, per altitudinem AP delabitur, et $\sqrt{(b + \int P dx)}$ dat celeritatem in eodem loco. Quare celeritas haec in P per tempus per AP diuisa, dat $\frac{k ds}{2 dy}$, ex qua proprietate curua AM determinatur.

Corollarium 2.

226. Tempus autem per AP quantitate constante quacunque puta $\sqrt{c}$ potest augeri. Hacque quantitate constante angulus, quem curua in A cum AP constituit, determinatur. Erit scilicet sinus huius anguli $= \frac{k \sqrt{c}}{2 \sqrt{b}}$ posito sinu toto $= 1$. Quare $\sqrt{c}$ maior non potest accipi quam $\frac{2 \sqrt{b}}{k}$; ideoque

U PVNCTI
$= b + \int P dx$, que si
scat facto $x = 0$. $= 0$.
urua secundum $\frac{2(b + \int P dx)\, dx\, ddy}{ds^3}$,
Iam cum haec ur ea $= k$, erit
x. At si po- de hal
$= P dx dy + 2b$ $= kds$
$\frac{2 dy \sqrt{(b + \int P dx)}}{ds} =$
per x detur, sequens
ingreditur sed Sit $\sqrt{(}$ et dx
integra $= 0$, tum iectum $b = 0$, seu lin tio $k = g$
us, quo cor-
, qua per AM
tur, et $\sqrt{(b +}$
o. Quare ce-
P diuisa, dat
leterminatur.
licitanti integral Constan $= 0$, d stituto $b = \sqrt{a}$ $(b + gx)$ tio pro
quantitate con-
igeri. Hacque
m curua in A
Erit scilicet si-
oro $= 1$. Qua-
am $\frac{2\sqrt{b}}{k}$; ideo-
que

que si motus in A a quiete incipit c debet esse $= 0$.

Exemplum.

227. Sit potentia vniformis seu $P = g$, erit $\int \frac{k dx}{\sqrt{(b + gx)}} = \frac{2k \sqrt{(b + gx)} - 2k \sqrt{b} + 2k \sqrt{c}}{g} = \frac{2 dy \sqrt{(b + gx)}}{ds}$, vnde habetur $\frac{dy}{ds} = \frac{k}{g} + \frac{k(\sqrt{c} - \sqrt{b})}{g \sqrt{(b + gx)}}$ atque $g dy \sqrt{(b + gx)} = k ds \sqrt{(b + gx)} + k ds (\sqrt{c} - \sqrt{b})$. Ex qua oritur sequens aequatio $dy = \frac{k dx (\sqrt{(b + gx)} + \sqrt{c} - \sqrt{b})}{\sqrt{(g^2 (b + gx) - k^2 (\sqrt{(b + gx)} + \sqrt{c} - \sqrt{b})^2)}}$. Sit $\sqrt{(b + gx)} = t$ et $-\sqrt{c} + \sqrt{b} = b$, erit $x = \frac{t^2 - b}{g}$ et $dx = \frac{2 t dt}{g}$. His igitur substitutio habebitur $dy = \frac{2 k t dt (t - b)}{g \sqrt{(g^2 t^2 - k^2 t^2 + 2 k^2 b t - k^2 b^2)}}$. Haec aequatio tribus casibus integrationem admittit, quorum primus est, si $k = 0$, tum enim inuenitur curua, quam corpus in A proiectum libere describit. Alter est casus, quando $b = 0$, seu $\sqrt{b} = \sqrt{c}$, tum enim habetur $\frac{dy}{ds} = \frac{k}{g}$, seu linea satisfaciens erit recta inclinata. Si tertio $k = g$, seu si tota pressio aequatur vbique vi sollicitanti corpus g; erit $dy = \frac{2 tt dt - 2 bt dt}{g \sqrt{(2bt - b^2)}}$, cuius integralis est $gy = \frac{(2tt - 2bt - 2b^2)}{5b} \sqrt{(2bt - b^2)} +$ const. Constans haec, quia posito $x = 0$ seu $t = \sqrt{b}$, fit $y = 0$, debet esse $= \frac{(2b^2 + 2b\sqrt{b} - 2b)}{5b} \sqrt{(2b\sqrt{b} - b^2)}$. Restituto ergo $\sqrt{(b + gx)}$ loco t et posito $\sqrt{b} - \sqrt{c} = b = \sqrt{a}$ habebitur $\frac{5 g y \sqrt{a}}{2} = (b + gx - a \sqrt{a(b + gx)}) \sqrt{(2\sqrt{a}(b + gx) - a)} + (a - b + \sqrt{ab}) \sqrt{(2\sqrt{ab} - a)}$. Quae est aequatio pro curua quaesita, in qua a debet esse numerus mi-

minor quam b. Si corpus ex quiete cadere debet, alia linea praeter rectam non satisfacit. Debet enim esse $c = o$, vt angulus ad A sit realis, et propterea habetur $y = \frac{kx}{\sqrt{(g^2 - k^2)}}$.

Corollarium 3.

228. Aequatio algebraica inuenta, si ab irrationalitate liberetur, fit ordinis quinti. Si in ea ponatur $a = b$, quo casu curuae tangens in A est verticalis; prodibit $\frac{5\, gy\sqrt{a}}{2} = (gx - \sqrt{(a^2 + gax)}) \sqrt{(2\sqrt{(a^2 + gax)} - a)} + a\sqrt{a}$.

Corollarium 4.

229. Si generaliter tangens in A debeat esse verticalis, erit $\sqrt{c} = o$, atque ideo prodibit ista aequatio $dy = \frac{kdx(\sqrt{(b+gx)} - \sqrt{b})}{\sqrt{(g^2(b+gx) - k^2(\sqrt{(b+gx)} - \sqrt{b})^2)}}$. Si tangens in A ponatur horizontalis erit $k\sqrt{c} = g\sqrt{b}$ habebiturque haec aequatio $dy = \frac{dx(k\sqrt{(b+gx)} + (g-k)\sqrt{b})}{\sqrt{(g^2(b+gx) - (k\sqrt{(b+gx)} + (g-k)\sqrt{b})^2)}}$.

Scholion.

230. Vocatur haec curua linea aequabilis pressionis, eiusque solutio extat in Comment. Acad. Paris. quae cum hac nostra egregie conuenit. Ceterum ex solutione constat, si potentia non fuerit constans, sed vtcunque variabilis P, aequationem inuentam nihilominus integrationem admittere, si pressio in curuam ipsi P debeat esse proportionalis. Erit enim $k = mP$ atque pro curua quaesita prodibit

te cadere debet ... satisfacit. De- ... sit realis, et ... ta, si ab irrationalitate ... quinti. Si in ... tangens in A ... $-\sqrt{(a^2+gax)})$ ... A debeat esse ... prodibit ista ... Si tangens $= g\sqrt{b}$ habe- ... aequabilis pressionis ... mment. Acad. conuenit. Ce- ... tia non fuerit aequationem admittere, si proportiona- ... quaesita pro- dibit

dibit sequens aequatio $\frac{2dy\sqrt{(b+\int Pdx)}}{ds} = \int \frac{mPdx}{\sqrt{(b+\int Pdx)}}$, cuius integralis est $dy\sqrt{(b+\int Pdx)} = mds\sqrt{(b+\int Pdx)} + mds\sqrt{c}$. Haec aequatio, si fuerit $c = o$ erit pro linea recta ad horizontem inclinata. At per $\sqrt{c}$ definitur angulus, quem curua in A cum verticali constituit, eius enim sinus est $m + \frac{m\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$. Quare si sumatur $\sqrt{c} = -\sqrt{b}$ curua tanget in A verticalem. Praeterea haec curua hanc habet proprietatem, vt tempus, quo arcus AM percurritur proportionale sit $m.\mathrm{AM} - \mathrm{PM}$. Denique ex solutione huius propositionis fluit solutio sequentis, in qua ex data curua et pressione aequabili quaeritur quantitas potentiae deorsum tendentis.

PROPOSITIO 26.

Problema.

231. *Data curua* AM *et celeritate initiali in* A *debita altitudini* b, *inuenire quantitatem potentiae perpetuo deorsum tendentis, quae faciat, vt corpus super curua* AM *descendens curuam vbique aequaliter premat.* Tabula VII. Fig. 1.

Solutio.

Sit potentia sollicitans quaesita $= \mathrm{P}$, dictisque $\mathrm{AP} = x$, $\mathrm{PM} = y$, et $\mathrm{AM} = s$, atque pressione, quam curua sustinet $= k$; habebitur ista aequatio $kds\, dx = \mathrm{P}dx\, dy + 2bddy + 2ddy \int \mathrm{P}dx$ (224) in qua ds est elementum constans. Ex hac igitur aequatione quantitatem P erui oportet. Aequatio autem

 per

per dy multiplicata et integrata dat $kds \int dx\,dy = dy^2 \int P dx + b dy^2$, ex qua prodit $\int P dx + b = \frac{kds}{dy} \int dx\,dy$; quae differentiata dat $P = \frac{kds}{dy} - \frac{2kds\,ddy}{dx\,dy^2} \int dx\,dy$. At integrale $\int dx\,dy$ ita est sumendum, vt posito $x = o$ fiat $\frac{kds}{dy^2} \int dx\,dy = b$. Quo autem haec integratio facilius succedat, ponatur $dy = pdx$: erit $ds = dx\sqrt{(1+p^2)}$, et $\int dx\,dy = ds \int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}$, ideoque $\frac{kds}{dy^2} \int dx\,dy = \frac{k(1+pp)}{p^2} \int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}$. Ex qua aequatione prodibit $P = \frac{k\sqrt{(1+pp)}}{p} - \frac{2kdp}{p^3 dx} \int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}$. Q. E. I.

Corollarium I.

232. Ex hac aequatione quoque statim celeritas corporis in singulis punctis habetur; altitudo enim debita celeritati corporis in M est $b + \int P dx = \frac{kds}{dy^2} \int dx\,dy = \frac{k(1+pp)}{p^2} \int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}$. Tempus vero, quo arcus AM absoluitur, est $= \frac{1}{\sqrt{k}} \int p dx : \sqrt{\int \frac{pdx}{\sqrt{(1+p^2)}}}$.

Corollarium 2.

233. Perspicuum est ex aequatione inuenta, quantitatem potentiae P eo fore maiorem, quo maior sit k, ceteris paribus; variabilis enim eius valor ductus est in pressionem k.

Corollarium 3.

234. Etsi vero non videatur potentia P a celeritate initiali b pendere, quia in expressione b non

SUPI … UNCTI
b non ine … $\int dx\,dy =$ … $+ b = \frac{kds}{dy}$ … $- \frac{2kds\,ddy}{dx\,dy^2}$ … ndum, vt … utem haec … $= pdx$: erit … , ideoque … aequatione … Q. E. I.
235. … et axem h … Erit ergo … atim cele- … r; altitu- … d est $b +$ … ipus vero, … inuenietur … go puncto … merator eni … valor istius … e inuenta, … rem, quo … non potest … videatur ex … enim eius … habet valore … $\int dx\,dy$ red … ergo b ab a … pressione … tentia P a … expressione … autem prod … b non

b non inest, tamen pendet P ab b ob integrale $\int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}$, quod ita est accipiendum, vt posito $x = o$, fiat $\frac{k(1+pp)}{p^2} \int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}} = b$. Variata ergo celeritate initiali alia prodit potentia sollicitans, tametsi curua proposita eadem maneat.

Exemplum I.

235. Sit curua AM parabola in A verticem et axem horizontalem habens; ita vt sit $ay = x^2$. Erit ergo $dy = \frac{2xdx}{a}$, hincque $p = \frac{2x}{a}$, et $\int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}} = \int \frac{2xdx}{\sqrt{(a^2+4x^2)}} = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+4x^2)} + C$. Quare erit $\frac{k(2+pp)}{p^2} \int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{k(a^2+4x^2)^{\frac{3}{2}}}{8x^2} + \frac{kC(a^2+4x^2)}{4x^2}$. Quae quantitas cum debeat esse $= b$, si sit $x = o$, erit $C = -\frac{a}{2}$, seu $\int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{\sqrt{(a^2+4x^2)} - a}{2}$. Ex quibus inuenietur $P = \frac{ka^3}{4x^3} - \frac{k(a^2-2x^2)\sqrt{(a^2+4x^2)}}{4x^3}$. In ipso ergo puncto A potentia P erit infinite parua, tam numerator enim, quam denominator euanescunt, fitque valor istius expressionis $= o$. Celeritas vero in A non potest esse arbitraria, etiamsi constans C videatur ex b determinata. Nam C talem tantum habet valorem, qui expressionem $b + \int P dx = \frac{kds}{dy^2} \int dx\,dy$ reddat finitae magnitudinis. Pendebit ergo b ab a eiusque valor inuenietur, si in expressione $\frac{k(a^2+4x^2)^{\frac{3}{2}} - ka(b^2+4x^2)}{8x^2}$, ponatur $x = o$. Tum autem prodibit $b = \frac{ka}{4}$. Hac ergo celeritate descensus

ſus incipere debet, vt preſſio vbique aequalis a potentia P inuenta oriatur.

Exemplum 2.

236. Sit curua AM circulus radii a tangens rectam AP in A, erit $y = a - \sqrt{(a^2 - x^2)}$ et $p = \frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ atque $\sqrt{(1+pp)} = \frac{a}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$. Fiet ergo $\int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}} = \int \frac{xdx}{a} = \frac{x^2}{2a}$, ad quod conſtantem addere non licet, quia $\frac{1+pp}{pp} = \frac{a^2}{x^2}$ fit infinitum euaneſcente x. Erit ergo $k \frac{(1+pp)}{pp} \int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{ka}{2} = b + \int pdx$, quare celeritas corporis erit vniformis, ideoque potentia ſollicitans euaneſcit. Perſpicuum enim eſt corpus a nulla potentia ſollicitatum in peripheria circuli aequabiliter progredi, eiusque vim centrifugam eſſe vbique eiusdem magnitudinis.

Exemplum 3.

237. Sit curua AM cyclois baſin habens horizontalem et cuſpide tangens verticalem AP in A; ita vt ſit $dy = \frac{dx\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2-2ax)}}$. Habetur ergo $p = \frac{\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2-2ax)}}$ et $\sqrt{(1+pp)} = \frac{a}{\sqrt{(a^2-2ax)}}$. Quare erit $\int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}} = \int \frac{dx\sqrt{2ax}}{a} = \frac{2x\sqrt{2x}}{3\sqrt{a}} + C$ et $\frac{k(1+pp)}{pp} = \frac{ka}{2x}$. Sumta ergo conſtante C finitae magnitudinis fit $b = \infty$, quare fiat $C = 0$, erit $b + \int Pdx = \frac{k\sqrt{2ax}}{3}$, et $b = 0$, Prodibit igitur $P = \frac{k\sqrt{a}}{3\sqrt{2x}}$. Si itaque corpus ſuper cycloide AM ex A deſcendat ex quiete et ſollicitetur

SV PVNCTI
que aequalis a
citetur
radix
curuam
dii a tangens
23) et $p = \frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$
tem $\sqrt{}$ ergo $\int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}$
admodu ıddere non li-
$\frac{1+pp}{pp}$ fi euaneſcente x.
integrat $= b + \int pdx$,
ipſo de mis, ideoque
debeat ſpicuum enim
curua ir atum in peri-
tum po , eiusque vim
quod in agnitudinis.
ſit arbit
ſin habens ho-
calem AP in A;
go $p = \frac{\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2-2ax)}}$
235 erit $\int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}} =$
ſum tra $= \frac{ka}{2x}$. Sumta
corpus it nis fit $b = \infty$,
ſtinet, d $\frac{k\sqrt{2ax}}{3}$, et $b = 0$,
normali corpus ſuper
De uiete et ſolli-
titudini citetur
Tom. II.

citetur deorſum a potentia, quae reciproce eſt vt radix quadrata ex abſciſſa AP, corpus vbique curuam aequali vi premet.

Scholion.

238. Dantur igitur caſus, quibus celeritatem $\sqrt{b}$ non pro lubitu aſſumere licet, quemadmodum in his exemplis euenit. Quoties enim $\frac{1+pp}{pp}$ fit infinite magnum facto $x = 0$, conſtans in integratione ipſius $\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}$ addenda plerumque hoc ipſo determinatur, quod celeritas initialis non debeat eſſe infinite magna. Semper autem, ſi curua in A tangit rectam AP, fit $\frac{1+pp}{pp}$ infinitum poſito $x = 0$, id quod in cauſa etiam eſt, quod in exemplis allatis celeritas initialis non ſit arbitraria.

PROPOSITIO 27.

Problema.

239. *Si corpus a quacunque vi perpetuo deorſum trahatur; inuenire curuam AM, ſuper qua corpus ita mouetur, vt tota preſſio, quam curua ſuſtinet, datam habeat rationem ad preſſionem a vi normali ortam.* Tabula VII. Fig. 1.

Solutio.

Deſcendat corpus ex A celeritate debita altitudini b, et poſito AP $= x$, PM $= y$, AM $= s$, ſit fit potentia corpus in M follicitans $=$P, erit altitudo debita celeritati, quam corpus in M habet, $=b+\int Pdx$. Tota vero pressio quam curua in M secundum directionem normalis MN, sustinet $= \frac{Pdy}{ds} + \frac{2ddy(b+\int Pdx)}{dxds}$ sumto ds pro elemento constante. Iam habeat se haec pressio ad vim normalem $\frac{Pdy}{ds}$ vt m ad 1; erit $(m-1)Pdxdy = 2ddy(b+\int Pdx)$; quae est aequatio pro curua quaesita. Haec vero reducetur ponendo v loco $b+\int Pdx$, ad hanc formam $\frac{(m-1)dv}{v} = \frac{2ddy}{dy}$, quae integrata dat $2\, l\frac{dy}{ds} = (m-1)\, l\frac{v}{a}$, seu $v^{\frac{m-1}{2}} ds = a^{\frac{m-1}{2}} dy$. Ex qua habebitur $dy = \frac{v^{\frac{m-1}{2}} dx}{\sqrt{(a^{m-1}-v^{m-1})}}$

$$= \frac{dx(b+\int Pdx)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{(a^{m-1}-(b+\int Pdx)^{m-1})}},$$ quae est aequatio pro curua quaesita. Q. E. I.

Corollarium 1.

240. Celeritas corporis ibi est nulla, vbi $\frac{dy}{ds} = 0$, seu vbi curuae tangens est verticalis, si quidem $\frac{m-1}{2}$ fuerit numerus positiuus, seu si m maior fuerit vnitate. In his igitur casibus curuam in A tangere ponemus rectam AP, et celeritatem initialem seu $b=0$.

Co-

SV TU PUNCTI
s $=$P, erit al-
241 ius in M ha-
ior est, ssio quam cur-
ormalis MN,
quaesitan ds pro ele-
haec pressio ad
in qua $\int$ it $(m-1)Pdxdy$
to $x=0$. rio pro curua
nendo v loco
242. $\frac{2ddy}{dy}$, quae in-
propterc seu $v^{\frac{m-1}{2}} ds =$
ex aequa
rectae. $\frac{v^{\frac{m-1}{2}} dx}{\sqrt{(a^{m-1}-v^{m-1})}}$
243.
quare tu
tare sua est aequatio
scribit.
quatio dy
244. t nulla, vbi $\frac{dy}{ds}$
trifuga e erticalis, si qui-
curua AM , seu si m ma-
tur in A sibus curuam in
a. Posit et celeritatem
sita haec
Co-

Corollarium 2.

241. Quare si $m > 1$, seu si pressio tota maior est, quam pressio a vi normali orta; curuam quaesitam dabit ista aequatio $dy = \frac{dx(\int Pdx)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{(a^{m-1}-(\int Pdx)^{m-1})}}$ in qua $\int Pdx$ ita debet accipi, vt euanescat posito $x=0$.

Corollarium 3.

242. Si $m = 1$, vis centrifuga euanescet, et propterea linea quaesita erit recta. Fit autem ex aequatione $ddy=0$, quae est proprietas lineae rectae.

Corollarium 4.

243. Si $m=0$ tum tota pressio euanescit, quare tum prodibit curua, quam corpus celeritate sua altitudini b debita proiectum libere describit. Pro hac igitur curua habebitur ista aequatio $dy = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(b-a+\int Pdx)}}$.

Corollarium 5.

244. Si m est vnitate minor, tunc vis centrifuga erit contraria vi normali, et propterea curua AM erit concaua deorsum. Ponamus igitur in A curuam esse normalem ad AP, erit $b=a$. Posito igitur $b=a$, habebitur pro curua quaesita haec aequatio $dy = \frac{a^{\frac{1-m}{2}} dx}{\sqrt{((a+\int Pdx)^{1-m}-a^{1-m})}}$.

Co-

Corollarium 6.

245. Pro motu libero igitur, quo casu est $m=0$, inuenietur curua a corpore descripta, si in A horizontaliter celeritate altitudini a debita proiiciatur, ex hac aequatione $dy=\frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{\int Pdx}}$.

Exemplum I.

246. Sit vis sollicitans vniformis seu $P=g$ erit $\int Pdx=gx$. Casibus ergo quibus $m>1$, et corpus in A ex quiete descendit, aequatio pro curuis quaesitis, scripto gc loco a, erit haec dy

$$=\frac{x^{\frac{m-1}{2}}dx}{\sqrt{(c^{m-1}-x^{m-1})}}.$$

At si sit $m<1$, et corpus in A celeritate altitudini a debita proiiciatur horizontaliter, curua super qua corpus moueri debebit, scripto gc loco a, exponetur hac aequatione $dy=\frac{c^{\frac{1-m}{2}}dx}{\sqrt{((c+x)^{1-m}-c^{1-m})}}$. Hae ergo curuae erunt algebraicae, si vel $\frac{3-m}{2m-2}$, vel $\frac{m}{1-m}$ fuerit numerus integer affirmatiuus. Hoc vero euenit si m fuerit terminus vel ex hac serie $3, \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{9}{7}, \frac{11}{9}$ etc. vel ex hac serie $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ etcet.

Corollarium 7.

247. Si igitur tota pressio triplo debeat esse maior quam vis normalis, curua erit circulus tangens

gens rectam AP in A. Namque erit $dy=\frac{xdx}{\sqrt{(c^2-x^2)}}$ seu $y=c-\sqrt{(c^2-x^2)}$, aequatio ad circulum radii c.

Corollarium 8.

248. Sit tota pressio duplo maior quam vis normalis, seu vis centrifuga aequalis vi normali cum eaque conspirans; erit curua cyclois cuspide verticalem in A tangens. Aequatio enim erit $dy=\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(c-x)}}$.

Exemplum 2.

249. Quaecunque fuerit potentia sollicitans P, requirantur curuae eiusmodi, vt pressio tota quam curua sustinet, sit duplo maior quam vis normalis seu quam vis centrifuga, quae hoc casu illi aequalis erit. Fiat igitur $m=2$, et pro curua quaesita haec habebitur aequatio $dy=\frac{dx\sqrt{\int Pdx}}{\sqrt{(a-\int Pdx)}}$ Seu dicto $\int Pdx=X$ erit $dy=dx\sqrt{\frac{X}{a-X}}=\frac{Xdx}{\sqrt{(aX-X^2)}}$ Hoc exemplum ideo attulimus, quod in sequentibus demonstrabitur curuas huius proprietatis esse simul lineas celerrimi descensus.

Corollarium 9.

250. Perspicitur ergo infinitas esse curuas quaestioni satisfacientes, propter quantitatem a arbitrariam. Atque infinitae hae curuae omnes tangent rectam AP in A.

 Scho-

Scholion. 1.

251. Ex solutione huius problematis apparet, quomodo problema inuersum, quo curua et ratio inter totam pressionem et vim normalem datur, at quantitas vis sollicitantis deorsum tendentis quaeritur, solui debeat. Cum enim sit $v^{\frac{m-1}{2}} ds = a^{\frac{m-1}{2}} dy$, seu posito $dy = p dx$, $v^{\frac{m-1}{2}}\sqrt{(1+pp)} = a^{\frac{m-1}{2}} p$ erit $v = \frac{ap^{\frac{m-1}{2}}}{(1+pp)^{\frac{1}{m-1}}} = b + \int P dx$; hincque differentiando $P dx =$
$\frac{2ap^{\frac{3-m}{m-1}}dp}{(m-1)(1+pp)^{\frac{m}{m-1}}}$. Consequenter inuenitur $P =$
$\frac{2ap^{\frac{3-m}{m-1}}dp}{(m-1)(1+pp)^{\frac{m}{m-1}}dx}$. Vbi notandum, celeritatem initialem iam esse datam, nam formula
$\frac{ap^{\frac{2}{m-1}}}{(1+pp)^{\frac{1}{m-1}}}$, si in ea ponatur $x = o$, dat b.

Scholion 2.

252. Simili modo si motus corporis seu celeritas eius in singulis locis detur, atque relatio pressionis totius ad vim normalem, inuenietur ex celeritate statim potentia sollicitans. Vt sit v altitudo debita celeritati in M, erit ob $b + \int P dx = v$; $p = \frac{dy}{dx}$; atque aequatio $v^{\frac{m-1}{2}} ds = a^{\frac{m-1}{2}} dy$ dabit naturam curuae requisitae. Cum enim v sit data, dari debet vel in x vel s et constantibus quantitatibus, scilicet quae ad curuae naturam exprimendam adhibentur. Ceterum eadem problemata in hypothesi virium centripetarum vel plurium potentiarum sollicitantium proposita non habent plus difficultatis, etiamsi ad magis perplexas aequationes perueniatur. Atque cum simplicia exempla in medium proferre non liceat ad illustrandum, ea potius relinquo; hocque eo magis, quod in sequentibus, vbi de brachystochronis agetur, eiusdem naturae curuae prodeant, quas ibi diligentius expositurus sum. Nunc igitur ad ea progredior problemata, in quibus motus quaedam proprietas proponitur, ex qua coniuncta vel cum potentia sollicitante curua quaeritur, vel cum curua ipsa, potentia sollicitans. Problemata vero nimis facilia, vt quando vel scala celeritatum, vel scala temporum daretur, praetermitto, cum ex expressione celeritatis vel potentia sollicitans, vel ipsa curua sponte fluat, atque temporis expressio facillime ad celeritatem deducat. Hanc ob rem huiusmodi afferemus quaestiones, in quibus non ipsae celeritates vel tempora dantur, sed relationes quaedam ab iis pendentes.

PRO-