Seu cum ſit $ds = -\frac{cdu}{u}$ erit $dds = -\frac{cud.u + cdu^2}{du^2} = \frac{dyddy}{ds}$. At eſt $dy = \frac{\sqrt{(c^2du^2 - u^2dx^2)}}{u}$. Vnde habebitur $ddy = \frac{c^2ududdu - c^2du^3}{u^2\sqrt{(c^2du^2 - u^2dx^2)}}$. Conſequenter erit $P = \frac{2c^2ududdu - 2c^2du^3}{2dx^2\sqrt{(c^2du^2 - u^2dx^2)}}$.

Corollarium 10.

1001. Si aequatio inter u et x accipiatur iſta $du = -\frac{u^n dx}{f^n}$; ſeu $\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)b^{n-1}} = \frac{x}{f^n}$, erit $dx = -\frac{f^n du}{u^n}$ et $ddu = \frac{ndu^2}{u}$. His ſubſtitutis prodibit in medio reſiſtente in duplicata celeritatum ratione $P = \frac{2(n-1)c^2u^{3n-2}}{f^{2n}\sqrt{(c^2u^{2n-2} - f^{2n})}}$. Pro curua autem quaeſita haec habebitur aequatio $dy = \frac{du\sqrt{(c^2u^{2n-2} - f^{2n})}}{u^n}$.

Corollarium 11.

1002. Hoc igitur caſu u^{2n-2} maius eſſe debet quam $\frac{f^{2n}}{c^2}$ ſeu u maius quam $\frac{f^{\frac{n}{n-1}}}{c^{\frac{1}{n-1}}}$. Quare ſi motus horizontalis fieri poteſt minor quam haec quantitas, motus in curua non toti motui horizontali dato reſpondebit. Nam ſi curua vlterius tenderet foret tam dy quam P imaginarium.

Co-

LIBE CURVIL.
$\frac{\ldots u^2}{} = \frac{dyddy}{ds}$.
tur ddy
100 P =
bebit n n
$n = 1 - k$.
vero AP
$u = b$. accipiatur
que u^k $\frac{1}{-1)b^{n-1}}$
$\frac{2kb^{3k}}{c\sqrt{(b^{2k}}}$ $\frac{}{u^2}$. His
$\frac{dx\sqrt{(2kcx}}{c-k}$ duplicata
$\frac{}{-f^{2n})}$.
aequatio
10
motus
quadrar
fit $u = b$
decreſci
gentem eſſe de-
tos cur
ponimu Quare
potenti
progre am haec
examin horizon-
corpor rius ten-
Co-

Corollarium 12.

1003. Ad inconueniens hoc euitandum debebit n minus eſſe vnitate, fiat ergo $n - 1 = -k$, ſeu $n = 1 - k$. Hoc poſito erit $u^k = b^k - f^{k-1}kx$. Exiſtente vero AP tangente curuae in A erit vbi $ds = dx$, ibi $u = b$. Hinc erit $b^{n-1}c = f^n$ ſeu $\frac{c}{b^k} = f^{1-k}$, ideoque $u^k = b^k(1 - \frac{kx}{c})$. Porro autem fit $P = \frac{2kb^{3k}u^{1-2k}}{c\sqrt{(b^{2k} - u^{2k})}}$ et $dy = \frac{dx}{u^k}\sqrt{(b^{2k} - u^{2k})} = \frac{dx\sqrt{(2kcx - k^2x^2)}}{c - kx}$

Scholion.

1004. Nulla igitur huiusmodi hypotheſis motus horizontalis in proiectoriam in fluido poteſt quadrare. Quicquid enim fit k potentia in A vbi fit $u = b$, eſt infinite magna; deinde vero perpetuo decreſcit. Hae curuae etiam omnes habent tangentem verticalem vbi eſt $x = \frac{c}{k}$, quae eſt aſymtotos curuae. Ceterum hoc problemate finem imponimus huic primae tractationi, qua directionem potentiae ſibi ſemper parallelam poſuimus; atque progredimur ad vires centripetas conſiderandas, examinaturi, quomodo medium reſiſtens motum corporum ad fixum punctum attractorum turbet.

PRO-

PROPOSITIO 120.

Problema.

1005. *Attrahatur corpus in medio quocunque reſiſtente perpetuo ad punctum fixum C vi quacunque; determinare curuam A M, quam corpus vtcunque proiectum deſcribit.*

Solutio.

Cum corpus eſt in M ponatur eius diſtantia a centro $MC = y$, elementum $Mm = ds$; celeritas in M ſit debita altitudini v. Ducatur mC et ex M in eam normalis Mr, erit $mr = dy$. Porro ducta tangente MT, ſit ex C perpendiculum in eam demiſſum $CT = p$, et radius osculi in $M = r$, qui erit $= \frac{ydy}{dp}$. Iam ſit vis qua corpus in M ad C trahitur $= P$ et vis reſiſtentiae in $M = R$. Ex potentia autem P reſoluta prodit vis normalis $= \frac{Pp}{y}$ et tangentialis $= -\frac{Pdy}{ds}$, retardabit enim corporis motum. Ex vi autem normali habebitur haec aequatio $\frac{2v}{r} = \frac{Pp}{y}$ ſeu $2vdp = Ppdy$ (552). Cum praeterea vis tangentialis reſiſtentia minuta ſit $-\frac{Pdy}{as} - R$ erit $dv = -Pdy - Rds$ (cit.). Ex quibus aequationibus coniunctis tum celeritas corporis in ſingulis locis, tum ipſa curua AM cognoſcitur. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

1006. Ob ſimilia triangula Mmr, CMT erit $ds : dy = y \cdot \sqrt{(y^2 - p^2)}$ ideoque $ds = \frac{ydy}{\sqrt{(y^2 - p^2)}}$. Quo ſubſtituto prodibit $dv = -Pdy - \frac{Rydy}{\sqrt{(y^2 - p^2)}}$. Eliminata igitur v obtinebitur aequatio inter y et p, quae ſufficit ad curuam determinandam.

Corollarium 2.

1007. Quia eſt $P = \frac{2vdp}{pdy}$; ſubſtituatur hic valor in altera aequatione. Quo facto prodibit $dv + \frac{2vdp}{p} = -Rds = -\frac{Rydy}{\sqrt{(y^2 - p^2)}}$. Ex qua aequatione ſi R fuerit potentia ipſius v poterit valor ipſius v inueniri.

Corollarium 3.

1008. Sit reſiſtentia quadratis celeritatum proportionalis et medium vniforme, ita vt ſit $R = \frac{v}{c}$. Hinc igitur erit $dv + \frac{2vdp}{p} = -\frac{vds}{c}$, quae aequatio integrata dat $vp^2 = bh^2 e^{-\frac{s}{c}}$, vbi b eſt altitudo debita celeritati in initio A, et h eſt perpendiculum ex C in tangentem in A demiſſum.

Corollarium 4.

1009. Cum igitur in hac reſiſtentiae hypotheſi ſit $v = \frac{bh^2}{e^{\frac{s}{c}} p^2}$, erit vis $P = \frac{2bh^2dp}{e^{\frac{s}{c}} p^3 dy}$. Quando igitur P in y datur, haec aequatio erit aequatio

quae-

quaeſita pro curua AM, celeritas autem in quouis loco M eſt reciproce vt perpendiculum in tangentem et vt numerus cuius logarithmus eſt via deſcripta per $2c$ diuiſa coniunctim.

Corollarium 5.

1010. In hac igitur reſiſtentiae hypotheſi corpus eandem curuam deſcribet ſollicitatum a vi centripeta $\frac{V}{e^{\frac{s}{c}}}$, quam deſcribit in vacuo ſollicitatum a vi V. In vtroque enim caſu aequatio pro curua quaeſita erit haec $Vdy = \frac{2bb^2dp}{p^3}$. Quare quo corpus in hoc medio reſiſtente eandem quam in vacuo curuam deſcribat, vis centripeta perpetuo debet decreſcere in ratione, cuius logarithmus eſt ſpatium deſcriptum ad c applicatum.

Corollarium 6.

1011. Sit reſiſtentia poteſtati exponentis $2m$ celeritatum proportionalis et medium vniforme ita vt ſit $R = \frac{v^m}{c^m}$. Erit igitur $dv + \frac{2vdp}{p} = -\frac{v^m ds}{c^m}$. Quae integrata dat $v^{1-m} = \frac{(m-1)p^{2m-2}}{c^m}\int\frac{ds}{p^{2m-2}}$.

Co-

LI … TI CURVIL.
… tem in quouis … um in tangen- … eſt via deſcrip-
onalis … autem … ſit S. … roll. … iae hypotheſi … llicitatum a vi … acuo ſollicita
celeri … aequatio pro … rem … Quare quo … Hoc i … dem quam in … poſſit … eta perpetuo … leritas … garithmus eſt … area … pendi
… i exponentis … edium vnifor- … $dv + \frac{2vdp}{p}$ … AM … $v^{1-m} =$ … quam
Co-

Corollarium 7.

1012. Sit reſiſtentia celeritatibus proportionalis ſeu $m = \frac{1}{2}$, erit $\sqrt{v} = -\frac{1}{2\sqrt{c}}\int p\,ds$. Exprimit autem $\int pds$ duplam aream ACM, quae nobis ſit S. Et detracta conſtante erit $\sqrt{v} = \frac{C-2S}{2p\sqrt{c}} = \frac{b\sqrt{bc}-S}{p\sqrt{c}}$. Habentibus b et b eosdem quos ante Coroll. 3. valores.

Corollarium 8.

1013. In hac igitur reſiſtentiae hypotheſi celeritas corporis euaneſcit, quando corpus ſectorem ſeu aream abſoluerit aequalem ipſi $b\sqrt{bc}$. Hoc igitur ſpatium tantum eſt, vt corpus nunquam poſſit aream ipſi aequalem abſcindere. Atque celeritas corporis in M eſt directe vt hoc ſpatium area iam abſoluta minutum et reciproce vt perpendiculum in tangentem.

Corollarium 9.

1014. In eadem reſiſtentiae hypotheſi eſt $v = \frac{(b\sqrt{bc}-S)^2}{cp^2}$. Vis igitur centripeta erit $= \frac{2(b\sqrt{bc}-S)^2dp}{cp^3dy} = P$. Deinde vero tempus, quo arcus AM abſoluitur eſt $= \int\frac{pds\sqrt{c}}{b\sqrt{bc}-S} = \int\frac{2dS\sqrt{c}}{b\sqrt{bc}-S} = 2\sqrt{c}\,l\frac{b\sqrt{bc}}{b\sqrt{bc}-S}$. Tempore ergo infinito opus eſt, antequam corpus aream abſcindat $= b\sqrt{bc}$, ſeu antequam omnem motum amittat.

Scho-

Scholion.

1015. Hae igitur ſunt generales leges, quas corpus in medio reſiſtente a vi centripeta quacunque ſollicitatum obſeruat. Eas autem pro reſiſtentia ipſis celeritatibus et celeritatum quadratis proportionali fuſius deduxi, tum quia licuit, quod in aliis hypotheſibus fieri non potuiſſet, tum quia in ſequentibus has duas reſiſtentias, vt hactenus fecimus, potiſſimum ſumus conſideraturi. Nunc autem datas ſumemus vires centripetas vt quae ſint diſtantiarum poteſtatibus proportionales, et inueſtigabimus, quales differentias reſiſtentia curuis deſcriptis inducat. Deinde iuxta inſtitutum in praecedentibus adhibitum, curuam datam ponemus vna cum vel vi centripeta vel reſiſtentia vel celeritate atque in reliqua inquiremus.

PROPOSITIO 121.

Problema.

Tabula XIII Fig. 2. 1016. *Si vis centripeta fuerit diſtantiarum poteſtati cuicunque a centro proportionalis, corpusque moueatur in medio reſiſtente vniformi, quod reſiſtat in duplicata celeritatum ratione: determinare curuam A M quam corpus deſcribet, et motum corporis in ea.*

Solutio.

Manentibus vt ante $AM = y$, $CT = p$, $Mm = ds$, celeritate in M debita altitudini v, erit $P =$

LIB. ... VCTI CURVIL.

$P = \frac{y^n}{f^n}$ ... ales leges, quas ... tripeta quacun- ... quaeſita ... m pro reſiſten- ... quadratis pro- ... $= \frac{y^n p d}{2 f^n d}$ ... licuit, quod in ... t, tum quia in ... t hactenus feci- ... ad curi ... uri. Nunc au- ... tum; q ... as vt quae ſint ... $dp - nl$ ... nales, et inue- ... ſumto ... entia curuis de- ... erit $\frac{}{cv}$ ... cutum in prae- ... atam ponemus ... inter y ... ntia vel celeri-

1 ... I.

vis cei ... quadrat ... it diſtantiarum ... tione i ... nalis, corpus- ... co n ſ ... ormi, quod re- ... nes on ... te: determinare ... tractab ... et motum cor-

1 ... $CT = p$, Mm ... forme ... tudini v, erit $P =$

$\frac{y^n}{f^n}$ et $R = \frac{v}{c}$. Hinc habebitur pro curua quaeſita haec aequatio $\frac{y^n}{f^n} = \frac{2bh^2 dp}{e^{\frac{s}{c}} p^3 dy}$ et $v = \frac{bh^2}{e^{\frac{s}{c}} p^2} = \frac{y^n p dy}{2 f^n dp}$. Ex illa autem aequatione non multum ad curuam cognoſcendam proficitur ob $e^{\frac{s}{c}}$ inuolutum; quare ſumtis logarithmis erit $\frac{s}{c} = l\,2bf^n h^2 + l\,dp - nly - 3lp - ldy$, atque $\frac{ds}{c} = \frac{ddp}{dp} - \frac{ndy}{y} - \frac{3dp}{p}$ ſumto dy conſtante. Quia vero eſt $ds = \frac{ydy}{\surd(y^2 - p^2)}$ erit $\frac{ydy}{c\surd(y^2 - p^2)} = \frac{ddp}{dp} - \frac{ndy}{y} - \frac{3dp}{p}$. Quae eſt aequatio inter y et p pro curua quaeſita. Q. E. I.

Corollarium 1.

1017. Quaenam proditura ſit aequatio, ſi vis centripeta fuerit vel diſtantiis vel reciproce quadratis diſtantiarum proportionalis, ex aequatione inuenta facile apparet, ſi modo 1 vel −2 loco n ſubſtituatur. Huiusmodi autem ſubſtitutiones omnes nihil iuuant ad aequationem generalem tractabiliorem efficiendam.

Corollarium 2.

1018. Si medium non poſitum fuiſſet vniforme ſed eius exponens variabilis q, loco $e^{\frac{s}{c}}$ prodiisdiiſſet $e^{\int \frac{ds}{q}}$ (873). Atque pro curua deſcripta haec aequatio $\frac{y\,dy}{q\sqrt{(y^2-p^2)}} = \frac{ddp}{dp} - \frac{n\,dy}{y} - \frac{3\,dp}{p}$. Vbi ſi q diſtantiae y fiat proportionalis aequatio ad differentialem primi gradus poterit reduci.

Corollarium 3.

1019. Sit igitur exponens reſiſtentiae $q=\frac{y}{\alpha}$, atque curua deſcripta ſequente aequatione exprimetur $\frac{\alpha\,dy}{\sqrt{(y^2-p^2)}} = \frac{ddp}{dp} - \frac{n\,dy}{y} - \frac{3\,dp}{p}$. In qua cum in ſingulis terminis dimenſionum numerus euaneſcat, reductio ad differentialem primi gradus locum habet.

Corollarium 4.

1020. Hoc autem modo reperietur aequatio differentialis primi gradus. Ponatur $y = e^{\int z dt}$ et $p = e^{\int z dt}t$; erit $dy = e^{\int z dt}z dt$, et $ddy = e^{\int z dt}(z ddt + dz dt + z^2 dt^2) = 0$. Quare erit $ddt = -\frac{dz dt}{z} - z dt^2$. Porro erit $dp = e^{\int z dt}(dt + z t dt)$ et $ddp = e^{\int z dt}(ddt + z t ddt + t dt dz + 2 z dt^2 + z^2 t dt^2) = e^{\int z dt}(-\frac{dz dt}{z} + z dt^2)$. Ex quibus reperietur $\frac{\alpha z dt}{\sqrt{(1-t^2)}} = -\frac{dz+z^2 dt}{z+z^2 t} - n z d t - \frac{3dt}{t} - 3 z d t = \frac{-t dz - 3 z dt - (n+4) t z^2 dt - (n+3) t^2 z^3 dt}{tz(1+tz)} = -\frac{t dz - z dt}{tz(1+tz)} - \frac{2dt}{t} - (n+3) z dt$.

Corollarium 5.

1021. Si vis centripeta reciproce proportionalis ponatur cubis diſtantiarum, erit $n = -3$. Curua ergo deſcripta continebitur hac aequatione $\frac{\alpha z dt}{\sqrt{(1-t^2)}} = -\frac{t dz - z dt}{tz(1+tz)} - \frac{2 dt}{t}$.

LIBER CTI CURVIL.

Curua er curua deſcripta $\frac{\alpha z dt}{\sqrt{(1-t^2)}} =$ $-\frac{3dp}{p}$. Vbi ſi q quatio ad differ duci.

10 proportio Atque cu tione $\frac{\alpha}{\sqrt{}}$ modo ſi ta eſſet p eſiſtentiae $q=\frac{y}{\alpha}$, atione exprimen in ſingulis tereſcat, reductio m habet.

10 cuo deſcr caſu fit r ideo reſi haec ae eperietur aequa- onatur $y = e^{\int z dt}$ $y = e^{\int z dt}(z ddt +$ $dt = -\frac{dz dt}{z} - z dt^2$. et $ddp = e^{\int z dt}$ $+ z^2 t dt^2) = e^{\int z dt}$

10 ſtentis, ſiſtere p tro, ac lem pri expone teſt. I a ſolis perietur $\frac{\alpha z dt}{\sqrt{(1-t^2)}}$ $z dt$ = — $= -\frac{t dz - z dt}{tz(1+tz)}$

5. ciproce propor- n, erit $n = -3$. Cur-

Corollarium 6.

1022. Si vis centripeta fuerit reciproce proportionalis quadratis diſtantiarum erit $n = -2$. Atque curua deſcripta ſequente exprimetur aequatione $\frac{\alpha z dt}{\sqrt{(1-tt)}} = -\frac{t dz - z dt}{tz(1+tz)} - \frac{2dt}{t} - z d t$. Eodem modo ſi vis centripeta ipſis diſtantiis ſeu $n = 1$ poſita eſſet prodiiſſet $\frac{\alpha z dt}{\sqrt{(1-tt)}} = -\frac{t dz - z dt}{tz(1+tz)} - \frac{2dt}{t} - 4 z dt$.

Corollarium 7.

1023. Omnes hae aequationes curuas in vacuo deſcriptas dabunt, ſi ponatur $\alpha = 0$. Hoc enim caſu fit reſiſtentiae exponens infinite magnus atque ideo reſiſtentia infinite parua. Habebitur autem haec aequatio $\frac{t dz + z dt}{tz(1+tz)} + \frac{2dt}{t} + (n+3) z dt = 0$.

Scholion.

1024. Quando igitur exponens medii reſiſtentis, quod in duplicata celeritatum ratione reſiſtere ponitur, proportionalis eſt diſtantiis a centro, aequatio pro curua deſcripta ad differentialem primi gradus reduci poteſt; id quod in aliis exponentis reſiſtentiae q hypotheſibus vix fieri poteſt. Intelligo autem tales ipſius q valores, qui a ſolis diſtantiis y pendent, quippe quae poſitio ſo-

la

la admitti poteſt ratione. Incongruum enim eſſet q per p i. e. per ipſam curuam, quae adhuc eſt incognita, dare. Interim tamen aequatio differentio-differentialis ſemper ad differentialem primi gradus poteſt reduci, quoties q fuerit functio vnius dimenſionis ipſarum y et p coniunctim. Sed cum hae aequationes, tametſi ſunt differentiales primi gradus, neque integrari neque ſeparari queant, nihil praeſtant vtilitatis. Hanc ob rem reſiſtentiam, quae celeritatibus ipſis eſt proportionalis, conſiderabimus cum vi centripeta cuicunque diſtantiarum poteſtati proportionali coniunctam.

PROPOSITIO 122.
Problema.

Tabula XIII Fig. 2.

1025. *In medio vniformi, quod reſiſtit in ſimplici celeritatum ratione, moueatur corpus attractum ad centrum C vi poteſtati cuicunque diſtantiarum proportionali: determinare curuam AM quam corpus deſcribet.*

Solutio.

Poſitis CM $=y$, CT $=p$, Mm $=ds$, celeritate in M debita altitudini v, et exponente reſiſtentiae $=q$, ſit vis centripeta $=\frac{y^n}{f^n}$, et area ACM $=\frac{1}{2}\int p\,ds = S$. His praemiſſis erit $\sqrt{v}=\frac{b\sqrt{bc}-S}{p\sqrt{c}}$, et $\frac{y^n}{f^n} =$

LI CURV.
$=\frac{2(bV}{}$ enim eſſet
do cel huc eſt in-
C in o differen-
netur lem primi
nctio vnius
ma b Sed cum
iales primi
do po neant, ni-
$=\frac{cp}{}$ ſiſtentiam,
lis, conſi-
diſtantia-
$\frac{dy}{\sqrt{(y^2-}}$ 1.
Quae
primit
ritas c
Q. E. reſiſtit in
pus attra-
e diſtanti-
1 AM quam
tum d
$cp.y^{\frac{n-}{2}}$
bus ae celeritate
mi gr eſiſtentiae
M $=\frac{1}{2}\int p$
per l , et $\frac{y^n}{f^n}$
=

$=\frac{2(b\sqrt{bc}-S)^2dp}{cp^3dy}$ (1012 et 1014), vbi b eſt altitudo celeritati in A debita, et h perpendiculum ex C in tangentem in A demiſſum. Quo eliminetur S, aequationi inuentae haec induatur forma $b\sqrt{bc}-S=\frac{\sqrt{cp^3y^ndy}}{\sqrt{2f^ndp}}$. Ex qua differentiando poſito dp conſtante oritur $-\frac{p\,ds}{2}=-\frac{ypdy}{2\sqrt{(y^2-p^2)}}$ $=\frac{cp^3y^nddy+3cp^2y^ndydp+ncp^3y^{n-1}dy^2}{2\sqrt{2f^ncp^3y^ndydp}}$ ſeu $o=$

$$\frac{dy}{\sqrt{(y^2-p^2)}}+\frac{cpy^{\frac{n-2}{2}}ddy+3cy^{\frac{n-2}{2}}dydp+ncpy^{\frac{n-4}{2}}dy^2}{\sqrt{2f^ncpdydp}}$$

Quae aequatio naturam curuae deſcriptae AM exprimit. Hac vero cognita ſtatim innoteſcit celeritas corporis ex area curuae et perdendiculo p. Q. E. I.

Corollarium I.

1026. Si loco dp aſſumtum fuiſſet elementum dy conſtans, prodiiſſet iſta aequatio $\frac{dp}{\sqrt{(y^2-p^2)}}=$ $\frac{cpy^{\frac{n-2}{2}}ddp-3cy^{\frac{n-2}{2}}dp^2-ncpy^{\frac{n-4}{2}}dydp}{\sqrt{2f^ncpdydp}}$. Ex quibus aequationibus autem, quia ad differentiales primi gradus reduci nequeunt, nihil poteſt concludi.

Corollarium 2.

1027. Reductio ſupra (1020) adhibita ſemper locum habet, ſi in aequatione differentio-differenrentiali indeterminatae p et y eundem dimensionum numerum constituunt. Hoc autem accidit si $n=1$, i. e. si vis centripeta fuerit ipsis distantiis a centro proportionalis. Erit tum enim pro curua quaesita $\frac{ydp}{\sqrt{(y^2-p^2)}} = \frac{cpyddp-3cydp^2-cpdydp}{\sqrt{2fcypdydp}}$. Posito dy const.

Corollarium 3.

1028. Hac igitur hypothesi ponatur $y=e^{\int zdt}$ et $p=e^{\int zdt}t$; vnde fit $dy=e^{\int zdt}zdt$; $dp=e^{\int zdt}dt(1+zt)$ et $ddp=e^{\int zdt}dt(-\frac{dz}{z}+zdt)$. His substitutis habebitur $\frac{dt(1+tz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2ftz}}{\sqrt{c(1-tt)}} = -\frac{tdz}{z}-3dt-6tzdt-4t^2z^2dt = -\frac{tdz-zdt}{z}-2dt(1+tz)(1+2tz)$. Seu posito $tz=u$ prodibit $\frac{dt(1+u)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2fu}}{\sqrt{c(1-tt)}} = -\frac{tdu}{u} -2dt(1+u)(1+2u)$.

Corollarium 4.

1029. Aequatio haec integrationem admittit si diuidatur per $tt(1+u)^{\frac{3}{2}}\sqrt{u}$, prodibit enim

$$\frac{dt\sqrt{2f}}{tt\sqrt{c(1-tt)}} = -\frac{du}{tu(1+u)^{\frac{3}{2}}\sqrt{u}} - \frac{2dt(1+2u)}{tt\sqrt{(u+u^2)}}$$

Cuius integralis est $C-\frac{\sqrt{2f(1-tt)}}{t\sqrt{c}} = \frac{2(1+2u)}{t\sqrt{(u+u^2)}}$, seu $Ct-\frac{\sqrt{f(1-tt)}}{\sqrt{2c}} = \frac{1+2u}{\sqrt{(u+u^2)}} = \frac{1+2tz}{\sqrt{(tz+t^2z^2)}}$.

Co-

LI CURVIL.

rensionum … si $n=1$, … a centro … na quaesita … $=\frac{p}{y}$, Quam … const. $=\frac{ydp}{\sqrt{p}}$

ur $y=e^{\int zdt}$ … $e^{\int zdt}dt(1+$ … substitutis … nalia $=\frac{y^2}{}$ … $t-6tzdt-$ … sequer … a se in … $tz)$. Seu $\frac{2dy}{y}$ … $= -\frac{tdu}{u}$

non i … tegra … quo … trans … tegra … xum, dam … sis ad … iem admit- … odibit enim … $\frac{dt(1+2u)}{t\sqrt{(u+u^2)}}$ … $+2u)$ … $+u^2)$, seu

Co-

Corollarium 5.

1030. Est vero vi substitutionum factarum $t=\frac{p}{y}$, $z=\frac{ydy}{ydp-pdy}$ et $u=\frac{pdy}{ydp-pdy}$ ac $1+u=\frac{ydp}{ydp-pdy}$. Quamobrem pro curua quaesita erit $\frac{Cp}{y}-\frac{\sqrt{f(y^2-p^2)}}{y\sqrt{2c}} = \frac{ydp+pdy}{\sqrt{pydpdy}}$.

Corollarium 6.

1031. Quo autem differentialia fiant rationalia est $2u+1=\frac{Ct\sqrt{2c}-\sqrt{f(1-tt)}}{\sqrt{((Ct\sqrt{2c}-\sqrt{f(1-tt)})^2-2c)}} = \frac{ydp+pdy}{ydp-pdy} = \frac{y^2dt+2ytdy}{y^2dt}$ restituto $p=yt$. Habebitur ergo sequens aequatio in qua indeterminatae y et t sunt a se inuicem separatae $\frac{Ctdt\sqrt{2c}-dt\sqrt{f(1-tt)}}{t\sqrt{((Ct\sqrt{2c}-\sqrt{f(1-tt)})^2-2c)}}-\frac{dt}{t}=\frac{2dy}{y}$. Ex qua aequatione curua construi poterit.

Scholion.

1032. Huic aequationi vlterius reducendae non immoror, etsi suspicor eam denuo posse integrari. Hoc quidem certum si fuerit $C\sqrt{2b}=f$; quo casu integrale tam fit compositum, vt huc transferre noluerim. Ex quo intelligi potest integrale generaliter sumtum maxime fore perplexum, ita vt vix quicquam ad motum cognoscendum inde deduci posset. Quamobrem his missis ad inuersa problemata pergo.

PRO-

PROPOSITIO 123.

Problema.

Tabula XIII Fig. 2.

1033. *Si data fuerit curua AM quam corpus deſcribit et reſiſtentia in ſingulis locis M, determinare vim centripetam ad centrum C perpetuo directam, et celeritatem in ſingulis locis.*

Solutio.

Ponantur vt ante $CM=y$, $Mm=ds$, $CT=p$, altitudo debita celeritati in $M=v$, reſiſtentia $=R$, et vis centripeta $=P$. His poſitis habebitur iſta aequatio $dv+\frac{2vdp}{p}=-R\,ds$ (1007), ex qua cum curua AM et reſiſtentia R dentur, inuenietur v ex aequatione integrali $p^2v=-\int Rp^2ds$, nempe $v=-\frac{\int Rp^2ds}{p^2}$. Inuenta autem v reperietur $P=\frac{2vdp}{pdy}=-\frac{2dp\int Rp^2ds}{p^3dy}$ (1005). Q. E. I.

Corollarium 1.

1034. Si celeritas in initio A ponatur $\sqrt{b}$ et perpendiculum in tangentem in A ex C demiſſum $=b$, in caſu nullius reſiſtentiae ſeu in vacuo prodiiſſent hae aequationes $p^2v=bb^2$ et $P=\frac{2bb^2dp}{p^3dy}$.

Corollarium 2.

1035. In medio igitur reſiſtente ſi $\int Rp^2ds$ ita capiatur, vt euaneſcat, euaneſcente arcu AM, erit $v=\frac{bb^2-\int Rp^2ds}{p^2}$ et $P=\frac{2dp(bb^2-\int Rp^2ds)}{p^3dy}$.

Co-

LI … I CURVIL.
… I quam cor-
ua A… M, de-
tur c… C perpetuo
vis ce…
V : …
…ds, CT=p,
, reſiſtentia
tis habebitur
ua A… 7), ex qua
peta … inuenietur v
ex ea… ds, nempe v
Inuent… tur $P=\frac{2vdp}{pdy}$
tia vir…
ſtente,
ſiſtent…
ponatur $\sqrt{b}$
ex C demiſ-
ſeu in vacuo
et $P=\frac{2bb^2dp}{p^3dy}$.
centru…
ſeu R…
re hab…
et P…
ite ſi $\int Rp^2ds$
et pro… e arcu AM,
co eti… $p^2ds)$.
vis ce…
Co-

Corollarium 3.

1036. Si corpus in vacuo moueretur in curua AM eadem celeritate initiali in A, et ſi dicatur celeritas, quam in M habiturum eſſet $\sqrt{u}$, et vis centripeta in $M=V$, tum foret $u=\frac{bb^2}{p^2}$ et $V=\frac{2bb^2dp}{p^3dy}$. Quare erit $u:u-v=bb^2:\int Rp^2ds$ et $V:V-P=bb^2:\int Rp^2ds$.

Corollarium 4.

1037. Cum igitur hoc problema, quo curua AM et celeritas initialis in A datur, vis centripeta vero quaeritur, iam ſit ſolutum in cap. praec. ex eadem ſolutione ſimul hoc problema ſoluitur. Inuenta enim $\int Rp^2ds$, ſtatim innoteſcit differentia virium centripetarum in vacuo et medio reſiſtente, atque ideo ipſa vis centripeta in medio reſiſtente.

Exemplum 1.

1039. Si curua AM fuerit circulus radii a, centrum in C habens, et reſiſtentia vbique eadem ſeu $R=$ conſtanti λ; erit $y=p=a$ et $b=a$. Quare habebitur $\int Rp^2ds=\lambda a^2s$, ideoque $v=b-\lambda s$ et $P=\frac{2b-2\lambda s}{a}$. Celeritas ergo perpetuo decreſcit, et prorſus euaneſcit deſcripto arcu $=\frac{b}{\lambda}$, quo loco etiam vis centripeta in nihilum abit. Eſt autem vis centripeta vbique vt quadratum celeritatis.

Tem-

Tempus praeterea, quo arcus AM percurritur eſt $\frac{2\sqrt{b}-2\sqrt{(b-\lambda s)}}{\lambda}$, et tempus quo corpus ad quietem redigitur eſt $\frac{2\sqrt{b}}{\lambda}$.

Exemplum 2.

Tabula XIII Fig 2

1039. Sit curua AMC logarithmica ſpiralis, cuius centrum in C, et reſiſtentia ſit poteſtas quaecunque diſtantiae CM, nempe $R = \frac{y^n}{f^n}$. Erit ergo $p = \alpha y$ et poſito $\epsilon = \sqrt{(1-\alpha^2)}$, $ds = -\frac{dy}{\epsilon}$. Ponatur vero $AC = a$, erit $b = \alpha a$. Fiet igitur $\int R p^2 ds = \frac{\alpha^2 a^{n+3} - \alpha^2 y^{n+3}}{(n+3)\epsilon f^n}$, hincque $v = \frac{(n+3)\epsilon a^2 b f^n - a^{n+3} + y^{n+3}}{(n+3)\epsilon f^n y^2}$. Atque $P = \frac{2(n+3)\epsilon a^2 b f^n - 2a^{n+3} + 2y^{n+3}}{(n+3)\epsilon f^n y^3}$. In caſu vero quo $n = -3$, qui a logarithmis pendet eſt $\int R p^2 ds = \frac{\alpha^2 f^3}{\epsilon} l \frac{a}{y}$. Atque $v = \frac{\epsilon a^2 b - f^3 l \frac{a}{y}}{\epsilon y^2}$ et $P = \frac{2\epsilon a^2 b - 2f^3 l \frac{a}{y}}{\epsilon y^3}$.

Corollarium 5.

1040. Si tanta corpori in A imprimatur celeritas initialis vt ſit $b = \frac{a^{n+1}}{(n+3)\epsilon f^n}$; erit etiam

TI CURVIL.
percurritur eſt
vbiq us ad quietem
Hoc
R vt
ithmica ſpira-
ia ſit poteſtas
$R=\frac{y^n}{f^n}$. Erit
$1-\alpha^2)$, ds
erit $b = \alpha a$.
hinc-
Atque
In
arithmis pen-
$= \frac{\epsilon a^2 b - f^3 l \frac{a}{y}}{\epsilon y^2}$
celer
tur
bere
port
tur c
dio
bi a
quad.
primatur cele-
; erit etiam
vbi-

vbique $v = \frac{y^{n+1}}{(n+3)\epsilon f^n}$ et $P = \frac{2y^n}{(n+3)\epsilon f^n}$ Hoc igitur caſu vis centripeta P erit ad reſiſtentiam R vt 2 ad $(n+3)\epsilon$. i. e. in data ratione.

Corollarium 6.

1041. Eodem hoc caſu eſt $y = (n+3)^{\frac{1}{n+1}} \epsilon^{\frac{1}{n+1}} f^{\frac{n}{n+1}} v^{\frac{1}{n+1}}$ atque $\frac{y^n}{f^n} = \frac{(n+3)^{\frac{n}{n+1}} \epsilon^{\frac{n}{n+1}} v^{\frac{n}{n+1}}}{f^{\frac{n}{n+1}}} = R$. Reſiſtentia igitur erit in $\frac{2n}{n+1}$ *plicata* ratione celeritatum medio exiſtente vniformi, quippe cuius exponens eſt $\frac{f}{(n+3)\epsilon}$.

Corollarium 7.

1042. Si $n = 1$, erit reſiſtentia in ratione celeritatum, et medii exponens $\frac{f}{4\epsilon}$. In hoc igitur medio corpus ſpiralem logarithmicam deſcribere poterit, ſi vis centripeta fuerit diſtantiis proportionalis nempe $= \frac{y}{2\epsilon f}$ et ſi initio in A proiciatur celeritate $\frac{a}{2\sqrt{\epsilon f}}$. In quocunque praeterea medio reſiſtente vniformi ſpiralis data poterit deſcribi a corpore, excepto caſu, quo reſiſtentia eſt quadratis celeritatum proportionalis.

Scholion.

1043. Qualis vis centripeta et qualis reſiſtentia requiratur ad id, vt corpus in ſpirali logarithmica moueatur, Viri iam ſaepius citati *Neutonus* et *Bernoullius* in Princip. Phil. et Act. Lipſ. 1713 expoſuere. In ſequentibus deinde exemplis plura hac de re afferemus.

PROPOSITIO 124.

Problema.

Tab. XIII. Fig. 2. 1044. *Si reſiſtentia fuerit cuicunque celeritatum poteſtati proportionalis eiusque exponens in ſingulis locis detur: inuenire vim centripetam, quae faciat vt corpus in data curua* AM *moueatur.*

Solutio.

Manentibus vt ante $CM = y$, CT, p, Mm, ds, celeritate in $M = \sqrt{v}$, et exponente reſiſtentiae $= q$, ſit reſiſtentia $R = \frac{v^m}{q^m}$ et vis centripeta $= P$. His poſitis erit $P = \frac{2v\,dp}{p\,dy}$ (1005), et $dv + \frac{2v\,dp}{p} = -\frac{v^n ds}{q^m}$ (1007). Haec aequatio integrata dat $v^{1-m} = -\frac{(1-m)}{p^{2(1-m)}} \int \frac{p^{2(1-m)} ds}{q^m}$. Caſu vero quo

LI … CTICURVIL.
quo … et qualis reſi- … ſpirali loga- mul in … citati Neuto- … et Act. Lipſ. … inde exemplis
iicitur … C in … $\int \frac{(m-}{}$ … cto s … grale … cunque celerita- … ponens in ſin- $v^{1-m} =$ … tam, quae fa- $v = b$, … moueatur. go co
CT, p, Mm, … ente reſiſten- tegrat … is centripeta nescat …), et $dv +$ … atio integra- $P = -$ … Caſu vero quo

quo $m = 1$ eſt $v = \frac{1}{p^2 e^{\int \frac{ds}{q}}}$. Inuenta autem v ſimul innoteſcit P ex aequatione $P = \frac{2v\,dp}{p\,dy}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

1045. Sit celeritas, qua corpus in A proiicitur, debita altitudini b, et perpendiculum ex C in tangentem in A demiſſum $= h$. Atque $\int \frac{(m-1) p^{2(1-m)} ds}{q^m}$, ita ſumatur vt euaneſcat facto $s = o$ ſeu M in A incidente; hocque integrale ponatur $= S$. Addita igitur conſtante erit $v^{1-m} = \frac{C + S}{p^{2(1-m)}}$. Fiat nunc $S = o$, erit $p = h$ et $v = b$, ideoque $C = b^{1-m} h^{2(1-m)}$. Determinata ergo conſtante C habebitur $v^{1-m} = \frac{b^{1-m} h^{2(1-m)} + S.}{p^{2(1-m)}}$

Corollarium 2.

1046. In caſu $m = 1$, qui peculiarem integrationem requirit, ſi $\int \frac{ds}{q}$ ita ſumatur vt euaneſcat facto $s = o$; erit $v = \frac{bh^2}{p^2 e^{\int \frac{ds}{q}}}$, ideoque $P = \frac{2bh^2 dp}{e^{\int \frac{ds}{q}} p^3\,dy}$. In vacuo prodiiſſet $P = \frac{2bh^2 dp}{p^3 dy}$

Erit

Erit ergo vis centripeta in vacuo ad vim centripetam in hoc medio reſiſtente vt 1 ad $e^{-\int \frac{ds}{q}}$.

Corollarium 3.

1047. Denotante autem m quemcunque alium numerum praeter 1 eſt $v = \frac{(b^{1-m}p^{2(1-m)} + S)^{\frac{1}{1-m}}}{p^2}$. Ex quo prodit $P = \frac{2(b^{1-m}p^{2(1-m)} + S)^{\frac{1}{1-m}} dp}{p^3 ay}$. In vacuo vero prodiiſſet vis centripeta $= \frac{2bb^2 dp}{p^3 dy}$, quae ſi dicatur $= V$ erit $V : P = bb^2 : (b^{1-m}p^{2(1-m)} + S)^{\frac{1}{1-m}}$. Atque hinc $V^{1-m} : P^{1-m} - V^{1-m} = b^{1-m}p^{2(1-m)} : S$.

Corollarium 4.

1048. Quare ſi reperta fuerit vis centripeta, quae in vacuo datam curuam AM producit, ex ea ope huius analogiae inuenietur vis centripeta, quae idem in medio quocunque reſiſtente praeſtabit, ſi modo determinetur valor ipſius $\int \frac{(m-1) p^{2(1-m)} ds}{q^m}$.

Exemplum 1.

1049. Si curua data fuerit circulus centrum in D habens, cuius radius $MC = a$, erit $y = p = a$ et

LIBE. I CURVIL.
et $b = a$ m centripe-
$q = c$; $-\int \frac{ds}{q}$.
et $V =$
$b^{1-m} + \frac{(m}{}$ icunque ali-
-m)+S $\frac{1}{1-m}$
$(m-1)$
$2(b^{1-m}-$ $\frac{1}{1-m} dp$. In
in ſimplic $\frac{bb^2 dp}{p^3 dy}$, quae
-m)+S)$^{\frac{1}{1-m}}$.
-m): S.
quam cor
peruenerit
tripeta e centripeta,
leritatum icit, ex ea
$\frac{2b}{ae^{\frac{s}{c}}}$. C ipeta, quae
culi pror aeſtabit, ſi
corpus m
enim cen
tem pror
culum in us centrum
it $y = p = a$
et

et $b = a$. Sit praeterea medium vniforme ſeu $q = c$; erit $\int \frac{(m-1) p^{2(1-m)} ds}{q^m} = \frac{(m-1) a^{2(1-m)} s}{c^m} = S$ et $V = \frac{2b}{a}$. Habebitur igitur $\frac{2b}{a} : P = a^2 b : (a^{2(1-m)} b^{1-m} + \frac{(m-1) a^{2(1-m)} s}{c^m})^{\frac{1}{1-m}}$, ſeu $P : 1 = (b^{1-m} + (m-1) c^{-m} s)^{\frac{1}{1-m}} : \frac{a}{2}$. Vnde oritur $P = \frac{2(b^{1-m} + (m-1) c^{-m} s)^{\frac{1}{1-m}}}{a}$. Si reſiſtentia fuerit in ſimplici ratione celeritatum erit $m = \frac{1}{2}$ et $P = \frac{(2\sqrt{bc} - s)^2}{2ac}$, et $v = \frac{(2\sqrt{bc} - s)^2}{4c}$, vnde ipſa celeritas erit $= \frac{2\sqrt{bc} - s}{2\sqrt{c}}$ et tempus, quo arcum AM abſoluit $2\sqrt{c}\, l \frac{2\sqrt{bc}}{2\sqrt{bc} - s}$. Opus ergo eſt tempore infinito, antequam corpus arcum abſoluat $= 2\sqrt{bc}$, quo, cum peruenerit omnem motum amittit et ſimul vis centripeta euaneſcit. Si reſiſtentia fuerit quadratis celeritatum proportionalis erit $v = be^{-\frac{s}{c}}$ et $P = \frac{2b}{ae^{\frac{s}{c}}}$. Ceterum motus corporis in peripheria circuli prorſus congruit cum motu rectilineo, quo corpus motum impreſſum a reſiſtentia amittit. Vis enim centripeta quia ſemper eſt normalis celeritatem prorſus non afficit, ſed tantum motum in circulum inflectit.

Exem-

Exemplum 2.

Tabula XIII Fig. 3.

1050. Descendat corpus ex A verſus centrum C in logarithmica ſpirali AM, ſitque exponens reſiſtentiae q vt dignitas quaecunque diſtantiae MC, y ita vt ſit $q = \frac{y^{n+1}}{f^n}$. Ex natura logarithmicae eſt $p = \alpha y$, atque facta $AC = a$ erit $s = \alpha a$, et poſito $\beta = \sqrt{(1-\alpha^2)}$ erit $ds = -\frac{dy}{\beta}$. Hinc erit $\int (m-1)\frac{p^{2(1-m)}ds}{q^m} = \frac{(1-m)\alpha^{2(1-m)}f^{mn}}{(3-3m-mn)\beta}(y^{3-3m-mn} - a^{3-3m-mn}) = S$. Sit praeterea $b^{1-m} = \frac{(1-m)a^{1-m-mn}f^{mn}}{(3-3m-mn)\beta}$ erit $v = \frac{(1-m)^{\frac{1}{1-m}}f^{\frac{mn}{1-m}}y^{1-\frac{mn}{1-m}}}{(3-3m-mn)^{\frac{1}{1-m}}\beta^{\frac{1}{1-m}}}$

atque $P = \frac{2(1-m)^{\frac{1}{1-m}}f^{\frac{mn}{1-m}}y^{-\frac{mn}{1-m}}}{(3-3m-mn)^{\frac{1}{1-m}}\beta^{\frac{1}{1-m}}}$. Vis centripeta igitur erit reciproce vt poteſtas diſtantiae, cuius exponens eſt $\frac{mn}{1-m}$.

Corollarium 5.

1051. Si vis centripeta eſt conſtans $= \frac{2}{(3\beta)^{\frac{1}{1-m}}}$, corpus in ſpirali logarithmica, cuius anguli interſectionis radiorum cum curua coſinus eſt β, moueri poterit, ſi exiſtente exponente

LI. … TI CURVIL.

te re… … verſus cen-
(3β)… …ſitque expo-
…que diſtantiae

elevat… …natura loga-
$P =$ … $AC = a$ erit
… $ds = -\frac{dy}{\beta}$.
… $\alpha^{2(1-m)}f^{mn}$
… $(3-3m-mn)\beta$

debet … terea $b^{1-m} =$
… $1 - \frac{mn}{1-m}$

vnde … $\beta^{\frac{1}{1-m}}$

…is centripeta

…tantiae, cuius

abſol…

Temp…
eſt ſi… …onſtans $=$
vel k …thmica, cu-

…m curua co-
prop… …te exponen-
te

te reſiſtentiae $= y$, et celeritate initiali debita alt. $(3\beta)^{\frac{1}{1-m}}$.

Corollarium 6.

1052. Si vis centripeta fuerit vt diſtantia y eleuata ad k, erit $-\frac{mn}{1-m} = k$ et $n = -\frac{k(1-m)}{m}$, vnde $P = \frac{2y^k}{(3+k)^{\frac{1}{1-m}}\beta^{\frac{1}{1-m}}f^k}$. Reſiſtente ergo exponens debet eſſe $= \frac{y^{\frac{m+mk-k}{k}}}{f^{\frac{mk-k}{m}}}$, et $v = \frac{y^{k+1}}{(2\beta+\beta k)^{\frac{1}{1-m}}f^k}$ vnde $b = \frac{a^{k+1}}{(3\beta+\beta k)^{\frac{1}{1-m}}f^k}$.

Corollarium 7.

1053. Tempus praeterea, quo arcus AM abſoluitur eſt $\int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{2\beta^{\frac{2m-1}{2-2m}}f^{\frac{k}{2}}}{1-k}(a^{\frac{1-k}{2}} - y^{\frac{1-k}{2}})$. Tempus igitur, quo in centrum C vsque deſcendit eſt finitum ſi $k < 1$, infinitum vero erit ſi vel $k = 1$ vel $k > 1$.

Corollarium 8.

1054. Sit reſiſtentia quadratis celeritatum proportionalis et exponens reſiſtentiae $= \frac{y}{\delta}$ erit

$$\int\frac{ds}{q}=\frac{\delta}{\varepsilon}l\frac{a}{y} \text{ et } e^{\int\frac{ds}{q}}=\frac{a^{\frac{\delta}{\varepsilon}}}{y^{\frac{\delta}{\varepsilon}}}=\frac{a^i}{y^i} \text{ poſito } i=\frac{\delta}{\varepsilon}$$

Hinc erit $v=\frac{by^{i-2}}{a^{i-2}}$ et $P=\frac{2by^{i-3}}{a^{i-2}}$. In medio igitur hoc reſiſtente corpus quamcunque logarithmicam ſpiralem deſcribere poterit, ſi fuerit vis centripeta $=\frac{2by^{i-3}}{a^{i-2}}$ et exponens reſiſtentiae $=\frac{y}{\varepsilon i}$.

Scholion.

1055. In hoc igitur exemplo et corollariis annexis omnes continentur caſus, quibus corpus in medio quocunque reſiſtente logarithmicam ſpiralem deſcribere poteſt, ſollicitatum a vi centripeta poteſtati cuicunque diſtantiarum proportionali. Vbi caſus quo reſiſtentia proportionalis eſt quadratis celeritatum et eius exponens diſtantiis a centro hoc habet peculiare, vt ſtatim det vim centripetam poteſtati diſtantiarum proportionalem, quod in aliis reſiſtentiae hypotheſibus demum poſt certo modo determinatam celeritatem initialem obtinebatur. In illa autem reſiſtentiae hypotheſi, exiſtente exponente reſiſtentiae $\frac{y}{\delta}$, ſi corpus in A celeritate quacunque $\sqrt{b}$ ſecundum directionem, cuius cum AC inclinationis coſinus eſt ε proiiciatur, et vis centripeta in A fuerit $=\frac{2b}{a}$, corpus ſemper in logarithmica ſpirali mouebitur, ſi praeterea vis centri-

LIB … CTI CURVIL.

tripeta … poſito $i=\frac{\delta}{\varepsilon}$
In his
ſpirali … In medio
… nque logarith-
, ſi fuerit vis
1 … ſiſtentiae $=\frac{y}{\varepsilon i}$.
ſcribit
uenire
celerit

… et corollariis … uibus corpus in … icam ſpiralem
F … centripeta po-
tripeta … rtionali. Vbi
M=R … quadratis ce-
poſitis … a centro hoc
(100 … ntripetam po-
ex illa … quod in aliis
ando … certo modo
… obtinebatur.
erit … exiſtente ex-
quadr … A celeritate
ponat … cuius cum
… iatur, et vis
$q=$ … ſemper in lo-
ſeu a … erea vis cen-
tri-

tripeta fuerit vt y^{i-3}, datur autem i quia eſt $i=\frac{\delta}{\varepsilon}$. In his igitur ſatis ſunt expoſita, quae motum in ſpirali logarithmica ſpectant.

PROPOSITIO 125.

Problema.

1056. *Si detur curua* AM, *quam corpus deſcribit et vis centripeta ad centrum* C *tendens; inuenire reſiſtentiam requiſitam in ſingulis locis* M *et celeritatem corporis.* Tab. XIII. Fig. 2.

Solutio.

Poſita $MC=y$, $CT=t$, $Mm=ds$, ſit vis centripeta in $M=P$. Deinde ponatur reſiſtentia in $M=R$, et altitudo debita celeritati in $M=v$. His poſitis erit $P=\frac{2vdp}{pdy}$ (1005) et $dv+\frac{2vdp}{p}=-Rds$ (1007). Ob datam curuam et vim centripetam ex illa aequatione inuenitur $v=\frac{Ppdy}{2dp}$, et differentiando poſito dy conſtante eſt $dv=\frac{3Pdy}{2}+\frac{pdPdy}{2dp}-\frac{Ppdyddp}{2dp^2}$. Quibus loco v et dv valoribus ſubſtitutis erit $R=\frac{Ppdyddp}{2dsdp^2}-\frac{pdPdy}{2dsdp}-\frac{3Pdy}{2ds}$. Si reſiſtentia fuerit quadratis celeritatum proportionalis eius exponens ponatur q erit $R=\frac{v}{q}$ et $q=\frac{v}{R}$. Quare habebitur

$$q=\frac{Ppdsdp}{Ppddp-pdP-3Pdp}.$$

Ex data ergo curua ſeu aequatione inter y et p, et vi centripeta tam reſi-

reſiſtentiam R, quam celeritatem in ſingulis locis determinauimus. Q. E. I.

Corollarium 1.

1057. Alio exprimendi modo erit reſiſtentia $R = -\frac{1}{p^2 ds} d.\frac{Pp^3 dy}{2dp}$ et $q = -\frac{Pp^3 dy\, ds}{2dp\, d.\frac{Pp^3 dy}{2dp}}$ Ex quo perſpicitur ſi fuerit P vt $\frac{dp}{p^3 dy}$, euaneſcere reſiſtentiam. Hoc enim caſu vis centripeta ſola ſufficit ad curuam datam producendam.

Corollarium 2.

1058. Poſita celeritate initiali in $A = \sqrt{b}$ et perpendiculo ex C in tangentem in A demiſſo $= h$ ſit vis centripeta, quae in vacuo faciat eſt corpus in hac curua moueatur, $= V$ erit $V = \frac{2bh^2 dp}{p^3 dy}$ (592). Hanc ob rem $R = -\frac{bh^2}{p^2 ds} d.\frac{P}{V}$, et $q = -\frac{P ds}{V\, d.\frac{P}{V}}$ Atque $v = \frac{bh^2 P}{V p^2}$.

Corollarium 3.

1059. Si corpus in hac curua in vacuo a vi V ſollicitatum moueretur, ſit eius celeritas in M debita altitudini u; eritque $u = \frac{bh^2}{p^2}$. Vnde haec habebitur analogia $u : v = V : P$. Atque generalitet hoc theorema obtinet: celeritates corporis in eodem loco M ſunt in ſubduplicata ratione virium centripetarum.

Co-

LI TI CURVIL.

ſingulis locis

$P =$ erit reſiſten-

lica , euaneſcere

$p =$ ntripeta ſola

cunq

$ds =$ in $A = \sqrt{b}$ et

$R =$ demiſſo $= h$

atque eſt corpus in

in d $\frac{2bh^2 dp}{p^3 dy}$ (592).

ſiſte $q = -\frac{P ds}{V\, d.\frac{P}{V}}$

plici

fit

in vacuo a vi

celeritas in M

Vnde haec

generalitet

poris in eo-

tione virium

Co-

Corollarium 4.

1060. Si vis centripeta fuerit conſtans ſeu $P = g$, erit $R = \frac{bh^2 g\, dV}{V^2 p^2 ds}$ et $q = \frac{V ds}{dV}$. Atque $v = \frac{bh^2 g}{V p^2}$.

Exemplum.

1061. Deſcendat corpus in ſpirali hyperbolica AM, cuius natura hac aequatione exprimitur; $p = \frac{ay}{\sqrt{(a^2+y^2)}}$, et ſit vis centripeta vt dignitas quaecunque a centro ſpiralis C; ſcilicet $P = \frac{y^n}{f^n}$. Erit $ds = -\frac{dy\sqrt{(a^2+y^2)}}{y}$, et $\frac{p^3 dy}{dp} = y^3$. Vnde prodit $R = \frac{(n+3)y^{n+1}\sqrt{(a^2+y^2)}}{2a^2 f^n}$ et $v = \frac{y^{n+3}(a^2+y^2)}{2a^2 f^n}$ atque ex his $q = \frac{\sqrt{(a^2+y^2)}}{n+3}$. Si medium ergo reſiſtit in duplicata celeritatum ratione erit exponens reſiſtentiae $= \frac{\sqrt{(a^2+y^2)}}{n+3}$. At ſi medium reſiſtat in ſimplici ratione celeritatum, et exponens reſiſtentiae ſit q erit $\sqrt{q} = \frac{\sqrt{v}}{R} = \frac{af^{\frac{n}{2}}\sqrt{2}}{(n+3)y^{\frac{n+1}{2}}}$, atque $q = \frac{2a^2 f^n}{(n+3)^2 y^{n+1}}$. In hac igitur reſiſtentiae hypotheſi medium erit vniforme ſi $n = -1$; hoc eſt ſi vis centripeta eſt in reciproca ratione diſtantiarum. Fit enim $q = \frac{a^2}{f}$. At ſi vis centripeta eſt reciproce vt quadratum diſtantiae, fiet reſiſtentiae exponens

nens $=\frac{2c^2y}{y^3}$ ſeu erit proportionalis ipſis a centro diſtantiis.

Scholion.

1062. Sequi hic deberet iuxta noſtrum inſtitutum problema, quo ex data curua et celeritate in ſingulis locis quaeruntur tam vis centripeta, quam reſiſtentia; ſed cum huius ſolutio ſit facillima et ex ipſis canonibus ſupra (1007), datis ſponte fluat; atque praeterea ex eo nihil notatu digni deduci queat, hic praetermitto. Inuenitur autem $P=\frac{2v\,dp}{p\,dy}$ et $R=-\frac{p\,dv-2v\,dp}{p\,ds}$, quae formulae problema ſoluunt. Adiicio vero loco huius problematis aliud affine, quo praeter curuam motus angularis circa centrum virium datur et tam vis centripeta quam vis reſiſtentiae quaeruntur.

PROPOSITIO 126.

Problema.

Tabula XIII Fig. 4. 1063. *Si detur curua* A M *in qua corpus mouetur et motus angularis circa centrum virium* C, *inuenire tam vim centripetam ad* A *tendentem, quam reſiſtentiam in ſingulis locis.*

Solutio.

Poſitis vt hactenus $CM=y$, $CT=p$, $Mm=ds$ celeritate in M debita altitudini v, vi centripeta $=P$ et vi reſiſtentiae $=R$, concipiatur centro C radio $EC=1$ deſcripta peripheria circuli ELl, in qua

TI CURVIL.
ipſis a centro
noſtrum inſti-
et celeritate
ntripeta, quam
acillima et ex
ſponte fluat;
digni deduci
autem $P=\frac{2v\,dp}{p\,dy}$
problema ſol-
lematis aliud
ngularis circa
ntripeta quam
qua corpus
um virium C,
dentem, quam
$T=p$, $Mm=$
vi centripe-
piatur centro
rculi ELl, in
qua

qua corpus eodem motu angulari circa C feratur, quo corpus in curua A M. Elementum ergo Ll eodem tempore abſoluitur, quo elementum Mm. Sit nunc celeritas per Ll debita altitudini u; erit u data, quia motus angularis datur. Atque habebitur $\frac{Ll}{\sqrt{u}}=\frac{Mm}{\sqrt{v}}$. Eſt vero $Ll:mr=1:y$ ſeu $Ll=\frac{mr}{y}$, porroque eſt $mr:Mm=p:y$, ideoque $mr=\frac{p.Mm}{y}$, et conſequenter $Ll=\frac{p.Mm}{y^2}$. Hanc ob rem habebitur $\frac{p}{y^2\sqrt{u}}=\frac{1}{\sqrt{v}}$, hincque $v=\frac{y^4u}{p^2}$. Inuenta iam hac ratione v erit $P=\frac{2y^4u\,dp}{p^3dy}$ (1005), et $R=-\frac{y^4du+4y^3u\,dy}{p^2ds}$ (1007). Atque ſi reſiſtentia ponatur quadratis celeritatum proportionalis et exponens reſiſtentiae $=q$, erit $q=-\frac{yu\,ds}{y\,du+4u\,dy}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

1064. Si vis centripeta P proportionalis eſt ipſi $\frac{dp}{p^3dy}$, id quod accidit, quando corpus mouetur in vacuo; erit u reciproce vt y^4. Quare celeritas angularis tum eſt reciproce vt quadratum diſtantiae corporis a centro. Facto autem y^4u conſtante ex aequatione altera perſpicitur euaneſcere reſiſtentiam R.

Corollarium 2.

1065. Si corpus ad centrum C accedit ita vt y decreſcat erit $ds=-\frac{y\,dy}{\sqrt{(y^2-p^2)}}$. Quare erit reſiſtentia $R=\frac{(y^3du+4y^2u\,dy)\sqrt{(y^2-p^2)}}{pp\,dy}$, et $q=\frac{y^2u\,dy}{(y\,du+4u\,dy)\sqrt{(y^2-p^2)}}$. Ex quo intelligitur ſi y^4u fuerit poteſtas ipſius y, cu-

cuius exponens eſt numerus affirmatiuus, reſiſtentiam fore affirmatiuam. At ſi exponens illius poteſtatis ipſius y fuerit negatiuus reſiſtentia quoque erit negatiua.

Corollarium 3.

1066. Si motus angularis debeat eſſe aequabilis ſeu u conſtans, erit $du = o$ ideoque $R = \frac{4y^2u\sqrt{(y^2-p^2)}}{p^2}$ et $q = \frac{y^2}{4\sqrt{(y^2-p^2)}}$.

Corollarium 4.

1067. Sit celeritas angularis vt poteſtas exponentis n diſtantiae y ſeu $u = \frac{y^{2n}}{f^{2n-1}}$ erit reſiſtentia $R = \frac{2(n+2)y^{2n+2}\sqrt{(y^2-p^2)}}{f^{2n-1}p^2}$, vis centripeta $P = \frac{2y^{2n+4}dp}{f^{\ \ 2}\ p^3dy}$; et $v = \frac{y^{2n+4}}{f^{2n-1}p^2}$ atque pro medio reſiſtente in duplicata ratione celeritatum erit exponens reſiſtentiae $q = \frac{y^2}{2(n+2)\sqrt{(y^2-p^2)}}$.

Exemplum.

1068. Sit curua AM iterum ſpiralis hyperbolica aequatione $p = \frac{ay}{\sqrt{(a^2+y^2}}$ expreſſa, et celeritas angularis ſit vt y^n ſeu vt ante $u = \frac{y^{2n}}{f^{2n-1}}$ Cum autem ſit $\sqrt{(y^2-p^2)} = \frac{y^2}{\sqrt{(a^2+y^2)}}$, erit

R =

LIBER … URVIL.

R = 2(n+ … eſiſtenti- … us pote- … oque erit

et vis cent …

natur ipſis …

nens reſiſt … ſe aequa- … ue R =

ſtentia qua …

nalis, et e: …

Quae pro…

exemplo (…

… eſtas ex- … ſiſtentia

… eta P =

1069 … *ritatum p* … dio re- … *praeterea* … *circa centr* … it expo- … *pus deſcrib* … *dentem.*

Poſit … hyper- … celeritati i … celeri- … ſiſtentia = … per y. D … erit … R =

$R = \frac{2(n+2)y^{2n+2}\sqrt{(a^2+y^2)}}{a^2f^{2n-1}}$; $v = \frac{y^{2n+2}(a^2+y^2)}{a^2f^{2n-1}}$ et vis centripeta $P = \frac{2y^{2n+1}}{f^{2n-1}}$. Si reſiſtentia ponatur ipſis celeritatibus proportionalis erit, exponens reſiſtentiae $= \frac{a^2f^{2n-1}}{(2n+4)y^{2n+2}}$. Sin reſiſtentia quadratis celeritatum ponatur proportionalis, et exponens reſiſtentiae ſit q, erit $q = \frac{\sqrt{(a^2+y^2)}}{2n+4}$. Quae prorſus conueniunt, cum iis quae ſuperiore exemplo (1061) ſunt tradita.

PROPOSITIO 127.

Problema.

1069. *Si detur reſiſtentia per quamuis celeritatum poteſtatem ſimulque exponens reſiſtentiae, praeterea etiam datus ſit motus angularis corporis circa centrum* C: *ex his inuenire curuam, quam corpus deſcribet et vim centripetam ad centrum* C *tendentem.* Tabula XIII Fig. 4.

Solutio.

Poſitis CM $= y$, CT $= p$, M$m = ds$, altitudine celeritati in M debita $= v$, vi centripeta $= P$, reſiſtentia $= R$; ſit reſiſtentia $R = \frac{v^m}{q^m}$, vbi q detur per y. Deinde motus angularis conſideretur vt ante te tanquam motus puncti factus in peripheria circuli ELl, cuius radius CE$=1$. Poſita nunc celeritate, qua Ll deſcribitur, debita altitudini u, erit vt in praec. Prop. elicuimus $v = \frac{y^4 u}{p^2}$, P$= \frac{2y^4 u dp}{p^3 dy}$ et R$=-$ $\frac{y^4 du - 4y^3 u dy}{p^2 ds} = \frac{v^m}{q^m} = \frac{y^{4m} u^m}{p^{2m} q^m}$. Haec poſterior aequatio autem, quia u et q ſunt quantitates datae, exprimet naturam curuae quaeſitae, pro qua ergo habebitur $y du + 4 u dy + \frac{y^{4m-3} u^m ds}{p^{2m-2} q^m} = 0$ ſeu $y du + 4 u dy = -\frac{y^{4m-2} u^m dy}{p^{2m-2} q^m \sqrt{(y^2-p^2)}}$. Cognita vero curuae deſcriptae natura, ſeu aequatione inter p et y innoteſcet ſtatim vis centripeta P quippe eſt P$=$ $\frac{2y^4 u dp}{p^3 dy}$ Q. E. I.

Corollarium 1.

1070. Si celeritas angularis debeat eſſe aequabilis, quod in vacuo niſi in circulo fieri nequit, erit $du = 0$, haecque prodibit pro curua quaeſita aequatio $4 p^{2m-2} q^m \sqrt{(y^2-p^2)} = y^{4m-2} u^{m-1}$. Data ergo q per y, aequatio haec eſt integralis inter p et y, ex qua curua poteſt conſtrui.

Corollarium 2.

1071. Si fuerit u per y data vt $u =$ $\frac{y^{2n}}{f^{2n-1}}$, erit $(2n+4) p^{2m-2} q^m \sqrt{(y^2-p^2)} =$ y^{2mn}

$\frac{y^{2mn+4m-2n-2}}{f^{(m-1)(2n-1)}}$. Quae quoque eſt integralis inter y et p, ideoque ad curuam conſtruendam eſt idonea.

Corollarium 3.

1072. Si celeritas angularis detur per arcum EL, ſeu du per eius elementum L$l = \frac{p\, dy}{y^2}$ (1063) $= -\frac{p\, dy}{y\sqrt{(y^2-p^2)}}$, ita vt ſit $du = \frac{u^k p\, dy}{g^k y \sqrt{(y^2-p^2)}}$; erit $\frac{dy}{\sqrt{(y^2-p^2)}} = \frac{g^k y\, du}{u^k p}$. Hoc valore ſubſtituto habebitur $y\, du + 4 u\, dy = \frac{g^k y^{4m-1} u^{m-k} du}{p^{2m-1} q^m}$ atque $p^{2m-1} = \frac{g^k y^{4m-1} u^{m-k} du}{q^m y du + 4 q^m u dy}$. Ex qua aequatione valor ipſius p ſubſtitutus in aequatione $du =$ $\frac{u^k p\, dy}{g^k y \sqrt{(y^2-p^2)}}$, determinabit u in y. Vnde quoque aequatio inter p et y obtinebitur.

Corollarium 4.

1073. Si reſiſtentia fuerit in ſimplici ratione celeritatum ſeu $m = \frac{1}{2}$; aequatio $1 =$ $\frac{gkyu^{\frac{1}{2}-k} du}{(y du + 4 u dy)\sqrt{q}}$ ſtatim dabit u per y. Qui valor

lor in aequatione $du=\frac{u^k p\, dy}{g^k y \sqrt{(y^2-p^2)}}$ ſubſtitutus dabit aequationem inter y et p.

Exemplum 1.

1074. Reſiſtat medium in duplicata ratione diſtantiarum ſitque medii exponens $q=\frac{y}{a}$. Motus vero angularis ſit aequabilis ſeu $u=b$. Erit $m=1$, atque $4\sqrt{(y^2-p^2)}=ay$ (1070). Vnde prodit $p=\frac{y\sqrt{(16-a^2)}}{4}$. Quare curua deſcripta erit ſpiralis logarithmica, in qua anguli quem radius cum tangente conficit ſinus eſt $\frac{\sqrt{(16-a^2)}}{4}$ et coſinus $=\frac{a}{4}$. Vis centripeta vero erit $=\frac{32by}{16-a^2}$. Sin autem medium ponatur vniforme ſeu $q=c$, erit $4c\sqrt{(y^2-p^2)}=y^2$, et $p=\frac{y\sqrt{(16cc-yy)}}{4c}$.

Exemplum 2.

1075. Reſiſtat medium in ſimplici ratione celeritatum, ſitque id vniforme: ponatur vero etiam motus angularis vniformis, erit $m=\frac{1}{2}$, $q=c$, $u=b$. His ſubſtitutis habebitur pro curua deſcripta haec aequatio $p=4\sqrt{bc(y^2-p^2)}$ ſeu $p=\frac{4y\sqrt{bc}}{\sqrt{(1+16bc)}}$. Quae curua quoque eſt ſpiralis logarithmica, in qua anguli interſectionis ſinus eſt $\frac{4\sqrt{bc}}{\sqrt{(1+16bc)}}$, coſinus $=\frac{1}{\sqrt{(1+16bc)}}$ atque tangens $=4\sqrt{bc}$. Vis centripeta vero erit $=\frac{y(1+16bc)}{bc}$. Quod in his formulis vniformitas dimenſionum non obſeruetur ratio eſt, quod radium circuli EC poſuimus $=1$. Hac igitur vnitate vniformitas dimenſionum eſt reſtituenda.

Scho-

Scholion.

1076. Plura centra virium in hoc capite non conſiderabimus, cum in vacuo etiam pro hoc caſu vix quicquam ad motum determinandum deduci potuerit. Si centra quidem attrahant in ſimplici ratione diſtantiarum, quotcunque centra plus non habent difficultatis quam vnum in eadem ratione attrahens, quemadmodum oſtendimus ſupra (702). Haecque conuenientia in medio reſiſtente aeque locum habet ac in vacuo. Quamobrem cum iam vnum centrum in ſimplici ratione diſtantiarum attrahens conſiderauerimus, non opus eſt vt de pluribus eiusdem naturae verba faciamus. Progrediemur igitur ad caſum latiſſime patentem, in quo omnes motus, qui fiunt in eodem plano, comprehenduntur. Conſiderabimus ſcilicet duas vires abſolutas, quarum directiones ſunt ad ſe inuicem normales, ſingulae vero inter ſe parallelae. Ad huiusmodi enim duas vires quasuis potentias in eodem plano exiſtentes reſolui poſſe conſtat. Praeterea in hac tractatione non ſolum omnes caſus potentiarum abſolutarum complectemur, ſed etiam quaedam eximia pro vacuo obſeruare licebit circa vires centripetas, quae in praecedentibus difficulter patent. Namque hic ſtatim curuam deſcriptam ad aequationem inter coordinatas orthogonales reducemus, quod ibi inter diſtantiam a centro et perpendiculum in tangentem eſt factum.

PRO-

PROPOSITIO 128.

Problema.

Tab. XIII. Fig. 5.

1077. *Si corpus in* M *a duabus viribus ſollicitetur, quarum una habeat directionem MP normalem ad datam* AC, *altera vero directionem* MQ *parallelam ipſi* AC *ſeu normalem in* BC, *determinare curuam* AM *quam corpus in quocunque medio reſiſtente ab his potentiis ſollicitatum deſcribet.*

Solutio.

Vocetur $CM = MQ = x$, $PM = CQ = y$, elementum $Mm = ds$: ductisque mp et mq, erit $Pp = -dx$ et $Qq = dy$; atque $ds\sqrt{=}(dx^2 + dy^2)$ Sit vis qua corpus ſecundum MP trahitur $= P$ et vis qua corpus ſecundum MQ trahitur $= Q$, reſiſtentia vero ſit $= R$, et celeritas in M debita altitudini v. Reſoluantur nunc vires P et Q in normales et tangentiales ope demiſſorum perpendiculorum ex P et Q in tangentem Tt; erit ergo vis normalis ex P orta $= \frac{P.PT}{PM} = -\frac{Pdx}{ds}$, et vis tangentialis $= \frac{P.MT}{MP} = \frac{Pdy}{ds}$. Ex vi Q vero reſoluta oritur vis tangentialis $= \frac{Q.Mt}{MQ} = -\frac{Qdx}{ds}$, et vis normalis $= \frac{Q.Qt}{MQ} = \frac{Q.dy}{ds}$. Tota ergo vis normalis erit $= \frac{Qdy - Pdx}{ds}$; et vis tangentialis promouens $= -\frac{Qdx - Pdy}{ds}$, quae vi reſiſtentiae R debet diminui, quo tota vis motum accelerans prodeat. Ex his, ergo poſito r radio osculi in M, erit $\frac{Qdy - Pdx}{ds} = \frac{2v}{r}$ et

et $dv = -Qdx - Pdy - Rds$ (866). Eliminata ergo v ex his aequationibus orietur aequatio naturam curuae deſcriptae exprimens. Q. E. I.

Corollarium 1.

1078. Si ponatur elementum curua ds conſtans erit radius osculi $r = -\frac{dsdy}{ddx} = \frac{dsdx}{ddy}$. Hoc igitur valore ſubſtituto erit $\frac{2vddx}{dy} = Pdx - Qdy$.

Corollarium 2.

1079. Ex aequationibus inuentis coniungendis reperietur $P = -\frac{2vddy - dvdy - Rdyds}{ds^2}$ et $Q = -\frac{2vddx - dvdx - Rdxds}{ds^2}$. Ex quibus ſi relatio inter P et Q datur, ſtatim habetur aequatio, in qua v per ſolam curuam inuenitur.

Corollarium 3.

1080. Si corpus perpetuo a vi quacunque ad centrum C attrahatur erit $P:Q = y:x$. Tunc igitur habebitur iſta aequatio $2vxddy + xdvdy + Rxdyds = 2vyddx + ydvdx + Rydxds$. Quae poſito $y = px$ abit in hanc $2vxddp + 4vdpdx + xdvdp + Rxdpds = 0$, ſeu $d.vx^4dp^2 + Rx^4dp^2ds = 0$.

Corollarium 4.

1081. In vacuo, quo R euaneſcit et corpus ad centrum C attrahitur, erit $vx^4dp^2 = Ads^2$ ſeu $v = \frac{Ads^2}{x^4dp^2}$. Praeterea vero erit $\int Pdy = \frac{vdy^2}{ds^2}$ et

$v =$

$v=-\frac{dx^2\int Pdy}{dy^2}$. Quare habebitur iſta aequatio $-\frac{Ady^2}{x^4dp^2}=\int Pdy$, ſeu aſſumto Q loco P haec aequatio $-\frac{Adx^2}{x^4dp^2}=\int Qdx$.

Corollarium 5.

1082. Si vis centripeta ad C tendens fuerit $=\frac{MC^n}{s^n}=\frac{x^n(1+pp)^{\frac{n}{2}}}{s^n}$, erit $Q=\frac{x^n(1+pp)^{\frac{n+1}{2}}}{s^n}$ In vacuo igitur pro curua deſcripta habebitur haec aequatio $-\frac{Adx^2}{x^4dp^2}=\int\frac{x^ndx(1+pp)^{\frac{n-1}{2}}}{s^n}$. Poſito B pro $-As^n$, et dx conſtante, orietur differendo haec aequatio $2Bxdxddp+4Bdx^2dp+x^{n+5}dp^3(1+pp)^{\frac{n-1}{2}}=0$. Poſito vero dp conſtante prodiiſſet haec aequatio $2Bxddx-4Bdx^2=x^{n+5}dp^2(1+pp)^{\frac{n-1}{2}}$. Fiat $x=\frac{1}{q}$; erit $2Bq^{n+2}ddq+dp^2(1+pp)^{\frac{n-1}{2}}=0$. Harum aequationum quamuis integratio non appareat, tamen integralis eſt $x^{n+5}dp^2(1+pp)^{\frac{n+1}{2}}=Cds^2$, quae ex cap. praeced. inuenitur.

Corollarium 6.

1083. Quanquam autem haec aequatio $2Bq^{n+2}ddq+dp^2(1+p^2)^{\frac{n-1}{2}}=0$ eſt differentialis ſecundi gradus, tamen commodior eſt quam differentialis primi gradus ad curuas determinandas, quas corpus proiectum deſcribit attractum vel in ſimplici diſtantiarum ratione vel in reciproce duplicata. In ſimplici enim ratione habebitur $n=1$ atque $2Bq^3ddq+dp^2=0$. Fiat $dp=wdq$ ob dp conſtans erit $ddq=-\frac{dwdq}{w}$, vnde $2Bq^3dw=w^3dq$, et $\frac{B}{w^2}=\frac{1}{q^2}+C$. Erit ergo $w=\frac{q\sqrt{B}}{\sqrt{(1+Cq^2)}}$ atque $p+\alpha=\frac{\sqrt{B(1+Cq^2)}}{C}=\frac{\sqrt{B(x^2+C)}}{Cx}=\frac{y}{x}+\alpha$ ſeu $\alpha x+\mathfrak{G}y=\sqrt{(a^2-x^2)}$. Quia B eſt quantitas negatiua.

Corollarium 7.

1084. Si eſt $n=-2$ ſeu ſi corpus in reciproca duplicata ratione diſtantiarum attrahitur, erit in vacuo curua deſcripta $2Bddq=\frac{dp^2}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$ ſumto B negatiuo, vt oportet. Integrando ergo erit $2Bdq+Cdp=\frac{pdp}{\sqrt{(1+pp)}}$, denuoque integrando $2Bq+Cp=D+\sqrt{(1+pp)}$ ſeu $2B+Cy=Dx+\sqrt{(x^2+y^2)}$. Quarum curuarum vtraque eſt ſectio conica, illa quidem ellipſis tantum, haec vero omnes complectitur.

Scholion I.

1085. In Capite praecedente, quo de motu corporum in vacuo egimus, curuas quoque determinauimus, quas corpus a vi centripeta vel ipſis diſtantiis vel reciproce earum quadratis proportionali deſcribit; easque conuenientes inuenimus cum his in corollariis datis. Modi quidem maxime ſunt di-

diuerſi, nam ibi ex comparatione arcuum circularium aequationes algebraicas ſumus adepti, hic vero ipſa integratio ſponte aequationem algebraicam inter coordinatas dedit. Haec vero methodus, quamuis in praefatis caſibus duobus multo ſit commodior, tamen aliis laborat defectibus. Nam in aliis vis centripetae hypotheſibus nequidem hac methodo aequatio differentialis dari poteſt pro curua deſcripta, quod tamen illa directa methodo ſemper aeque facile fieri poteſt. Hoc tamen ipſius analyſeos defectui potius eſt adſcribendum quam methodo cum aequationis differentio - differentialis $2Bxddx-4Bddx^2=x^{n+5}dp^2(1+pp)^{\frac{n-1}{2}}$ integralem $x^{n+5}dp^2(1+p^2)^{\frac{n+1}{2}}+Cds^2=o$ eſſe ſciamus ex ipſa methodo cap. praeced. vſitata, hanc vero integralem ex ipſa aequatione differentio-differentiali eruere nequeamus.

Scholion 2.

1086. Problematum reciprocorum, quae circa has potentias proponi poſſunt, hoc iam eſt ſolutum coroll. 2. quo ex data curua, medio reſiſtente et celeritate in ſingulis punctis quoque data, quaeruntur vires ſecundum MP et MQ tendentes, quae hunc motum producant. Vt ſi curua AMB fuerit circulus centrum in C et radium $AC=a$ habens, et reſiſtentia ſit $=\frac{v}{c}$, atque celeritas conſtans nempe $v=b$, erit $x^2+y^2=a^2$ et $P=\frac{2bcy-abx}{a^2c}$ et $Q=$

LIBE CURVIL.

$Q=\frac{2bcx}{a}$ n circula- quae in , hic vetentiae l gebraicam in ſingul methodus, ſcriptae o ſit comrum tan Nam in iis inuer hac meproblem pro curua ex quin odo ſemmur in pſius anavſum de uam medio reſi ferentialis data vi c ntegralem

is ex ipſa integraatiali eru-

10 plicata r rit ad C 1, quae trabatur c iam eſt uam Al edio reſique data, endentes, Po ua AMB $y=px$, $C=a$ haponens s conſtans $Q=y:$ $\frac{bcy-abx}{a^2c}$ et $Q=$

$\frac{2bcx+aby}{a^2c}$. Similì modo cum ſint quinque res, quae in conſiderationem veniunt, nempe duae potentiae P et Q, tertio reſiſtentia R, qu rto celeritas in ſingulis locis ſeu v, et quinto natura curuae deſcriptae ſeu aequatio inter x et y; ſemper tria horum tanquam data accipi poſſunt et duo reliqua ex iis inueniri. Hanc ob rem decem formari poſſent problemata pro numero combinationum, quo tria ex quinque accipi poſſunt. Sed ne nimis detineamur in his euoluendis, e quibus non multum ad vſum deduci poterit, vnicum problema quo in medio reſiſtente in duplicata ratione celeritatum ex data vi centripeta curua deſcripta quaeritur.

PROPOSITIO 129.

Problema.

Tab. XIII. Fig. 5.

1087. *Si corpus moueatur in medio, quod in duplicata ratione celeritatum reſiſtit; et ſi potentia* P *fuerit ad* Q *vt* MP *ad* MQ, *ſeu quod idem eſt, ſi corpus trabatur ad centrum* C *vi quacunque determinare curuam* AMB, *quam corpus deſcribet.*

Solutio.

Poſitis vt ante $CP=x$, $PM=y$, $Mm=ds$, et $y=px$, ſit celeritas in M debita altitudini v et exponens reſiſtentiae q, erit $R=\frac{v}{q}$. Et cum ſit $P:Q=y:x$ erit $2vxddp+4vdpdx+xdvdp+\frac{vxdpds}{q}=0$ (1080).

(1080). Quae aequatio diuiſa per $vxdp$ abit in hanc $\frac{2ddp}{dp}+\frac{4dx}{x}+\frac{dv}{v}+\frac{ds}{q}=0$, cuius integralis eſt $e^{\int\frac{ds}{q}}x^4vdp^2=Ads^2$; ſeu $v=\frac{Ae^{-\int\frac{ds}{q}}ds^2}{x^4dp^2}$. Haec vero aequatio $Qds^2+2vddx+dvdx+\frac{vdxds}{q}=0$ (1079) per $\frac{e^{\int\frac{ds}{q}}dx}{ds^2}$ multiplicata et integrata dat

$$\int e^{\int\frac{ds}{q}}Qdx+\frac{e^{\int\frac{ds}{q}}vdx^2}{ds^2}=0;$$

in qua ille valor ipſius v inuentus ſubſtitutus dat $\int e^{\int\frac{ds}{q}}Qdx+\frac{Adx^2}{x^4dp^2}=0$. Differentietur haec aequatio poſito dx conſtante erit $e^{\int\frac{ds}{q}}Qx^5dp^3=5Adx^2dp+2Axdxddp$. Quae eſt aequatio pro curua quaeſita. Q. E. I.

Corollarium 1.

1088. Aequatio haec pro curua deſcripta non differt ab aequatione in vacuo inuenta (1081) niſi quod hic habeatur $\int e^{\int\frac{ds}{q}}Qdx$, cum ibi ipſi $-\frac{Adx^2}{x^4dp^2}$ aequaretur tantum $\int Qdx$.

Corollarium 2.

1089. Si elementum dp pro conſtante fuiſſet aſſumtum, tum prodiiſſet haec aequatio $e^{\int\frac{ds}{q}}Qx^5dp^2$

URVIL.
abit in
gralis eſt
Haec
$\frac{vdxds}{q}=0$
grata dat
lor ipſius
$=0$. Dif-
ante erit
Quae eſt
deſcripta
(1081)
ibi ipſi
te fuiſſet
Qx^5dp^2
$=4A$

$=4Adx^2-2Axddx$. In qua ſi ponatur $x=\frac{1}{z}$, orietur $e^{\int\frac{ds}{q}}Qdp^2=2Az^2ddz$.

Corollarium 3.

1090. Si vis centripeta ad C tendens fuerit $=\frac{MC^n}{f^n}=\frac{x^n(1+p^2)^{\frac{n}{2}}}{f^n}$, erit $Q=\frac{x^n(1+p^2)^{\frac{n-1}{2}}}{f^n}=\frac{(1+pp)^{\frac{n-1}{2}}}{f^nz^n}$. Quare pro curua deſcripta habebitur iſta aequatio $e^{\int\frac{ds}{q}}dp^2=\frac{2Af^nz^{n+2}ddz}{(1+pp)^{\frac{n-1}{2}}}$. Quae ſumtis logarithmis et differentiata dat $\frac{ds}{q}=\frac{(n+2)dz}{z}+\frac{d^3z}{ddz}-\frac{(n-1)pdp}{1+pp}$. Eſt vero $ds=\surd(dx^2+dy^2)=\frac{\surd(dz^2+p^2dz^2+z^2dp^2-2pzdpdz)}{z^2}$.

Corollarium 4.

1091. Iisdem manentibus ſit $q=\frac{MC}{\alpha}=\frac{\surd(1+pp)}{\alpha z}$, erit $\frac{\alpha\surd(dz^2+p^2dz^2+z^2dp^2-2pzdpdz)}{z\surd(1+pp)}=\frac{(n+2)dz}{z}+\frac{d^3z}{ddz}-\frac{(n-1)pdp}{1+pp}$. Ponatur $z=c^{\int udp}$, atque prodibit iſta aequatio $\frac{\alpha dp\surd(1-2pu+u^2+p^2u^2)}{\surd(1+pp)}=(n+3)udp+\frac{ddu+2ududp}{du+u^2dp}+\frac{(n-1)pdp}{1+pp}$

Scholion.

1092. Hanc aequationem differentialem ſecundi gradus dubito, an in quoquam caſu ad differentiatialem primi gradus poſſit reduci; id quod tamen ſupra, vbi vires centripetas ex inſtituto conſiderauimus, fecimus (1020). In medio igitur reſiſtente haec operandi ratio non tantam vtilitatem afferre videtur, quantam in vacuo attulit, ſaltem pro caſibus quibus n eſt vel 1 vel -2. Quamobrem cum in hac re vix quicquam amplius ſperari poſſit, hic motum in medio reſiſtente, qui in plano fit relinquo atque ad motus non in plano factos conſiderandos progredior, coniuncta cum potentiis abſolutis corpus ſollicitantibus vi reſiſtentiae. Quo in negotio, cum facile intelligatur, parum ad euidentem cognitionem perducere licere, contentus ero regulas generales tradidiſſe, quibus pro quouis problemate propoſito ad aequationem peruenire poterimus.

PROPOSITIO 130.

Problema.

Tabula XIII Fig. 6. **1093.** *In medio quocunque reſiſtente ſollicitetur corpus a tribus potentiis, quarum vna ſit tangentialis, reliquae duae normales ad directionem corporis et in duobus planis inter ſe normalibus ad ſe inuicem normales, determinare motum corporis et curuam quam deſcribet.*

Solutio.

Ex elementi Mm quod corpus deſcribit, terminis M et m in planum fixum APQ demittantur per-

T CURVIL.
quod tamen
conſidera-
igitur reſiſten-
itatem affer-
ſaltem pro
Quamobrem
ſperari poſſit,
plano fit re-
ctos conſide-
tentiis abſo-
iae. Quo in
m ad euiden-
ntentus ero
quouis pro-
eruenire po-
lente ſollicite-
na ſit tangen-
ionem corporis
le inuicem nor-
curuam quam
eſcribit, ter-
demittantur
per-

perpendicula QP et qp. Deinde ponatur AP$=x$, PQ$=y$ et QM$=z$, altitudo celeritati in M debita $=v$. Iam ſit vis tangentialis $=$T. Normalium altera cuius directio in plano Mq eſt ſita, ſit $=$N, et altera cuius directio ad planum Mq eſt normalis ſit $=$M. Vis reſiſtentiae vero ſit $=$V. Quia autem vis reſiſtentiae V vires normales non afficit, ſed tantum effectum vis tangentialis minuit; effectus virium N et M immutatus manet, ſed in effectu vis tangentialis definiendo loco T poni debet T $-$V. Quare cum harum virium effectus iam ſupra (809) determinauerimus, eaedem aequationes ibi datae et hic valebunt ſi modo T$-$V loco T ponatur. Hanc ob rem pro medio reſiſtente prodibunt hae aequationes $dv=(T-V)\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$; $2vdydzddy-2vddz(dx^2+dy^2)=N(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$; atque $-2vdxddy=M(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ (809). Ex quibus eliminata v duae habebuntur aequationes tres coordinatas x, y et z inuoluentes, quae naturam curuae quaeſitae expriment. In illis autem aequationibus elementum dx conſtans eſt aſſumtum. Q. E. I.

Corollarium I.

1094. Duae poſteriores aequationes coniunctae eliminanda v dant aequationem hanc; $\frac{ddz(dx^2+dy^2)}{dxddy}-\frac{dydz}{dx}=\frac{N\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{M}$. Quae pro medio quocunque aeque ac pro vacuo valet (810).

Co-

Corollarium 2.

1095. Perſpicitur ex hac aequatione, ſi vel N vel M euaneſcit, qualis ſit motus corporis. Nam poſito $N=o$ erit $\frac{ddz}{dz}=\frac{dyddy}{dx^2+dy^2}$ ſeu $adz=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Eſt vero $\frac{dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$ tangens anguli, quo elementum Mm inclinat ad Qq. Quare hic angulus eſt conſtans, propterea QM habet ad proiectionem BQ curuae deſcriptae in plano APQ datam rationem.

Corollarium 3.

1096. Si $M=o$ erit $ddy=o$, ideoque proiectio BQ erit linea recta. Tota igitur curua a corpore deſcripta poſita erit in plano ad planum APQ normali, idque ſecante recta BQ.

Corollarium 4.

1097. Ex aequatione § 1094 erit $ddz(dx^2+dy^2)=dydzddy+\frac{Ndxdy^2\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{M}$. Quare cum ſit $-2vdxddy=M(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ erit $-2vdxddz(dx^2+dy^2)=Mdydz(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}+Ndx(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$.

Corollarium 5.

1098. Quare ſi fuerit $\frac{Mdydz}{dx}+N\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}=o$, corpus etiam mouebitur in plano, cum tunc ſit $ddy=o$ et $dz=adx$. Proiectio enim curuae deſcriptae in plano ad planum APQ in AP normali erit linea recta.

L … CURVIL.

curu … one, ſi vel
nor … oris. Nam
… dx^2+dy^2).
… elementum
elem … lus eſt con-
mod … tionem BQ
mina … ationem.
Nem
PQ
gens … eoque pro-
guli … curua a cor-
ſeu … lanum APQ

num … t $ddz(dx^2+$
canti … are cum ſit
… $+dy^2$) erit
… $+dz^2)\sqrt{(d}$
… $+dy^2$).
cum
guli
in Q
cum … $N\sqrt{(dx^2+}$
gulu … ur in plano,
Rep … iectio enim
cur-

Corollarium 6.

1099. Planum autem in quo poſita ſunt duo elementa Mm et $m\mu$, quae corpus deſcribit, ſimili modo quo in vacuo determinatur, cum eius determinatio tantum a coordinatis x, y et z pendeat. Nempe ſi hoc planum ſit SMR et ſecet planum APQ recta OR, erit $AO=x-\frac{zdxddy+ydxddz}{dzddy-ydz}$; tangens ang. $POR=\frac{dzddy-dyddz}{dxddz}$. Atque tangens anguli quem planum RMS cum plano APQ conſtituit ſeu $\frac{RQ}{QV}=\frac{\sqrt{(dx^2ddz^2+(dzddy-dyddz)^2)}}{dxddy}$ (812). Tab. XIV. Fig. 1.

Corollarium 7.

1100. Erit igitur tangens anguli, quem planum RMS cum plano APQ conſtituit, aequalis ſecanti anguli POR ductae in $\frac{ddz}{ddy}$.

Corollarium 8.

1101. In caſu igitur, quo vis N euaneſcit cum ſit $ddz:ddy=dydz:dx^2+dy^2$, erit tangens anguli $POR=\frac{dx}{dy}$, ſeu IOR=RQS. Tum igitur QV in QS incidet. Tangens vero anguli quem RMS cum RQS conſtituit eſt $=\frac{dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Quare hic angulus eſt conſtans ob $adz=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ (1095). Reperitur vero $AO=\frac{xdx+ydy-a^2zdz}{dx}$.

Corollarium 9.

1102. Cum in coroll. 1 ratio detur inter ddy et ddz, per vires normales M et N, ſi eorum proportionalia ipſorum loco ſubſtituantur, determinabitur poſitio plani RMS per differentialia primi gradus. Sed haec omnia non magis ad medium reſiſtens reſpiciunt, quam ad vacuum. Quare etiam haec prorſus conueniunt cum iis, quae ſupra Prop. 98 ſunt tradita.

PROPOSITIO 131.

Problema.

1103. *Si corpus M in medio quocunque reſiſtente trahatur a tribus viribus, quarum vnius directio ſit Mſ parallela axi AR alterius directio Mq parallela ipſi PQ applicatae in plano APQ poſitae, et tertiae directio ſit ipſa MQ ex M in planum APQ normaliter demiſſa: inuenire motum corporis et lineam quam deſcribet.*

Tab. XIV. Fig. 2.

Solutio.

Poſitis vt ante $AP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$, atque celeritate in M debita altitudini v, ſit vis ſecundum Mſ trahens $= P$, vis ſecundum Mg trahens $= Q$ et vis ſecundum MQ trahens $= R$ atque vis reſiſtentiae in $M = V$. Hae tres vires ſi reſoluantur in tres alias, quarum directiones cum iis in Prop. praec. conueniunt, prodit vis tangentialis $T = -\frac{Pdx-Qdy-Rdz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$; $N = -\frac{Pdxdz-Qdydz+R(dx^2+dy^2)}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}$ atque $M = -\frac{Pdy-Qdx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$ (823). Iisdem enim hic denominationibus vtimur, quibus ibi Prop. 99. His igitur valoribus in formulis praec. Prop. inuentis ſubſtitutis habebuntur ſequentes tres aequationes $dv = -Pdx - Qdy - Rdz - V\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$; $\frac{2vdydzddy-2vddz(dx^2+dy^2)}{dx^2+dy^2+dz^2} = -Pdxdz - Qdydz + R(dx^2+dy^2)$; atque $\frac{2vdxddy}{dx^2+dy^2+dz^2} = Pdy - Qdx$. Quae tres aequationes eliminata v dabunt duas aequationes coordinatas x, y et z continentes, quae naturam curuae deſcriptae exprimunt. In his autem formulis elementum dx conſtans eſt aſſumtum. Q. E. I.

CURVIL.
inter ddy
eorum pro-
primi
ad medium
Quare
iis, quae ſu-
ocunque reſi-
um vnius di-
directio Mq
Q poſitae, et
planum APQ
ris et lineam
y et QM
udini v, ſit
s ſecundum
MQ tra-
. Hae tres
um directio-
, prodit vis
tan-

Corollarium 1.

1104. Duae poſteriores aequationes cum iis quas pro vacuo inuenimus (823) perfecte conueniunt. Quare quae ex iis ſequuntur tam in vacuo quam medio quocunque reſiſtente locum habent. Diſcrimen autem totum, quod inter motum in vacuo et medio reſiſtente intereſt, a prima pendet aequatione.

Corollarium 2.

1105. Ex duabus poſterioribus aequationibus autem coniunctis oritur haec analogia $ddy : ddz = Pdy - Qdx : Pdz - Rdx$. Quamobrem loco ſecundae aequationis, quae reliquis magis eſt compoſita ſubſtitui

ſtitui poteſt haec: $\frac{2vdxddz}{dx^2+dy^2+dz^2}=Pdz-Rdx$, vel $Pdyddz-Qdxddz=Pdzddy-Rdxddy$, quae v non inuoluit.

Corollarium 3.

1105. Ope analogiae $ddy:ddz=Pdy-Qdx:Pdz-Rdx$ inuenitur determinatio plani RMS in differentialibus primi gradus vt ſequitur; $AO=x-\frac{Pydz+Pzdy-Qzdx+Rydx}{Qdz-Rdy}$; tangens anguli $POR=-\frac{Qdz+Rdy}{Pdz-Rdx}$ atque tangens anguli inclinationis plani RMS ad planum fixum $RQS=\frac{\sqrt{((Pdz-Rdx)^2+(Qdz-Rdy)^2)}}{Pdy-Qdx}$ (825).

Corollarium 4.

1106. Si virium P, Q, R duae euaneſcant motum corporis in plano fieri neceſſe eſt. Nam ſi P et Q euaneſcunt fit $ddy=0$, ſi P et R euaneſcunt fit $uzddy=dyddz$ ſeu $dz=ady$. Quae omnia indicant motum fieri in plano.

Corollarium 5.

1107. Si P, Q et R ſint proportionales ipſis x, y et z, corpus perpetuo ad punctum A trahetur, ideoque motus eius fiet in plano. Hoc idem indicant formulae, fiet enim $AO=0$. At ob $ddy:ddz=xdy-ydx:xdz-zdx$, eſt $\frac{xddy}{xdy-ydx}=\frac{xddz}{xdz-zdx}$ et integrando $xdy-ydx=axdz-azdx$. Quare eſt $addz=ddy$, vnde conſtat propoſitum.

Co-

I CURV.

Rdx, vel
v non in-

-Qdx:Pdz-
in differen-
AO = x -
R = —
onis plani
+(Qdz-Rdy)²)
-Qdx

euaneſcant
eſt. Nam
R euaneſ-
ae omnia

onales ip-
um A tra-
no. Hoc
At ob
xddz
xdz-zdx
Quare eſt

Co-

Corollarium 6.

1108. Si vis P euaneſcit erit $ddy:ddz=Q:R$, atque $R=-\frac{2vddz}{dx^2+dy^2+dz^2}$ et $Q=-\frac{2vddy}{dx^2+dy^2+dz^2}$. His valoribus loco P, Q et R in aequatione, qua dv definitur, ſubſtitutis oritur $dv=\frac{2vdyddy+2vdzddz}{dx^2+dy^2+dz^2}-VV(dx^2+dy^2+dz^2)$. Vbi ſi reſiſtentia V fuerit $=\frac{v}{c}$ ponaturque $\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$ ſeu $Mm=ds$, erit

$$lv=l\frac{ads^2}{dx^2}-\frac{s}{c};\ \text{ſeu}\ v=\frac{ae^{-\frac{s}{c}}ds^2}{dx^2}.$$

Corollarium 7.

1109. Si vis R euaneſcit erit $ddy:ddz=Pdy-Qdx:Pdz$, atque $P=\frac{2vdxddz}{(dx^2+dy^2+dz^2)dz}$ et $Q=\frac{2v(dyddz-dzddy)}{(dx^2+dy^2+dz^2)dz}$. Erit igitur $dv=\frac{2vdx^2ddz-2vdy^2ddz+2vdydzddy}{(dx^2+dy^2+dz^2)dz}-VV(dx^2+dy^2+dz^2)$. Vbi ſi $V=\frac{v}{c}$ erit $lv=l\frac{ads^2}{dz^2}-\frac{s}{c}$ ſeu $v=\frac{ae^{-\frac{s}{c}}ds^2}{dz^2}$. Simili modo ſi Q euaneſcit prodit

$$v=\frac{ae^{-\frac{s}{c}}ds^2}{dy^2}.$$

Scholion.

1110. Ad his tres vires P, Q et R omnes potentiae, quaecunque excogitari queant, reduci poſſunt. Quamobrem quodcunque problema propoſipoſitum fuerit, duae aequationes erui poſſunt naturam curuae deſcriptae continentes. Harum vero altera erit differentialis ſecundi gradus altera differentialis tertii gradus, ſi quidem valor ipſius v inuentus ex aequatione $\frac{2v\,dx\,ddy}{dx^2+dy^2+dz^2}=Pdy-Qdx$ differentietur; et differentiale loco dv in aequatione $dv=-Pdx-Qdy-Rdz-VV(dx^2+dy^2+dz^2)$ ſubſtituatur.

PROPOSITIO 132.

Problema.

Tabula XIV Fig. 2.

1111. *In medio uniformi, quod reſiſtit in ſimplici ratione celeritatum, trahatur corpus perpetuo normaliter ad rectam AP; definire curuam quam corpus vtcunque proiectum deſcribit.*

Solutio.

Ponantur vt hactenus $AP=x$, $PQ=y$, $QM=z$, celeritas in $M=\sqrt{v}$, exponens reſiſtentiae $=c$, vis qua corpus in M iuxta MP trahitur $=S$. His poſitis erit reſiſtentia $V=\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}}$, $P=o$, $Q=\frac{Sy}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$ et $R=\frac{Sz}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$, vnde fit $Q:R=y:z$. Quamobrem habebitur $ddy:ddz=y:z$, atque $y\,ddz-z\,ddy=o$. Cuius aequationis integralis eſt $y\,dz-z\,dy=a\,dx$. Porro quoque ob $P=o$ haec habebitur aequatio $dv=\frac{2v.\,lds}{ds}-V\,ds=\frac{2v.\,lds}{ds}-\frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{c}}$ (1108), poſito $ds=\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$. Cuius integralis eſt $2\sqrt{cv}=\frac{ds}{dx}(b-x)$, ſeu $v=\frac{ds^2(b-x)^2}{4c\,dx^2}$. Hoc valore ſubſtituto prodibit $\frac{ddy(b-x)^2}{2c\,dx}=-\frac{Sy\,dx}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$. Ponatur $a=$ [illegible] habebuntur ſequentes duae aequationes, ex quibus natura curuae deſcriptae debet determinari, $y^2dp=adx$ et $ddy(b-x)^2=-\frac{2cS\cdot x^2}{\sqrt{(1+pp)}}$. Q. E. I.

URVIL.
natu-
vero al-
differen-
ius ex
tietur;
$=-Pdx$
uatur.
eſiſtit in
perpe-
m quam
$QM=z$,
$=c$, vis
is poſi-
$\frac{Sy}{+z^2)}$ et
nobrem
$ddy=o$.
$=adx$.
io $dv=$
$(dx^2+$
$b-x$),
rodibit
buntur
ſe-

Corollarium 1.

1112. Cum ſit $2\sqrt{cv}=\frac{ds}{dx}(b-x)$ erit elementum temporis $\int\frac{ds}{\sqrt{v}}=\frac{2dx\sqrt{c}}{b-x}$. Integrum ergo tempus, quo corpus motu horizontali ſecundum AP eſt promotum erit $=2\sqrt{c}\,l\frac{b}{b-x}$. Motus igitur horizontalis conuenit cum motu corporis in eodem medio reſiſtente per rectam AP a nulla potentia ſollicitati, celeritate initiali in A debita altitudini $bb:4c$.

Corollarium 2.

1113. Neque vero haec temporis proprietas tantum locum habet, ſi corpus ſecundum MP trahitur; ſeu ſi fuerit $Q:R=y:z$, ſed ſemper valet ſi modo eſt $P=o$. Sequitur enim ex § 1108, quo non niſi $P=o$ ponebatur.

Corollarium 3.

1114. Motus igitur progreſſiuus corporis ſecundum AP eſt retardatus, et non vltra datum terminum qui eſt $x=b$, fieri poteſt. Tempus autem eſt infinite magnum, quo corpus ad hunc terminum pertingere poteſt.

Exem-

Exemplum.

1115. Ponamus vim, qua corpus ad rectam AP attrahitur eſſe ipſis diſtantiis MP proportionalem ſeu $S=\frac{\sqrt{(y^2+z^2)}}{f}=\frac{y\sqrt{(1+pp)}}{f}$. Ad curuam igitur determinandam habebuntur hae aequationes $fddy(b-x)^2=-2cydx^2$, et $y^2dp=adx$, in illa ponatur $y=c^{\int udx}$, fietque $du+u^2dx=-\frac{2cdx}{f(b-x)^2}$. Quae aequatio ſeparabilis fit ponendo $u=\frac{q}{b-x}$; prodit enim $\frac{fdq}{2c+fq+fq^2}=-\frac{dx}{b-x}$. Dabitur igitur q et propterea etiam u in x. Conſequenter etiam y per x cognoscetur, ex quo habebitur proiectio curuae deſcriptae in plano APQ. Deinde ex dato y per x, dabitur quoque p ob $dp=\frac{adx}{y^2}$ per x, et propterea ſimul z per x. Quocirca tota curua a corpore deſcripta poterit conſtrui.

Corollarium 4.

1116. Si b euaneſcit, ſimul quoque motus progreſſiuus corporis ſecundum AP euaneſcit, et hanc ob rem corpus in plano in A ad AP normali mouebitur attractum ad A in ratione diſtantiarum. Curuam autem quam hoc caſu corpus deſcribit quoque conſtruere licuit §. 1027 et ſeqq.

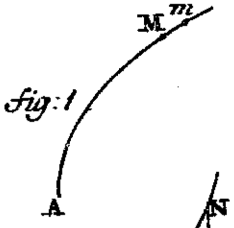
Fig:1

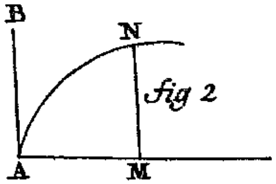
Fig 2

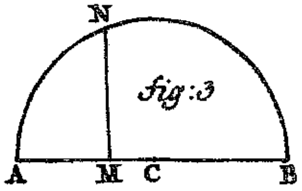
Fig:3

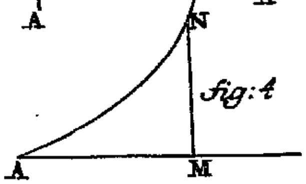
Fig:4

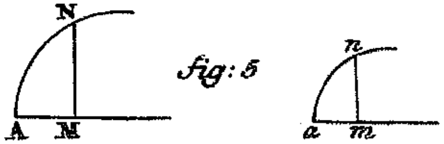
Fig:5

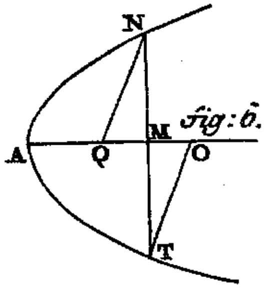
Fig:6.

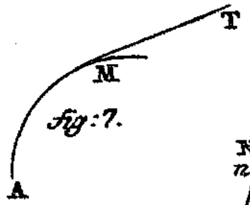
Fig:7.

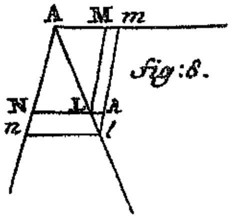
Fig:8.

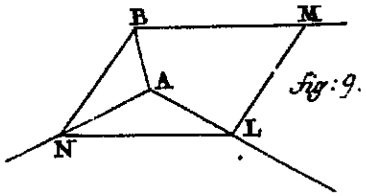
Fig:9.

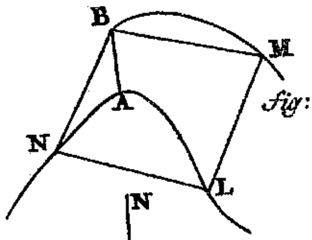
Fig:10.

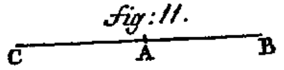
Fig:11.

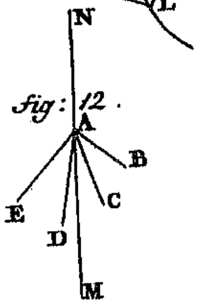
Fig:12.

Tom: I. Tab: I