*solidorum nondum satis perspectas neque ad calculum reuocatas. Antequam igitur de huius modi motu quicquam statui potuerat, methodum exponere necesse erat, qua proprietates superficierum et linearum in iis ductarum erui atque calculo subiici possint. Hoc itaque praestiti ope aequationum tres quantitates variabiles continentium, quibus iam ante tum in Comment. Tomo III. ad lineam breuissimam super quauis superficie determinandam, tum in huius Tractatus Tomo praecedente ad motus liberos non in eodem plano factos inuestigandos sum usus. His denique praeparatis progredi licuit ad effectus potentiarum in corpora super superficiebus mota definiendos, ex quibus modum elicui tam viam a corpore descriptam quam reliqua motus symtomata inueniendi. Quum vero calculus, quamdiu in generalibus versamur, nimis fiat prolixus et tractatu difficilis; omissa resistentia omnia ad vacuum et grauitatem ordinariam reduxi, atque praecipue motum pendulorum oblique oscillantium sum perscrutatus, cuius motus anomalias et absidum progressiones diligenter determinaui. Haec igitur sunt, quae in isto tomo secundo sum complexus, quibus expeditis operam dabo, vt, quam primum licuerit motus corporum finitorum et primo quidem rigidorum, in ordinem reducam atque pari methodo exponam.*

CAPVT



# CAPUT PRIMUM.

## DE MOTU NON LIBERO IN GENERE.

### DEFINITIO I.

1.

Corpus non libere moueri dicitur, quando externa obstacula impediunt, quo minus iuxta eam directionem progrediatur, iuxta quam cum ratione motus insiti, tum ratione potentiarum sollicitantium moueri deberet.

### Scholion I.

2. In motu puncti libero, quem Parte prima exposuimus spatium, in quo corpus mouebatur, ab omnibus obstaculis vacuum assumsimus, nunc vero spatium ita comparatum ponemus, vt corpori non liceat in quaque directione progredi, propter firmos parietes transitum non permittentes.

## Corollarium 1.

3. Quando itaque corpus in motu ſuo obſtaculum inuenit, ideoque eam directionem, ſecundum quam tendit, conſeruare non poteſt; tum vel quieſcere, vel in alia directione motum continuare debebit.

## Corollarium 2.

4. In quanam autem directione corpus progrediatur poſt occurſum obſtaculi, ex circumſtantiis tum motus tum poſitionis obſtaculi iudicari debet.

## Scholion 2.

5. Videtur haec doctrina ad motum corporum ex percuſſione pertinere, qua de re tamen hoc libro non agetur. Hoc vero libro alius generis obſtacula aſſumimus, quae illam notitiam non requirunt. Sunt haec obſtacula continua, quae motum puncti reſtringunt neque vllam reflexionem admittunt; cuiusmodi eſt tubus vel canalis ſiue rectus ſiue incurvatus, in quo corpuſculum motum continuare debet. Hoc caſu via penitus praeſcribitur, in qua corpus progredietur, neque propter tubi firmitatem inde egredi poterit. Quare cum hic loco corporis punctum conſideremus, hac poſitione punctum in data linea moueri debebit, neque ex ea excedere poterit.

## Scholion 3.

6. Duas autem hoc libro pertractabimus motus impediti ſeu reſtricti ſpecies, quarum primae mo-

uo ob- cundum um vel ntinua- as pro- umſtan- iudicari corpo- tamen lius ge- otitiam a, quae xionem alis ſiue motum aeſcribi- propter ire cum , hac debebit, nus mo- primae mo-





modo mentionem fecimus, quaeque complectitur motus punctorum ſuper data linea ſiue recta ſiue curua. Altera ſpecies minus reſtringit motus libertatem, ſuperficiem enim tantum praeſcribit, in qua corpus perpetuo verſari debeat. Atque has duas motus impediti ſpecies iſto libro ſumus expoſituri.

## Corollarium 3.

7. Quae igitur in prima ſpecie ſunt inquirenda, ſunt corporis ſeu potius puncti celeritas in quouis lineae praeſcriptae loco, preſſio in hanc lineam, et tempus, quo punctum datam viae portionem percurrit.

## Corollarium 4.

8. Circa motus alterius ſpeciei autem praeter haec inueniri debet ipſa linea, quam corpus ſuper ſuperficie data deſcribit. Quarum rerum fontes hoc primo capite aperiemus.

## Scholion 4.

9. Hoc vero capite primum inueſtigabimus motus vtriusque ſpeciei, ſi corpus a nullis potentiis ſollicitetur; vbi oſtendimus, qua celeritate id progredi debeat, et quanta vi vbique tam lineam datam, quam ſuperficiem datam premat. Sed ſi ſuperficies tantum data fuerit, praeterea viam determinabimus in qua corpus mouebitur a nullis potentiis ſollicitatum. Deinde vero principia exponemus, ex quibus iudicari licebit, quae mutationes a potentiis ſollicitantibus tam abſolutis quam relatiuis

tiuis oriantur, quo in sequentibus capitibus singula distincte deducere queamus.

## Scholion 5.

10. In his autem motibus tam super lineis quam superficiebus datis, animum ab omni frictione abstrahimus, neque vllam motus retardationem ponemus. Quamobrem lineae et superficies, super quibus puncta moueri ponuntur, laeuissimae concipi debent et omni asperitate destitutae, ne motus retardationi propter eam sit obnoxius. Motum rotatorium quoque omnino ex animo profligari oportet, cum ex eo mutationes in motu oriantur, quae demum in sequentibus explicari possunt. Hanc ob rem punctum quasi rependo moueri concipiendum est, vt eius pars quaeque, si modo in puncto partes concipi possunt, eundem habeat motum.

## Scholion 6.

11. Quae igitur in praecedente libro traditae sunt, et in hoc de motu punctorum tradentur, ad corpora finitae magnitudinis quoque accommodari possunt, si modo eorum motus sibi sit perpetuo parallelus, et omnes partes corporis aequali motu sint praeditae. Hoc vero ex sequentibus libris clarius apparebit, quibus casibus finitorum corporum motus a motu punctorum non discrepet. Quocirca in his libris ideo puncta tantum consideramus, quia ut partibus destituuntur, ita etiam in partibus diuersi motus inesse nequeunt.

PRO-





# PROPOSITIO 1.

## Theorema.

12. *Corpus seu punctum, quod super linea data mouetur, et a nullis potentiis sollicitatur, perpetuo eandem celeritatem conseruabit: si modo illius lineae duo quaeque elementa contigua nusquam finitae magnitudinis angulum constituant.*

## Demonstratio.

Quia corpus, dum in linea A M mouetur, a nulla potentia sollicitatur, neque frictioni vllus conceditur locus, motus corporis aliter variari nequit, nisi quatenus linea A M impedit, quo minus corpus libere moueri possit; ex quo, quae celeritatis immutatio oriri debeat, inuestigandum est. Sit celeritas, quam corpus in M habet $= c$, hac igitur celeritate corpus, si libere moueretur, in tangente $M\nu$ progrederetur, quod vero, quia corpus curvam A M deferere non potest, fieri nequit: sed corpus cogitur per $Mm$ progredi. Hanc ob causam concipiatur motus corporis secundum $M\nu$, resolutus in motum per $Mm$ et motum per $Mn$, existente $Mm\nu n$ parallelogrammo rectangulo. Perspicuum hic est motum per $Mn$, cuius directio est normalis in curuae elementum $Mm$, penitus absorberi, neque vllum effectum in celeritate immutanda habere posse. Corpus igitur altero motu progredietur in $Mm$, celeritate, quae est ad pristinam celeritatem vt $Mm$ ad $M\nu$: quare celeritas, qua corpus elementum $Mm$ describit, erit $= \frac{Mm.c}{M\nu}$. Quoniam vero, $M\nu m$ est triangulum ad $m$ rectangulum ideoque $Mm < M\nu$, celeri- Tab. I. Fig. 1.

tas haec minor erit quam prior $c$, atque celeritatis decrementum erit $= \frac{(Mv - Mm)c}{Mv}$. Ad huius valorem inueniendum sit M O radius osculi curuae in $M = r$ et elementum $Mm = ds$; eritque, ob ang. O = ang. $mMv$, $MO : Mm = Mm : mv$, ex quo prodit $mv = \frac{ds^2}{r}$, atque $Mv = \sqrt{(ds^2 + \frac{ds^4}{r^2})} = \frac{ds}{r}\sqrt{(r^2 + ds^2)} = ds + \frac{ds^2}{2r^2}$. Ex hoc iam obtinebitur decrementum celeritatis, dum corpus curuae elementum $ds$ percurrit $= \frac{c\,ds^2}{2r^2}$, cuius integrale dabit decrementum celeritatis, dum corpus finitam curuae A M portionem percurrit. At expressio $\frac{c\,ds^2}{2rr}$ aequiualet differentiali secundi gradus; eius ergo integrale erit differentiale primi gradus. Quamobrem decrementum celeritatis postquam corpus quantumuis arcum curuae datae percurrit, erit infinite paruum, atque corpus motu uniformi feretur per totam curuam A M, si modo radius osculi $r$ nusquam fuerit infinite paruus. Q. E. D.

## Corollarium I.

13. In omni igitur curua, in qua radius osculi nusquam est infinite paruus, corpus mouebitur vniformiter, siquidem a nullis potentiis sollicitatur; neque frictionem patitur.

## Corollarium 2.

14. Si radius osculi est infinite paruus, tum $\frac{c\,ds^2}{2r^2}$ vel est quantitas finita vel differentiale primi gradus. Illo

is de- m in- = r et n Mv, , at- = d s cele- currit erita- per- i se- e pri- post- rcur- formi oscu- osculi nifor- neque $\frac{c\,ds^2}{2r^2}$ adus. Illo





Illo casu corpus finitum celeritatis gradum amittet, hoc vero tantum infinite paruum.

## Corollarium 3.

15. Cum autem istius modi puncta in omnibus curuis sint rara et a se inuicem dissita, corpus tamen arcum inter duo talia puncta interceptum motu vniformi percurret.

## Scholion I.

16. Casus, quibus corpus celeritatis finitum decrementum subito patitur, alii non esse possunt, nisi vbi curua habet cuspides. His enim in locis corpus directe reuerti cogitur, et normaliter in punctum cuspidis impingit. Tunc igitur corpus non solum finitum celeritatis gradum amittet, sed omnino omnem motum amittere debebit; nisi forte corpus ponatur elasticum, quo casu eadem celeritate, qua incurrit, reflectetur, atque ita motum vniformem conseruabit. In cuspide enim duo elementa angulum infinite acutum constituunt.

## Scholion 2.

17. Praeter cuspides vero alia dari possunt in curuis puncta, in quibus radius curvedinis est infinite paruus; quia vero duo quaeque elementa contigua fere in directum sunt posita, et angulus deinceps positus est infinite paruus fieri non potest, vt ex demonstratione apparet, vt corpus finitum celeritatis decrementum patiatur. Quamobrem cum istiusmodi puncta sint rara, corpus nihilominus motu aequabili mouebitur.

Co-

## Corollarium 4.

18. Si igitur corpus motum fuerit elasticum, in quacunque curua semper motu aequabili feretur: at si non sit elasticum, cuspides tantum motum turbabunt, dum eum prorsus tollunt.

## Scholion 3.

Tabula I. Fig. 2. 19. Vt haec clarius percipiantur, sint duo curuae elementa AB, BC, et anguli ABC quem constituunt, deinceps positus CBD infinite paruus, cuius sinus sit $dz$ posito sinu toto $= 1$. Quia corpus postquam elementum AB descripsit vi insita in BD progredi conatur celeritate priore, quae sit $c$; eius motus duplex concipiatur, alter in directione BC, alter in directione ad BC normali, qui in effectum duci non potest. Demisso igitur ex D in BC perpendiculo DC, corpus altero motu per BC mouebitur celeritate, quae est ad priorem vt BC ad BD, i. e. vt $\sqrt{(1-dz^2)}$ ad 1. Per BC idcirco habebit celeritatem $= c\sqrt{(1-dz^2)}$ seu $c-\frac{cdz^2}{2}$; quare celeritatis decrementum erit $\frac{cdz^2}{2}$, quod aequiualet differentiali secundi gradus. Ex quo intelligitur, quamdiu in quaque curua angulus CBD fuerit infinite paruus, corpus motu aequabili esse progressurum. At in omni curua angulus vel est infinite paruus, vel angulus ABC ipse, quod in cuspidibus accidit. Consequenter cuspides tantum motus vniformitatem perturbant, nisi corpus fuerit elasticum, quo casu nihilominus motus vniformitas conseruatur.

PRO-

cum, in
tur: at
m tur-
uo cur-
n con-
, cuius
s post-
rogre-
tus du-
irectio-
potest.
rpus al-
est ad
ad 1.
$-dz^2)$
it $\frac{cdz^2}{2}$,
Ex quo
CBD
li esse
est in-
in cu-
m mo-
rit ela-
rmitas
PRO-



## PROPOSITIO 2.

### Theorema.

20. *Dum corpus motu vniformi in curua AM mouetur, in singulis punctis M premet curuam normaliter vi, quae est ad corporis vim grauitatis, vt altitudo eius celeritati debita ad dimidium radium osculi.* Tabula II. Fig. 2.

### Demonstratio.

Si corpus in curua AM libere moueri deberet motu aequabili; tum vbique vim adesse oporteret normalem corpus secundum MO trahentem tantam, quae se haberet ad corporis grauitatem, vt altitudo celeritati corporis debita ad dimidium radium osculi MO, vt ex demonstratis Libri praeced. apparet. Nisi enim talis vis adesset, corpus in linea recta progrederetur. Hoc autem casu canalis AM in quo corpus inclusum concipitur, impedit, quo minus corpus in recta progrediatur. Quamobrem corpus tanta vi canalem normaliter premet, secundum directionem Mn. Si enim talis vis normalis adesset, corpus in canali AM libere moueretur, neque illum premeret; hac vero vi absente, vt hic ponimus, necesse est vt corpus ipsum canalem tanta vi premat. Q. E. D.

### Corollarium 1.

21. Si igitur altitudo celeritati corporis debita ponatur $v$ et radius osculi $MO = r$, atque grauitas corporis $= 1$, quam scilicet haberet, si in superficie terrae esset positum; erit vis, qua cor-

corpus canalem in M secundum $Mn$ premet $= \frac{2v}{r}$.

## Corollarium 2.

22 Si corpus maiore vel minore celeritate moueretur in curva AM, tum pressio in M maior vel minor esset in duplicata celeritatis ratione, quia altitudo $v$ quadrato celeritatis est proportionalis.

## Corollarium 3.

23. Directio huius pressionis est normalis in curuam, et directe contraria est positioni radii osculi MO. Quare radius osculi in alteram curuae partem productus dabit directionem huius pressionis.

## Corollarium 4.

24. Si corpus in linea recta mouetur; haec pressio erit nulla, ob radium osculi infinitum. Hoc quoque ex ipsa motus natura perspicuum est. Corpus enim motum in recta vniformiter sponte progreditur, et hanc ob rem canalem rectum non premit.

## Corollarium 5.

25. Si curua AM fuerit circulus, pressio vbique erit eadem. Eo vero maior erit quo minor est radius circuli. Existente enim celeritate eadem, pressio erit reciproce vt radius circuli.

## Scholion 1.

26. Quo corpus in curua AM libere moueri pos-



posset vniformiter, necesse est vt secundum normalem MO trahatur vi $= \frac{2v}{r}$. Ex quo intelligi licet, corpus tanta vi in plagam oppositam niti, alioquin enim illa vi non esset opus ad corpus in curua conseruandum. Dum igitur corpus in canali AM moueri cogitur, neque eius nisus a vi normali tollitur, hunc nisum re ipsa in canalem exercebit. Quamobrem talis canalis tantam firmitatem habere debebit, vt hanc pressionem sustinere queat.

## Corollarium 6.

27. Apparet igitur corpus motum sine vllo celeritatis dispendio effectum edere posse, qui scilicet consistit in pressione definita.

## Corollarium 7.

28. Ex motu ergo solo pressio oriri potest. Quamobrem uti ex pressione seu a potentiis motus generatur, ita quoque ex motu pressio oriri potest.

## Scholion 2.

29. Intelligitur hinc, quod iam supra innuimus Libro primo, incertum esse, vtrum motus potentiis debeatur, an vero potentiae motui. Videmus enim in mundo vtrumque potentias nempe et motum existere; vtrum igitur alterius sit causa, quaestio est tum ex ratione tum ex obseruationibus decidenda. Rationi quidem minime consentaneum videtur corporibus conatus insitos tribuere, multo minus potentias per se existentes statuere. Praeterea vero is phaenomenorum cau-

 sas

ſas genuinas dediſſe cenſendus eſt, qui omnia a motu orta demonſtrauerit. Motum enim ſemel exiſtentem perpetuo conſeruari debere clare oſtendimus ſupra; hic vero, quemadmodum ex motu potentiae oriantur expoſuimus. Quemadmodum vero potentiae ſine motu vel exiſtere vel conſeruari queant, concipi non poteſt. Quamobrem concludimus omnes potentias, quae in mundo conſpiciuntur, a motu prouenire; atque diligenti ſcrutatori incumbit inueſtigare ex quonam, quorumque corporum motu quaelibet potentia in mundo obſeruata ortum ſuum habeat.

## Scholion 3.

30. Cum difficile intellectu ſit, quomodo talis effectus, preſſio ſcilicet continua, a corpore moto, ſine vllo celeritatis diſpendio, oriatur; operae pretium erit in huius rei cauſam inquirere. Vidimus in praecedente propoſitione motum corporis in curua linea non abſolute aequabilem eſſe, ſed celeritatem reuera decrementum pati, dum corpus per ſingula elementa curuae mouetur. Haec vero decrementa differentialibus ſecundi gradus aequiualent, vt etiam infinities repetita celeritatem corporis infinite parum tantum minuere queant. Huic igitur infinite paruo celeritatis decremento preſſionem adſcribi debere iudico; in hacque ſententia eo magis confirmor, quod, quo maius ſit hoc celeritatis decrementum, eo maior quoque exiſtat preſſio. Cum preſſio in M ſit $\frac{2v}{r}$, hacque vi totum elementum $Mm$, dum percurritur pre-

ia a mo-
ſemel ex-
re oſten-
ex motu
dmodum
l conſer-
mobrem
mundo
diligenti
n, quo-
a in mun-
nodo ta-
ore mo-
r; ope-
e. Vi-
n corpo-
m eſſe,
i, dum
. Haec
adus ae-
eritatem
queant.
remento
que ſen-
aius ſit
quoque
, hac-
curritur
pre-



prematur, licebit huius preſſionis effectum in $Mm = ds$ exponere per $\frac{2v\,ds}{r}$. Supra vero decrementum celeritatis, dum corpus elementum $Mm$ percurrit, inuentum eſt $\frac{c\,ds^2}{2r^2}$ (12). Quod autem ibi erat $c$ hic nobis eſt $\sqrt{v}$, ergo cum eſſet $-dc = \frac{c\,ds^2}{2r^2}$ erit $-\frac{dv}{2\sqrt{v}} = \frac{ds^2\sqrt{v}}{2r^2}$ ſeu $-dv = \frac{v\,ds^2}{r^2}$. Habebitur ergo $-4v\,dv = \frac{4v^2\,ds^2}{r^2}$ = quadrato preſſionis quam ſuſtinet elementum $Mm$.

## Corollarium 8.

31. Quadratum preſſionis ergo in $Mm$ exercitae aequiualet decremento ipſius $2v^2$. Atque ſi hoc decrementum aequale fuerit ipſi $ds^2$, tum preſſio aequalis eſt vi grauitatis, ex quo comparatio harum preſſionum cognoſcitur.

## Corollarium 9.

32. His ergo conceſſis, iſtud infinities infinite paruum celeritatis decrementum ſufficit ad preſſionem finitam producendam. Quamdiu enim ipſius $v^2$ decrementum homogeneum eſt ipſi $ds^2$, preſſio eſt finita, ſin vero id decrementum infinities maius exiſteret quam $ds^2$, preſſio quoque foret infinite magna.

## DEFINITIO 2.

33. Preſſio haec, quam corpus in linea curua motum exercet in hanc lineam, vocatur vis centrifuga; eo quod eius directio a centro circuli oſculatoris O tendit. Co-

## Corollarium 1.

34. Vis centrifuga ergo eſt ad vim grauitatis, vt altitudo celeritati debita ad dimidium radium oſculi.

## Corollarium 2.

35. Quando ergo corpus in linea curua moueri cogitur, hanc curuam vi centrifuga premit, etiamſi a nulla potentia ſollicitetur.

## Scholion.

36. Quando vero corpus a potentiis quoque ſollicitatur, preſſio quoque in canalem ab his potentiis orietur, tumque canalis duplici ratione premetur, partim nempe a potentiis partim a vi centrifuga. Nunc igitur quid potentiae in corpus non libere motum valeant, inueſtigandum eſt.

# PROPOSITIO 3.

## Theorema.

Tabula I. Fig. 3. 37. *Si corpus, quod in canali AM mouetur, ſollicitetur in M a potentia MN, cuius directio normalis eſt in curuam AM, celeritas neque augebitur neque minuetur: ſed tota potentia in premendo canali conſumetur.*

## Demonſtratio.

Ex priore libro manifeſtum eſt potentiam, cuius directio in directionem motus ſit normalis, celeritatem neque augere neque minuere. Quanquam hoc enim ibi de motu libero eſt demonſtratum, hic tamen eodem rigore locum habet, cum po-



potentia normalis corpus neque in conſequentia neque in antecedentia trahat. In motu libero vero potentia normalis directionem corporis immutat, quem effectum hoc loco habere non poteſt. Hac igitur vi apprimetur corpus ad canalem, et conſequenter tanta vi canalem premet in directione MN. Q. E. D.

## Corollarium 1.

38. Directio igitur talis vis normalis vel incidit in directionem vis centrifugae vel ei directe eſt contraria. Illo caſu auget vim centrifugam hoc caſu minuit.

## Corollarium 2.

39. Quia directio vis centrifugae in convexam curuae partem incidit, eius effectus augebitur, ſi normalis vis directio in eandem plagam incidit: ât ſi normalis vis in concavam partem dirigitur minuetur effectus.

## Corollarium 3.

40. Si vis normalis fuerit $= N$, et vis centrifuga vt ante $= \frac{2v}{r}$; premetur curua vel vi $\frac{2v}{r} + N$, ſi hae vires fuerint conſpirantes, vel vi $\frac{2v}{r} - N$ ſi fuerint contrariae.

## Corollarium 4.

41. Si vis normalis fuerit aequalis et contraria vi centrifugae, curua nullam preſſionem ſuſtinebit; ſeu corpus ex ea egredi non conabitur. Hoc ergo caſu eandem curuam corpus libere deſcriberet; id

id quod perſpicuum quoque eſt ex vi normali, quae tum eſt $\frac{2v}{r}$: hac enim efficitur, vt corpus aequabiliter in quacunque curua libere moueatur.

## PROPOSITIO 4.

### Theorema.

Tabula I. Fig. 3.

42. *Si corpus quod in canali A M mouetur, in M ſollicitetur a potentia, cuius directio ſit ſecundum tangentem M T: huius effectus in hoc conſiſtet, vt celeritatem corporis vel augeat, vel diminuat, eodem modo, quo in motu libero.*

### Demonſtratio.

Quia huius potentiae directio eſt ipſa canalis tangens MT, canalis effectum huius potentiae impedire non poteſt; neque etiam in canalem haec potentia vllum effectum exerere poterit. Quamobrem augebit haec potentia vel diminuet, celeritatem corporis, prout eius directio directioni corporis vel conſpirans vel contraria fuerit, prorſus ac ſi corpus libere moueretur. Atque poſita altitudine celeritati in M debita $= v$, elemento $Mm = ds$, et vi $MT = T$, erit $dv = T ds$, accelerante potentia T: at retardante ea, erit $dv = -T ds$. Q. E. D.

### Corollarium 1.

43. In motu corporum igitur ſuper lineis datis vis normalis preſſionem tantum generat in eas, vis tangentialis vero celeritatem tantum afficit.

### Corollarium 2.

44. Cum vis reſiſtentiae effectum vis tangentialis



tialis retardantis praeſtet, eodem quoque modo aget in motum corporum ſuper datis lineis, ac in motum liberum. Si igitur praeter vim tangentialem accelerantem T affuerit reſiſtentia R, prodibit ex ambabus coniunctim $dv = T ds - R ds$.

## PROPOSITIO 5.

### Problema.

45. *Si corpus ſuper linea data A M moueatur in medio quocunque reſiſtente, et inſuper ſollicitetur a potentia abſoluta, cuius directio ſit MP; determinare effectum tam potentiae abſolutae, quam reſiſtentiae, nec non preſſionem, quam curua A M ſuſtinet.* Tabula I. Fig. 4.

### Solutio.

Sit altitudo celeritati in M debita $= v$, vis reſiſtentiae $= R$, et vis abſoluta $MP = P$: cuius directio ſit talis, vt ſumto elemento $Mm = ds$ ſit perpendiculum $mn$ ex $m$ in M P demiſſum $= dx$ et $Mn = dy = \sqrt{(ds^2 - dx^2)}$. Reſoluatur potentia P in has duas ſecundum MN normalem in curuam et M T tangentem trahentes, erit ob triangula MPT et $Mmn$ ſimilia, vis normalis MN ſeu $PT = \frac{P dx}{ds}$, et vis tangentialis $MT = \frac{P dy}{ds}$ celeritatem augens. Quia vero vis reſiſtentiae celeritatem minuit, augebitur celeritas tantum ab exceſſu $\frac{P dy}{ds} - R$, hanc ob rem erit $dv = P dy - R ds$ (42). Normalis vis $\frac{P dx}{ds}$ vero efficit, vt curua in M tantundem prematur ſecundum directionem MN, ad convexam curuae partem ſitam. Quare cum vis centrifuga in candem plagam vrgeat, quae eſt $= \frac{2v}{r}$

$\frac{2v}{r}$, designante $r$ radium osculi in M; erit vis totalis, qua curua in M secundum M N premitur $= \frac{p\,dx}{ds} + \frac{2v}{r}$. Vnde tum motus corporis super curua, tum curuae pressio in singulis punctis innotescit. Q. E. I.

## Corollarium 1.

46. Ex his duabus formulis igitur accelerationem et pressionem exprimentibus omnia deduci possunt, quae ad motum super lineis datis pertinent.

## Scholion 1.

47. Hic quidem vnicam potentiam absolutam posuimus; nihilominus tamen satis ex eo intelligitur, quomodo plurium potentiarum effectus sit determinandus. Scilicet quemadmodum in motu libero fecimus, ita etiam hic singulae potentiae in binas normalem nempe et tangentialem sunt resoluendae, ex quibus colligendis vna vis normalis vnaque tangentialis oritur: quarum effectus per propositiones 3. et 4. determinari poterunt.

## Scholion 2.

48. Hactenus igitur fundamenta exposuimus, ex quibus in sequentibus motum corporum super lineis datis determinare licebit. Antequam autem pro motu super superficiebus datis similia principia tradamus, expedit vt paucis ostendamus, quo modo motus super linea data in effectum deduci possit. Namque ope canalis, in quo corpus contineatur, talis motus minime produci poterit, propter frictionem aliaque obstacula, quae tolli neutiquam possunt. Commodissime autem huiusmodi motus non liberi efficiuntur pendulorum ope, vti primum a Hugenio factum est; quamobrem hanc pendulorum ad institutum nostrum accommodationem sequenti propositione explicabimus.



# PROPOSITIO 6.

## Problema.

49. *Ope penduli efficere vt corpus in data linea moueatur.* Tab. I. Fig. 5.

## Constructio.

Sit A M B curua proposita in qua corpus moueri debeat; huius curuae construatur euoluta AOC, laminaque secundum eius figuram incuruetur et firmetur. Tum filum huic laminae circumducatur, quod altero termino ad laminam sit affixum, altero vero termino in A annexum habeat corpus mouendum. Quando igitur corpus moueri incipit, perspicuum est id in curua AMB moueri debere, quia filum dum a lamina separatur hanc curuam euolutione describit. Q.E.Fac.

## Corollarium 1.

50. Hac igitur ratione corpus in data curua progreditur, atque frictionibus non est obnoxium. Quare tali motu commodissime per experimenta effici poterunt, quae in theoria inueniuntur.

## Corollarium 2.

51. Ex doctrina de euolutionibus intelligitur fili partem MO a lamina separatam, in curuam AMB esse normalem ipsumque eius radium osculi.

## Corollarium 3.

Tabula I. Fig. 6. 52. Quo corpus in peripheria circuli AMB moueatur, lamina incuruata non est opus, sed filum altero termino C tantummodo in centro C peripheriae est figendum.

## Corollarium 4.

Fig. 5. 53. Quia filum MO est radius osculi, vis centrifuga tota ad tendendum hoc filum impenditur. Quare hoc filum tum satis roboris habere, tum extensioni obnoxium non esse debet. Nisi enim eandem perpetuo longitudinem conseruet, curuam desideratam non describet.

## Corollarium 5.

54. Accedente potentia absoluta, habebitur praeter vim centrifugam vis normalis, quae filum quoque tendet, si vi centrifugae fuerit conspirans. At si contraria fuerit minuet tensionem fili, imo etiam si maior fuerit, comprimet, quo casu euolutio nullius erit vsus. Nam cum filum debeat esse flexile, compressioni resistere non poterit, neque ideo impedire, quo minus corpus a curua AMB versus euolutam recedat.

## Scholion I.

55. Praeter hanc difficultatem, ista curuarum per euolutiones generatio hoc quoque laborat

ntelligitur
n curuam
um osculi.
uli AMB
pus, sed
in centro
sculi, vis
n impen-
is habere,
bet. Nisi
conseruet,
habebitur
quae filum
t conspi-
sionem fi-
met, quo
um filum
stere non
inus cor-
ecedat.
sta curua-
uoque la-
borat



borat defectu, quod linea recta produci nequeat; ad eam enim generandam filum requireretur infinite longum. Simili modo haec euolutio ad curuas accommodari non potest, quae alicubi radium osculi habent infinite magnum. Deinde etiam neque cuspide neque flexu contrario praeditae curuae hoc modo describi possunt. Quamobrem ita praxis locum tantum habet in curuis vbique finitam curuaturam habentibus, ad quod addi debet, vt pressio curuae totalis nusquam in curuae concauam partem dirigatur.

## Scholion 2.

56. Hugenius, qui primus euolutionis doctrinam excoluit, statim eam ad hunc ipsum vsum adhibuit; vti ex eius egregio opere de horologio oscillatorio apparet. Cum enim inuenisset oscillationes super cycloide omnes esse isochronas, motum super cycloide in horologia inferre volebat, quod per pendulum intra cycloides oscillans effecit. Cum enim cycloidis euoluta sit cyclois, hac ratione obtinuit, vt corpus filo annexum in cycloide moueretur.

## Scholion 3.

57. In hoc autem pendulorum motu maxime notari conuenit, praeter corpus motum filum quoque moueri debere, id quod ad institutum huius libri, in quo de motu puncti tantum agetur, minime pertinet. Praeterea motus corporis pendulo annexi non est sibi parallelus, sed circularis circa centrum scilicet circuli curuam osculantis, qui motus pariter hoc loco non attingitur.

gitur. Hoc igitur libro motum puncti duntaxat super linea vel superficie data examini subiiciemus, mentemque tam a motu fili, quam a motu circulari abstrahemus. In sequentibus autem motum pendulorum, vbi et motus fili et motus circularis in computum ducetur, ad motum puncti tantum reducemus, ita vt haec, quae hoc libro tractabuntur, nihilominus in praxi vsum sint habitura. Quamobrem, vt iam monuimus, punctum motu sibi semper parallelo super curua seu superficie sine vlla frictione ferri est concipiendum.

## PROPOSITIO 7.

### Theorema.

Tabula II. Fig. 2.

58. ***Si corpus a nullis potentiis sollicitatum moueatur in vacuo seu medio non resistente super superficie quacunque ABC: motu feretur uniformi animum ab omni frictione abstrahendo.***

### Demonstratio.

Cum corpus super linea data motum impressum continuare queat, multo magis super superficie data moueri poterit, eo quod eius libertas minus est restricta. Sit igitur D M $m$ linea, in qua corpus progreditur; haec erit vel recta vel curua. Si ista linea fuerit recta dubium non est, quin corpus motu aequabili sit progressurum. Sin autem fuerit curua, quae aequatione exprimi potest, duo quaeque eius elementa contigua vel proxime in directum erunt sita, vel an-

duntaxat
subiicie-
n a mo-
s autem
:t motus
um pun-
uae hoc
vsum sint
us, pun-
urua seu
ncipien-
atum mo-
er super-
rmi ani-
tum im-
super su-
eius li-
) M $m$ li-
erit vel
dubium
progres-
quatione
enta con-
ta, vel
an-



gulum infinite acutum constituent, quod in cuspidibus accidit. Illo casu supra demonstratum est corpus nullum motus decrementum pati (12). In cuspidibus vero corpus quidem omnem motum amittet, nisi fuerit elasticum. Quamobrem si motus tantum fiat in curua vel parte curuae cuspidibus carente motus corporis erit aequabilis. Q. E. D.

### Corollarium 1.

59. Patietur quidem corpus celeritatis decrementum, quoties directionem mutare cogitur, hoc vero differentiali secundi gradus aequiualet, ideoque, etiamsi integretur, decrementum tamen infinite paruum producit.

### Corollarium 2.

60 Si scilicet corporis celeritas fuerit $c$ et radius osculi $MO = r$, erit decrementum celeritatis, dum corpus elementum $ds$ percurrit $= \frac{c\,ds^2}{2ra}$ (12).

### Scholion.

61. Demonstratio huius propositionis prorsus congruit cum demonstratione primae propositionis, neque aliud est discrimen, nisi quod corpus illo casu in data linea moueri cogatur, hoc vero casu super superficie data viae quaerendae habeat libertatem. Quamobrem omnes annotationes, quae circa primam propositionem sunt factae hic quoque valent. Videbimus ergo, quam-

quamnam viam, corpus in superficie quacunque motum percurrere debeat.

# PROPOSITIO 8.
## Theorema.

Tabula II. Fig. 1.

*62. Via* D M *m*, *quam corpus super superficie quacunque* ABC *motum describit, est linea breuissima, quae inter terminos* D *et* M *duci potest; si scilicet corpus in vacuo moueatur, et a nullis potentiis sollicitetur.*

## Demonstratio.

Descripserit corpus iam curuam DM; manifestum est corpus ex M in tangente M*n* esse progressurum, nisi in superficiet perseuerare cogeretur. Quia igitur motus per M*n* fieri non potest, resoluatur is in duos laterales, quorum alter in ipsa superficie sit dispositus, alterius vero directio in superficiem sit perpedicularis, atque ideo penitus non in effectum deduci possit. Hanc ob rem ex *n* in superficiem demittatur perpendiculum *nm*, erit recta M *m* elementum, in quo corpus ex M progredietur. Planum ergo *n* M *m*, in quo posita sunt et elementum *m*M, et id quod a corpore immediate ante est descriptum, erit normale in superficiem. At linea breuissima in quauis superficie ducta hanc habet proprietatem, vt planum, in quo posita sunt duo quaeque elementa contigua, sit in superficiem normale. Quamobrem linea D M *m*, quae a corpore describitur, est linea breuissima in superficie A B C. Q.E.D.

Co-

DE MO
cunque
63. cipit, lin dum dire qua corpu
perficie reuissi- est; si poten-
64. breuissima mul viam mouetur.
mani- esse coge- n por- n alter ro di- tque i- . Hanc perpen- in quo n M m, id quod , erit sima in tatem, que ele- ormale. descri- Q.E.D. Co-
65. na, corpu in plano e cie sphaer bitur.
66. curuae D superficien plano sit dius osculi perficiem.
67. breuissima est in Tom Cum auter Tom. II.



## Corollarium 1.

63. Si ergo ex puncto A, in quo motus incipit, linea breuissima in superficie A B C secundum directionem motus ducatur, habebitur via, qua corpus motu vniformi mouebitur.

## Corollarium 2.

64. Quia filum tensum in superficie lineam breuissimam designat, ostendet filum tensum simul viam, in qua corpus super ea superficie mouetur.

## Corollarium 3.

65. Si igitur superficies proposita fuerit plana, corpus lineam rectam describet, quia haec in plano est linea breuissima. Atque in superficie sphaerica corpus in circulo maximo mouebitur.

## Corollarium 4.

66. Quia planum, in quo posita sunt duo curuae D M *m* elementa contigua, normale est in superficiem, radius osculi curuae vero in eodem plano sit positus et in curuam normalis; erit radius osculi curuae descriptae MO normalis in superficiem.

## Scholion.

67. Quemadmodum in quauis superficie linea breuissima sit inuenienda a me primum ostensum est in Tomo III. Comment. Acad. Imp. Petrop. Cum autem ibi ex alio principio lineam breuissi-

 mam

mam determinauerim, atque haec materia elementis nondum sit inserta, sequenti propositione lineam hanc breuissimam seu eam, quae a corpore describitur, determinare constitui.

## PROPOSITIO 9.
### Problema.

Tabula II. Fig. 2.

68. *In superficie quacunque determinare lineam, quam corpus a nullis potentiis sollicitatum, quod super ea mouetur, describit.*

### Solutio.

Ad naturam superficiei propositae exprimendam sumatur pro arbitrio planum APQ fixum in eoque recta AP pro axe. Tum ex quouis superficiei puncto M demittatur in hoc planum perpendiculum MQ, et ex Q in axem AP perpendicularis QP. Positis nunc $AP = x$, $PQ = y$, et $QM = z$, natura superficiei dabitur per aequationem inter has tres variabiles $x$, $y$ et $z$ et constantes. Sit huius aequationis differentialis $dz = Pdx + Qdy$, ex qua linea breuissima in hac superficie seu linea, quam corpus describit, determinari debet. Haec linea vero ex hoc determinatur, quod eius radius osculi in ipsam superficiei normalem incidat. Quamobrem primo normalem superficiei, et deinde cuiusque in ea ductae curuae radium osculi determinabimus; quo postmodum ex coincidentia harum linearum natura lineae quaesitae possit concludi.

Ad



Ad normalem in superficiem inueniendam secetur primo superficies plano MQB, existente BQ recta in plano APQ parallela axi AP, prodeatque ex hac sectione curua BM; cuius natura exprimetur hac aequatione $dz = Pdx$, quae ex locali pro superficie $dz = Pdx + Qdy$ oritur, posita $y$ constante seu $dy = o$. Ducatur ad hanc curuam BM normalis ME rectae BQ productae in E occurrens, erit subnormalis $QE = \frac{zdz}{dx} = Pz$. Ducta nunc EN perpendiculari ad BE, quaevis recta MN a M ad NE ducta normalis erit in curuam BM. Simili modo superficies secetur plano PQM prodeatque sectio CM, cuius natura exprimetur aequatione inter $z$ et $y$ manente $x$ constante, quae erit $dz = Qdy$. Sit MF normalis in hanc curuam erit subnormalis $QF = \frac{-zdz}{dy} = -Qz$, signo negatiuo vtor, quia subnormalem QF versus P cadere pono. Ducta nunc recta FN parallela axi AP, quaeuis recta ex M ad FN ducta normalis erit in curuam CM. Recta MN ergo, quae in punctum intersectionis N rectarum FN et EN cadit, perpendicularis in vtramque curuam BM et CM, et hanc ob rem perpendicularis erit in superficiem. Locus ergo normalis inuenitur sumendo $AH = x + Pz$, et $HN = -Qz - y$.

Ad determinandam vero radii osculi cuiusuis curuae in superficie data ductae positionem sint duo curuae elementa $Mm$ et $m\mu$, quibus respondeant in plano APQ elementa $Qq$, $q\varrho$, atque in axe AP assumto elementa $Pp$, $p\pi$, quae sint aequalia. Tabula II. Fig. 3.

lia. Erit ergo $Pp = p\pi = dx$; $pq = y + dy$; $p\varrho = y + 2dy + ddy$; $Qq = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; $q\varrho = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + \frac{dy\,ddy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$; $qm = z + dz$; $\varrho\mu = z + 2dz + ddz$; $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, et $m\mu = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} + \frac{dy\,ddy + dz\,ddz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Producantur $Qq$ et $Mm$ vtrinque, quarum illa ipsi $\pi\varrho$ in $r$, haec vero ipsi $rn$ normali in planum APQ in $n$ occurrat; eritque ob $Pp = p\pi$, $qr = Qq$ et $mn = Mm$, atque $\pi r = y + 2dy$, ac $rn = z + 2dz$ Iam ad elementum $Mm$ ducatur in plano $Qm$ normalis $mS$ occurrens ipsi $Qq$ productae in S, erit $QS = \frac{(qm - QM)\,QM}{Qq} = \frac{z\,dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Ducta iam SR in plano APQ perpendiculari ad QS, omnes rectae ex $m$ ad SR ductae normales erunt ad elementum $Mm$. In his igitur normalibus erit radius osculi curuae $Mm\mu$. Ea vero harum normalium congruet cum radio osculi, quae in eo sita erit plano, in quo posita sunt elementa $Mm$ et $m\mu$. Quamobrem hoc planum determinari oportet. In hoc vero plano sunt elementa $mn$ et $n\mu$, ambo itaque usque ad planum APQ producta dabunt intersectionem illius plani cum plano APQ. At $nm$ vel $mM$ occurrit plano APQ in T, vbi cum elemento $Qq$ producto concurrit. Est igitur $QT = \frac{z\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dz}$. Ipsi $n\mu$ parallela MV in plano $mn\mu$ erit sita, haec vero MV in planum APQ incidet in V, dabiturque QV ex analogia hac $(rn - \varrho\mu)$: $r\varrho$



$r\varrho = QM : QV$; erit itaque $QV = \frac{z\,ddy}{ddz}$. Hanc ob rem recta TV producta erit intersectio plani $nm\mu$ cum plano APQ; quare recta ME, quae in concursum rectarum SR & TV est ducta, erit simul normalis in $Mm$ et posita in plano $nm\mu$; eritque propterea MR positio radii osculi curuae in M. Ex his punctum R hoc modo determinabitur; erit, ducta RX perpendiculari in AP productam, $AX = \frac{z\,dx(dy\,ddy + dz\,ddz)}{(dx^2+dy^2)ddz - dy\,dz\,ddy} + x$ atque $XR = \frac{z\,dx\,ddy + z\,dz(dz\,ddy - dy\,ddz)}{(dx^2+dy^2)ddz - dy\,dz\,ddy} - y$. Quo igitur normalis in superficiem MN in radii osculi curuae directionem incidat, debet esse $AH = AX$ et $XR = HN$; vnde erit $P(dx^2 + dy^2)ddz - P\,dy\,dz\,ddy = dx\,dy\,ddy + dx\,dz\,ddz$ et $-Q(dx^2 + dy^2)ddz + Q\,dy\,dz\,ddy = dx^2\,ddy + dz^2\,ddy - dz\,dy\,ddz$. Quae quidem aequationes inter se congruunt, fiet enim ex iis coniunctim $P\,dx + Q\,dy = dz$, quae est ipsa aequatio naturam superficiei exponens. Harum igitur aequationum alterutra cum hac $dz = P\,dx + Q\,dy$ coniuncta dabit curuam a corpore in proposita superficie percursam. Q.E.I.

Tabula II. Fig. 2. & 3

## Corollarium I.

96. Erit igitur pro linea in superficie proposita descripta $ddz$: $ddy = P\,dy\,dz + dx\,dy : P\,dx^2 + P\,dy^2 - dx\,dz$. At quia est $dz = P\,dx + Q\,dy$ erit $ddz : ddy = Pdz + dx : Pdy - Qdx$, seu $P\,dy\,ddz - Q\,dx\,ddz = P\,dz\,ddy + dx\,ddy$.



Co

## Corollarium 2.

70. Si aſſumatur altera aequatio et vtrinque ſubtrahatur $Q dz^2\, ddz - dy^2\, ddy$ habebitur $-Q(dx^2 + dy^2 + dz^2)\, ddz + Q\, dy\, dz\, ddy + dy^2\, ddy = (dx^2 + dy^2 + dz^2)\, ddy - Q dz^2\, ddz - dz\, dy\, ddz$. Vnde habetur $\frac{ddy + Q\, ddz}{dy + Q\, dz} = \frac{dy\, ddy + dz\, ddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Quae eſt illa ipſa aequatio, quam pro linea breuiſſima in quacunque ſuperficie dedi in Comm. Acad. Petr. Tom. III.

## Scholion 1.

71. Vt in hoc caſu quo corpus a nulla potentia ſollicitatur, directio radii oſculi cum normali in ſuperficiem congruere debet, ita in aliis caſibus, quando corpus ſollicitatur a potentiis, hac
Tabula III. Fig. 1. lineae datum angulum conſtituere debent. Quamobrem ad hunc angulum generaliter inueniendum ſit $MN$ normalis in ſuperficiem, et $MR$ directio radii oſculi; erit, vt iam vel poſuimus vel inuenimus, $PQ = y$, $QM = z$; $PH = bN = Pz$; $Qb = -Qz$; $PX = Rx = \frac{z\,dz\,(dy\,ddy + dz\,ddz)}{(dx^2 + dy^2)\,ddz - dy\,dz\,ddy}$ et $Qx = \frac{z\,dx^2\,ddy + z\,dz\,(dz\,ddy - dy\,ddz)}{(dx^2 + dy^2)\,ddz - dy\,dz\,ddy}$. Ducta $NR$ ex $N$ in $MR$ demittatur perpendiculum $NO$, erit $MO = \frac{MR^2 + MN^2 - NR^2}{2MR} = \frac{MQ^2 + Rx.\, Nb + Qx.\, Qb}{MR}$ et

$$NO = \frac{\sqrt{(MR^2 MN^2 - (MQ^2 + Rx.\, Nb + Qx.\, Qb)^2)}}{MR} = \frac{\sqrt{(MQ^2 (Qx - Qb)^2 + MQ^2 (Rx - Nb)^2) + (Rx.\, Qb - Qx.\, Nb)^2)}}{MR}.$$

et vtrinque
ır $-Q(dx^2$
$+ dy^2\, ddy$
$z^2\, ddz -$
$\frac{+ Q\, ddz}{+ Q\, dz} =$
aequatio,
ſuperficie
nulla po-
cum nor-
ita in aliis
ntiis, hac
Quam-
ieniendum
R directio
vel inue-
$N = Pz$;
$\frac{+ dz\,ddz)}{- dy\,dz\,ddy}$
Ducta
um $NO$,
$+ Qx.\,Qb$ et
$Qb)^2)$ $= \sqrt{(MQ^2}$



Anguli vero $RMN$ tangens eſt $= \frac{NO}{MO}$ poſito ſinu toto $= 1$. Subſtitutis autem ſupra aſſumtis ſymbolis et in ſubſidium vocata aequatione $dz = P dx + Q dy$ prodibit tangens anguli $NMR = \frac{ddy\,(dx + P dz) - ddz\,(P dy - Q dx)}{(ddx - Q\, ddy)\,\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$. Hoc ergo angulo euaneſcente fit $ddz : ddy = P dz + dx : P dy - Q dx$ ut ſupra (69).

## Scholion 2.

72. Ipſa vero radii oſculi longitudo $MO$ inuenitur ex angul $nm\mu$ ope huius analogiae vt ſinus anguli $nm\mu$ ad ſinum totum ita $Mm$ ad $MO$. Eſt vero $n\mu = \sqrt{(ddy^2 + ddz^2)}$ et $mn - m\mu = \frac{-dy\,ddy - dz\,ddz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$, ergo perpendiculum ex $n$ in $m\mu$ productum $= \frac{\sqrt{(dx^2\,ddy^2 + dz^2\,ddy^2 + dx^2\,ddz^2 + dy^2\,ddz^2 - 2\,dy\,dz\,ddy\,ddz)}}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$. Quare hoc perpendiculum eſt ad $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ ut $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ ad $MO$, vnde prodit radius oſculi $MO = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx^2 (ddy^2 + ddz^2) + (dy\,ddz - dz\,ddy)^2)}}$. Hoc autem radio oſculi opus erit in ſequente propoſitione, in qua preſſionem, quam corpus in ſuperficiem exercet, inueſtigabimus.
Tabula II. Fig. 3.

Scho-

## Scholion 3.

73. Ex hac generali radii osculi expressione orietur ea pro radio osculi lineae breuissimae, si conjungatur cum hac aequatione $ddz = \frac{ddy(Pdz+dx)}{Pdy-Qdx}$ et locali $dz = Pdx + Qdy$. Prodibit autem radius osculi $= \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)(Pdy-Qdx)}{dx\,ddy\sqrt{(P^2+Q^2+1)}} = \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(P^2+Q^2+1)}}{ddz-Q\,ddy} = \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(P^2+Q^2+1)}}{dPdx+dQdy}$. Atque haec expressio dat radium osculi curuae in superficie proposita descriptae a corpore a nullis potentiis sollicitato.

## PROPOSITIO 10.
### Theorema.

Tabula II. Fig. 1.

74. *Pressio, quam corpus in superficie motum et a nullis potentiis sollicitatum in ipsam superficiem exercet, fit normaliter in eam versus eius convexitatem, et se habet ad vim grauitatis, vt altitudo celeritati corporis debita, ad dimidium radii osculi curvae a corpore descriptae.*

### Demonstratio.

Sit D M $m$ curua in superficie ABC a corpore descripta; altitudo celeritati corporis debita $= dv$; et radius osculi curuae MO $= r$. Quia corpus ex M, si libere moueri posset, progrederetur in elemento M$n$; superficies vero efficit, vt per elementum M$m$ incedat, existente $nm$ perpendiculo in superficiem; superficies a corpore



pore secundum directionem $nm$ premetur, tanta vi, quanta opus est ad corpus ex directione M$n$ in directionem M$m$ pertrahendum. Hoc vero praestatur a vi $\frac{2v}{r}$ normaliter in superficiem seu secundum directionem radii osculi MO agente. Quamobrem pressio corporis in superficiem erit normalis, quippe agens secundum $mn$ et aequalis $\frac{2v}{r}$, existente vi grauitatis corporis $= 1$. Q.E.D.

## Corollarium 1.

75. Haec est igitur vis centrifuga, quam corpus in superficiem simili modo exercet, quo in lineam datam, in qua moueri cogitur.

## Scholion 1.

76. Pressio in superficiem necessario debet esse normalis. Nam nisi esset normalis resolvi posset in duas, quarum altera esset normalis; altera in ipsa superficie posita. Harum vero normalis tantum ad premendam superficiem impenditur, dum altera ipsum corporis motum immutaret.

## Corollarium 2.

77. Longitudinem radii osculi $r$ lineae, quam corpus a nullis potentiis sollicitatum super proposita superficie describit, inuenimus (73). Ea igitur assumta erit vis centrifuga $= \frac{2v(ddz-Q\,ddx)}{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(P^2+Q^2+1)}}$ $= \frac{2v(dPdx+dQdy)}{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(P^2+Q^2+1)}}$.



Scho-

## Scholion 2.

78. De hac vi centrifuga in fuperficiem exercita eadem locum habent, quae fupra de vi centrifuga in datam curuam funt annotata, vid. Prop. 2. cum annexis Coroll. et Schol. Linea enim breuiffima, quam corpus fuper fuperficie percurrit, inftar canalis confiderari poteft, in quo corpus moueatur; atque tum de motu in hoc canali omnia valent, quae fupra de motu fuper data linea, nullis agentibus potentiis, funt allata.

## PROPOSITIO II.

### Problema.

79. *Determinare effectum cuiusuis potentiae, quem exerit in corpus fuper data fuperficie motum tam in vacuo quam in medio refiftente.*

### Solutio.

Quaecunque fit, directio potentiae follicitantis corpus, ea refolvi poteft in tres potentias laterales, quarum primae, quam vocabimus M, directio normalis in fuperficiem: fecundae, quam per N defignabimus directio normalis tam in directionem motus corporis quam in directionem potentiae M, cuius igitur directio erit in plano tangente fuperficiem, Tertiae potentiae T appellatae directio congruat cum directione motus, quae igitur erit vis tangentialis: priores vero erunt vires normales. Quia nunc harum trium virium directiones funt inter fe normales, nullius effectus a reliquis perturbari



turbari poterit. Quare quem effectum quaeque producat, inueftigabimus.

Prima potentia M, cuius directio in fuperficiem eft normalis, nullum habebit effectum in immutando corporis motu; fed tota impendetur in preffionem fuperficiei. Augebit igitur vel diminuet preffionem a vi centrifuga ortam, prout eius directio in plagam conuexae partis fuperficiei incidit, vel in plagam partis concavae. Incidat ea in partem interiorem erit totalis preffio in fuperficiem verfus partes exteriores $= \frac{-2v(dPdx+dQdy)}{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(P^2+Q^2+1)}} - M$ (77). Preffio enim a vi centrifuga orta minuetur hoc cafu potentia M.

Secunda potentia N, quia eius directio in ipfa fuperficie eft pofita, et normalis in directionem corporis, corporis directionem tantum immutabit celeritatem neque augendo neque minuendo. Haec vis igitur corpus a linea breuiffima deducet, facietque vt non amplius in plano ad fuperficiem normali moueatur: huius igitur plani, in quo corpus mouebitur, inclinationem ad planum lineae breuiffimae normale in fuperficiem inueftigari oportet. Huius vero inclinationis angulo aequalis eft angulus, quem radius ofculi lineae defcriptae cum normali in curuam conftituit; quemque ante generaliter determinavimus (71). Poftquam corpus elementum $Mm$ celeritate altitudini $v$ debita defcripfit progredere-

 tur,

tur, niſi a vi N ſollicitaretur per elementum in $\nu$, ita vt $Mm$ et $m\nu$ eſſent duo elementa lineae breuiſſimae, et poſita in plano ad ſuperficiem normali, erit directio vis N normalis in planum chartae, ſit ea $\nu\mu$; corpus igitur hac vi a plano chartae ſurſum reducetur, ſi quidem ponamus hanc vim N ſurſum eſſe directam hac elementorum poſitione vt in figura repraeſentatur. Efficiat ergo haec vis, vt corpus per elementum $m\mu$ moueatur, anguloque $\nu m\mu$ a directione $m\nu$ deflectat. Huic angulo reſpondet radius oſculi $= \frac{m\nu^2}{\mu\nu}$. Quare cum vis N hunc angulum generet, celeritasque curuae debita ſit altitudini $v$, erit ex effectu virium normalium $N = \frac{2v.\mu\nu}{m\nu^2}$ ideoque $\mu\nu = \frac{N.m\nu^2}{2v}$. Quo nunc inclinatio plani $Mm\mu$, in quo corpus actu mouebitur, ad planum $Mm\nu$, quod in ſuperficiem eſt normale, inveniatur, demittatur ex $\nu$ in elementum $Mm$ productum perpendiculum $\nu n$; erit $\mu n$ quoque in $mn$ perpendiculare, ideoque angulus $\mu n\nu$ erit angulus inclinationis plani $\mu mM$ ad planum $\nu mM$; atque cum $\mu\nu$ ſit normalis ad $\nu n$; huius anguli tangens erit $= \frac{\mu\nu}{n\nu} = \frac{N.m\nu^2}{2v.n\nu}$. At $n\nu$ determinatur ex inclinatione elementorum $Mm$ et $m\nu$ ſeu radio oſculi lineae breuiſſimae, cuius $Mm$ et $m\nu$ ſunt elementa. Sit hic radius oſculi $r$; erit $\frac{m\nu^2}{n\nu} = r$, ideoque tangens anguli $\mu n\nu = \frac{Nr}{2v} = \frac{N.(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(P^2+Q^2+1)}}{2v(dPdx+dQdy)}$, ſubſtituto loco $r$ valore



valore inuento (73.). Huic vero angulo aequalis eſt angulus, quem radius oſculi elementorum $Mm$, $m\mu$ a corpore actu deſcriptorum conſtituit cum radio oſculi elementorum $Mm$, $m\nu$ ſeu cum normali in ſuperficiem. Huius autem anguli tangentem ſupra invenimus (71). Quare facta aequatione habebimus $\frac{ddy(dx+Pdz)-ddz(Pdy-Qdx)}{(ddz-Qddy)\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}} = \frac{N(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(P^2+Q^2+1)}}{2v(dPdx+dQdy)}$, qua aequatione effectus potentiae N determinatur. Seu cum ſit $ddz - Qddy = dPdx + dQdy$ habebitur iſta aequatio $ddy(dx+Pdz) - ddz(Pdy - Qdx) = \frac{N(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(P^2+Q^2+1)}}{2v}$.

Tertia potentia T, quia in directione corporis eſt poſita, celeritatem tantum vel auget vel diminuit. Ponamus eam eſſe accelerantem, exprimetur eius effectus hac aequatione $dv = T\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$. Atque ſi motus in medio fiat reſiſtente reſiſtentiaque ſit $= R$, minuenda tantum eſt vis tangentialis T reſiſtentia R. Quamobrem habebitur $dv = (T-R)\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$. Q. E. I.

## Corollarium I.

80. Ex duabus igitur aequationibus, quarum altera $v$ altera $dv$ determinat, vna conflatur $v$ non amplius continens, quae cum locali pro ſuperficie $dz = Pdx + Qdy$ coniuncta determi-

minat curuam, quam corpus ſuper propoſita ſuperficie deſcribit.

## Scholion 1.

81. De potentia N bene eſt attendendum in quam plagam tendat, h. e. an ad dextram an ad ſiniſtram regionem corporis moti vergat? Pro hac enim differentia tangens anguli $\mu n \nu$ vel affirmatiua vel negatiua eſt accipienda. De hoc vero non erimus hic ſolliciti, ſed vlteriorem huius rei disquiſitionem in caput vltimum huius libri differemus.

## Scholion 2.

82. Ad ſequens igitur caput ſecundum progredimur, in quo motum corporis ſuper data linea in vacuo examinabimus. Capite tertio vero motus ſuper data linea in medio reſiſtente inueſtigabimus. Quarto denique capite motum ſuper data ſuperficie tam in vacuo quam in medio reſiſtente ſcrutabimur.

CAPUT

)N &c
oſita ſu-
idendum
am an ad
t? Pro
ν vel af-
De hoc
eriorem
m huius
im pro-
er data
rtio ve-
eſiſtente
motum
in me-
PUT



# CAPUT SECUNDUM.

## DE MOTU PUNCTI SUPER DATA LINEA IN VACUO.

## PROPOSITIO 12.

### Problema.

83.

*Sollicitetur corpus, quod ſuper curua* AM *mouetur, vbique a potentia* MF *cuius directio ſit parallela axi* AP; *determinare celeritatem corporis in ſingulis punctis, atque tempus, quo curuae quaeuis portio deſcribitur, nec non preſſionem, quam curua in ſingulis punctis patitur.* Tabula III. Fig. 3.

### Solutio.

Deſcripſerit corpus iam arcum AM, ſitque eius celeritas in A debita altitudini $b$, atque celeritas in M debita altitudini $v$. Poſitis nunc $AP = x$; $PM = y$; et arcu $AM = s$; reſoluatur potentia MF, quae ſit $p$ in laterales normalem ſcilicet MN et tangentialem MT; erit $ds : dx = MF : MT$ et $ds : dy = MF : MN$. Hinc igitur prodibit vis tangentialis $MT = \frac{p\,dx}{ds}$ et vis normalis $= \frac{p\,dy}{ds}$. Perſpicuum hic eſt vim tangentialem celeritatem corporis minuere, erit ergo $dv = -p\,dx$ (42.) atque $v = C - \int p\,dx$. Sumto autem integrali $\int p\,dx$ ita, vt euaneſcat poſito $x = o$, erit $v = b - \int p\,dx$; ex qua aequatione